

Duffing 系统随机相位抑制混沌与随机共振并存现象的机理研究

李爽 李倩 李俊瑞

Mechanism for the coexistence phenomenon of random phase suppressing chaos and stochastic resonance in Duffing system

Li Shuang Li Qian Li Jiao-Rui

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 64, 100501 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.100501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.100501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I10>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

太赫兹场和倾斜磁场对超晶格电子动力学特性调控规律研究

[Nonlinear electron transport in superlattice driven by a terahertz field and a tilted magnetic field](#)

物理学报.2015, 64(9): 090502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.090502>

一种基于人工蜂群算法的混沌信号盲分离方法

[A blind source separation method for chaotic signals based on artificial bee colony algorithm](#)

物理学报.2015, 64(9): 090501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.090501>

随机激励下双稳态压电俘能系统的相干共振及实验验证

[Broadband energy harvesting from coherence resonance of a piezoelectric bistable system and its experimental validation](#)

物理学报.2015, 64(8): 080503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.080503>

具有时滞反馈的非对称双稳系统中的振动共振研究

[Vibrational resonance in an asymmetric bistable system with time-delay feedback](#)

物理学报.2015, 64(7): 070507 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.070507>

外加磁场压电悬臂梁能量采集系统的磁化电流法磁力研究

[Magnetic force of piezoelectric cantilever energy harvesting system with an externally applied magnetic field based on magnetizing current method](#)

物理学报.2015, 64(6): 060502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.060502>

Duffing系统随机相位抑制混沌与随机共振 并存现象的机理研究*

李爽^{1)†} 李倩²⁾ 李俊瑞¹⁾

1)(西安财经学院统计学院, 西安 710100)

2)(陕西科技大学设计与艺术学院, 西安 710021)

(2014年7月13日收到; 2014年12月24日收到修改稿)

针对随机相位作用的Duffing混沌系统, 研究了随机相位强度变化时系统混沌动力学的演化行为及伴随的随机共振现象. 结合Lyapunov指数、庞加莱截面、相图、时间历程图、功率谱等工具, 发现当噪声强度增大时, 系统存在从混沌状态转化为有序状态的过程, 即存在噪声抑制混沌的现象, 且在这一过程中, 系统亦存在随机共振现象, 而且随机共振曲线上最优的噪声强度恰为噪声抑制混沌的参数临界点. 通过含随机相位周期力的平均效应分析并结合系统的分岔图, 探讨了噪声对混沌运动演化的作用机理, 解释了在此过程中随机共振的形成机理, 论证了噪声抑制混沌与随机共振的相互关系.

关键词: 混沌, 随机相位, 随机共振, Lyapunov指数

PACS: 05.45.-a, 05.40.-a

DOI: 10.7498/aps.64.100501

1 引言

噪声在实际工程环境中广泛存在, 因此研究噪声对系统的影响具有很强的现实意义. 一般情况下, 人们常直观地认为噪声的存在会降低系统运动的规律性, 对系统的实际运动起着障碍作用. 然而, 近些年来人们在非线性科学领域的研究发现, 很多情况下噪声起着反直观的建设性作用, 如: 噪声促使系统的稳定化、噪声抑制混沌、噪声诱导同步、随机共振等现象.

在噪声抑制混沌、促进系统有序状态形成方面, Matsumoto和Tsuda^[1]首次报道了某些系统在合适的噪声强度情况下将会达到更加有序的状态; Ramesh和Narayanan^[2]讨论了在服从均匀分布噪声环境中几种非反馈方法的混沌控制. 杨晓丽和徐伟^[3]讨论了有界噪声对系统抑制混沌、诱导混沌的双重作用功效; Wei和Leng^[4]研究了白噪声

对Duffing系统动力学行为的影响, 发现白噪声可增强系统的稳定性; Yoshimoto等^[5]研究了噪声对Belousov-Zhabotinsky映射的混沌影响, 发现噪声可以抑制系统的混沌行为. 文献^[6—8]分别讨论了随机相位对混沌的控制, 证实在一定的条件下随机相位也可以实现系统稳定化, 促使系统从混沌运动转向规则的有序运动, 从而可以实现混沌控制. 近几年来, 其他研究者亦对上述问题进行了广泛探讨^[9].

随机共振是一种非常著名的现象, 通常是双稳或单稳非线性系统中存在的随着噪声强度增强系统的信噪比(SNR)等量化指标呈现钟形曲线的现象. 其中位于量化指标峰值处的噪声强度是最优噪声强度水平, 在此位置系统的信号信息明显被噪声放大. 因此, 随机共振是一种很有意义的现象, 在过去的30年中已在物理、化学、生物学等领域进行了大量的理论与试验研究^[10—17]. 目前, 除了传统

* 国家自然科学基金(批准号: 11202155)、陕西省教育厅基金(批准号:2013JK0595)和陕西省自然科学基金(批准号: 2014JQ9372)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: lish2006onetwo@163.com

的随机共振研究外, 人们也对混沌系统中的随机共振现象进行了一些研究, 如文献 [11] 讨论了分叉点附近发生的随机共振, 文献 [12] 研究了混沌内部激发条件下系统的无噪声随机共振, 文献 [13] 讨论了单势阱混沌系统中的随机共振, 文献 [14] 研究了混沌干扰条件下自适应随机共振系统设计问题.

尽管噪声抑制混沌与随机共振现象都分别在各自领域得到了广泛研究, 但很少报道过它们两者并存的现象. 文献 [17] 在噪声与周期力作用下两个耦合的混沌系统中, 发现随机共振与噪声诱导有序并存的现象, 且随机共振最优噪声水平恰为 Lyapunov 指数最小值处, 指出混沌系统中噪声诱导有序是一种随机共振现象. 这一结果很新颖, 但相关动力学机理的深入分析仍有待开展, 而且由于文献 [17] 中 Lyapunov 指数最小值恰好为零, 因此对于 Lyapunov 指数最小值非零的情形, 随机共振曲线最优噪声水平与 Lyapunov 指数最小值点、零点的对应关系尚不明确.

本文在我们前期研究工作 [8] 的基础上, 通过考察随机相位噪声对混沌 Duffing 系统的影响, 发现了噪声抑制混沌与随机共振并存的现象, 并且从混沌过渡到非混沌的 Lyapunov 指数临界值恰为随机共振的最优噪声水平, 最后从动力学角度探讨了随机相位噪声的作用机理.

2 随机相位作用下的 Duffing 系统

2.1 噪声抑制混沌

考察如下带有随机相位噪声的 Duffing 系统:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} - x + x^3 = \gamma \cos[\omega t + \sigma \xi(t)], \quad (1)$$

这里 α 和 γ 分别表示系统阻尼系数和周期力振幅, $\xi(t)$ 表示标准的高斯白噪声, 它满足: $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$, 这里 $\langle \cdot \rangle$ 表示均值. 下面我们固定 $\alpha = 0.25$, $\gamma = 0.27$, $\omega = 1.0$, 研究随机相位对系统 (1) 动力学的影响.

当 $\sigma = 0$, 方程 (1) 是一个确定性 Duffing 系统, 图 1 给出了它的 Poincaré 截面和时间历程图. 由图 1 可见, 系统的吸引子为典型的混沌吸引子, 时间历程图不规则, 因此, 此时系统为混沌运动状态. 为了定量刻画系统从混沌转变为非混沌运动这一过程, 以每隔 0.001 的大小增加噪声强度 σ 的值, 图 2 给出了系统最大 Lyapunov 指数随噪声强度的变化曲线, 这里 Lyapunov 指数利用了 Wolf 算

法 [18], 并对 100 个样本轨道平均后所得. 从图 2 可见, 开始时系统 Lyapunov 指数为正, 但当噪声强度达到临界值 $\sigma_c \cong 0.022$ 时, 最大 Lyapunov 指数突然从正变为负, Lyapunov 指数在 $\sigma_c \cong 0.022$ 处接近于零, 此后, 增大噪声强度, 系统 Lyapunov 指数的符号始终为负. 图 3 和图 4 给出了 $\sigma = 0.03$ 与 $\sigma = 0.1$ 情形系统的 Poincaré 截面和时间历程图. 结合图 3 和图 4 可知, 系统呈现稳定的吸引子, 时间历

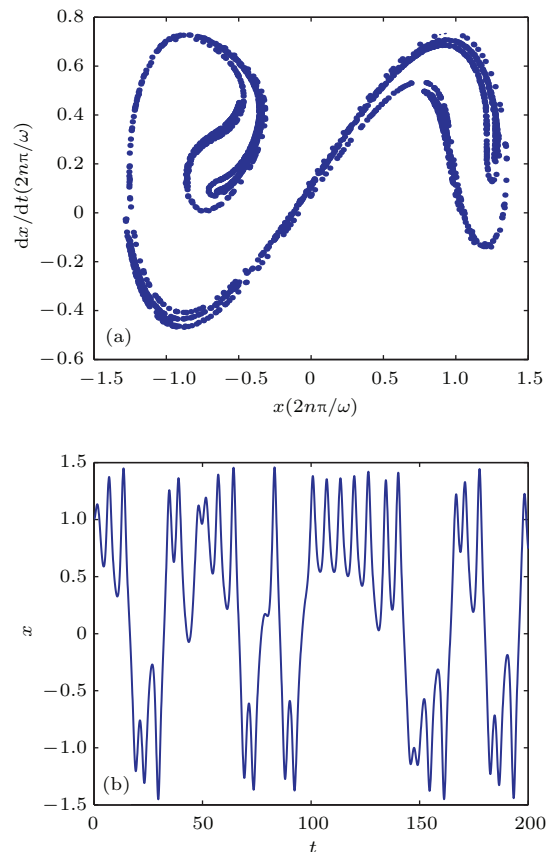


图 1 原确定性系统运动状态 ($\sigma = 0$) (a) Poincaré 截面; (b) 时间历程图

Fig. 1. Dynamical behavior of the system (1) with $\sigma = 0$: (a) Poincaré section; (b) time history.

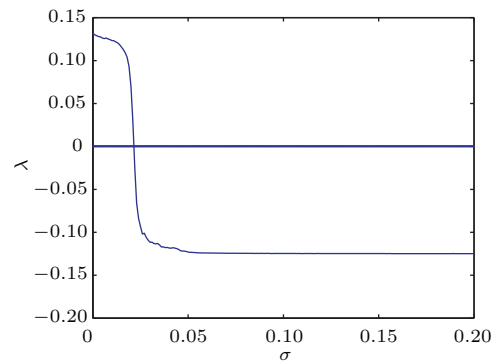


图 2 最大 Lyapunov 指数 λ 随噪声强度 σ 的变化曲线
Fig. 2. Largest Lyapunov exponent λ versus noise intensity σ .

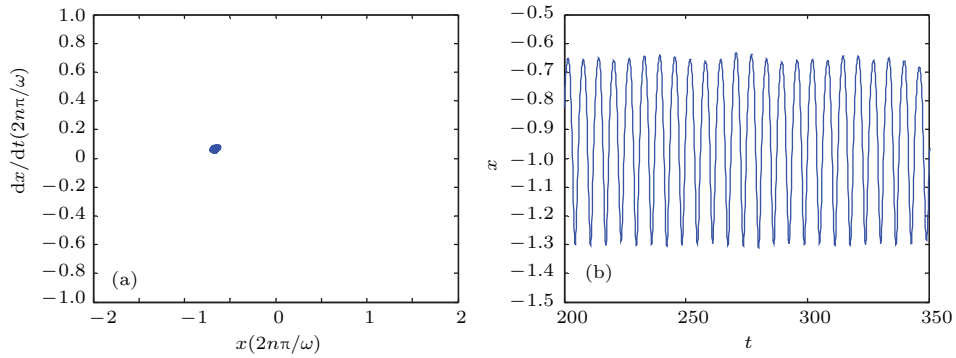


图3 系统(1)在参数 $\sigma = 0.03$ 时的运动状态 (a) Poincaré 截面; (b) 时间历程图

Fig. 3. Dynamical behavior of the system (1) with $\sigma = 0.03$: (a) Poincaré section; (b) time history.

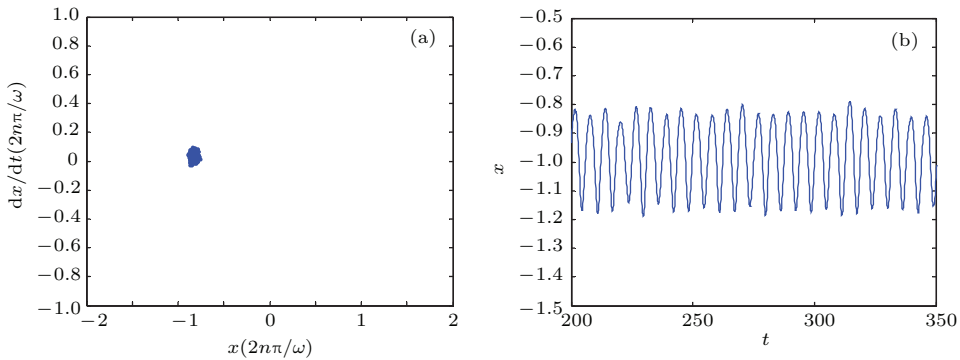


图4 系统(1)在参数 $\sigma = 0.1$ 时的运动状态 (a) Poincaré 截面; (b) 时间历程图

Fig. 4. Dynamical behavior of the system (1) with $\sigma = 0.1$: (a) Poincaré section; (b) time history.

程在瞬态阶段之后较为规则,但随着噪声强度增大时间历程随机性波动增强.因此原系统的混沌运动在临界值 $\sigma_c \cong 0.022$ 后转变为非混沌运动,且此后随着噪声强度的增大,系统围绕周期轨道随机波动程度增强.

2.2 随机共振

目前,用于刻画随机共振的指标有很多,如信噪比、驻留时间分布、功率谱放大因子等.本文利用响应幅值(response amplitude)来刻画随机共振现象,该指标定义为 $\eta = R_1/R_0$ ^[19,20],这里 R_1 表示噪声背景下输入信号频率处系统响应的功率谱峰高度, R_0 为确定性情形下的谱峰高度.如果 η 关于 σ 呈现钟形变化曲线且在最优噪声水平 σ_{\max} 处达到最大值,则存在随机共振现象.

对于给定的噪声强度,我们对100个样本轨道平均来计算 η 的值.当噪声强度 σ 增加时,图5给出了 η 与 σ 的变化曲线.从图5可见,随着噪声强度 σ 的增加, η 将增加,在 $\sigma_{\max} \cong 0.022$ 处达到最大值,随后随着 σ 的增加 η 将减小,从而呈现钟形变

化曲线图像,在 $\sigma_{\max} \cong 0.022$ 处 η 接近1.5,说明噪声的作用使得系统信号功率谱峰明显提高,即系统发生了随机共振.图6给出了 $\sigma = 0$ 与 $\sigma = 0.022$ 情形下系统的功率谱曲线,易见噪声的存在确实提高了原系统中周期1运动的谱峰.值得注意的是,此处随机共振最优噪声水平 σ_{\max} 恰为噪声抑制混沌的临界点 σ_c ,即随机共振最优噪声水平对应于最大Lyapunov指数的零点位置.

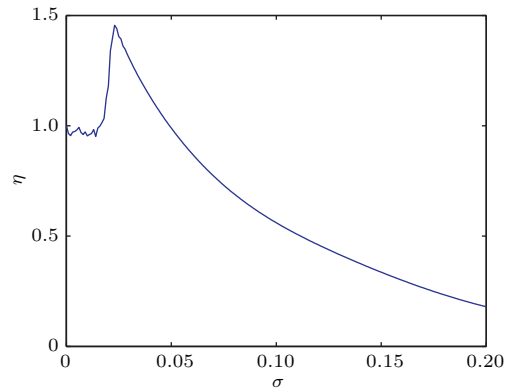


图5 响应幅值 η 随噪声强度 σ 的变化曲线

Fig. 5. The varying curve of the response amplitude η with the noise intensity σ .

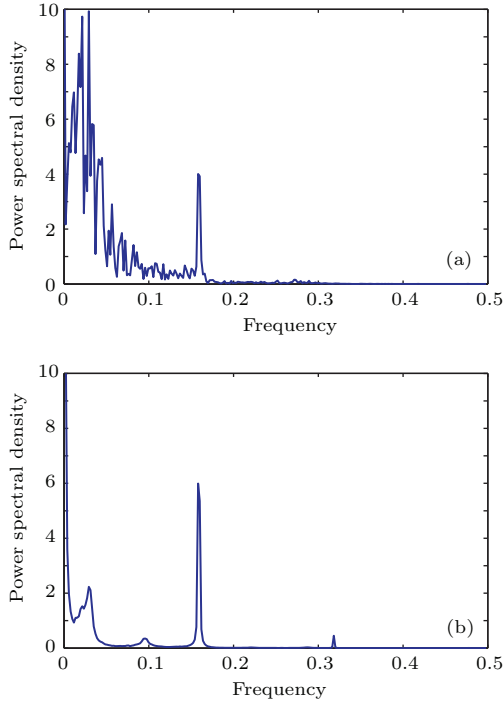


图6 不同噪声强度 σ 下系统 (1) 的功率谱 (a) $\sigma = 0$; (b) $\sigma = 0.022$
 Fig. 6. The power spectral of the system (1) under different noise intensity σ : (a) $\sigma = 0$; (b) $\sigma = 0.022$.

3 随机相位的作用机理

下面分析随机相位的作用机理. 方程 (1) 带有随机相位噪声的周期力可写为

$$\begin{aligned} & \gamma \cos[\omega t + \sigma \xi(t)] \\ &= \gamma \cos[\sigma \xi(t)] \cos(\omega t) - \gamma \sin[\sigma \xi(t)] \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (2)$$

由于 $\xi(t)$ 为标准高斯白噪声, 因此 $\langle \sin[\sigma \xi(t)] \rangle = 0$, 即有

$$\gamma \langle \cos[\omega t + \sigma \xi(t)] \rangle = \bar{\gamma} \cos(\omega t), \quad (3)$$

这里 $\bar{\gamma} = \gamma \langle \cos[\sigma \xi(t)] \rangle$. 由于 $\xi(t)$ 为高斯白噪声, 数值仿真中经常使用下式模拟, $\xi(t) = \frac{\Delta W(t)}{\Delta t}$, 其中 $\Delta W(t)$ 为维纳过程的增量且服从 $N(0, \Delta t)$ 的正态分布, Δt 为时间增量. 因此

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \gamma \langle \cos[\sigma \xi(t)] \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\sigma \frac{y}{\Delta t}\right) e^{-\frac{y^2}{2\Delta t}} dy \\ &= \gamma e^{-\frac{\sigma^2}{2\Delta t}}. \end{aligned} \quad (4)$$

在实际数值仿真中 Δt 事前已经确定, 因此由上式可见增大噪声强度 σ , $\gamma \langle \cos[\sigma \xi(t)] \rangle$ 将减小, 特别是当 $\sigma \rightarrow \infty$, $\bar{\gamma} \rightarrow 0$. 因此由 (3) 式, 从平均意义上来

看, 增大噪声强度 σ , 相当于原来确定性系统中周期力振幅减小, 从而存在某一合适 σ 值, 使得原系统在相空间大范围区域的混沌运动发生改变, 变为某一局部空间范围内的非混沌运动形式. 这为总体上理解随机相位噪声抑制混沌指明了方向. 为了验证上述分析的正确性, 我们给出了确定性系统 (5) 关于周期力振幅 γ 的分岔图 (系统其他参数同上), 如图 7 所示, 以此考察 γ 减小时确定性系统的运动规律.

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} - x + x^3 = \gamma \cos(\omega t). \quad (5)$$

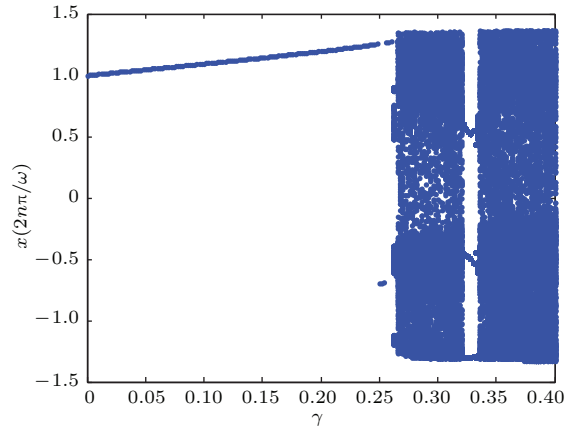


图7 系统 (5) 关于参数 γ 的分岔图
 Fig. 7. The bifurcation diagram of the system (5) with the parameter γ .

由图 7 可见, 若减小周期力振幅 γ , 系统 (5) 最终将从混沌运动过渡到稳定的周期 1 运动状态, 因此对于系统 (1) 来说增大噪声强度总体上相当于原确定性系统 (5) 周期激励幅值减小, 最终原来的混沌运动在随机噪声作用下将被抑制. 为了进一步考察噪声作用下系统 (1) 的运动与 γ 变化时系统 (5) 运动间是否存在差异, 结合图 7, 取参数 $\gamma = 0.325$ 与 $\gamma = 0.35$ 两种情形予以讨论, 其中前者位于图 7 中的周期窗口, 后者位于最右边的混沌区. 图 8 和图 9 分别展示了 $\gamma = 0.325$ 时系统 (1) 的运动状态与 Lyapunov 指数关于 σ 的变化情况. 由图 8 和图 9 可见, 随着 σ 增大, 系统将首先由周期三运动转化为混沌运动, 然后再由混沌运动转化为非混沌运动, 且此后继续增大 σ , 系统一直为非混沌运动状态. 图 10 给出了 $\gamma = 0.35$ 时系统 (1) 的 Lyapunov 指数关于 σ 的变化曲线. 由图 10 可见, 系统 (1) 由混沌运动最终仍将过渡为非混沌运动状态, 但系统 (1) 在随机相位作用下的运动稍微有别于确定性系统 (5) 减小 γ 时的运动情况, 这是因为

系统(5)在减小幅值 γ 时将首先过渡为周期三运动(见图7),然后是混沌运动,最终转变为非混沌.但系统(1)在增大 σ 时并不经过周期三,原因在于含有随机相位噪声的周期力(2)具有随机性,周期三离混沌仅一步之遥,在随机波动下周期三并不稳定,经过激变形成混沌,这也是上述 $\gamma = 0.325$ 时周期三运动首先转化为混沌运动的原因.因此,系统(1)在随机相位作用下的运动稍有别于确定性系统(5)减小 γ 时的运动,两者存在细微差别.但最终总体来说,增大噪声强度相当于原确定性系统周期激励幅值减小.

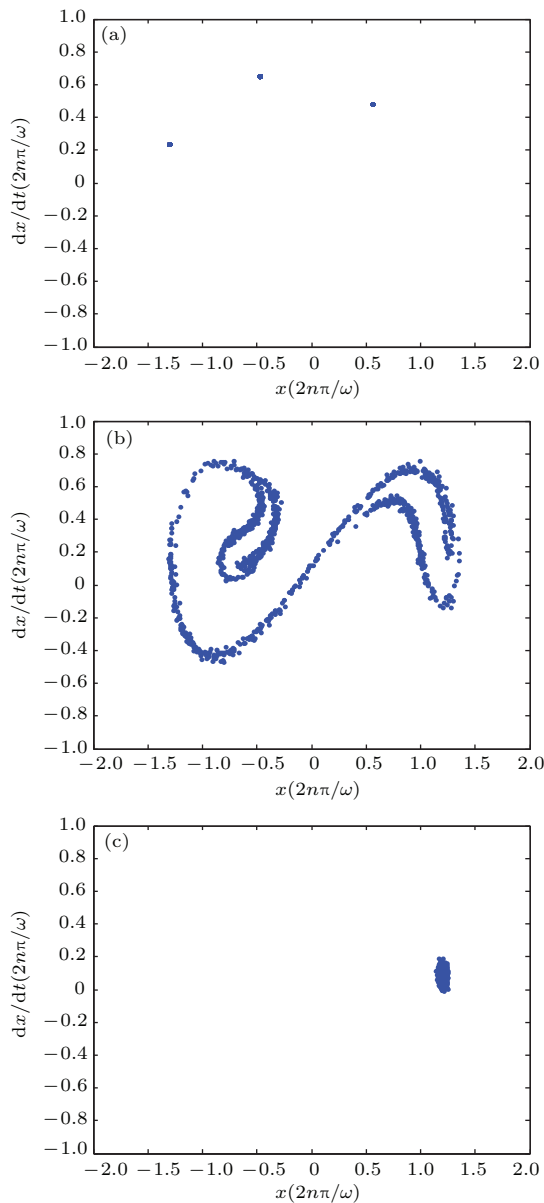


图8 不同噪声强度下系统的运动状态($\gamma = 0.325$) (a) $\sigma = 0$; (b) $\sigma = 0.05$; (c) $\sigma = 0.1$
 Fig. 8. Dynamical behaviors of the system (1) when $\gamma = 0.325$: (a) $\sigma = 0$; (b) $\sigma = 0.05$; (c) $\sigma = 0.1$.

最后,随机共振的发生是由于随机相位促使系统转化为非混沌状态,系统的有序程度增强,因此随机共振曲线最优噪声强度刚好对应于混沌转变为非混沌运动的临界点处,随后继续增大噪声强度,过量的噪声促使系统在新的稳定态附近随机波动(见图3和图4),且随着噪声强度的增大,在稳定态处停留时间减小,在其附近随机波动性增大,因此输入信号频率处系统响应谱峰高度又随之降低.总之,本文中随机共振现象的形成是由于随机相位抑制了混沌,系统实现了有序状态转变这一缘故,而随机共振曲线最优噪声强度刚好位于Lyapunov指数的零点处.

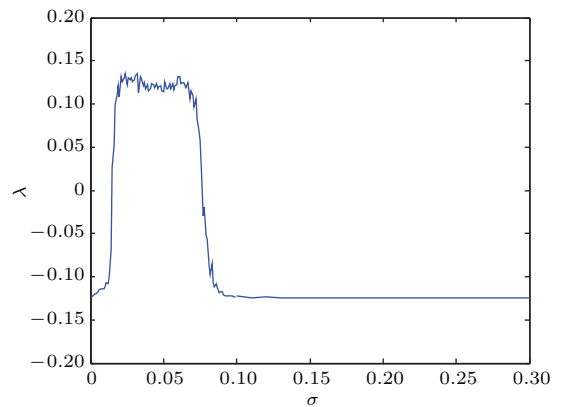


图9 最大Lyapunov指数 λ 随噪声强度 σ 的变化曲线($\gamma = 0.325$)
 Fig. 9. Largest Lyapunov exponent λ versus noise intensity σ when $\gamma = 0.325$.

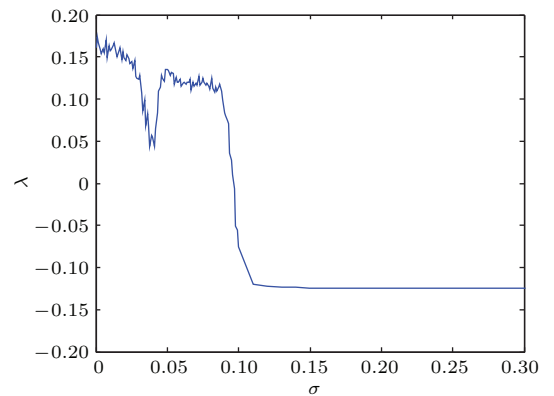


图10 最大Lyapunov指数 λ 随噪声强度 σ 的变化曲线($\gamma = 0.35$)
 Fig. 10. Largest Lyapunov exponent λ versus noise intensity σ when $\gamma = 0.35$.

4 结 论

通过本文随机相位对Duffing混沌系统的作用可以得到如下结论: 1) 随机相位抑制混沌运动的临

界值恰为随机共振曲线最优噪声水平处; 2) 随机相位强度的增加总体来说相当于原确定性系统周期力振幅的减小, 因此最终必然存在某一噪声强度使得系统大范围的混沌运动解体, 呈现小范围的非混沌运动, 此时系统运动规则程度增强, 表现为输入信号频率处的响应幅值增大; 此后过量的噪声尽管不会改变系统 Lyapunov 指数的符号, 但将增加系统在稳定运动附近的随机波动程度, 降低输入信号频率处的响应幅值. 因此本文随机共振现象形成的原因是随机相位抑制了混沌, 系统实现了有序状态的这一动力学机理.

参考文献

- [1] Matsumoto K, Tsuda I 1983 *J. Stat. Phys.* **31** 87
- [2] Ramesh M, Narayanan S 1999 *Chaos, Soliton. Fract.* **10** 1473
- [3] Yang X L, Xu W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3722 (in Chinese) [杨晓丽, 徐伟 2009 物理学报 **58** 3722]
- [4] Wei J G, Leng G 1997 *Appl. Math. Comput.* **88** 77
- [5] Yoshimoto M, Shirahama H, Kurosawa S 2008 *J. Chem. Phys.* **129** 014508
- [6] Lei Y M, Xu W, Xu Y, Fang T 2004 *Chaos, Soliton. Fract.* **21** 1175
- [7] Xu Y, Mahmoud G M, Xu W, Lei Y M 2005 *Chaos, Soliton. Fract.* **23** 265
- [8] Li S, Xu W, Li R H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1049 (in Chinese) [李爽, 徐伟, 李瑞红 2006 物理学报 **55** 1049]
- [9] Gu Y F, Xiao J 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 160506 (in Chinese) [古元凤, 肖剑 2014 物理学报 **63** 160506]
- [10] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [11] Zhang G J, Xu J X 2005 *Chaos, Soliton. Fract.* **27** 1056
- [12] Jüingling T, Benner H, Stemler T, Just W 2008 *Phys. Rev. E* **77** 036216
- [13] Arathi S, Rajasekar S 2014 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **19** 4049
- [14] Lu K, Wang F Z, Zhang G L, Fu W H 2013 *Chin. Phys. B* **22** 120202
- [15] Zhang L Y, Jin G X, Cao L, Wang Z Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 120502
- [16] Wang K K, Liu X B 2014 *Chin. Phys. B* **23** 010502
- [17] Yamazaki H, Yamada T, Kai S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 4112
- [18] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, Vastano J A 1985 *Physica D* **16** 285
- [19] Qian M, Zhang X J 2001 *Phys. Rev. E* **65** 011101
- [20] Zhang X J 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** 7473

Mechanism for the coexistence phenomenon of random phase suppressing chaos and stochastic resonance in Duffing system*

Li Shuang^{1)†} Li Qian²⁾ Li Jiao-Rui¹⁾

1) (School of Statistics, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710100, China)

2) (College of Art and Design, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710021, China)

(Received 13 July 2014; revised manuscript received 24 December 2014)

Abstract

Noise, which is ubiquitous in real systems, has been the subject of various and extensive studies in nonlinear dynamical systems. In general, noise is regarded as an obstacle. However, counterintuitive effects of noise on nonlinear systems have recently been recognized, such as noise suppressing chaos and stochastic resonance. Although the noise suppressing chaos and stochastic resonance have been studied extensively, little is reported about their relation under coexistent condition. In this paper by using Lyapunov exponent, Poincaré section, time history and power spectrum, the effect of random phase on chaotic Duffing system is investigated. It is found that as the intensity of random phase increases the chaotic behavior is suppressed and the power response amplitude passes through a maximum at an optimal noise intensity, which implies that the coexistence phenomenon of noise suppressing chaos and stochastic resonance occurs. Furthermore, an interesting phenomenon is that the optimal noise intensity at the SR curve is just the critical point from chaos to non-chaos. The average effect analysis of harmonic excitation with random phase and the system's bifurcation diagram shows that the increasing of random phase intensity is in general equivalent to the decreasing of harmonic excitation amplitude of the original deterministic system. So there exists the critical noise intensity where the chaotic motion of large range disintegrates and non-chaotic motion of small scope appears, which implies the enhancing of the regularity of system motion and the increasing of the response amplitude at the input signal frequency. After that, the excess noise will not change the stability of the system any more, but will increase the degree of random fluctuation near the stable motion, resulting in the decreasing of the response amplitude. Therefore, the formation of stochastic resonance is due to the dynamical mechanism of random phase suppressing chaos.

Keywords: chaos, random phase, stochastic resonance, Lyapunov exponent

PACS: 05.45.-a, 05.40.-a

DOI: [10.7498/aps.64.100501](https://doi.org/10.7498/aps.64.100501)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11202155), the Education Department Foundation of Shaanxi, China (Grant No. 2013JK0595), and the Natural Science Foundation of Shaanxi, China (Grant No. 2014JQ9372).

† Corresponding author. E-mail: lish2006onetwo@163.com