

# 基于马尔科夫链蒙特卡罗的时延估计算法\*

李晶<sup>†</sup> 赵拥军 李冬海

(解放军信息工程大学, 导航与空天目标工程学院, 郑州 450001)

(2014年2月14日收到; 2014年3月10日收到修改稿)

针对无源雷达中时延估计辐射源信号未知的情况, 构建了一种新的时延最大似然估计模型. 根据模型特点利用快速傅里叶变换 (FFT) 的计算方法实现时延估计. 为了提高估计的精度, 采用马尔科夫链蒙特卡罗 (MCMC) 抽样的方法估计时延值. 该方法不需峰值检测, 可直接给出时延估计结果. 并推导了该模型下的时延估计的克拉美罗界 (CRLB). 仿真实验表明, MCMC 算法可适用于窄带和宽带信号的时延估计; 在样本相同的条件下, MCMC 算法估计精度高于重要性采样 (IS) 算法和基于峰值检测的 ML 算法, 计算复杂度低于 IS 算法, 且 MCMC 算法可直接估计采样间隔非整数倍的时延.

**关键词:** 时延估计, 最大似然, 马尔科夫蒙特卡罗, 计算复杂度

**PACS:** 07.50.Qx, 02.70.Uu, 84.40.Xb, 89.70.Eg

**DOI:** 10.7498/aps.63.130701

## 1 引言

时延估计 (TDE) 是近年来备受关注的问题, 其在雷达 [1], 声呐 [2], 无线电通信 [3] 等领域得到广泛的应用. 在无源雷达系统中, 通过接收第三方非合作的辐射源的信号, 估计到达时间差 (TDOA), 进而实现目标定位 [3]. 非合作辐射源的信号的多样性, 要求时延估计算法广泛适用.

经典的时延估计算法有基本相关法, 广义相关算法 [4], 子空间估计算法 [5] 和自适应估计算法 [6] 等. 在高信噪比和高采样率的条件下, 相关算法可以得到精确的时延估计. 但其需要估计信号功率谱, 只能估计采样间隔整数倍时延, 且需峰值检测. 子空间类算法可实现多径时延估计, 但该算法需要矩阵运算, 计算量大且需要峰值检测. 自适应估计法需在采样间隔整数倍时延估计出后利用该算法估计出小数部分, 进而提高估计精度. 近年来, 针对不同的应用环境, 很多算法被应用于时延估计. 文献 [7] 研究了闪烁噪声条件下的弱信号时延估计算法; 文献 [8] 研究了对复非圆信号的时延估计算

法. 同时, 新的信号处理算法也用于时延估计中. 蒙特卡罗方法是一类非常重要的数值计算方法, 它以概率统计理论为指导, 使用随机数或伪随机数, 采用统计抽样理论近似求解问题. 其主要理论基础是概率论中的大数定律 [9], 其主要手段是随机变量的抽样 [10]. 文献 [11] 利用可逆跳转的马尔科夫链蒙特卡罗 (RJCMC) 算法估计阵列天线阵元间接收信号的时延估计来实现信号入射角估计, 该算法有严格的约束条件, 不能应用于一般时延估计模型. 文献 [12] 将 MCMC 算法应用于低大气折射率的估计中, 文献 [13] 利用 MCMC 方法对海-气振子模型中未知参数进行识别, 文献 [14] 和文献 [15] 利用重要性采样 (IS) 的方法实现了参考信号已知条件下的非多径和多径的时延估计. 进而将蒙特卡罗算法的思想应用到了时延估计中. 这类算法的思想是利用蒙特卡罗 (MC) 方法对未知参数的分布函数抽样, 计算样本均值直接得到参数估计结果, 具有很好的实践意义.

本文构建信号频域噪声概率密度函数, 推导时延估计的似然函数, 利用快速傅里叶变换 (FFT) 实现时延估计. 利用 MCMC 方法对时延概率密度函

\* 国家高技术研究发展计划 (批准号: 2012AA7031015) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: [lijing1633@whu.edu.cn](mailto:lijing1633@whu.edu.cn)

数抽样, 求样本均值得到时延估计值. 并通过仿真实验将估计结果与 IS 算法对比, 突出 MCMC 算法时延估计性能.

## 2 构建时延估计模

在无源定位模型中, 接收机的参考天线接收辐射源的直达波, 全向天线接收目标的反射回波<sup>[16]</sup>. 假设辐射源发射信号为  $s(t)$ , 那么接收到的信号为

$$y_1(t) = a_1 s(t - \tau_1) + w_1(t), \quad (1)$$

$$y_2(t) = a_2 s(t - \tau_2) + w_2(t), \quad (2)$$

其中,  $y_i(t)$ ,  $a_i$ ,  $i = 1, 2$  分别为接收信号及增益系数.  $w_i(t)$  为加性噪声, 假设为高斯白噪声. 对接收信号离散采样, 并对采样信号进行离散傅里叶变换 (DFT), 得到接收信号的频域模型,

$$Y_1(k) = a_1 S(k) e^{-\frac{j2\pi k\tau_1}{N}} + W_1(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

$$Y_2(k) = a_2 S(k) e^{-\frac{j2\pi k\tau_2}{N}} + W_2(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4)$$

由于在无源定位中, 辐射源信号  $s(t)$  未知, 那么  $S(k)$  未知. 所以不能利用 (3) 式和 (4) 式直接构建似然函数. 将 (3) 式代入 (4) 式, 并化简得到

$$Y_2(k) = b Y_1(k) e^{-\frac{j2\pi k\Delta\tau}{N}} + W_P(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5)$$

其中  $b = a_2/a_1$ ,  $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$  为两路信号的时延,

$$W_P(k) = W_2(k) - b W_1(k) e^{-\frac{j2\pi k\Delta\tau}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6)$$

将 (6) 式化为向量的形式为

$$\mathbf{Y}_2 = b \mathbf{Y}_{\Delta\tau} + \mathbf{W}_P, \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{Y}_2 = [Y_2(0), Y_2(1), \dots, Y_2(N-1)]^T$  为  $y_2(t)$  的离散傅里叶变换. 由于 DFT 是线性变换, 可知  $\mathbf{W}_P = [W_P(0), W_P(1), \dots, W_P(N-1)]^T$  为复高斯白噪声<sup>[15]</sup>,

$$\mathbf{Y}_{\Delta\tau} = \left[ Y_1(0), Y_1(1) e^{-\frac{j2\pi\Delta\tau}{N}}, \dots, Y_1(N-1) e^{-\frac{j2\pi(N-1)\Delta\tau}{N}} \right]^T. \quad (8)$$

根据概率统计特性, 构建噪声的概率密度函数

$$P(\mathbf{W}_P | \Delta\tau, b)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_{\Delta\tau} b)^H (\mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_{\Delta\tau} b)}, \quad (9)$$

其中,  $\sigma^2$  为  $W_P(k)$  的方差. 构建  $\Delta\tau, b$  的似然函数

$$L(\Delta\tau, b) \propto p(\mathbf{W}_P | \Delta\tau, b). \quad (10)$$

那么, (9) 式的全局最大值所对应的点即为未知参数的估计值所在, 即

$$(\hat{\Delta\tau}, \hat{b}) = \arg \left[ \max_{\Delta\tau, b} (L(\Delta\tau, b)) \right]. \quad (11)$$

但是, 由于  $L(\Delta\tau, b)$  是  $\Delta\tau$  和  $b$  联合的函数, 且  $b$  为二次, 可通过求偏导的方法得到  $b$  关于  $\Delta\tau$  的估计值的解析式. 即假设  $\Delta\tau$  已知的情况下,  $b$  的估计值

$$\hat{b} = \arg [\max (L(\Delta\tau, b) = \ln (L(\Delta\tau, b)))] . \quad (12)$$

将 (9) 式代入 (12) 式, 解得

$$\hat{b} = (\mathbf{Y}_{\Delta\tau}^H \mathbf{Y}_{\Delta\tau})^{-1} \mathbf{Y}_{\Delta\tau}^H \mathbf{Y}_2. \quad (13)$$

将 (13) 式代入 (9) 式, 化简, 取对数, 并去掉常数部分, 得到估计时延  $\Delta\tau$  的似然函数.

$$L_c(\Delta\tau) = \mathbf{Y}_2^H \mathbf{Y}_{\Delta\tau} (\mathbf{Y}_{\Delta\tau}^H \mathbf{Y}_{\Delta\tau})^{-1} \mathbf{Y}_{\Delta\tau}^H \mathbf{Y}_2. \quad (14)$$

## 3 时延估计方法

### 3.1 伪谱峰值搜索法

根据似然函数的物理含义可知, (14) 式以  $\Delta\tau$  为变量生成的伪谱最大值对应的  $\Delta\tau$  即为时延的 ML 估计, 定义为 PS 算法. 将不同的  $\Delta\tau$  代入 (14) 式计算  $L_c(\Delta\tau)$  并画出伪谱, 需对 (14) 式化简. 那么,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{\Delta\tau}^H \mathbf{Y}_{\Delta\tau} &= \sum_{i=0}^{N-1} Y_1^H(k) e^{\frac{j2\pi k\Delta\tau}{N}} e^{-\frac{j2\pi k\Delta\tau}{N}} Y_1(k) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} Y_1^H(k) Y_1(k) = \mathbf{Y}_1^H \mathbf{Y}_1. \end{aligned} \quad (15)$$

所以 (14) 式化为

$$\begin{aligned} L_c(\Delta\tau) &= \frac{1}{\mathbf{Y}_1^H \mathbf{Y}_1} \mathbf{Y}_2^H \mathbf{Y}_{\Delta\tau} \mathbf{Y}_{\Delta\tau}^H \mathbf{Y}_2 \\ &= \frac{1}{\mathbf{Y}_1^H \mathbf{Y}_1} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \text{conj}(Y_2(k)) Y_1(k) e^{-j\frac{2\pi k\Delta\tau}{N}} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{\mathbf{Y}_1^H \mathbf{Y}_1} \{ \text{DFT} [\text{conj}(Y_2(k)) Y_1(k)] \}^2. \end{aligned} \quad (16)$$

从而通过峰值检测可以得到  $\Delta_\tau$  的 ML 估计结果

$$(\hat{\Delta}_\tau)_{ML} = \arg \max_{\Delta_\tau} [L_c(\Delta_\tau)]. \quad (17)$$

### 3.2 MCMC 法

#### 3.2.1 MCMC 基础

伪谱峰值搜索法可以先利用 DFT 计算再通过峰值检测的方法实现时延估计. 但是这种算法由于估计仅限于  $T_s$  的整数倍, 且当信号存在噪声时, 时延的似然函数不一定在时延真值处出现最大值. 所以本文用蒙特卡罗的方法估计时延.

文献 [14] 和文献 [15] 所采用的 IS 方法是最基本的蒙特卡罗方法, 该方法实现了应用于主动雷达中的单、多径时延估计, 且通过提高采样点来降低估计误差. 但是 IS 算法的计算量随着时延取值范围划分的点数增加而急剧增加. 文献 [11] 利用 MCMC 算法通过构建概率分布模型实现阵列 DOA 估计. 相比于 IS 算法, MCMC 算法具有较小的计算量.

MCMC 方法主要概括为以下三步 [17]:

1) 在参数空间  $\Theta$  上选一个合适的马尔可夫链, 使其转移核为  $p(\cdot, \cdot)$ , 这里“合适”的含义主要指能使构造的马尔可夫链的平稳分布为  $\pi(x)$ ;

2) 由  $\Theta$  中的某一点  $\mathbf{x}_0$  出发, 用步骤 1 中的马尔可夫链产生点序列  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ ;

3) 从  $\mathbf{x}_0$  出发, 马尔可夫链经过  $m$  个样本的迭代之后, 各个时刻  $\mathbf{x}_n$  的边缘概率分布都是平稳分布  $\pi(x)$ , 迭代达到收敛.

采用 MCMC 方法时, 转移核的构造具有至关重要的作用. 目前应用最为广泛的 MCMC 方法主要有两种: M-H 抽样 [17] 和 Gibbs 抽样 [18] 方法. 本文模型 M-H 更合适, 其主要步骤为

- 1) 初始化  $\mathbf{x}_0$ , 选择提议函数  $q(\cdot)$ .
- 2) 迭代次数  $i, i \geq 1$ .

从  $q(\cdot)$  抽取样本, 得到一个新的候选状态  $x^* \propto q(x|x_{i-1})$ , 计算接受比率和接受概率

$$r(x, x^*) = \frac{\pi(x^*)q(x|x^*)}{\pi(x)q(x^*|x)}, \quad (18)$$

$$a(x, x^*) = \min(1, r(x, x^*)). \quad (19)$$

3) 抽取样本  $u \propto U[0, 1]$ , 如果  $u \leq a(x, x^*)$ , 则接受候选状态, 即马尔可夫链的状态变为  $x_i = x^*$ , 否则马尔可夫链仍然停留在原状态, 即  $x_i = x_{i-1}$ .

如何选取提议函数  $q(\cdot)$  是 M-H 抽样的关键问题, 常用的两种方法是随机游走采样方法和独立马尔科夫链采样方法 [17]. 随机游走需要很长时间才能采样整个状态空间, 导致收敛速度慢, 而独立马尔科夫链采样方法速度快但精度不如随机游走法. 由于两种采用方法互补, 结合采样方法特点进行混合采样, 可有效利用两种采样方法的优点. 具体步骤在下一节讨论.

#### 3.2.2 MCMC 估计时延

利用 MCMC 方法估计时延, 首先需要确定未知参数  $\Delta_\tau$  的平稳分布函数  $\pi(\Delta_\tau)$ , 由于

$$\pi(\Delta_\tau) \propto L_c(\Delta_\tau). \quad (20)$$

(15) 式代入 (14) 式, 即可构建未知时延  $\Delta_\tau$  的平稳分布函数为

$$\pi_\rho(\Delta_\tau) = \exp \left\{ \frac{\rho}{\mathbf{Y}_1^H \mathbf{Y}_1} \mathbf{Y}_2^H \mathbf{Y}_{\Delta_\tau} \mathbf{Y}_{\Delta_\tau}^H \mathbf{Y}_2 \right\}, \quad (21)$$

其中  $\rho$  为常数,  $\rho$  的不同取值对平稳分布函数的性能有着重要的影响, 当  $\rho$  值增大时, 分布函数  $\pi(\Delta_\tau)$  在  $\Delta_\tau$  的位置将变得更加尖锐. 对似然函数取指数函数的方法参考文献 [15], 且通过调整系统可使得分布函数尖锐. 由于  $\mathbf{Y}_2^H \mathbf{Y}_{\Delta_\tau} \mathbf{Y}_{\Delta_\tau}^H \mathbf{Y}_2$  计算数值太大, 需要对其进一步处理, 令

$$\rho = \rho' / \mathbf{Y}_2^H \mathbf{Y}_2. \quad (22)$$

将 (22) 式代入 (21) 式, 选取不同的  $\rho'$ , 画出  $\pi_{\rho'}(\Delta_\tau)$  分布函数如图 1 所示.

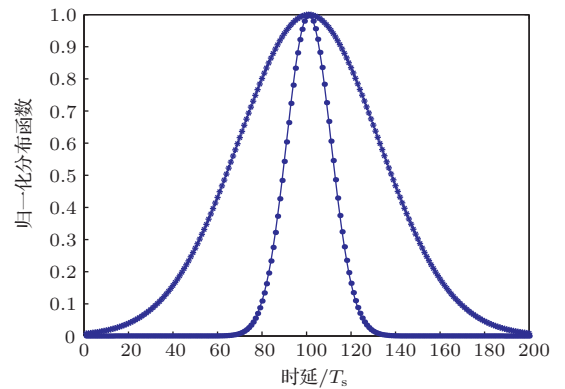


图 1  $\pi_{\rho'}(\Delta_\tau)$  在 SNR = 30 dB 时  $\rho' = 10$  和  $\rho' = 700$  的归一化分布图

那么, 得到新的分布函数为

$$\pi_{\rho'}(\Delta_\tau) = \exp \left\{ \frac{\rho'}{\mathbf{Y}_1^H \mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2^H \mathbf{Y}_2} \mathbf{Y}_2^H \mathbf{Y}_{\Delta_\tau} \mathbf{Y}_{\Delta_\tau}^H \mathbf{Y}_2 \right\}. \quad (23)$$

所以, MCMC 估计时延的步骤归纳为

1) 对接收的时域离散信号作 DFT, 得到  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$ .

2) 初始化. 在  $[0 - \max(\Delta_\tau)]$  之间产生一个初始状态  $\Delta_\tau(0)$ , 利用 (23) 式计算初始状态对应的  $\pi_{\rho'}(\Delta_\tau(0))$ .

3) 抽取第  $i$  个样本,  $1 \leq i \leq R$ ,  $R$  为抽样点数. 生成随机数  $u \propto U[0, 1]$ ,

(1) if  $u < 0.5$ , 采用独立马尔科夫采样方法, 本文选取的转移核函数为  $q_1(\Delta_\tau^*) \propto U[0, \max(\Delta_\tau)]$ ; 采样得到候选样本  $\Delta_\tau^*$ , 将  $\Delta_\tau^*$  代入 (23) 式计算得到分布函数值  $\pi(\Delta_\tau^*)$ , 将  $\pi(\Delta_\tau^*)$  同前样本的  $\pi(\Delta_\tau(i-1))$  代入 (18) 式和 (19) 式分别计算  $r(\Delta_\tau^*, \Delta_\tau(i-1))$  和  $a(\Delta_\tau^*, \Delta_\tau(i-1))$ , 转入第 4) 步.

(2) else, 采用随机游走的方法采样, 选取的提议函数  $q_1(\Delta_\tau^*) \propto N[0, \lambda * \Delta_{\tau \max}]$ ,  $\Delta_{\tau \max}$  较大时  $\lambda$  取值较小,  $\Delta_{\tau \max}$  较小时反之. 采样得到候选样本  $\Delta_\tau^*$ , 计算同 (1), 转入第 4) 步.

4) 判断是否更新样本. 生成随机数  $u' \propto U[0, 1]$ ,

(1) if  $u' < 0.5$ , 接受候选状态, 即  $\Delta_\tau(i) = \Delta_\tau^*$ ;

(2) else, 保持原状态, 即  $\Delta_\tau(i) = \Delta_\tau(i-1)$ .  $i \leftarrow i + 1$ , 返回步骤 3).

#### 4 MCMC 时延估计的 CRLB

假设两个通道接收的噪声功率相等, 表示为  $\text{var}[W_1(k)] = \text{var}[W_2(k)] = \sigma_0^2$ , 那么, 直达波的信噪比表示为

$$\text{SNR}_1 = 10 \log_{10} \left( \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_1^2 Y_1^2(k)}{N \sigma_0^2} \right), \quad (24)$$

所以

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_1^2 Y_1^2(k)}{N 10^{\frac{\text{SNR}_1}{10}}} = \frac{a_1^2 \mathbf{Y}_1^H \mathbf{Y}_1}{N 10^{\frac{\text{SNR}_1}{10}}}. \quad (25)$$

根据 (6) 式可知,  $E[W_p(k)] = 0$ , 其中,  $E[\cdot]$  为求期望, 那么

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{Var}[W_p(k)] \\ &= E[W_p^H(k) W_p(k)] - E[W_p(k)]^2 \\ &= E[W_2^H(k) W_2(k)] + b^2 E \left[ W_1^H(k) \exp \left( \frac{j2\pi k}{N} \right) \right. \\ &\quad \left. \times W_1(k) \exp \left( -\frac{j2\pi k}{N} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \sigma_0^2 + b^2 \sigma_0^2 = (1 + b^2) \sigma_0^2. \quad (26)$$

根据 CRLB 的定义, 对 (9) 式取对数求导

$$\frac{\partial \ln P(\cdot)}{\partial \Delta_\tau} = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_{E\Delta_\tau} b)^H \mathbf{Y}_{E\Delta_\tau} b, \quad (27)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{E\Delta_\tau} &= \frac{\partial \mathbf{Y}_{\Delta_\tau}}{\partial \Delta_\tau} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{j2\pi}{N} Y_1(1) e^{-j2\pi \Delta_\tau / N} \\ \vdots \\ -\frac{j2(N-1)\pi}{N} Y_1(N-1) e^{-j2\pi \Delta_\tau (N-1) / N} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

那么, 时延估计的 CRLB 满足

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta_\tau}^2 &\geq E \left\{ \frac{\partial \ln P(\cdot)}{\partial \Delta_\tau} \frac{\partial \ln P(\cdot)}{\partial \Delta_\tau} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \frac{b^2}{\sigma^2} \mathbf{Y}_{E\Delta_\tau}^H \mathbf{Y}_{E\Delta_\tau} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (29)$$

将 (25) 式和 (26) 式代入 (29) 式, 得到最终的 CRLB 表达式为

$$\sigma_{\Delta_\tau}^2 \geq \left\{ \frac{a_2^2}{(a_1^2 + a_2^2) a_1^2 \mathbf{Y}_1^H \mathbf{Y}_1} \left[ \frac{a_2^2}{a_1^2} \mathbf{Y}_{E\Delta_\tau}^H \mathbf{Y}_{E\Delta_\tau} \right] \right\}^{-1}. \quad (30)$$

#### 5 仿真实验

本文研究的是基于无源雷达的时延估计算法, 由于外辐射源信号种类较多, 本文同时给出宽、窄带信号的时延估计仿真, 并将估计结果与 CRLB 对比分析. 为了证明本文算法的实用性, 将本文算法与传统的相关 (ML) 算法、及文献 [14] 和 [15] 中用来估计时延的 IS 算法和时延估计的 CRLB 进行对比分析.

实验采用窄带信号为调频广播 (FM) 信号, 信号载频为  $f_c = 97.5$  MHz, 调制频率  $f_m = 15$  kHz, 调制指数  $m_f = 4$ , 带宽  $B = 2(m_f + 1)f_m = 150$  kHz, 最大频率  $f_{\max} = f_c + B/2 = 97.575$  MHz [19], 假设采用频率为  $F_s = 2f_{\max} = 195.15$  MHz, 时延  $\Delta_\tau = 100T_s$ , 假设时延最大值为  $\Delta_{\tau \max} = 5000T_s$ , 信噪比  $\text{SNR}_1 = 15$  dB. 对于窄带信号, 当采样时间较短时, 时延不可估计, 随着采样时间变长, 时延估计精度得到提高 [20], 选择快拍数  $N = 65536$  得到估计结果如图 2 所示.

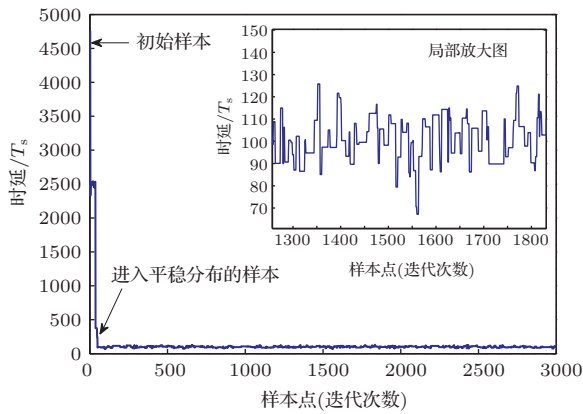


图2 时延分布函数的MCMC抽样图

图2所示的结果可知,从第50个样本开始进入平稳分布,样本的均值即为MCMC方法的估计结果.以样本为变量,MCMC方法在不同抽样条件下的估计结果如表1所示.由表可知,随着抽样点数 $R$ 的增大,MCMC估计的均值逼近真实时延,且方差越小,精度越高.

表1 不同抽样点数条件下的MCMC时延估计结果

迭代次数	500	1000	2000	4000
均值	100.12	100.11	100.01	100.00
均方差	3.9718	1.8478	0.7823	0.6733

考虑到计算量的问题,在下面的实验中,选择FM信号的快拍数位4096.当信噪比变化时,将不同算法估计的均方误差(MSE)对比如图3和图4所示.MSE的定义为

$$MSE = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} (\hat{\Delta}_{\tau_i} - \Delta_{\tau})^2, \quad (31)$$

其中 $N_m$ 为重复试验的次数, $\hat{\Delta}_{\tau_i}$ 为第 $i$ 次的估计结果.

在采样快拍数为4096,时延为 $100T_s$ 的条件下,利用传统峰值检测的ML算法、文献[15]的IS算法和本文算法对上述描述的FM信号进行时延估计,得到估计结果如图3所示.

由图3的结果可以知,在FM信号的时延估计中,IS算法和MCMC算法的时延估计的MSE低于ML算法,随着信噪比的增大,IS算法和MCMC算法的MSE迅速减小,且MCMC算法的估计精度大于IS算法.说明在相同的误差和样本条件下,本文算法的估计精度大于传统峰值检测的ML算法和文献[14]的IS算法.

宽带采用线性调频(LFM)信号,信号低频 $f_l = 98$  MHz,带宽 $B = 30$  MHz,根据带通

信号采用定理[11],计算得到信号最低采样率为91.667 MHz,那么假设 $F_s = 91.667$  MHz,时延设为 $20.2T_s$ ,信号采用点数 $N = 128$ .

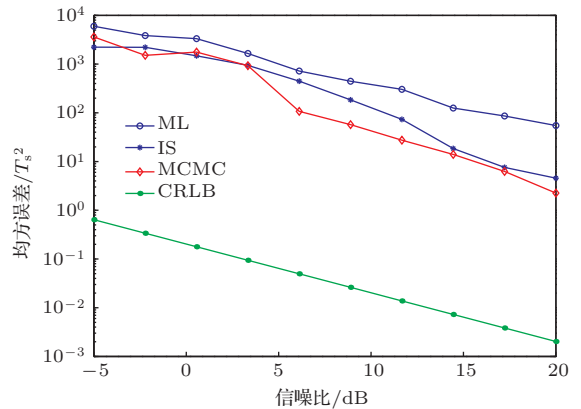


图3 (网刊彩色) FM信号时延估计

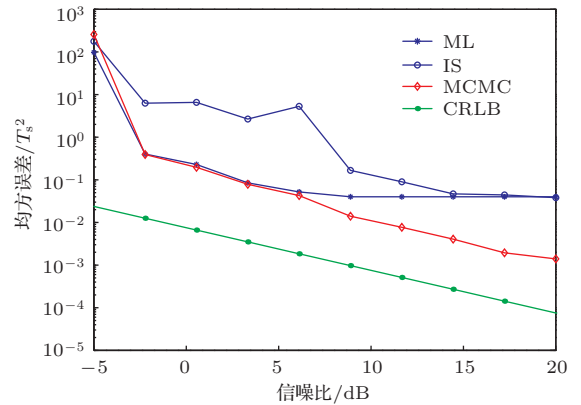


图4 (网刊彩色) LFM信号的时延估计

从图4所示结果可知,相对于窄带信号,宽带信号的时延估计精度较高.当误差较大时,不同算法的估计精度相当,随着信噪比增大,ML算法和MCMC估计的MSE迅速减小,而IS算法的估计MSE减小较慢,当信噪比增加到一定的数值时,IS算法的MSE减小变慢,ML算法的MSE甚至保持不变.对于IS算法,影响其估计精度的参量除了抽样点数,还有备选样本的含量,文献[14]证明在一定的条件下,该方法可以得到很高的精度,本文仿真是在抽样点数相当的条件下的仿真结果.对于ML算法,由于其只能估计得到采样间隔整数倍的时延,所以当算法可以得到一个精确的整数倍时延时,其估计的MSE保持不变.由此可知,在宽带信号时延估计中,MCMC算法不但可以得到精确的估计值,而且还能估计非整数倍采样间隔的时延.

表2 不同时延估计算法的算法复杂度

算法	计算复杂度	文中FM信号计算复杂度比	文中LFM信号计算复杂度比
MC	$3N \log_2 N + 10N(R+1) + 11R$	1.000	1.000
IS	$3N \log_2 N + 10NK + 7K + RK(K-1)/2 + 3R$	1.261	194.4
PS	$4.5N \log_2 N + 6N$	0.042	0.021
ML	$9N \log_2 2N + 2N$	0.084	0.041

本文通过对比不同算法的计算复杂度来比较不同算法的计算效率,如表2所示.计算复杂度是指不同算法乘法运算和加法运算的次数.其中, $N$ 为信号点数, $K$ 是时延取值区间所分点数,即备选样本数,只在IS算法中, $R$ 是指抽样点数.表格的第3列为其他算法与本文算法计算复杂度的比值.为方便统计,设共轭运算和指数运算均记为一次运算.

从表2所示的结果可以看出,PS算法计算量是最小的,其计算量甚至比ML算法低.相对于IS算法,MCMC算法的运算速度更快.由计算复杂度的表达式可知,当 $N$ 较大时,计算复杂度主要取决于 $N$ ,此时MCMC算法和IS算法复杂度相差不大,如FM信号情况.当 $N$ 较小时,MCMC算法复杂度由 $R$ 决定,而IS算法的复杂度由 $RK$ 决定,从而使得IS算法的复杂度比MCMC算法大得多,如LFM信号情况.

## 6 结 论

本文通过建立频域的时延估计模型,构建时延估计的ML函数.推导了伪谱峰值搜索的FFT快速算法,由于快速算法只能得到采样间隔整数倍的时延,所以本文采用MCMC算法实现对时延的精确ML估计.通过实验仿真知,本文算法适用于辐射源信号未知的被动时延估计中,算法可同时估计两通道信号的时延和信号增益比.本文构建的时延估计模型可通过DFT运算实现整数倍时延的快速估计,且计算量小于传统的CC算法.本文采用的MCMC算法不但时延估计精度高于文献[14]的IS算法,而且MCMC算法可以直接得到非采样间隔整数倍的时延估计值,不需要再采用峰值搜索的方法来找到时延估计值,具有较高实用价值.理论推导证明了MCMC算法的计算复杂度低于IS算法.

## 参考文献

- [1] Hai-Peng R, Wen-Chao L, Ding L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030511
- [2] Carter G C 1981 *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* **29** 463
- [3] Bo-Wen L, Jian-Ji D, Yuan Y, Xin-Liang, Z 2013 *Chin. Phys. B* **22** 023201
- [4] Knapp C, Carter G C 1976 *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing* **24** 320
- [5] Nandi A K 1995 *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. **42** 993
- [6] Cheng Z, Tjhung T T 2003 *IEEE Transaction on Signal Processing* **51** 1859
- [7] Liu W 2012 *IEEE International Conference on Mechatronics and Automation* Chengdu, China, August 5–8, 2012 p1451
- [8] Wen F, Wan Q, Liu Y 2012 *IEEE 10th International Symposium on ISETC* Timisoara, Romania, Nov. 15–16, 2012 p243
- [9] Dong-Hai D, Wei X, Jun S, Bing-Chang Z 2011 *Chin. Phys. B* **20** 030501
- [10] Xin-Chun Z, Cheng-Jun G 2013 *Chin. Phys. B* **22** 128401
- [11] Ng W, Reilly J P, Kirubarajan T, Larocque J R 2005 *IEEE Transaction on Signal Processing* **52** 411
- [12] Zheng S 2013 *Chin. Phys. B* **22** 029302
- [13] Cao X Q, Zhang W M, Song J Q, Zhu X Q, Wang S C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6050 (in Chinese) [曹小群, 张卫民, 宋君强, 朱小谦, 王舒畅 2009 物理学报 **58** 6050]
- [14] Masmoudi A, Bellili F, Affes S, Stephenne A 2011 *IEEE Transaction on Signal Processing* **59** 4505
- [15] Masmoudi A, Bellili F, Affes S, Stephenne A 2013 *IEEE Transaction on Signal Processing* **61** 182
- [16] Li H W, Wang J 2012 *IET Radar Sonar & Navigation* **6** 180
- [17] Xiao-Feng Z, Si-Xun H, Jie X, Wei-Lai, S 2011 *Chin. Phys. B* **20** 099201
- [18] Li-Feng G, Xin L, Shan G 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4396
- [19] Flores B C, Solis E A, Thomas G 2003 *IEE Radar Sonar & Navigation* **150** 313
- [20] Scarbrough K, Tremblay R, Carter G C 1983 *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* **31** 1191

# Time delay estimation using Markov Chain Monte Carlo method\*

Li Jing<sup>†</sup> Zhao Yong-Jun Li Dong-Hai

(The PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

( Received 14 February 2014; revised manuscript received 10 March 2014 )

## Abstract

A novel maximum likelihood estimation model for time delay is constructed to estimate the passive time delay; the signal of emitter is unknown in this model. According to the model characteristics, the fast Fourier transformation (FFT) method is used to achieve time delay estimation (TDE). In order to improve the accuracy of estimator, the Markov Chain Monte Carlo (MCMC) sampling method is used to estimate the time delay value directly. Unlike traditional algorithms, MCMC method can obtain time delay without peak detection. Furthermore, the Cramer-Rao lower bound (CRLB) of this model is derived. Finally, simulations show that the proposed approach is suitable for both narrowband and broadband TDE, and the MCMC algorithm can achieve more precise time delay value with the same sample, and it has lower computational complexity than IS algorithm. The novel approach can estimate also the time delay of non-integer multiple of the sampling interval.

**Keywords:** time delay estimation, maximum likelihood, Markov Chain Monte Carlo, computational complexity

**PACS:** 07.50.Qx, 02.70.Uu, 84.40.Xb, 89.70.Eg

**DOI:** [10.7498/aps.63.130701](https://doi.org/10.7498/aps.63.130701)

---

\* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2012AA7031015).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [lijing1633@whu.edu.cn](mailto:lijing1633@whu.edu.cn)