

高次谐波的 Guo-Åberg-Crasemann 理论及其截断定律

余朝 孙真荣 郭东升

Guo-Åberg-Crasemann theory for high harmonic generation and its cutoff law

Yu Chao Sun Zhen-Rong Guo Dong-Sheng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 124207 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.124207

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.124207>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I12>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

KTP 倍频器件温度适应性扩展研究

Study on temperature adaptability extension of KTP frequency-doubling device

物理学报.2015, 64(9): 094205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.094205>

空气中等离子光栅诱导探测光丝三次谐波辐射放大的实验研究

Efficient generation of third harmonic radiation of air filament induced by plasma grating

物理学报.2014, 63(18): 184206 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.184206>

利用椭圆高斯光束产生 266nm 紫外连续激光

Generation of 266 nm continuous-wave with elliptical Gaussian beams

物理学报.2014, 63(5): 054204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.054204>

高非线性光纤中四波混频的磁控机理研究

Research on magnetic control mechanism of four-wave mixing in highly nonlinear fiber

物理学报.2013, 62(2): 024213 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.024213>

飞秒强激光脉冲驱动 Ne 高次谐波蓝移产生相干可调谐极紫外光实验研究

Investigation of tunable coherent XUV light source by high harmonics generation using intense femtosecond laser pulses in Ne

物理学报.2013, 62(2): 024212 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.024212>

# 高次谐波的Guo-Åberg-Crasemann理论 及其截断定律\*

余朝<sup>1)†</sup> 孙真荣<sup>1)</sup> 郭东升<sup>1)2)‡</sup>

1)(华东师范大学物理系, 精密光谱科学与技术国家重点实验室, 上海 200062)

2)(北京大学物理学院, 北京 100871)

(2014年11月13日收到; 2014年12月21日收到修改稿)

将Guo-Åberg-Crasemann形式散射理论推广到高次谐波产生过程, 获得了高次谐波产生概率公式. 利用这一公式, 计算了不同惰性气体原子的高次谐波谱. 理论分析和数值计算显示高次谐波有新的截断定律  $q_c \hbar \omega = (9 - 4\sqrt{2}) U_p + (2\sqrt{2} - 1) I_p \approx 3.34U_p + 1.83I_p$ , 其中,  $U_p$  为电子的有质动能,  $I_p$  为原子电离能,  $\hbar \omega$  为激光光子能量,  $q_c$  为高次谐波的截断阶数. 这一截断定律与近期Popmintchev等 (Popmintchev et al. 2012 *Science* **336** 1287) 的实验观测符合得很好.

**关键词:** 高次谐波, 截断定律, 贝塞尔函数, 光电定律

**PACS:** 42.65.Ky, 32.80.Rm, 03.65.Nk

**DOI:** 10.7498/aps.64.124207

## 1 引言

激光诱导的高次谐波产生 (HHG) 是强激光物理领域中最重要现象之一. 由于在制备 X 光激光和阿秒脉冲中有巨大的应用前景, 已对 HHG 进行了大量的实验和理论研究. 高次谐波光谱呈现了一些共同的特点, 如包络呈平台状和高能端急剧的截断. 截断处的光子能量则提供了可利用的最大光子能量. 对高次谐波的研究常见的理论方法有对含时薛定谔方程的数值积分方法、基于强场近似的 Lewenstein 模型<sup>[1]</sup>, 以及 Corkum<sup>[2]</sup> 提出的三步模型. 但这些方法用的都是经典或半经典的物理, 将光场看作经典光场即电磁波来处理, 而不是量子化的光场.

研究强场激光与原子相互作用的一种全量子理论方法是用基于 Guo-Åberg-Crasemann (GAC) 提出的非微扰形式散射理论. 过去的二十年间该理论在处理多光子电离<sup>[3]</sup>、Kapitza-Dirac 效应<sup>[4-6]</sup>、

域上电离<sup>[7-11]</sup> 以及原子多能级系统精确解等<sup>[12]</sup> 方面取得了一系列的成果.

文献<sup>[13, 14]</sup> 最先参照 GAC 理论研究了高次谐波, 在研究过程中, 为简化讨论引入了一些假设. 为更加精确地描述谐波辐射过程, 本文直接从 GAC 理论<sup>[15,16]</sup> 出发推导谐波辐射公式<sup>[17]</sup>, 并且用此公式计算了不同的惰性气体与不同强度、不同波长的激光产生的高次谐波谱. 研究获得了高次谐波谱和新的高次谐波截断定律<sup>[18]</sup>.

我们的研究表明, 电子在高强度光子场内的跃迁振幅由普通贝塞尔函数给定, 贝塞尔函数的阶数代表了放出光子数 (负阶数代表吸收). 我们注意到在 Keldysh-Faisal-Reiss 理论中, 贝塞尔函数也有重要意义. 例如在研究光电子角分布时我们认为其由贝塞尔函数惟一决定<sup>[9]</sup>, 但其他理论仍试图用勒让德函数确定. 本文从贝塞尔函数的截断性质出发, 利用爱因斯坦光电定律在强光场中决定的动力学条件研究得出了新的高次谐波截断定律. 实验上发现高次谐波后, 为了

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11004060, 11027403, 51132004) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [hua\\_lianxin@163.com](mailto:hua_lianxin@163.com)

‡ 通信作者. E-mail: [dsguophd@163.com](mailto:dsguophd@163.com)

描述平台的长度和截断能量, 截断定律作为一条经验规律  $q_c \hbar \omega = 3U_p + I_p$  首先由 Krause 等<sup>[19]</sup> 提出, 其中,  $U_p$  为电子的有质动能,  $I_p$  为原子电离能,  $\hbar \omega$  为激光光子能量,  $q_c$  为高次谐波的截断阶数. 而后, Corkum<sup>[2]</sup> 和 Levestein 等<sup>[1]</sup> 从半经典的理论将截断定律分别修正为  $q_c \hbar \omega = 3.17U_p + I_p$  和  $q_c \hbar \omega = 3.17U_p + 1.32I_p$ .

我们发现: 作为纯粹数学现象, 当自变量固定于一正数时普通贝塞尔函数系列的值也呈平台并有截断现象, 非常类似高次谐波谱呈现的特性. 既然非微扰量子电动力学<sup>[16]</sup> 中, 电子在光场中的跃迁振幅可表为一个普通的贝塞尔函数, 而高次谐波的产生仅为电子与光子相互作用, 其截断定律应从贝塞尔函数的性质推出. 近期的实验观测数据<sup>[20]</sup> 显然与我们的公式符合得很好.

本文先介绍 GAC 理论推广到高次谐波时获得的高次谐波公式, 并由此计算了激光与 He, Ne, Ar 以及 Kr 原子相互作用产生的高次谐波谱. 重点分析不同强度的激光驱动 Ar 原子产生的高次谐波谱, 研究了高次谐波谱截断值的性质. 从贝塞尔函数的截断性质与高次谐波的关系出发, 数学得出了新的截断定律, 用几何图解法进行了不同的证明, 并与 GAC 理论推出的谐波谱公式的计算做了对比. 本文的三种方法数学演绎法、图解法和能谱的产生率算法都支持同一结论.

## 2 高次谐波的 GAC 理论

基于 GAC 形式散射理论, 我们推导出了高次谐波跃迁概率公式<sup>[17]</sup>. 这个高次谐波是单原子与单模激光相互作用产生的. 下面的公式中我们选取  $\hbar = 1$ ,  $c = 1$ , 以及  $e = -|e|$ . 这些公式能够计算不同原子与任意波长、任意强度的激光相互作用产生的高次谐波. 高次谐波的总跃迁概率公式是

$$\frac{dW}{d\Omega_{\mathbf{k}'}} \Big|_{\mathbf{k}'//\mathbf{k}} = \frac{q\omega^4 e^2 m_e}{(2\pi)^8 c^2} \left| \frac{T_1 + T_2 + T_3}{D} \right|^2, \quad (1)$$

$$\text{其中, } D = \frac{eg'}{m_e (2\pi)^3} \left( 2m_e^3 \omega^3 \right)^{1/2},$$

$$\begin{aligned} T_1 = D \times & \sum_{j \geq [e'_b] + 1 + q} (j - e'_b - q) \\ & \times \int d\Omega_{\mathbf{P}} \Phi_f(\mathbf{P})^* \Phi_i(\mathbf{P}) \chi_{q-j}(z_c, z_s) \\ & \times [\boldsymbol{\varepsilon}'^* \cdot \mathbf{P} \chi_{-j}(z_c, z_s)]^* \\ & + |e| \Lambda [\boldsymbol{\varepsilon}'^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \chi_{-j-1}(z_c, z_s)]^* \end{aligned}$$

$$+ \boldsymbol{\varepsilon}'^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* \chi_{-j+1}(z_c, z_s)^*], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} T_2 = D \times & \sum_{j' \geq [e'_b] + 1} (j' - e'_b) \\ & \times \int d\Omega_{\mathbf{P}} \Phi_f(\mathbf{P})^* \Phi_i(\mathbf{P}) \chi_{-j'}(z_c, z_s)^* \\ & \times \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}'^* \cdot \mathbf{P} \frac{u_p - j' - q}{Bq} \chi_{-j'-q}(z_c, z_s)^* \right. \\ & + |e| \Lambda \left[ \boldsymbol{\varepsilon}'^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \frac{u_p - j - q + 1}{B(q-1)} \right. \\ & \times \chi_{-j'-q-1}(z_c, z_s)^* \\ & \left. \left. + \boldsymbol{\varepsilon}'^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* \frac{u_p - j - q - 1}{B(q+1)} \right. \right. \\ & \left. \left. \times \chi_{-j'-q+1}(z_c, z_s)^* \right] \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3 = D \times & \sum_{j \geq [e'_b] + 1 + q} (j - e_b - q) \\ & \times \int d\Omega_{\mathbf{P}} \Phi_f(\mathbf{P})^* \Phi_i(\mathbf{P}) \chi_{-j}(z_c, z_s)^* \\ & \times \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}'^* \cdot \mathbf{P} \frac{u_p - j}{-Bq} \chi_{-j+q}(z_c, z_s) \right. \\ & + |e| \Lambda \left[ \boldsymbol{\varepsilon}'^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \frac{u_p - j}{-B(q-1)} \chi_{-j+q-1}(z_c, z_s) \right. \\ & \left. \left. + \boldsymbol{\varepsilon}'^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* \frac{u_p - j}{-B(q+1)} \chi_{-j+q+1}(z_c, z_s) \right] \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

以及

$$e'_b = e_b + u_p = (I_p + U_p) / \omega,$$

$$P = \sqrt{2m_e \omega (j - e'_b)},$$

$$z_c = \frac{2|e|\Lambda}{m_e \omega} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad z_s = \frac{1}{2} u_p \cos \xi e^{i\theta},$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j \geq [e'_b] + 1} \int d^3 \mathbf{P} \\ = & \sum_{j=[e'_b] + 1}^{\infty} m_e \omega \sqrt{2m_e \omega (j - [e'_b])} \int d\Omega_{\mathbf{P}}, \end{aligned}$$

$$B \equiv 1 - \mathbf{P} \cdot \mathbf{k} / (m_e \omega).$$

利用上面的公式, 我们计算了 He, Ne, Ar 以及 Kr 与波长为 800 nm、强度为  $1.0 \times 10^{15}$  W/cm<sup>2</sup> 的线偏振激光相互作用产生的高次谐波谱, 结果显示在图 1. 这些谐波谱都具有相同的特点: 明显的平台区以及锋利的截断结构. 观察上述高次谐波谱的截断位置, 我们发现传统的截断定律  $q_c \hbar \omega = 3.17U_p + 1.32I_p$  所确定的截断值都小于我们的计算结果, 而我们的计算结果与一个新的截断定律  $q_c \hbar \omega = (9 - 4\sqrt{2}) U_p + (2\sqrt{2} - 1) I_p \approx 3.34U_p + 1.83I_p$  符合得更好.

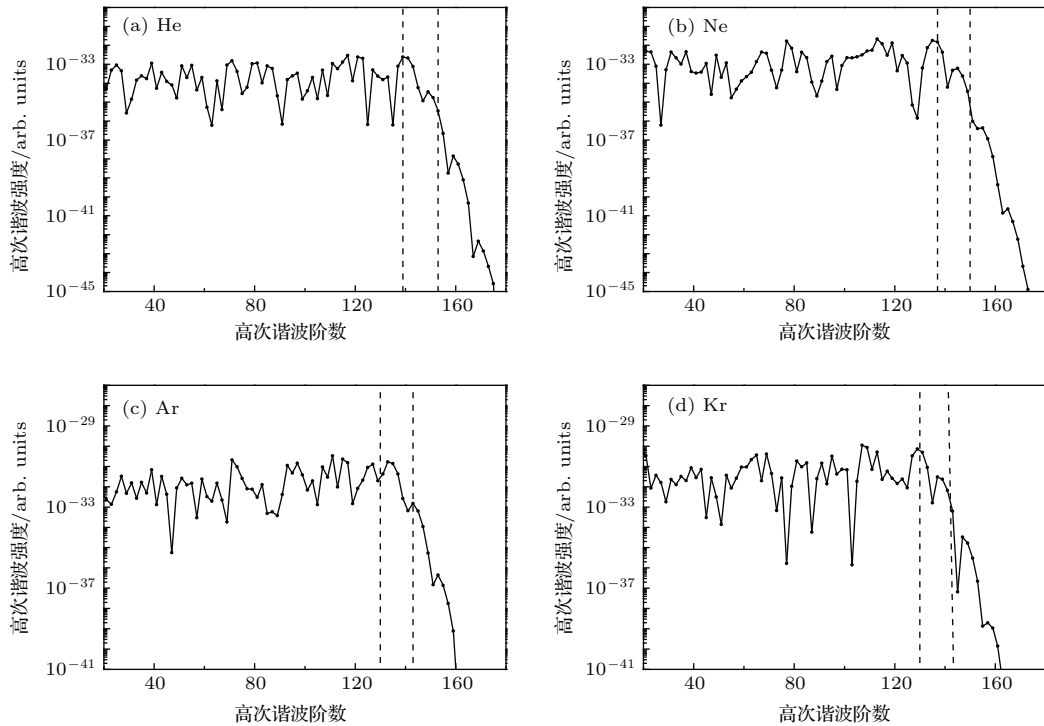


图1 (a) He, (b) Ne, (c) Ar, (d) Kr 原子与波长为 800 nm、强度为  $1.0 \times 10^{15} \text{ W/cm}^2$  的激光相互作用产生的高次谐波谱. 每个子图中左边虚线对应的是公式  $q_c \hbar \omega = 3.17U_p + 1.32I_p$  所得的截断点, 右边虚线对应的是公式  $q_c \hbar \omega = (9 - 4\sqrt{2}) U_p + (2\sqrt{2} - 1) I_p \approx 3.34U_p + 1.83I_p$  所得的截断点

Fig. 1. High harmonic generation spectra generated from (a) He, (b) Ne, (c) Ar, and (d) Kr atom driven by the laser pulses of wavelength 800 nm and intensities  $1.0 \times 10^{15} \text{ W/cm}^2$ . The left dashed line and right dashed line in each subgraph refer to the cutoff orders from the cutoff law  $q_c \hbar \omega = 3.17U_p + 1.32I_p$  and  $q_c \hbar \omega = (9 - 4\sqrt{2}) U_p + (2\sqrt{2} - 1) I_p \approx 3.34U_p + 1.83I_p$ , respectively.

图2是Ar原子与800 nm线偏振、强度  $3 \times 10^{14} - 20 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$  的激光相互作用产生的高次谐波谱中观测得到的截断值. 从图2可以看出, 本文的计算结果与高次谐波截断公式  $q_c \hbar \omega = (9 - 4\sqrt{2}) U_p + (2\sqrt{2} - 1) I_p$  符合得很好.

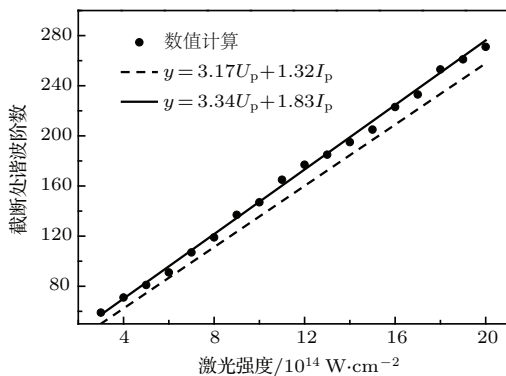


图2 从高次谐波谱的计算中获得的截断点. 高次谐波谱由Ar原子与强度为  $3 \times 10^{14} - 20 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$  的激光相互作用产生

Fig. 2. The cutoff orders obtained from the high harmonic generation spectra, which are generated from Ar atom driven by the laser pulses of wavelength 800 nm and intensities  $3 \times 10^{14} - 20 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2$ .

为什么本文计算结果与推导的高次谐波截断公式符合得很好, 且都比Corkum<sup>[2]</sup> 推导的“3.17”截断定律更长呢? 要回答这个问题, 必须深入分析本文公式的细节. 一般情况下, 一个好的量子力学理论, 所有类型的守恒都应该自动满足. 如果一个跃迁过程在数学上是允许的, 那么它应该是符合所有的守恒定律. 因此, 在计算时必须把所有的子过程、子通道都考虑进去. 在本文的公式中, 参与产生高次谐波的光子不仅有电离的光子, 而且有未参与电离但参与了光电子上转换的光子. 光子未参与电离, 但参与光电子上转换从而产生高次谐波, 这些光子的过程可以称之为伴随拉曼效应. 正是由于伴随拉曼效应, 导致本文计算得出的谐波比Corkum<sup>[2]</sup> 用半经典理论计算得到的截断位置更长.

### 3 从贝塞尔函数性质出发推出高次谐波截断定律

为了研究贝塞尔函数的截断性质, 需要用到第一类贝塞尔函数的递推关系:

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x), \quad (5)$$

$$J_{n-1}(x) - \frac{n}{x}J_n(x) = J'_n(x), \quad (6)$$

$$J_n(x) - J_{n+1}(x) = J'_n(x). \quad (7)$$

基于上述递推关系证明下面的引理.

**引理 1** 对于自变量大于零的正整数阶贝塞尔函数  $J_n(x)$ , 当且仅当在它的极值点  $x_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ , 贝塞尔函数  $J_{n-1}(x)$  和  $J_{n+1}(x)$  相交.

**证明** 贝塞尔函数有极值点, 但没有驻点. 这个引理的成立由上述的递推关系可以明显推出. 证毕.

注意到  $x_i (i = 1, 2, 3, \dots)$  是  $n$  的函数, 例如  $x_1(n)$  是  $J_n(x)$  的第一个极值点, 且  $x_1(n)$  是极大值.

**引理 2** 当且仅当在贝塞尔函数  $J_n(x)$  的极大值点  $x_i (i = 1, 3, 5, \dots)$ , 不等关系  $J_{n-1}(x) > J_{n+1}(x)$  变成  $J_{n-1}(x) < J_{n+1}(x)$ ; 当且仅当在贝塞尔函数  $J_n(x)$  的极小值点  $x_i (i = 2, 4, 6, \dots)$ , 不等关系  $J_{n-1}(x) < J_{n+1}(x)$  变成  $J_{n-1}(x) > J_{n+1}(x)$ .

**证明** 当  $x = x_i (i = 1, 3, 5, \dots)$ , 贝塞尔函数  $J_n(x)$  的值为极大值, 且  $J'_n(x) = 0$ . 当  $x < x_i$ , 由于  $J'_n(x) < 0$ , 根据方程 (7), 可得  $J_{n-1}(x) > J_{n+1}(x)$ . 同理可证, 当  $x > x_i$ , 由于  $J'_n(x) < 0$ , 可得  $J_{n-1}(x) < J_{n+1}(x)$ . 因此, 不等关系  $J_{n-1}(x) > J_{n+1}(x)$  变成  $J_{n-1}(x) < J_{n+1}(x)$ . 同理可得引理中关于  $x_i (i = 2, 4, 6, \dots)$  的证明. 证毕.

根据引理 2, 我们可以做如下定义.

**定义** 当  $x$  为某个固定正值时, 贝塞尔函数集  $J_j(x) (j = 1, 2, \dots, n_c, \dots)$  的截断值  $n_c$  定义如下:

$$x_1(n_c) \leq x, \quad x_1(n_c + 1) > x. \quad (8)$$

换句话说,  $n_c = \max\{n | x_1(n_c) \leq x\}$ ;  $n_c + 1 = \min\{n | x_1(n_c) > x\}$ .

**定理 1** 当  $x$  为一个固定的正数时,  $x$  为贝塞尔函数集  $J_j(x) (j = 1, 2, \dots, n_c, \dots)$  截断值  $n_c$  的一个上限, 即

$$n_c < x. \quad (9)$$

**证明** 我们取  $x_1 \equiv x_1(n_c)$ , 由贝塞尔函数截断值的定义易知  $x_1 \leq x$ . 将  $x = x_1$  代入方程 (5) 和 (6) 可得

$$\begin{aligned} x_1 J_{n_c-1}(x_1) &= n_c J_{n_c}(x_1), \\ J_{n_c-1}(x_1) &= J_{n_c+1}(x_1) < J_{n_c}(x_1). \end{aligned}$$

注意贝塞尔函数的第一个极值为最大值, 且前述 3 个贝塞尔函数在  $x_1$  处均为正数, 可得

$$n_c < x_1 \leq x.$$

证毕.

图 3 是一个关于贝塞尔函数截断值的例子. 从图 3 可以明显地看出, 当贝塞尔函数的阶数达到自变量的值时, 函数值迅速减小, 其包络呈现明显的截止.

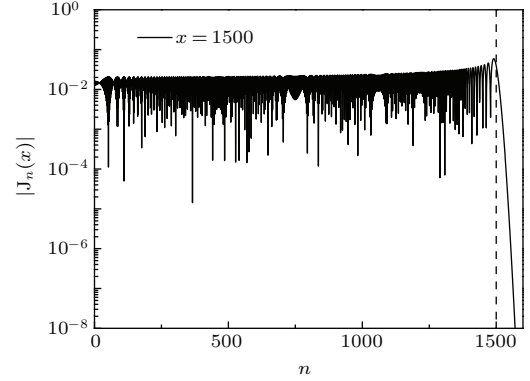


图 3 自变量  $x$  固定时, 贝塞尔函数  $J_n(x)$  的绝对值随阶数  $n$  的变化. 其中自变量  $x = 1500$ , 约等于文献 [20] 中  $u_p$  的值; 虚线与  $J_n(x)$  的绝对值交点是其截断值的位置. Fig. 3. Variation of Bessel functions  $J_n(x)$  with integer  $n$ . The argument  $x$  is set as 1500, which is approximately equal to the  $u_p$  in Ref. [20]. The cross point between the dash line and the absolute value of  $J_n(x)$  is the cutoff position.

光电离中电子和多光子满足的唯一的动力学条件就是强光场条件下的爱因斯坦光电定律:

$$\frac{P^2}{2m_e} = \hbar\omega(j - u_p - e_b), \quad (10)$$

其中,  $u_p = U_p/(\hbar\omega)$ ,  $e_b = I_p/(\hbar\omega)$ ,  $U_p$  为电子的有质动能,  $I_p$  为电子电离能. 电子放出 (包括吸收)  $j$  个光子的跃迁振幅, 可以用一个贝塞尔函数  $J_j(x)$  来描述, 其中  $x = 2\sqrt{u_p/(m_e\hbar\omega)}P$ , 则根据方程 (10) 有

$$x = \sqrt{8u_p(j - u_p - e_b)}. \quad (11)$$

贝塞尔函数  $J_j(x)$  的自变量  $x$  满足方程 (10), 我们称之为满足动力学条件.

**定理 2** 满足动力学条件且  $u_p \geq e_b$  的贝塞尔函数集  $J_j(x) (j = 1, 2, \dots, n_c, \dots)$ , 有两个截断值:

$$\begin{aligned} j_{c1} &= 4u_p - 2\sqrt{2u_p^2 - 2u_p e_b}, \\ j_{c2} &= 4u_p + 2\sqrt{2u_p^2 - 2u_p e_b}. \end{aligned} \quad (12)$$

**证明** 根据方程 (9) 和 (11), 可得下述不等式:

$$|j_c| \leq \sqrt{8u_p(j - u_p - e_b)}.$$

由此可得

$$j_c^2 - 8u_p j_c + 8u_p^2 + 8u_p e_b = 0.$$

求解上述方程, 可得指标  $j$  的两个截断值:

$$j_{c1} = 4u_p - 2\sqrt{2u_p^2 - 2u_p e_b},$$

$$j_{c2} = 4u_p + 2\sqrt{2u_p^2 - 2u_p e_b}.$$

证毕.

**推论** 满足动力学条件且  $u_p \geq e_b$  的贝塞尔函数集  $J_{-j}(x) (j = 1, 2, \dots, n_c, \dots)$ , 有两个截断值  $-j_{c1}$  和  $-j_{c2}$ .

考虑贝塞尔函数  $J_{-j-s}(x)$ , 其中  $x$  由方程(11)给出,  $j$  为多光子电离过程中吸收的光子数,  $s = 1, 2, 3, \dots$  为光子模上转换过程中吸收的非电离的额外光子数.

**定理3** 有额外光子吸收的负阶数的贝塞尔函数集  $J_{-j-s}(x)$ , 其中自变量  $x$  满足动力学条件即满足方程(8), 且  $u_p \geq e_b$ , 额外吸收的光子数  $s$  有一个上限  $s \leq u_p - e_b$  且贝塞尔函数集的截断值是

$$j_c = 3u_p + e_b. \quad (13)$$

**证明** 考虑到定理1和方程(11), 很容易得到下述关于截断值  $j_c$  的方程:

$$(j_c + s)^2 \leq 8u_p(j - u_p - e_b).$$

考虑边界条件, 得到下述关于  $j_c + s$  的方程:

$$(j_c + s)^2 - 8u_p(j_c + s) + 8u_p^2 + 8u_p(e_b + s) = 0.$$

这个方程的实数解条件是

$$s \leq u_p - e_b. \quad (14)$$

取  $s_c = u_p - e_b$ , 并且把  $s_c$  代入方程(14), 得到截断值的公式,

$$j_c = 3u_p + e_b.$$

证毕.

**定理4**  $u_p \geq e_b$  时的高次谐波的截断值有一个上限:

$$2\left(4u_p - 2\sqrt{2u_p^2 - 2u_p e_b}\right) + u_p - e_b. \quad (15)$$

**证明** 考虑贝塞尔函数  $J_{-j-s+q}(x)$ , 其中  $q$  定义了谐波的阶数. 根据定理1, 可以得到下述不等式:

$$-j_c - (u_p - e_b) \leq \sqrt{8u_p(j - u_p - e_b)}.$$

求解上述不等式的等号部分, 且取  $j_c = j_{c1}$ , 根据定理2可以得到截断值的上限

$$q_c \leq 2\left(4u_p - 2\sqrt{2u_p^2 - 2u_p e_b}\right) + u_p - e_b.$$

证毕.

当光场强度较强  $u_p \geq e_b$  时(例如Xe与800 nm的线偏振激光反应产生高次谐波, 光场强度大于  $2.1 \times 10^{14}$  W/cm<sup>2</sup>), 上述截断值可以取下面的近似值:

$$q_c = (9 - 4\sqrt{2})u_p + (2\sqrt{2} - 1)e_b$$

$$\approx 3.3431457u_p + 1.8284271e_b. \quad (16)$$

我们给出一个图解法的例证, 详细描述见图4, 其中  $u_p = 1500$  以及  $e_b = 80$ , 约等于文献[20]的实验结果.

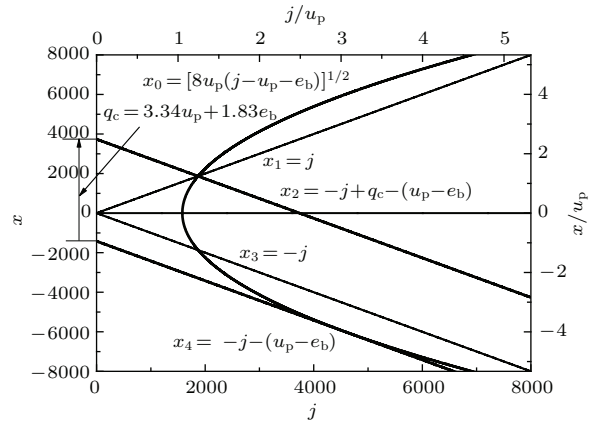


图4 图解法获得的高次谐波的截断值. 横坐标定义了贝塞尔函数的阶数, 纵坐标显示了贝塞尔函数的自变量为正或负时的函数值; 图中  $u_p = 1500$  以及  $e_b = 80$ , 约等于文献[20]的实验结果

Fig. 4. The cutoff orders of harmonics obtained by the geometric method. The horizontal axis denotes the orders of Bessel functions. The positive vertical axis shows the value of the argument of Bessel functions with positive and negative even indices. The negative vertical axis shows the negative value of the argument of Bessel functions with negative odd indices. To illustrate the recent experimental results [20],  $u_p = 1500$  and  $e_b = 80$  are selected.

## 4 结 论

基于GAC形式散射理论, 本文完整地推导出了高次谐波跃迁概率公式. 根据推导出的公式, 我们计算了He, Ne, Ar和Kr原子与激光产生的高次谐波谱, 这些光谱可以作为高次谐波的进一步研究的参考. 研究上述高次谐波谱, 我们分析了高次谐波的截断位置. 发现这些计算结果与一个新的高次谐波截断定律符合得很好, 这意味着我们从理论上延长了高次谐波谱的平坦区. 这些计算结果可以与已知的高次谐波截断定律[8]互相参考.

基于强光条件下的爱因斯坦光电定律, 我们用纯数学的方法从普通贝塞尔函数的性质, 导出了激光诱导的高次谐波的截断定律  $q_c \hbar \omega = (9 - 4\sqrt{2})U_p + (2\sqrt{2} - 1)I_p \approx 3.34U_p + 1.83I_p$ , 对已存在20年的通用截断定律  $q_c \hbar \omega = 3.17U_p + 1.32I_p$  做出了修正. 新截断定律的两个系数与基本物理常数无关, 为代数常数. 而截断定律本身对基本物理常数的依赖已经包含在两个相互作用能  $U_p$  和  $I_p$

里. 最新的实验数据<sup>[20]</sup>和光谱的理论计算数据<sup>[17]</sup>都支持本文的结果. 较高的截断值, 是由于伴随的拉曼效应导致.

### 参考文献

- [1] Lewenstein M, Balcou Ph, Yu M, Ivannov, L'Huillier A, Corkum P B 1994 *Phys. Rev. A* **49** 2117
- [2] Corkum P B 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1994
- [3] Guo D S, Drake G W 1992 *Phys. Rev. A* **45** 6622
- [4] Guo D S 1996 *Phys. Rev. A* **53** 4311
- [5] Li X F, Zhang J T, Xu Z Z, Fu P M, Guo D S, Freeman R R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 233603
- [6] Guo D S, Freeman R R, Wu Y S 1998 *Phys. Rev. A* **58** 521
- [7] Guo D S 1990 *Phys. Rev. A* **42** 4302
- [8] Zhang J T, Zhang W, Xu Z Z, Li X F, Fu P M, Guo D S, Freeman R R 2002 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **35** 4809
- [9] Bai L H, Zhang J T, Xu Z Z, Guo D S 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 193002
- [10] Guo D S, Zhang J T, Xu Z Z, Li X F, Fu P M, Freeman R R 2003 *Phys. Rev. A* **68** 043404
- [11] Zhang J T, Bai L H, Gong S Q, Xu Z Z, Guo D S 2007 *Opt. Express* **15** 7261
- [12] Guo D S 2013 *Front. Phys.* **8** 39
- [13] Gao L H, Li X F, Fu P M, Freeman R R, Guo D S 2000 *Phys. Rev. A* **61** 063407
- [14] Gao J, Shen F, Eden J G 2000 *Phys. Rev. A* **61** 043812
- [15] Guo D S, Åberg T 1988 *J. Phys. A: Math. Gen.* **21** 4577
- [16] Guo D S, Åberg T, Crasemann B 1989 *Phys. Rev. A* **40** 4997
- [17] Yu C, Zhang J T, Sun Z W, Sun Z R, Guo D S 2014 *Front. Phys.* DOI: 10.1007/s11467-014-0429-x
- [18] Guo D S, Yu C, Zhang J T, Gao J, Sun Z W, Sun Z R 2015 *Front. Phys.* **10** 215
- [19] Krause L J, Schafer K J, Kulander K C 1993 *Phys. Rev. Lett.* **68** 3535
- [20] Popmintchev T, Chen M C, Popminchev D, Arpin P, Brown S, Alisauskas S, Andriukaitis G, Balciunas T, Mucke O D, Pugzlys A, Baltuska A, Shim B, Schrauth S E, Gaeta A, Hernandez-Garcia C, Plaja L, Becker A, Jaron-Becker A, Murnane M M, Kapteyn H C 2012 *Science* **336** 1287

# Guo-Åberg-Crasemann theory for high harmonic generation and its cutoff law\*

Yu Chao<sup>1)†</sup> Sun Zhen-Rong<sup>1)</sup> Guo Dong-Sheng<sup>1)2)‡</sup>

1) (State Key Laboratory of Precision Spectroscopy, Department of Physics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

2) (School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

( Received 13 November 2014; revised manuscript received 21 December 2014 )

## Abstract

Based on the scattering theory of Guo-Åberg-Crasemann (GAC), which has no artificial assumptions, high harmonic generation (HHG) is studied by using first-principles. The HHG spectra of different rare atoms are also calculated. Using the properties of ordinary Bessel functions and the Einstein photoelectric law in the strong-field case, we reveal a new cutoff law  $q_c \hbar \omega = (9 - 4\sqrt{2}) U_p + (2\sqrt{2} - 1) I_p \approx 3.34U_p + 1.83I_p$  of HHG based on a mathematical deduction method and a graphical method, which accords well with the Popmintchev's experimental result published on Science in 2012. This cutoff law also agrees well with our own calculation using the HHG transition rate formula derived from the GAC scattering theory. Thus, we have four pieces of independent evidence for the same cutoff law of HHG. The cutoff orders predicted by this theory are higher due to the absorption of the extra photons. These photons only participate in the photon-mode up-conversion and do nothing in the photoionization process.

**Keywords:** high harmonic generation, cutoff law, Bessel function, law of photoelectricity

**PACS:** 42.65.Ky, 32.80.Rm, 03.65.Nk

**DOI:** 10.7498/aps.64.124207

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grants Nos. 11004060, 11027403, 51132004).

† Corresponding author. E-mail: [hua\\_lianxin@163.com](mailto:hua_lianxin@163.com)

‡ Corresponding author. E-mail: [dsguophd@163.com](mailto:dsguophd@163.com)