

# 临界流喷嘴喉部氢气等熵指数解析计算与进化回归方法\*

丁红兵 王超<sup>†</sup> 赵雅坤

(天津大学电气与自动化工程学院, 天津市过程检测与控制重点实验室, 天津 300072)

(2014年3月8日收到; 2014年4月2日收到修改稿)

氢气作为最有希望的清洁可再生能源之一, 已被广泛应用于航天、工业和燃料电池等领域. 临界流喷嘴由于其测量过程不受下游扰动的影响, 越来越多地被应用于氢气特别是高压氢气的流量测量. 而作为真实气体的氢气在临界流喷嘴中的流动规律更加复杂, 准确获得喷嘴喉部氢气的热力学参数对于氢气的精确测量至关重要. 结合真实气体显式亥姆霍兹能量方程, 利用熵焓关系分析并通过迭代获得了喷嘴喉部容积等熵指数这一基本流动参数. 提出了最优化获取显式快速计算模型的回归算法, 引入了进化算法思想, 利用选择、交换和变异等方式寻找显著性和精度最优的种群个体. 回归标准偏差为0.0089%, 平均残差为0.0285%, 最大残差为0.1781%. 结果表明, 所提出的算法能快速搜索满足显著性和精度要求的最优解, 在提高回归方程质量的同时使方程项数达到最少, 具有较好的抑制过拟合的能力. 所提出的算法也可用于其他各类流体设备的不同介质流场特性参数模型的建立.

**关键词:** 真实氢气, 流动特性, 进化算法, 逐步回归

**PACS:** 47.27.nf, 51.30.+i, 06.20.-f, 47.40.Hg

**DOI:** 10.7498/aps.63.164701

## 1 引言

众所周知, 氢气被认为是未来最有希望的完全清洁可再生能源之一<sup>[1-3]</sup>. 目前国内外氢能产业正在蓬勃发展中, 已被广泛应用于航天、工业、燃料电池等领域<sup>[4,5]</sup>. 为促进氢能产业的发展, 氢气质量流量的精确测量不可或缺, 如燃料电池汽车的里程和功率输出的准确计量等<sup>[6,7]</sup>.

目前, 临界流喷嘴由于其测量过程不受下游扰动的影响<sup>[8-10]</sup>, 越来越多地被应用于氢气特别是高压氢气的质量流量测量. 文献<sup>[11-15]</sup>利用临界流喷嘴分别测量了压力范围为0.049—70 MPa的氢气流量, 并结合Redlich-Kwong<sup>[16]</sup>, Lee-Kesler<sup>[17]</sup>以及Peng-Robinson<sup>[18]</sup>真实氢气压力方程研究了不同压力条件下的氢气流动情况. 然而, 由于缺乏其对真实气体状态方

程影响的细节信息, 临界流喷嘴中真实氢气基本流动参数的计算公式尚未建立.

在高压条件下, 临界流喷嘴中真实气体流动规律较理想气体更为复杂多变, 诸如内部气体热物理性质分布、音速线位置、边界层厚度、多维流动特性、粗糙度作用、临界背压比等重要规律均会发生显著的变化. 因此需要深入的研究, 以便临界流喷嘴更准确地应用于高压氢气流量的测量与控制<sup>[7]</sup>. 对于临界流喷嘴气体内部流动状态, 特别是最重要的喉部状态并不能直接检测, 需要从理论或仿真角度加以认识, 然而高压真实气体流动并不是简单的理想气体一维等熵流动, 需要对表征真实气体流动情况的喉部无量纲数(如容积等熵指数 $k_v$ 、压缩因子 $Z$ 、雷诺数 $Re$ <sup>[19]</sup>、普朗特数 $Pr$ 等)进行求解, 经过回归分析最优化后获得氢气基本流动参数的准确经验公式, 为更复杂的研究提供可靠的计算

\* 国家自然科学基金(批准号: 61072101)和教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号: NCET-10-0621)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: wangchao@tju.edu.cn

模型.

为了在更广泛的压力和温度范围上应用, 本文首先采用显式亥姆霍兹能量状态方程<sup>[20-22]</sup> 热物理性质模型, 并结合临界流喷嘴结构特点, 理论分析获得了喉部等熵指数 $k_v$ 这一重要的基本流动参数. 为了便于进一步深入研究实际氢气在喷嘴中的流动过程, 提出了一种最优化物理快速计算显式模型的回归算法<sup>[23-27]</sup>. 该算法在常规逐步回归的基础上, 引进了进化算法的思想<sup>[28]</sup>, 利用选择、交换和变异等方式寻找到满足显著性和精度要求的最优种群个体, 使得方程项数达到最少, 并能有效地提高回归方程的质量.

## 2 临界流喷嘴流动特性

临界流喷嘴的基本结构如图1所示. 对于理想气体一维等熵流动, 喷嘴中氢气的理想临界流量为<sup>[29]</sup>

$$q_{mi} = \frac{A_t C_i^* p_0}{\sqrt{R_m T_0}}, \quad (1)$$

其中,  $q_{mi}$  为理想气体临界质量流量(单位为  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ );  $A_t$  为喉部内截面积(单位为  $\text{m}^2$ );  $p$  和  $T$  分别为压力(单位为 Pa)和温度(单位为 K); 下标 0 代表滞止条件;  $R_m$  为气体常数(单位为  $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ). 理想气体临界流函数  $C_i^*$  可表示为

$$C_i^* = \sqrt{k(2/k+1)^{\frac{k+1}{k-1}}}, \quad (2)$$

其中  $k$  为理想气体的比热容比.

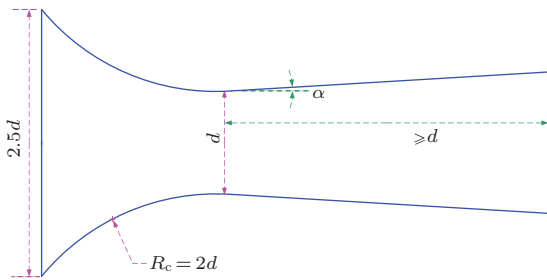


图1 临界流喷嘴基本结构

由于受黏性力、流动多维性和真实气体状态方程的影响, 氢气特别是高压氢气在临界流喷嘴的跨声速流动将偏离一维等熵流. 因此, 氢气在临界流喷嘴尤其是喉部处的流动特性直接影响了氢气计量的准确性. 容积等熵指数 $k_v$ 、压缩因子 $Z$ 、雷诺数 $Re$ 、普朗特数 $Pr$ 等参数直接关系到喷嘴边界层、多维性、音速线位置等, 因此, 这些参数是表征真实气体流动情况的重要参数. 本文以喉部容积等熵指数

$k_v$  为重点开展研究. 氢气的容积等熵指数 $k_v$ 可由下式计算:

$$k_v = \frac{Z}{Z_p - RZ_T^2/c_p}, \quad (3)$$

其中,  $Z$  为压缩因子;  $c_p$  为真实气体定压比热容(单位为  $\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ); 导数压缩因子  $Z_p, Z_T$  为

$$\begin{cases} Z_p = Z - p \left( \frac{\partial Z}{\partial p} \right)_T, \\ Z_T = Z + T \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_p. \end{cases} \quad (4)$$

由于喉部状态不可测, 为了求解喉部容积等熵指数 $k_v$ , 首先需要获得真实氢气喉部基本参数状态(如喉部密度 $\rho_t$ 、喉部温度 $T_t$ 和压缩因子 $Z_t$ 等), 而它们与真实气体的热力学性质直接相关. 假设气流核心区为等熵流动<sup>[30]</sup>, 则喷嘴喉部与入口焓熵关系如下式所示:

$$\begin{cases} h_0(T_0, \rho_0) = h_t(T_t, \rho_t) - \frac{w_t(T_t, \rho_t)^2}{2}, \\ s_0(T_0, \rho_0) = s_t(T_t, \rho_t), \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $h, s$  和  $w$  分别为焓(单位为  $\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$ )、熵(单位为  $\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$ )和音速(单位为  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ); 下标  $t$  代表喉部状态;  $h_0$  和  $s_0$  可根据入口滞止条件求得, 当给定入口滞止压力 $p_0$ 和温度 $T_0$ 后,  $h_0$ 和 $s_0$ 为定值; 而喉部参数 $s_t, h_t$ 和 $w_t$ 均为 $T_t, \rho_t$ 的函数. 利用氢气真实气体模型, 经过复杂的计算过程便可获得喉部容积等熵指数 $k_v$ .

## 3 真实气体热物理模型

氢气的热物理计算模型采用亥姆霍兹能量方程表示<sup>[20]</sup>. 无量纲亥姆霍兹自由能方程有两个独立的变量, 分别为温度 $T$ 和密度 $\rho$ , 如下式所示:

$$\begin{aligned} \alpha(\delta, \tau) &= \frac{a(T, \rho)}{RT} \\ &= \alpha^o(\delta, \tau) + \alpha^r(\delta, \tau), \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $a$  为亥姆霍兹自由能. 无量纲亥姆霍兹自由能  $\alpha = a/(RT)$  分为两部分: 一部分为理想状态部分  $\alpha^o$ ; 另一部分为残余部分  $\alpha^r$ . 这里,  $\delta = \rho/\rho_c$  是对比密度;  $\tau = T_c/T$  是对比温度的倒数. 对于标准氢<sup>[21,22]</sup>, 其临界温度 $T_c$ 、临界压力 $p_c$ 和临界密度 $\rho_c$ 分别为 33.145 K, 1.2964 MPa 和  $15.508 \text{ mol}\cdot\text{dm}^{-3}$ .

标准氢的理想部分亥姆霍兹自由能和残余部分亥姆霍兹自由能分别为<sup>[21]</sup>

$$\alpha^o(\delta, \tau) = \ln \delta + 1.5 \ln \tau + a_1 + a_2 \tau$$

$$+ \sum_{k=3}^7 a_k \ln(1 - e^{b_k \tau}), \quad (7)$$

$$\alpha^r(\delta, \tau) = \sum_{i=1}^7 n_i \delta^{d_i} \tau^{t_i} + \sum_{i=8}^9 n_i \delta^{d_i} \tau^{t_i} e^{-\delta^{c_i}} + \sum_{i=10}^{14} n_i \delta^{d_i} \tau^{t_i} \times e^{-\eta_i(\delta - \varepsilon_i)^2 - \beta_i(\tau - \gamma_i)^2}. \quad (8)$$

(8) 式的具体参数和系数由文献 [21] 给出。除临界点附近外, 从三相点至 250 K, 该物性模型计算精度可达 0.1%; 而当温度在 250—450 K 时, 即使压力达到 300 MPa, 误差也不高于 0.04%。

表 1 列出了相关热力学性质的亥姆霍兹函数关系式。标准氢的理想部分亥姆霍兹函数  $\alpha^o(\delta, \tau)$  及其偏导数为

$$\alpha^o = \ln \delta + 1.5 \ln \tau + a_1 + a_2 \tau + \sum_{k=3}^7 a_k \ln(1 - e^{b_k \tau}),$$

$$\alpha_{\delta}^o = 1/\delta,$$

$$\alpha_{\delta\delta}^o = -1/\delta^2,$$

$$\alpha_{\tau}^o = 1.5/\tau + a_2 - \sum_{k=3}^7 \frac{a_k b_k e^{b_k \tau}}{1 - e^{b_k \tau}},$$

$$\alpha_{\tau\tau}^o = -1.5/\tau^2 - \sum_{k=3}^7 \frac{a_k b_k^2 e^{b_k \tau}}{(1 - e^{b_k \tau})^2},$$

$$\alpha_{\tau\tau\tau}^o = 3/\tau^3 - \sum_{k=3}^7 \frac{a_k b_k^3 e^{b_k \tau} (1 + e^{b_k \tau})}{(1 - e^{b_k \tau})^3},$$

其中,

$$\alpha_{\delta}^o = (\partial \alpha^o / \partial \delta)_{\tau},$$

$$\alpha_{\tau}^o = (\partial \alpha^o / \partial \tau)_{\delta},$$

$$\alpha_{\delta\delta}^o = (\partial^2 \alpha^o / \partial \delta^2)_{\tau},$$

$$\alpha_{\tau\tau}^o = (\partial^2 \alpha^o / \partial \tau^2)_{\delta},$$

$$\alpha_{\tau\tau\tau}^o = (\partial^3 \alpha^o / \partial \tau^3)_{\delta}.$$

标准氢的残余部分亥姆霍兹函数  $\alpha(\delta, \tau)$  及其偏导数为

$$\begin{aligned} \alpha^r &= \sum_{i=1}^7 n_i \delta^{d_i} \tau^{t_i} + \sum_{i=8}^9 n_i \delta^{d_i} \tau^{t_i} e^{-\delta^{c_i}} + \sum_{i=10}^{14} n_i \delta^{d_i} \tau^{t_i} e^{-\eta_i(\delta - \varepsilon_i)^2 - \beta_i(\tau - \gamma_i)^2}, \\ \alpha_{\delta}^r &= \sum_{i=1}^7 n_i d_i \delta^{d_i-1} \tau^{t_i} + \sum_{i=8}^9 n_i e^{-\delta^{c_i}} [\delta^{d_i-1} \tau^{t_i} (d_i - c_i \delta^{c_i})] \\ &\quad + \sum_{i=10}^{14} n_i \delta^{d_i} \tau^{t_i} e^{-\eta_i(\delta - \varepsilon_i)^2 - \beta_i(\tau - \gamma_i)^2} \left[ \frac{d_i}{\delta} - 2\eta_i(\delta - \varepsilon_i) \right], \\ \alpha_{\tau}^r &= \sum_{i=1}^7 n_i t_i \delta^{d_i} \tau^{t_i-1} + \sum_{i=8}^9 n_i t_i \delta^{d_i} \tau^{t_i-1} e^{-\delta^{c_i}} + \sum_{i=10}^{14} n_i \delta^{d_i} \tau^{t_i} e^{-\eta_i(\delta - \varepsilon_i)^2 - \beta_i(\tau - \gamma_i)^2} \left[ \frac{t_i}{\tau} - 2\beta_i(\tau - \gamma_i) \right], \\ \alpha_{\delta\delta}^r &= \sum_{i=1}^7 n_i d_i (d_i - 1) \delta^{d_i-2} \tau^{t_i} \\ &\quad + \sum_{i=8}^9 n_i e^{-\delta^{c_i}} \{ \delta^{d_i-2} \tau^{t_i} [(d_i - c_i \delta^{c_i})(d_i - 1 - c_i \delta^{c_i}) - c_i^2 \delta^{c_i}] \} + \sum_{i=10}^{14} n_i \tau^{t_i} e^{-\eta_i(\delta - \varepsilon_i)^2 - \beta_i(\tau - \gamma_i)^2} \\ &\quad \times [-2\eta_i \delta^{d_i} + 4\eta_i^2 \delta^{d_i} (\delta - \varepsilon_i)^2 - 4d_i \eta_i \delta^{d_i-1} (\delta - \varepsilon_i) + d_i (d_i - 1) \delta^{d_i-2}], \\ \alpha_{\tau\tau}^r &= \sum_{i=1}^7 n_i t_i (t_i - 1) \delta^{d_i} \tau^{t_i-2} + \sum_{i=8}^9 n_i t_i (t_i - 1) \delta^{d_i} \tau^{t_i-2} e^{-\delta^{c_i}} + \sum_{i=10}^{14} n_i \delta^{d_i} e^{-\eta_i(\delta - \varepsilon_i)^2 - \beta_i(\tau - \gamma_i)^2} \\ &\quad \times [-2\beta_i \tau^{t_i} + 4\beta_i^2 \tau^{t_i} (\tau - \gamma_i)^2 - 4t_i \beta_i \tau^{t_i-1} (\tau - \gamma_i) + t_i (t_i - 1) \tau^{t_i-2}], \\ \alpha_{\delta\tau}^r &= \sum_{i=1}^7 n_i d_i t_i \delta^{d_i-1} \tau^{t_i-1} + \sum_{i=8}^9 n_i e^{-\delta^{c_i}} \delta^{d_i-1} t_i \tau^{t_i-1} (d_i - c_i \delta^{c_i}) \\ &\quad + \sum_{i=10}^{14} n_i \delta^{d_i} \tau^{t_i} e^{-\eta_i(\delta - \varepsilon_i)^2 - \beta_i(\tau - \gamma_i)^2} \left[ \frac{d_i}{\delta} - 2\eta_i(\delta - \varepsilon_i) \right] \left[ \frac{t_i}{\tau} - 2\beta_i(\tau - \gamma_i) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\delta\delta\delta}^r &= \sum_{i=1}^7 n_i d_i (d_i - 1)(d_i - 2) \delta^{d_i - 3} \tau^{t_i} \\
 &+ \sum_{i=8}^9 n_i e^{-\delta^{c_i}} \delta^{d_i - 3} \tau^{t_i} [d_i (d_i - 1)(d_i - 2) \\
 &- c_i (c_i^2 + d_i^2 + 3d_i c_i - 4d_i - 3c_i + 2) \delta^{c_i} + 3c_i^2 (d_i + c_i - 1) \delta^{2c_i} - c_i^3 \delta^{3c_i}] \\
 &+ \sum_{i=10}^{14} n_i \tau^{t_i} e^{-\eta_i (\delta - \varepsilon_i)^2 - \beta_i (\tau - \gamma_i)^2} [12\eta_i^2 \delta^{d_i} (\delta - \varepsilon_i) - 8\eta_i^3 \delta^{d_i} (\delta - \varepsilon_i)^3 + 12d_i \eta_i^2 \delta^{d_i - 1} (\delta - \varepsilon_i)^2 \\
 &- 6d_i \eta_i \delta^{d_i - 1} - 6d_i (d_i - 1) \eta_i \delta^{d_i - 2} (\delta - \varepsilon_i) + d_i (d_i - 1)(d_i - 2) \delta^{d_i - 3}], \\
 \alpha_{\tau\tau\tau}^r &= \sum_{i=1}^7 n_i t_i (t_i - 1)(t_i - 2) \delta^{d_i} \tau^{t_i - 3} \\
 &+ \sum_{i=8}^9 n_i t_i (t_i - 1)(t_i - 2) \delta^{d_i} \tau^{t_i - 3} e^{-\delta^{c_i}} + \sum_{i=10}^{14} n_i \delta^{d_i} e^{-\eta_i (\delta - \varepsilon_i)^2 - \beta_i (\tau - \gamma_i)^2} \\
 &\times [12\beta_i^2 \tau^{t_i} (\tau - \gamma_i) - 8\beta_i^3 \tau^{t_i} (\tau - \gamma_i)^3 + 12t_i \beta_i^2 \tau^{t_i - 1} (\tau - \gamma_i)^2 \\
 &- 6t_i \eta_i \tau^{t_i - 1} - 6t_i (t_i - 1) \beta_i \tau^{t_i - 2} (\tau - \gamma_i) + t_i (t_i - 1)(t_i - 2) \tau^{t_i - 3}], \\
 \alpha_{\delta\delta\tau}^r &= \sum_{i=1}^7 n_i d_i t_i (d_i - 1) \delta^{d_i - 2} \tau^{t_i - 1} + \sum_{i=8}^9 n_i e^{-\delta^{c_i}} \delta^{d_i - 2} t_i \tau^{t_i - 1} [(d_i - c_i \delta^{c_i})(d_i - 1 - c_i \delta^{c_i}) - c_i^2 \delta^{c_i}] \\
 &+ \sum_{i=10}^{14} n_i \tau^{t_i} e^{-\eta_i (\delta - \varepsilon_i)^2 - \beta_i (\tau - \gamma_i)^2} \\
 &\times \left[ -2\eta_i \delta^{d_i} + 4\eta_i^2 \delta^{d_i} (\delta - \varepsilon_i)^2 - 4d_i \eta_i \delta^{d_i - 1} (\delta - \varepsilon_i) + d_i (d_i - 1) \delta^{d_i - 2} \right] \left[ \frac{t_i}{\tau} - 2\beta_i (\tau - \gamma_i) \right], \\
 \alpha_{\delta\tau\tau}^r &= \sum_{i=1}^7 n_i d_i t_i (t_i - 1) \delta^{d_i - 1} \tau^{t_i - 2} + \sum_{i=8}^9 n_i e^{-\delta^{c_i}} \delta^{d_i - 1} t_i (t_i - 1) \tau^{t_i - 1} (d_i - c_i \delta^{c_i}) \\
 &+ \sum_{i=10}^{14} n_i \delta^{d_i} e^{-\eta_i (\delta - \varepsilon_i)^2 - \beta_i (\tau - \gamma_i)^2} \left[ \frac{d_i}{\delta} - 2\eta_i (\delta - \varepsilon_i) \right] \\
 &\times [-2\beta_i \tau^{t_i} + 4\beta_i^2 \tau^{t_i} (\tau - \gamma_i)^2 - 4t_i \beta_i \tau^{t_i - 1} (\tau - \gamma_i) + t_i (t_i - 1) \tau^{t_i - 2}].
 \end{aligned}$$

利用新的显式标准氢亥姆霍兹能量方程(6), 并结合亥姆霍兹函数关系式及其偏导数, 便可求解所有的热力学参数.

表1 相关热力学性质及其亥姆霍兹函数关系式  
 $(\alpha_\delta = (\partial\alpha/\partial\delta)_\tau, \alpha_\tau = (\partial\alpha/\partial\tau)_\delta, \alpha_{\delta\delta} = (\partial^2\alpha/\partial\delta^2)_\tau, \alpha_{\tau\tau} = (\partial^2\alpha/\partial\tau^2)_\delta, \alpha_{\delta\tau} = \partial^2\alpha/(\partial\delta\partial\tau))$

性质	热力学一般定义	亥姆霍兹函数关系式
压力	$p(T, \rho) = -(\partial A/\partial v)_T$	$p(\delta, \tau) = \rho R_m T (1 + \delta\alpha_\delta^r)$
熵	$s(T, \rho) = -(\partial A/\partial T)_v$	$s(\delta, \tau) = R_m [\tau(\alpha_\tau^o + \alpha_\tau^r) - \alpha^0 - \alpha_\tau^r]$
焓	$h(T, \rho) = A - T(\partial A/\partial T)_v - v(\partial A/\partial v)_T$	$h(\delta, \tau) = R_m T [1 + \tau(\alpha_\tau^o + \alpha_\tau^r) + \delta\alpha_\delta^r]$
比定容热容	$c_v(T, \rho) = (\partial u/\partial T)_v$	$c_v(\delta, \tau) = -R_m \tau^2 (\alpha_{\tau\tau}^o + \alpha_{\tau\tau}^r)$
等压体积膨胀系数	$\zeta(T, \rho) = (1/v)(\partial v/\partial T)_p$	$\zeta(\delta, \tau) = \frac{1}{T} \frac{1 + \delta\alpha_\delta^r - \delta\tau\alpha_{\delta\tau}^r}{1 + 2\delta\alpha_\delta^r + \delta^2\alpha_{\delta\delta}^r}$
等温体积弹性模量	$\kappa(T, \rho) = -v(\partial p/\partial v)_T$	$\kappa(\delta, \tau) = \rho R_m T (1 + 2\delta\alpha_\delta^r + \delta^2\alpha_{\delta\delta}^r)$
声速	$w(T, \rho) = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}$	$w^2(\delta, \tau) = R_m T \left[ (1 + 2\delta\alpha_\delta^r + \delta^2\alpha_{\delta\delta}^r) - \frac{(1 + \delta\alpha_\delta^r - \delta\tau\alpha_{\delta\tau}^r)^2}{\tau^2 (\alpha_{\tau\tau}^o + \alpha_{\tau\tau}^r)} \right]$

#### 4 喉部容积等熵指数解析解

喷嘴的入口参数为滞止温度  $T_0$  和滞止压力  $p_0$ . 首先, 利用真实氢气热物理模型 (6)–(8) 式, 获得入口焓  $h_0$  和熵  $s_0$ . 接着, 求解焓熵方程 (5) 并最终获得喉部参数状态, 求解过程可采用二元非线性方程的牛顿迭代法. 将 (5) 式写成如下形式, 求解喉部密度  $\rho_t$  和温度  $T_t$ :

$$\begin{cases} f = h_t(T_t, \rho_t) - \frac{w_t(T_t, \rho_t)^2}{2} - h_0 = 0, \\ g = s_t(T_t, \rho_t) - s_0 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

为简化方程, 后续的公式中省去喉部参数下标  $t$ . 分别计算函数  $f$  和  $g$  的偏导数:

$$\begin{aligned} f_T &= \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_\rho - \frac{1}{2} \frac{\partial w^2}{\partial T}, \\ f_\rho &= \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_T - \frac{1}{2} \frac{\partial w^2}{\partial \rho}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w^2}{\partial T}\right)_\rho &= R(1 + 2\delta\alpha_\delta^r + \delta^2\alpha_{\delta\delta}^r) - \tau R(2\delta\alpha_{\delta\tau}^r + \delta^2\alpha_{\delta\delta\tau}^r) \\ &+ R \frac{2\delta\tau^2\alpha_{\delta\tau\tau}^r(1 + \delta\alpha_\delta^r - \delta\tau\alpha_{\delta\tau}^r)(\alpha_{\tau\tau}^0 + \alpha_{\tau\tau}^r) + [\tau(\alpha_{\tau\tau}^0 + \alpha_{\tau\tau}^r) + 3(\alpha_{\tau\tau}^0 + \alpha_{\tau\tau}^r)](1 + \delta\alpha_\delta^r - \delta\tau\alpha_{\delta\tau}^r)^2}{\tau^2(\alpha_{\tau\tau}^0 + \alpha_{\tau\tau}^r)^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w^2}{\partial \rho}\right)_T &= \frac{RT}{\rho_c}(2\alpha_\delta^r + 4\delta\alpha_{\delta\delta}^r + \delta^2\alpha_{\delta\delta\delta}^r) + \frac{RT}{\tau^2\rho_c} \\ &\times \frac{2(1 + \delta\alpha_\delta^r - \delta\tau\alpha_{\delta\tau}^r)(\alpha_\delta^r + \delta\alpha_{\delta\delta}^r - \tau\alpha_{\delta\tau}^r - \delta\tau\alpha_{\delta\delta\tau}^r)(\alpha_{\tau\tau}^0 + \alpha_{\tau\tau}^r) - \alpha_{\delta\tau\tau}^r(1 + \delta\alpha_\delta^r - \delta\tau\alpha_{\delta\tau}^r)^2}{(\alpha_{\tau\tau}^0 + \alpha_{\tau\tau}^r)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

喉部温度  $T_t$  和密度  $\rho_t$  第  $k+1$  次迭代形式如下:

$$\begin{cases} T_{k+1} = T_k + \varphi T \frac{(s_0 - s) \left[ (1 - T\zeta) - \frac{1}{2v^2\kappa} \frac{\partial w^2}{\partial \rho} \right] + \zeta \left( h_0 - h - \frac{w^2}{2} \right)}{c_v \left( 1 - \frac{1}{2v^2\kappa} \frac{\partial w^2}{\partial \rho} \right) + Tv\zeta^2\kappa \left( 1 - \frac{1}{2v\zeta\kappa} \frac{\partial w^2}{\partial T} \right)}, \\ \rho_{k+1} = \rho_k + \varphi \frac{\left( h_0 - h - \frac{w^2}{2} \right) c_v - T(s_0 - s) \left( c_v + v\zeta\kappa - \frac{1}{2} \frac{\partial w^2}{\partial T} \right)}{v^2\kappa \left[ c_v \left( 1 - \frac{1}{2v^2\kappa} \frac{\partial w^2}{\partial \rho} \right) + Tv\zeta^2\kappa \left( 1 - \frac{1}{2v\zeta\kappa} \frac{\partial w^2}{\partial T} \right) \right]}, \end{cases} \quad (14)$$

其中  $\varphi$  是步长因子. 迭代收敛条件为喉部密度的相对变化小于  $10^{-6}$  和温度变化小于  $10^{-5}$  K. 当迭代收敛后, 喉部的速度  $u_t$  等于  $w_t$ . 此时便可将喉部密度  $\rho_t$  和温度  $T_t$  代入亥姆霍兹函数关系式, 结合 (3) 式计算获得喷嘴喉部容积等熵指数.

表 2 列出了利用迭代方法获得的标准氢喉部容积等熵指数  $k_v$ . 表 2 所列的  $k_v$  并不是该温度和压力条件下的  $k_v$  值, 而是对于此入口条件下, 喉

$$\begin{aligned} g_T &= \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\rho, \\ g_\rho &= \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T, \end{aligned} \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_\rho &= c_v + v\zeta\kappa, \\ \left(\frac{\partial h_t}{\partial \rho}\right)_T &= v^2\kappa(1 - T\zeta), \\ \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\rho &= \frac{c_v}{T}, \\ \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T &= -v^2\zeta\kappa. \end{aligned} \quad (11)$$

这里,  $v$ ,  $\zeta$  和  $\kappa$  分别为表比体积、等压体积膨胀系数和等温体积弹性模量. 此外, 变量  $(\partial w^2/\partial T)_\rho$  和  $(\partial w^2/\partial \rho)_T$  在真实气体模型部分并未出现, 现给出其亥姆霍兹函数计算式:

部处的气体流动特征参数  $k_v$  值. 其中, 当滞止温度范围为 150—250 K 时, 计算误差小于 0.1%; 当滞止温度范围为 250—450 K 时, 即使压力上升到 100 MPa, 误差不高于 0.04%.

虽然利用此解析方法经过牛顿迭代后可以精确地获得喉部重要参数, 但是求解过程繁琐复杂. 为了便于深入研究实际气体在喷嘴中的流动过程, 对于一些十分重要的基本流动参数 (如喉部容积等

熵指数  $k_v$ ), 急需一种快速计算式, 进而为今后更为复杂的研究提供可靠的计算模型. 为此, 本文

提出了一种获取最优的显式快速计算模型的回归算法.

表 2 不同滞止温度  $T_0$  和压力  $p_0$  条件下, 标准氢喷嘴喉部容积等熵指数

温度 $T_0$ /K	压力 $p_0$ /MPa										
	0.01	0.05	0.1	1	2	5	10	20	40	70	100
150	1.540708	1.541276	1.541986	1.554958	1.569796	1.617197	1.705106	1.899957	2.288207	2.777281	3.154034
180	1.494049	1.494501	1.495067	1.505332	1.51693	1.553026	1.617279	1.75514	2.030858	2.39397	2.690903
210	1.461869	1.462245	1.462716	1.471222	1.480767	1.510031	1.56083	1.66725	1.879433	2.165212	2.407238
240	1.440274	1.440597	1.441001	1.448286	1.456426	1.481153	1.523388	1.610325	1.782776	2.018023	2.22162
270	1.425764	1.426047	1.426401	1.432784	1.439896	1.461377	1.497671	1.571424	1.716939	1.917045	2.092746
300	1.415984	1.416237	1.416552	1.422237	1.42856	1.447582	1.479488	1.543713	1.669808	1.844164	1.998845
330	1.409412	1.40964	1.409925	1.415105	1.420743	1.437827	1.466336	1.523325	1.634746	1.789423	1.927738
360	1.405036	1.405243	1.405502	1.410167	1.415344	1.430852	1.456638	1.507921	1.607841	1.746969	1.872178
390	1.402163	1.402354	1.402592	1.406869	1.411615	1.425811	1.449355	1.496004	1.586644	1.713151	1.827612
420	1.400311	1.400487	1.400706	1.404654	1.409032	1.422115	1.443775	1.486571	1.569545	1.685582	1.791053
450	1.399137	1.399300	1.399503	1.403165	1.407225	1.419351	1.4394	1.478932	1.555453	1.662645	1.760469
480	1.398397	1.398549	1.398739	1.402151	1.405933	1.417225	1.435878	1.472602	1.543602	1.64321	1.734436
510	1.397922	1.398064	1.398241	1.401433	1.40497	1.415528	1.432957	1.467235	1.533449	1.626471	1.711939
540	1.397592	1.397726	1.397892	1.400888	1.404207	1.414113	1.43046	1.462585	1.524604	1.611845	1.692232
570	1.397329	1.397454	1.397611	1.400431	1.403555	1.412879	1.42826	1.458472	1.51678	1.598899	1.674767
600	1.397077	1.397195	1.397343	1.400005	1.402954	1.411753	1.426267	1.454768	1.509764	1.58731	1.659127

### 5 显式快速计算模型

本文提出的显式快速计算模型将逐步回归分析和进化算法相结合, 以期在方程项数最少条件下, 搜寻满足一定经验方程显著性和精度要求的最优解.

#### 5.1 数据预处理

最优化算法的目的是通过  $N$  组观察值估计出相关参数. 通过实验对  $K$  个参数进行  $N$  次独立的观察, 获得  $N$  组实验数据  $(y_i, O_{i1}, O_{i2}, \dots, O_{iK})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  ( $N > K$ ). 首先对数据进行归一化处理. 采用多元回归模型, 函数关系的基本形式可以表示为

$$\xi(\mathbf{O}, y, \boldsymbol{\omega}) = x_0(\mathbf{O}, y) - \sum_{k=1}^K \omega_k \cdot x_k(\mathbf{O}), \quad (15)$$

其中,  $\xi$  和  $\omega_k$  分别为随机误差和评估参数;  $x_i$  为  $\mathbf{O}$  的函数;  $\mathbf{O}$  代表独立变量  $O_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) 组成的向量. 当高斯误差最小时, 可以获得评估参数

$\omega_k$ . 高斯误差传递公式:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\xi(\mathbf{O}_i, y_i, \boldsymbol{\omega})^2}{\sigma_i^2}, \quad (16)$$

其中  $\sigma_i^2$  是独立实验点的总不确定度. 可采用高斯误差传递公式计算  $\sigma_i^2$

$$\sigma_i^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \sigma_{y_i}^2 + \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_k}\right)^2 \sigma_{O_{k,i}}^2, \quad (17)$$

其中,  $\sigma_{O_k}$  和  $\sigma_y$  分别为独立变量  $O_k, y$  的不确定度.

#### 5.2 最优进化策略

在本算法中, 对逐步回归方法进行了优化, 可在保证回归质量的前提下, 最大限度地减少参数的个数, 并且具有更少的计算量和更高的回归质量. 最优化回归方法的流程图如图 2 所示.

算法控制参数包括: 方程项总库 Bank 包含  $M$  个方程项, 初始化次数  $M_s$ , 种群个体总数为  $M_p$ , 种群最大代数为  $L_{\max}$ . 每一代进行逐步回归的方程个体数量为  $M_r$ , 每次变异的次数为  $M_m$ , 每个种群中方程项的最大个数为  $I$ .

算法首先进行  $M_s$  次初始尝试, 选出  $\chi^2$  最低的  $M_p$  个方程个体作为初始种群  $P$ ,  $P =$

$(P_1, P_2, \dots, P_{M_p})$ .

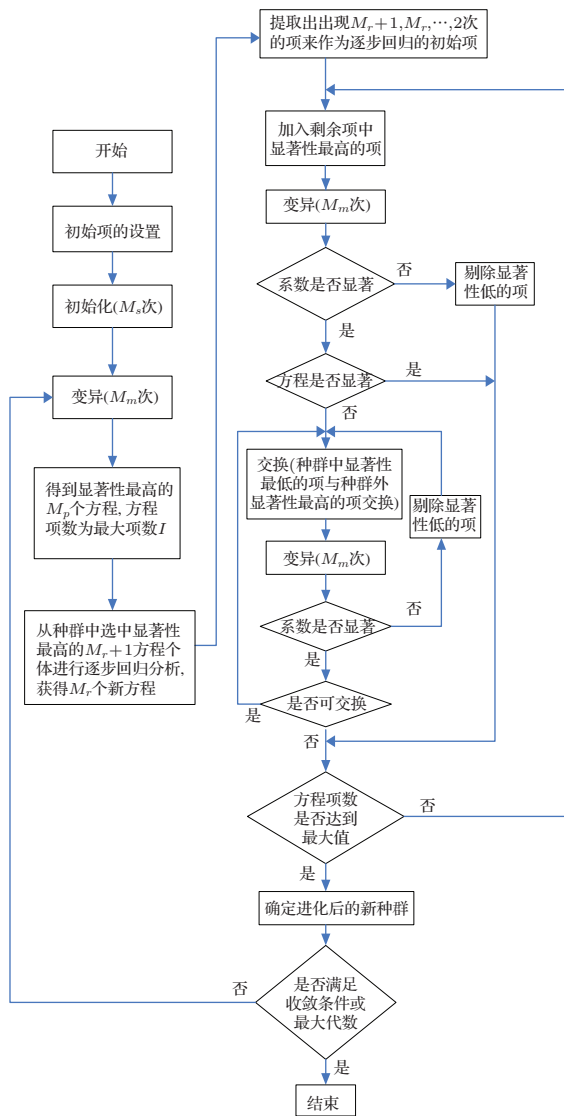


图2 最优化回归方法的流程图

算法下一个重要步骤是“变异”，该过程能有效地提高回归方程的质量。“变异”过程如下：

1) 随机选择有限个方程项对个体  $P_i$  中的方程项进行替换，产生新的个体  $P_{new}$ ，判断是否替换原有的  $P_{old}$ ；

2) 方程项的变异原则为变异项不超过个体  $P_i$  的方程项数的  $1/2$ ；随机选出需要替换的方程项；新方程项与原方程项的库编号相差不超过  $\pm 3$ ；新个体  $P_{new}$  中不能有重复的方程项；方程项编号不能超过  $M$ ；如果不满足要求，需重新变异；

3) 如果  $P_{new}$  的  $\chi^2_{new}$  小于  $P_{old}$  的  $\chi^2_{old}$  值，那么进行替换，否则不进行替换；

4) 重复上述步骤  $M_m$  次，本次变异结束。

变异完成之后，在  $M_p$  个个体中，尽管每个种

群可能有不同的方程项和显著性，但是总有一些方程项  $x_k$  多次出现。一般情况下，这些方程项对所构建的方程结构是最重要的。而具有较低  $\chi^2$  的个体中会包含更多的重要方程项。在此，从  $M_p$  个种群中选出  $M_r + 1$  个方程显著性最高的种群，分别统计出现次数为  $M_r + 1, M_r, \dots, 2$  的元素，作为初始的方程项，利用逐步回归产生新的种群。

在回归过程中，如果出现回归方程不显著，则需要“交换”操作。其基本思想是：将种群个体中显著性最低的项与库中剩余项显著性最高的项进行交换，如果能获得更低的  $\chi^2$ ，接受交换，否则不交换；已经被交换过的项不可重复交换；每次交换后进行  $M_m$  变异处理，以提高算法搜索速度；替换过程直至没有可交换的项为止。

逐步回归完成后可以产生  $M_r$  个新的具有更低  $\chi^2$  值的种群个体，用来替换旧种群中  $\chi^2$  值较大的  $M_r$  个个体，确定新一代种群。至此，算法结束本次循环，进入下一个循环。

### 5.3 逐步回归分析

上述算法需要从当前  $M_p$  个方程个体中选出  $M_r + 1$  个方程显著性最高的种群，分别统计出现次数为  $M_r + 1, M_r, \dots, 2$  的元素，将挑选出来的出现次数分别为  $M_r + 1, M_r, \dots, 2$  的元素作为逐步回归的初始项，进行逐步回归。

回归方程的相关系数矩阵  $L$  为

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{M1} & l_{1y} \\ l_{12} & l_{22} & \dots & l_{M2} & l_{2y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{M1} & l_{M2} & \dots & l_{MM} & l_{My} \\ l_{1y} & l_{2y} & \vdots & l_{My} & l_{yy} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

其中，

$$l_{kj} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_{ik} - \bar{x}_k)(x_{ij} - \bar{x}_j)}{\sigma_k \sigma_j} \quad (k, j = 1, 2, \dots, M), \quad (19)$$

$$l_{ky} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_{ik} - \bar{x}_k)(y_i - \bar{y})}{\sigma_k \sigma_y} \quad (k = 1, 2, \dots, M). \quad (20)$$

这里， $l_{kj}$  为  $x_k$  与  $x_j$  的相关系数， $l_{ky}$  为  $x_k$  与  $y$  的相关系数。

每次引入或剔除变量后都要按照一定的规则对  $\mathbf{L}^{(f)}$  进行逐步变换, 其中上标  $f$  为变换次数. 而每次引入的变量为所有变量中最显著的, 变量显著性采用  $F$  检验, 如果已加入的变量为  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , 要考察  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_M$  中是否有可选入的变量. 加入参数的显著性  $F$  计算公式如下:

$$F_j = (M - r - 2) \frac{(l_{jy}^{(f)})^2}{l_{jj}^{(f)} l_{M+1, M+1}^{(f)} - (l_{jy}^{(f)})^2} \quad (j = r + 1, r + 2, \dots, M). \quad (21)$$

设已进行过  $f - 1$  次消去变换,  $F_{r+1}, F_{r+2}, \dots, F_n$  中最大的是  $F_p$ , 对应的变量为  $x_p$ . 如果  $F_p$  大于设定的临界  $F$  值  $F_{cr}$ , 那么选入  $x_p$ , 否则不能选入. 假设  $x_p$  被选入, 对矩阵  $\mathbf{L}^{(f-1)}$  进行如下第  $f$  次消去变换:

$$l_{ij}^{(f)} = \begin{cases} 1/l_{pp}^{(f-1)} & (i = j = p), \\ -l_{ij}^{(f-1)}/l_{pp}^{(f-1)} & (i \neq p, j = p), \\ l_{ij}^{(f-1)}/l_{pp}^{(f-1)} & (i = p, j \neq p), \\ l_{ij}^{(f-1)} - l_{ip}^{(f-1)} \times l_{pj}^{(f-1)}/l_{pp}^{(f-1)} & (i \neq p, j \neq p). \end{cases} \quad (22)$$

在加入变量后, 要对已加入的变量  $x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}$  进行检验, 考察是否有可剔除的变量.

$$F_j = (M - r - 2) \frac{(l_{jy}^{(f)})^2}{l_{jj}^{(f)} l_{M+1, M+1}^{(f)}} \quad (j = 1, 2, \dots, r + 1). \quad (23)$$

同样, 若设  $F_q$  为  $F_1, F_2, \dots, F_{r+1}$  中的最小者, 对于给定的显著性水平, 确定临界值  $F_{cr}$ , 如果  $F_q$  低于  $F_{cr}$ , 则  $x_q$  应剔除. 对  $\mathbf{L}^{(f)}$  做  $(q, q)$  消去变换, 将  $\mathbf{L}^{(f)}$  变换为  $\mathbf{L}^{(f+1)}$ , 继续考察其余已选入的变量是否还有应剔除的, 直到没有变量可剔除为止, 此时, 转入对未选入的变量检验, 考察是否有应选入的.

当没有方程项可剔除时, 需要检验回归方程的显著性, 方程显著性检验公式如下:

$$F_e = \frac{S_R/M_a}{S_E/(N - M_a - 1)}, \quad (24)$$

其中,  $M_a$  为最终的回归方程项数;

$$S_E = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2, \quad S_R = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2$$

分别为残差平方和、回归平方和.

如果方程显著, 则继续从库中添加新的方程项, 直至项数达到最大值  $I$ ; 否则需要利用“交换”操作, 详见流程图 2. 无论何种情况, 最终均可获得新的种群个体.

## 6 回归结果与分析

利用上述回归方法对表 2 所列的标准氢喉部容积等熵指数  $k_v$  数据进行回归分析, 并最终获得如下回归经验方程:

$$k_v = \sum_{i=1}^{16} n_i \pi^{p_i} \tau^{t_i}, \quad (25)$$

其中  $\pi = p_0/p_c$  为对比压力. (25) 式系数项如表 3 所列.

表 3 标准氢喉部容积等熵指数  $k_v$  经验公式系数项

$i$	$n_i$	$p_i$	$t_i$
1	1.107 124 92	0	0
2	1.642 313 46	0	1
3	$-3.48923533 \times 10^{-4}$	0	-2
4	$1.73206622 \times 10^{-2}$	0	-1
5	$6.88856994 \times 10^{-2}$	1	1
6	$3.66743158 \times 10^{-3}$	1.5	2
7	$9.86118871 \times 10^{-1}$	1.5	4
8	$-4.93627099 \times 10^{-2}$	2.5	5
9	$-2.05330181 \times 10^{-5}$	3	2
10	$2.74985958 \times 10^{-5}$	4	5
11	$1.88237935 \times 10^{-13}$	4	-3
12	$-2.70619754 \times 10^{-9}$	4	-1
13	$6.01390001 \times 10^{-10}$	4.5	-1
14	$2.15024872 \times 10^{-11}$	5	0
15	$-3.56682180 \times 10^{-11}$	5	-1

由表 3 可见, 回归经验方程在 0.001 水平下显著, 回归标准偏差为 0.0089%, 平均残差为 0.0285%, 最大残差为 0.1781%. 下面利用更密集的 46453 个数据样本验证回归质量. 温度、压力范围不变, 但温度间隔为 1 K, 高于 1 MPa 的压力间隔为 1 MPa. 残差如图 3 所示. 此时, 预测偏差为 0.0493%, 平均残差为 0.0429%, 而最大残差不超过 0.2457%. 此外, 由于回归模型极大地减少了方程项数, 因此具有较好的抑制过拟合现象的能力. 进一步增加样本密度, 最大残差并没有明显增大,



可以认为在温度范围为300—600 K, 压力范围为0.01—100 MPa时, 回归模型具有较高精度, 计算不确定度小于0.05%.

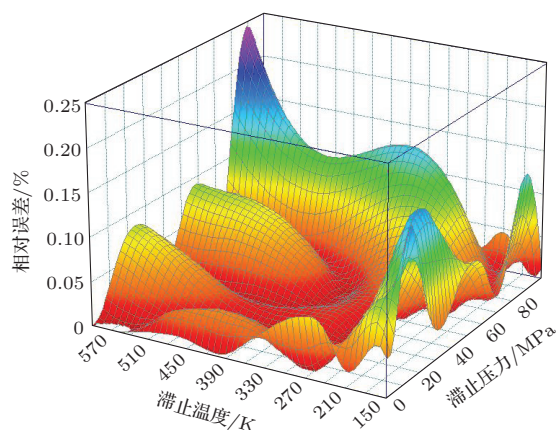


图3 新的46453个样本数据与回归公式之间的误差

## 7 结 论

随着临界流喷嘴越来越多地应用于高压氢气的流量测量与控制, 真实氢气在临界流喷嘴内部的复杂流动特性和规律需要加以研究. 结合基于显式亥姆霍兹能量方程的真实气体热物理模型, 并考虑临界流喷嘴自身结构特征, 本文利用流动过程中的熵焓变化关系, 并通过迭代最终获得了喉部容积等熵指数 $k_v$ . 这一表征真实气体流动情况的喉部无量纲参数. 为了便于进一步研究真实氢气在喷嘴中的复杂流动, 提出了一种最优化显式快速计算模型的回归算法. 该回归方法在逐步回归的基础上, 引进了进化算法中的选择、交换和变异等方式寻找显著性、精度最优的种群个体. 利用该算法最终获得了滞止温度范围为150—600 K和压力范围为0.01—100 MPa的喉部等熵指数 $k_v$ 快速计算经验公式. 回归标准偏差为0.0089%, 平均残差为0.0285%, 最大残差为0.1781%. 结果表明, 算法能快速搜索最优解, 在保证回归质量的前提下, 使得方程项数达到最少, 因此具有较好的抑制过拟合的能力. 此外, 本优化算法可进一步用于其他各类流体设备的流场特性参数模型的建立.

## 参考文献

[1] Fan J, Bao K, Duan D F, Wang L C, Liu B B, Cui T 2012 *Chin. Phys. B* **21** 086104

[2] Sun B G, Zhang D S, Liu F S 2012 *Int. J. Hydrogen Energ.* **37** 932

[3] Ni M, Leung M K H, Sumathy K, Leung D Y C 2006 *Int. J. Hydrogen Energ.* **31** 1401

[4] Zhou J J, Chen Y G, Wu C L, Zheng X, Fang Y C, Gao T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4853 (in Chinese) [周晶晶, 陈云贵, 吴朝玲, 郑欣, 房玉超, 高涛 2009 物理学报 **58** 4853]

[5] Zheng J Y, Kai F M, Liu Z Q, Chen R, Chen C P 2006 *Acta Energ. Solar. Sin.* **27** 1168 (in Chinese) [郑津洋, 开方明, 刘仲强, 陈瑞, 陈长聘 2006 太阳能学报 **27** 1168]

[6] Ding H B, Wang C, Zhao Y K 2014 *Int. J. Hydrogen Energ.* **39** 3947

[7] Nagao J, Matsuo S, Suetsugu S, Toshiaki S, Kim H D 2013 *Int. J. Hydrogen Energ.* **38** 9043

[8] Li C H, Mickan B 2013 *Flow Meas. Instrum.* **33** 212

[9] Wang C, Ding H B, Wang H X 2013 *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **62** 1154

[10] Lim J M, Yoon B H, Oh Y K, Park K A 2011 *Flow Meas. Instrum.* **22** 402

[11] Morioka T, Nakao S, Ishibashi M 2011 *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. Ser. B* **77** 1088

[12] Johnson R C 1964 *J. Basic Eng.* **86** 519

[13] Kim J H, Kim H D, Setoguchi T 2008 *J. Propul. Power* **24** 715

[14] Kim J H, Kim H D, Setoguchi T 2009 *Proc. Inst. Mech. Eng. C: J. Mech. Eng. Sci.* **223** 617

[15] Nagao J, Matsuo S, Mohammad M, Setoguchi T, Kim H D 2012 *Int. J. Turbo Jet Eng.* **29** 21

[16] Redlich O, Kwong J N S 1949 *Chem. Rev.* **44** 233

[17] Lee B L, Kesler M F 1975 *AIChE J.* **21** 510

[18] Peng D Y, Robinson D B 1976 *Ind. Eng. Chem. Fund.* **15** 59

[19] Du C, Xu M Y, Mi J C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6331 (in Chinese) [杜诚, 徐敏义, 米建春 2010 物理学报 **59** 6331]

[20] Lemmon E W, Tillner R 1999 *Fluid Phase Equilib.* **165** 1

[21] Leachman J W, Jacobsen R T, Penoncello S G 2009 *J. Phys. Chem. Ref. Data.* **38** 721

[22] Travis J R, Koch D P, Xiao J, Xu Z 2013 *Int. J. Hydrogen Energ.* **38** 8132

[23] Setzmann U, Wagner W 1989 *Int. J. Thermophys.* **10** 1103

[24] Wang N, Chen K A 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2873 (in Chinese) [王娜, 陈克安 2010 物理学报 **59** 2873]

[25] Xu Z X, Ma R Z 1990 *Acta Phys. Sin.* **39** 875 (in Chinese) [徐祖雄, 马如璋 1990 物理学报 **39** 875]

[26] Papadrakakis M, Lagaros N D, Thierauf G, Cai J B 1998 *Eng. Comput.* **15** 12

[27] Ratkowsky D A 1993 *J. Ind. Microbiol.* **12** 195

[28] Long W, Jiao J J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110507 (in Chinese) [龙文, 焦建军 2012 物理学报 **61** 110507]

[29] ISO 9300 2005 *Measurement of Gas Flow by Means of Critical Flow Venturi Nozzles* (London: British Standards Institution) pp4–10

[30] Stewart D G, Watson J T R, Vaidya A M 1999 *Flow Meas. Instrum.* **10** 27

# Analytical calculation and evolutionary regression method for isentropic exponent of hydrogen gas at the throat of critical nozzle\*

Ding Hong-Bing Wang Chao<sup>†</sup> Zhao Ya-Kun

(Key Laboratory of Process Measurement and Control of Tianjin, School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

( Received 8 March 2014; revised manuscript received 2 April 2014 )

## Abstract

As one of the most promising renewable energy resources, the hydrogen has been used in the fields such as aerospace, industry, and fuel cells. Critical nozzles are widely used for mass flow-rate measurement of high hydrogen gas, since the flow measurement process is not affected by its downstream flow disturbance. The flow rule of real hydrogen gas through a critical nozzle is complicated and the thermophysical property of hydrogen at the nozzle throat is vital to the accurate measurement of hydrogen flow. In this paper, based on explicit Helmholtz energy and entropy-enthalpy equations, the basic flow parameter and isentropic volume change exponent are analytically calculated. In addition, an accurate explicit equation is determined by the nonlinear regression analysis where the ways of selection, exchange and mutation derived from evolutionary algorithm are introduced to search for optimal population individual. The regression standard deviation is 0.0089%, mean residual deviation is 0.0285%, and maximum residual deviation is 0.1781%. The result shows that it not only can rapidly find the optimal solution which has the lowest number of equation items and the great overfitting suppression capability, but also has a high computation accuracy. This algorithm can also be applied to modeling flow characteristic parameters for every other flow device.

**Keywords:** real hydrogen gas, flow characteristic, evolutionary algorithm, stepwise regression

**PACS:** 47.27.nf, 51.30.+i, 06.20.-f, 47.40.Hg

**DOI:** 10.7498/aps.63.164701

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61072101) and the Program for New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education of China (Grant No. NCET-10-0621).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: wangchao@tju.edu.cn