

分数阶对数耦合系统在非周期外力作用下的定向输运现象

杨建强 马洪 钟苏川

The directional transport phenomenon in fractional logarithm coupled system under a non-periodic external force

Yang Jian-Qiang Ma Hong Zhong Su-Chuan

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 64, 170501 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.170501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.170501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I17>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

带反馈的分数阶耦合布朗马达的定向输运

[Transport properties of fractional coupled Brownian motors in ratchet potential with feedback](#)

物理学报.2015, 64(12): 120501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.120501>

非对称耦合粒子链在棘齿势中的确定性定向输运

[Deterministic directional transport of asymmetrically coupled nonlinear oscillators in a ratchet potential](#)

物理学报.2015, 64(7): 070501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.070501>

乘性色噪声激励下三稳态 van der Pol-Duffing 振子随机 P-分岔

[Stochastic P-bifurcations in tri-stable van der Pol-Duffing oscillator with multiplicative colored noise](#)

物理学报.2015, 64(6): 060501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.060501>

群体迁移行为的理论与实证研究

[Theoretical and empirical studies on group behaviors](#)

物理学报.2015, 64(3): 030502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.030502>

非对称双稳耦合网络系统的尺度随机共振研究

[System size stochastic resonance in asymmetric bistable coupled network systems](#)

物理学报.2014, 63(22): 220503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220503>

分数阶对数耦合系统在非周期外力作用下的定向输运现象*

杨建强¹⁾ 马洪¹⁾ 钟苏川^{2)†}

1)(四川大学数学学院, 成都 610064)

2)(四川大学空天科学与工程学院, 成都 610065)

(2015年1月31日收到; 2015年4月22日收到修改稿)

本文讨论了分数阶对数耦合系统在非周期外力作用下, 耦合粒子链的定向输运现象. 由于粒子在黏性介质中的运动具有“记忆性”, 所以本文通过将系统建模为分数阶对数耦合模型来研究各个系统参数对粒子链运动状态的影响. 数值仿真表明: 1) 对于此类系统, 只有在存在外力作用的情况下粒子链才能够产生定向输运现象, 并且粒子链平均流速随着外力的增大而增大. 2) 对于分数阶阶数较小的系统, 阻尼记忆性对粒子链的运动状态有显著的影响, 具体表现为: 粒子链的平均流速存在上界(这个上界非常小), 无论外力、耦合力以及噪声强度如何变化, 粒子链的平均流速都不会超过这个上界. 当系统的阻尼力很大且外力为零时, 粒子链不会产生定向输运现象. 3) 当系统的阶数与外力较大时, 虽然粒子链能够产生定向流, 但是此时系统对耦合力与噪声具有免疫性. 4) 耦合力与噪声强度对粒子链运动的影响只在外力较小的情况下有所表现. 在这种情况下, 当系统阶数充分大时, 粒子链的平均流速随着耦合力与噪声强度的变化而变化, 并且伴随着定向流的产生.

关键词: 分数阶对数耦合系统, 记忆性介质, 广义随机共振, 定向输运现象

PACS: 05.10.Gg, 45.10.Hj

DOI: 10.7498/aps.64.170501

1 引言

分子马达是一种蛋白酶, 能够高效地将三磷酸腺苷(ATP)水解时释放出的化学能转化为机械能. 由热力学第二定理可知, 当系统处于热力学平衡时, 定向输运是不可能发生的. 因此系统能够产生定向输运, 要满足的首要条件是该系统必须处于非平衡状态, 例如: 1) 非对称周期势^[1,2]; 2) 多个粒子的耦合作用^[3]; 3) 随机涨落力和热噪声的作用^[4-7]等. 但是, 这些条件不一定是充分条件, 要产生物理上可观察到的定向输运, 还需各参数匹配^[5]. 随着研究的深入, 科学家发现分子马达一般以集体形式工作^[8,9], 粒子间的相互作用不可避免, 所以上述条件2)是研究分子马达定向输运现象所需考虑的

一个必不可少的因素. 例如, Lipowsky等^[10]发现多个分子马达的耦合会大幅度提高粒子的输运速度; Downton等^[11]发现马达链的内部做功会使多个分子马达的输运效率低于单个分子马达的输运效率; Kumar等^[12]发现在对称周期势下粒子链也能产生定向输运现象, 并且耦合驱动力能改变粒子链的定向输运速度大小.

目前, 关于系统定向输运现象的研究工作大部分仍停留在整数阶系统^[1-15], 研究表明, 粒子在黏弹性介质中的运动具有“记忆性”, 这种“记忆性”是整数阶动力系统难以刻画的. 近年来, 分数阶微积分理论受到广泛关注, 随着对分数阶动力系统研究的深入, 人们发现分数阶微分算子非常适合描述具有记忆、遗传和路径依赖性的物理、化学以及生物现象, 被广泛应用于混沌、随机共振及反常扩散

* 国家自然科学基金(批准号: 11471229)和四川大学青年教师科研启动基金(批准号: 2082604174031)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zsczsc48@hotmail.com

等研究中 [16–23]. 同样, 分数阶随机微分方程理论也为研究“记忆性”介质中的定向输运现象提供了崭新的数学工具. 2010年, Ai等 [16] 发现分数阶噪声频谱的不同会影响布朗马达的输运方向. 2012年, Ernst等 [17] 对拥挤流体中的分数阶布朗马达展开了较为详细的研究. 2014年, 屠浙等 [18] 对具有对称周期势的分数阶布朗马达的定向输运现象展开了深入的研究, 发现此类分数阶系统在阶数较小时能够产生反向流, 并且当系统阶数固定时, 粒子链的平均流速会随噪声变化产生广义随机共振现象.

尽管如此, 当前对于分数阶耦合系统的研究大多基于线性情形, 如文献 [18, 19] 研究了分数阶线性耦合系统在无外力或对称的周期外力作用下的定向输运现象, 通过数值求解分析了该系统参数对定向输运速度的影响. 然而, 自然界中真实的现象大多为非线性情形, 在这方面, 林丽烽等 [23] 研究了闪烁棘轮势作用下分数阶耦合模型的定向输运现象, 通过数值模拟发现该模型能够产生反向定向流.

目前, 关于分数阶非线性耦合系统的定向输运现象的研究工作尚处于起步阶段, 对于此类系统受外力作用下的输运现象的研究也未见报道, 因此本文提出分数阶非线性对数耦合模型, 研究该模型受非周期外力作用下的定向输运现象. 通过分数阶差分法对模型进行数值仿真, 研究分数阶阶数、耦合强度、噪声强度、外力强度对粒子链定向输运速度的影响. 通过数值分析, 我们观察到区别已有关于分数阶耦合系统的相关研究结果的特殊动力学现象 [18,19,23], 包括: 在外力较小时, 耦合强度和噪声强度对分数阶阶数较大与阶数较小的系统有不同的影响; 在外力足够大时, 系统对耦合强度, 噪声强度具有免疫性. 这些现象都是以往被研究的分数阶耦合系统中未能观测到的新现象.

2 系统模型

N 个耦合粒子在双阱棘轮势场的运动由如下方程描述:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_i(t) = & - \int_0^t \gamma(t-u)\dot{x}_i(u)du - \sum_N \frac{\partial U_p(x_i)}{\partial x_i} \\
 & - k \cdot \sum_N \frac{\partial \text{Ln}(x_i - x_j)}{\partial x_i} + F \\
 & + \sqrt{2D}\xi_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中, $x_i(t)$ 为第 i 个粒子的位移, $\gamma(t)$ 为阻尼核函数, $U_p(x_i)$ 为双阱棘轮势函数, k 为扩散耦合强度, D 为噪声强度, $\xi_i(t)$ 为均值为零的高斯白噪声, 满足

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \langle \xi_i(t)\xi_j(s) \rangle = \delta_{ij}(t-s). \quad (2)$$

特别地, 当阻尼核函数 $\gamma(t) = \gamma\delta(t)$ 时, (1) 式即退化为文献 [24] 所讨论的整数阶耦合粒子运动方程.

在许多实际的反应系统 (如物理系统、生化系统) 中, 当粒子在非均匀介质运动时其速度会表现出幂律记忆性, 具体表现为距当前时刻越近, 其记忆性就越强, 反之记忆性就越差 [25]. 因此, 本文考虑将 (1) 式中的阻尼核函数 $\gamma(t)$ 建模为如下幂律函数:

$$\gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} |t|^{-\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1). \quad (3)$$

图 1 给出了 $\gamma(t)$ 的示意图, 由图可见指数 α 越小, $\gamma(t)$ 衰减得越慢, 即对历史速度的记忆性越强, 可见指数 α 刻画了阻尼记忆性的强弱. 将 (3) 式中的阻尼核函数 $\gamma(t)$ 代入 (1) 式右端阻尼项, 并结合 Caputo 分数阶微积分的定义 [26] 有

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}(\tau) d\tau \\
 & = {}_0^C D_t^\alpha x(t), \quad (0 < \alpha < 1). \quad (4)
 \end{aligned}$$

其中算子 ${}_0^C D_t^\alpha$ 表示 Caputo 意义下的 α 阶分数阶导数.

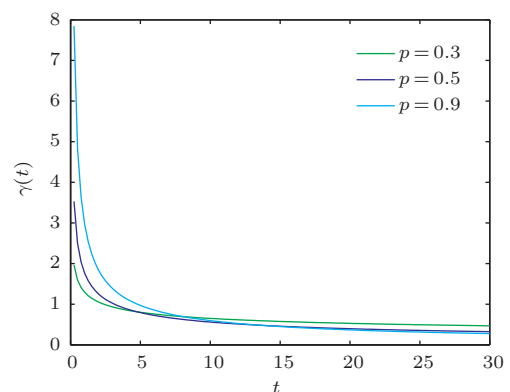


图 1 (网刊彩色) α 取不同值时阻尼核函数 $\gamma(t)$ 示意图
Fig. 1. (color online) The damping kernel function $\gamma(t)$ at different α .

由于分子马达描述的是微观粒子链的运动, 所以一般情形下, 我们考虑的是粒子链的平均速度, 即可以近似的认为加速度 $\ddot{x} = 0$. 最终我们得到本

文所研究的分数阶对数耦合粒子方程:

$$\begin{aligned} & {}_0^C D_t^\alpha x_i(t) \\ &= - \sum_N \frac{\partial U_p(x_i)}{\partial x_i} - k \cdot \sum_N \frac{\partial \ln(x_i - x_j)}{\partial x_i} + F \\ &+ \sqrt{2D}\xi_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (5)$$

其中, 分数阶阶数 $0 < \alpha < 1$, 势函数选为

$$\begin{aligned} U_p(x_i) &= -U_{p1} e^{-\sin^2(\pi x_i)/2 \sin^2(\pi R)} \\ &- U_{p2} e^{-\sin^2(\pi(x_i-d))/2 \sin^2(\pi R)}. \end{aligned} \quad (6)$$

在本文的后续研究中, 不失一般性地我们假设 (6) 式中 $U_{p2} = 0$, 此时 (6) 式刻画的势函数 $U_p(x_i)$ 为周期势函数, 如图 2 所示. 由于此周期势函数的 Taylor 展开式是无穷多个三角函数的线性组合, 相较于已有关于分数阶耦合系统所选取的势函数 [18,19,23], 本文所选取的势函数更为复杂, 也更具有一般性.

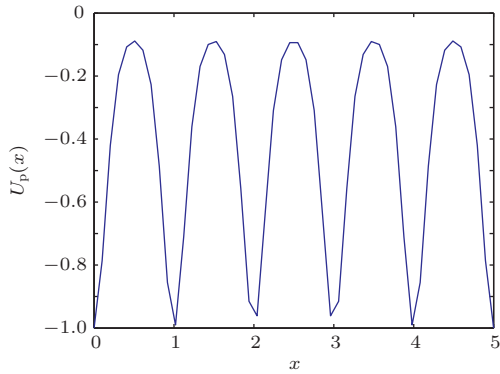


图 2 (网刊彩色) 对称周期势 $U_p(x)$ 示意图

Fig. 2. (color online) The symmetric periodic potential $U_p(x)$.

3 数值仿真与分析

对分数阶方程 (5) 式, 由于系统的复杂性 [24], 为了方便起见, 在下面的数值仿真中, 我们取定粒子数 $N = 2$, 即研究两个粒子组成的耦合系统, 并且假定 $U_{p2} = 0$. 利用分数阶差分法 [5,26] 对 (5) 式所刻画的分数阶对数耦合定向输运系统进行数值仿真, 取定采样步长 $\Delta t = 0.01$ s, 仿真时间 $T_S = 100$ s, 若无特别说明, 周期势势垒高度 $U_{p1} = 1$, 噪声强度 $D = 0.1$, $R = 0.15$. 当粒子间没有相互作用, 即 $k = 0$ 时, 系统转化为外力作用下的单粒子在棘轮势中的运动; 当粒子间相互作用趋于无穷大, 即 $k \rightarrow +\infty$ 时, 所有粒子被刚性束缚在

一起, 系统的动力学行为相当于单个粒子在如下有效势中的运动:

$$U_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U(x + ia). \quad (7)$$

本文排除上述两种特殊情况, 主要考虑 $0 < k < +\infty$ 时对于有限大小的耦合强度 k , 粒子间的相互作用所引起的复杂定向输运行为. 根据 (5) 式, 粒子 x_i 在时刻 t 受到的阻尼力为 $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}(\tau) d\tau$, 即 t 时刻受到的阻尼力是时间段 $[0, t]$ 内的速度关于阻尼核 $\gamma(t)$ 的加权平均. 当阶数 $\alpha \rightarrow 1$ 时, 即系统的记忆性变差, 核函数 $\gamma(t)$ 衰减加快, 这意味着历史速度对当前阻尼的贡献减小, 阻尼力变弱, 导致粒子有更快的输运速度; 而当阶数 α 减小时, 系统的记忆性增强, 历史速度对当前阻尼力贡献增强, 阻尼力也随之增强, 致使定向输运的速度减缓.

3.1 粒子链平均流速 v 与耦合强度 k 的关系

图 3(a)—(e) 分别给出分数阶对数耦合系统在外力 F 不同取值情形下 ($F = 0, F = 1, F = 2, F = 3, F = 4$) 粒子链的平均流速 v 与耦合强度 k 的 $k-v$ 示意图. 从图 3(a) 看出, 当系统无外力作用 ($F = 0$) 且系统阶数 α 较小时 [如图 3(a) 中 $\alpha = 0.2, \alpha = 0.4, \alpha = 0.6$], 随着耦合强度 k 的增大, 粒子链的平均流速 v 在横轴 $v = 0$ 上下来回振荡, 并且系统阶数 α 越小, 对应曲线的振荡幅度越大. 此时, 对于任意大小的系统耦合强度 k , 粒子链均不能产生定向输运现象, 即阶数 α 较小的分数阶对数耦合系统在无外力作用时, 系统对耦合强度 k 具有免疫性. 这种免疫性的出现是由于当系统阶数 α 较小时, 分数阶系统的阻尼力较大, 此时无论耦合强度 k 如何变化, 对应的耦合力始终小于阻尼力, 导致粒子链无法越过势垒, 仅在单个势阱中来回摆动, 长时间驻留于势阱, 无法形成定向粒子流. 同时, 从图 3(a) 看出, 系统无外力且阶数 α 较大时 [如图 3(a) 中 $\alpha = 0.8, \alpha = 1$], 由于分数阶系统的阻尼力较小, 理论上耦合强度会对粒子链的平均流速 v 会产生影响, 但是由于系统无外力作用导致粒子链平均流速较小, 所以在模拟中我们无法观测出来.

图 3(b)—(e) 分别给出 $F \neq 0$, 即系统受到外力作用时的 $k-v$ 示意图, 从图中曲线可以看出, 此时对于任意的系统阶数 α , 粒子链均能产生定向输

运现象. 从图中曲线看出该系统模型存在下列两类现象:

1) 当系统阶数 α 较大时(如图中 $\alpha = 0.6, \alpha = 0.8, \alpha = 1$), 分数阶系统的阻尼力较小, 若系统外力 F 较小(图 3(b) 中 $F = 1$), 整个系统耦合力起主导作用, 随着耦合系数 k 的增大粒子链的平均流速 v 随之增大; 若系统外力 F 较大(图 3(c) — (e) 中 $F = 2, F = 3, F = 4$), 整个系统外力 F 起主导作用, 粒子链的平均流速 v 随外力 F 的增大而变大, 系统的耦合系数 k 对粒子链的平均流速 v 的影响逐渐变小, 表现出此时系统对耦合强度 k 具有免疫性. 由于系统阶数 α 越大, 阻尼力的影响越小, 所以系

统阶数 α 越接近 1 时, 粒子链的平均流速 v 增加的越快.

2) 当系统阶数 α 较小时(如图中 $\alpha = 0.2, \alpha = 0.4$), 分数阶系统的阻尼力较大, 粒子链流速 v 较小, 系统外力 F 的作用导致粒子链产生定向运输现象. 从图中曲线看出, 随着耦合系数 k 的增加, 粒子链的平均流速 v 变化缓慢, 即系统对耦合系数 k 具有免疫性. 同时, 当系统阶数 α 较小时, 粒子链的平均流速 v 有一个较小的上界, 无论外力 F 与耦合力如何变化, 粒子链的平均流速 v 都不会超过这个上界.

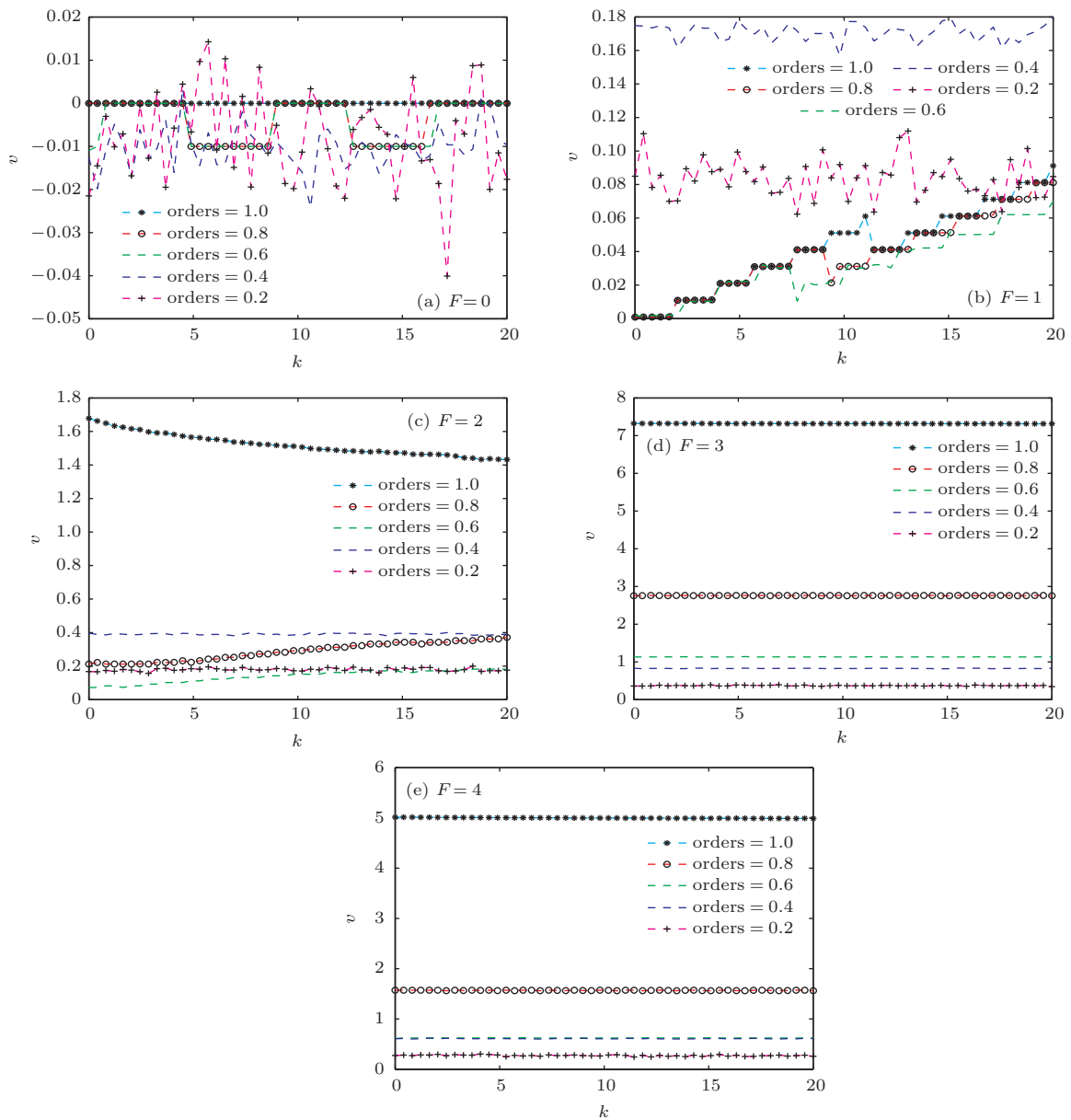


图 3 (网刊彩色) 粒子链平均流速 v 与耦合系数 k 的关系示意图 (a) $F = 0$; (b) $F = 1$; (c) $F = 2$; (d) $F = 3$; (e) $F = 4$
 Fig. 3. (color online) The average transport velocity of the particles v versus the coupled coefficient k with various external force F : (a) $F = 0$; (b) $F = 1$; (c) $F = 2$; (d) $F = 3$; (e) $F = 4$.

3.2 粒子链平均流速 v 与系统阶数 α 的关系

本节的主要目的是研究分数阶对数耦合系统在不同外力 F 作用情形下, 系统阶数 α 对粒子链的平均流速 v 的影响. 我们试图通过本节的仿真实验观测一些在 3.1 节中未能观测到的该系统所具有的更为丰富的动力学现象, 并给予这些现象以合理的物理解释. 图 4(a)—(d) 分别给出系统在外力 F 不同取值情形下 ($F = 1, F = 2, F = 3, F = 4$) 的 α - v 示意图. 从图中所有曲线看出, 当系统阶数 α 逐渐增大时, 对应粒子链的平均流速 v

存在明显的非单调变化趋势, 系统在某个特定的分数阶阶数 α_0 处, 粒子链平均流速 v 取得极大值 v_{\max} , 这意味着该分数阶对数耦合系统产生了广义随机共振现象. 而以往对于分数阶线性耦合系统的相关研究, 随着系统阶数 α 的增大, 粒子链的平均流速 v 随之单调递增, 未能观测到广义随机共振现象. 可见, 由于本文所研究的分数阶对数耦合系统的对数耦合项 $k \cdot \sum_N \frac{\partial \text{Ln}(x_i - x_j)}{\partial x_i}$ 与势能项 $U_p(x_i) = -e^{-\sin^2(\pi x_i)/2\sin^2(\pi R)}$ 较线性耦合系统更为复杂, 使得本文所研究的这类分数阶非线性系统具有更丰富的动力学行为.

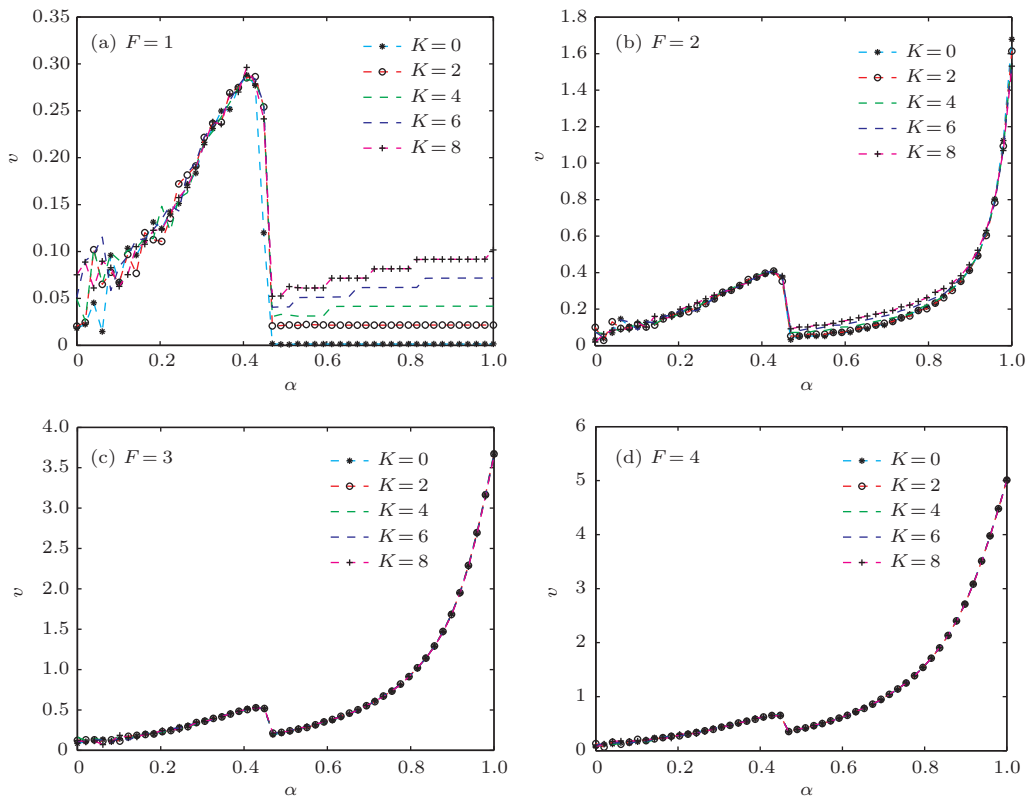


图 4 (网刊彩色) 粒子链平均流速 v 与阶数 α 的关系示意图 (a) $F = 1$; (b) $F = 2$; (c) $F = 3$; (d) $F = 4$
 Fig. 4. (color online) The average transport velocity of the particles v versus the fractional order α with various external force F : (a) $F = 1$; (b) $F = 2$; (c) $F = 3$; (d) $F = 4$.

此外, 当分数阶阶数 $0 \leq \alpha \leq 0.5$ 时, 系统阻尼力较大, 无论外力 F 与耦合力如何变化, 粒子链的平均流速 v 的变化都相当微弱, 这说明阶数 α 较小的分数阶对数耦合系统中阻尼力起主导作用. 理论上讲, 系统在较小阶数下, 粒子链的平均流速 v 可能会随外力 F 的变化而变化, 但是由于此时阻尼力较大, 使得粒子链的基本流速较小, 所以我们无法通过仿真模拟确切的观测出 v 随 F 变化所呈现的

极其细微的变化.

3.3 粒子链平均流速 v 与噪声强度 D 的关系

图 5(a)—(d) 分别给出分数阶对数耦合系统在外力 F 不同取值情形下 ($F = 0, F = 1, F = 2, F = 3$) 粒子链的平均流速 v 与噪声强度 D 的 D - v 示意图, 其中耦合系数 $k = 0.1$. 从图中我们观测到

了如下一些新的现象:

1) 当系统阶数 α 较小时(如图中 $\alpha = 0.2, \alpha = 0.4$), 分数阶系统的阻尼力较大, 当有外力 F 作用时, 粒子链会产生定向输运现象, 但粒子链的平均流速 v 始终较小, 且从图中曲线看出, 随着噪声强度 D 的增加, 粒子链平均流速 v 变化缓慢, 即系统对噪声强度 D 具有免疫性.

2) 当系统阶数 α 较大时(如图中 $\alpha = 0.6, \alpha = 0.8, \alpha = 1$), 分数阶系统的阻尼力较小, 当有外力 F 作用时, 粒子链会产生定向输运现象. 当外力 F 较小($F = 1$)且系统阶数 $0.6 \leq \alpha < 1$ 时, 粒子链的平均流速 v 随噪声强度 D 的增大而增大.

3) 当系统阶数 $\alpha = 1$ 时, 分数阶系统退化为传统的过阻尼一阶系统, 当有外力 F 作用时(如图5(b)—(d)中 $\alpha = 1$ 对应曲线), 噪声强度 D 的变化对粒子链的平均流速几乎不造成影响, 即此时系统同样对噪声强度 D 具有免疫性.

4) 对比图3(a)—(d), 可以看出噪声强度 D 对粒子链平均流速 v 的影响比耦合强度 k 的影响大. 随着噪声强度 D 的增大, 图5中粒子链的平均流速 v 始终要比图3中对应的粒子流速 v 要更大一些. 同时, 随着外力 F 逐渐增大, 我们看到上述情况逐渐消失, 即外力足够大时系统对噪声强度 D 渐渐地表现出免疫性.

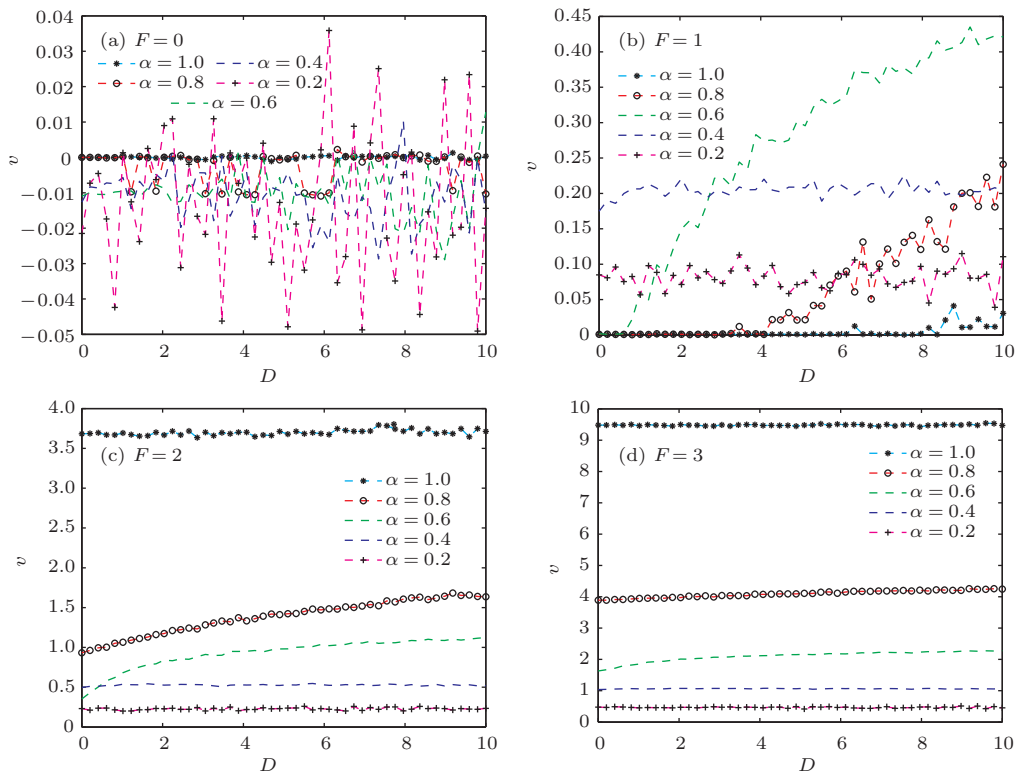


图5 (网刊彩色) 粒子链平均流速 v 与噪声强度 D 的关系示意图 (a) $F = 0$; (b) $F = 1$; (c) $F = 2$; (d) $F = 3$

Fig. 5. (color online) The average transport velocity of the particles v versus the intensity of the noise D with various external force F : (a) $F = 0$; (b) $F = 1$; (c) $F = 2$; (d) $F = 3$.

4 结 论

目前, 已有关于分数阶耦合系统定向输运现象的研究大多基于线性模型, 而自然界几乎所有的真实耦合现象都是无法用线性方程完整描述的. 为此, 本文提出分数阶非线性对数耦合模型, 并通过模拟仿真深入研究粒子的定向输运现象及系统参数(包括耦合系数、分数阶阶数、噪声强度等)对系统动力学行为的影响. 本文的主要结论如下: 1) 对

于此类系统, 只有存在外力作用时粒子链才能产生定向输运现象, 粒子链的平均流速随外力的增大而增大. 这就解释了产生定向输运需要一个空间上的定向外场^[5], 这不仅仅适用于整数阶系统, 对分数阶系统同样适用. 2) 对于较小阶数的系统, 阻尼记忆性对粒子链运动有显著的影响. 这种显著的影响具体表现为: 粒子链的平均流速总存在一个很小的上界, 无论外力、耦合力以及噪声强度如何变化, 粒子链的平均流速都不会超过这个上界. 3) 当系统阶数及外力较大时, 系统对耦合力与噪声具有免疫

性. 这说明耦合力与噪声并不是在所有情况下都起到促进粒子链定向运输的作用, 这也间接解释了 Downton 等^[11]在前期研究工作中发现马达链内部做功会使多个分子马达的运输效率低于单个分子马达的运输效率. 4) 耦合力与噪声强度对粒子链运动的影响只能发生在外力较小的情况下. 在外力较小且系统阶数充分大时, 粒子链的平均流速随着耦合强度和噪声强度的增大而增大, 并且伴随着定向流的产生. 对于定向运输现象是否可以纯粹的由系统的耦合引起, 这是一个新发展的领域^[5], 在本文我们针对分数阶对数耦合模型给出一个否定答案. 此处的“否定”是因为此分数阶对数耦合模型的定向运输是由外力所引起的, 在外力为零时, 粒子链几乎不可能出现定向运输现象.

随着分子操纵技术的发展, 耦合分子马达的定向运输问题开始受到生物学领域的密切关注^[5,15]. 在生物学中, 本文描述的是两个粒子耦合系统, 在一定程度上它属于双头马达. 双头马达在 ATP 水解以后转化成的机械能在一定程度上可以看成外力对系统的作用, ATP 水解是大多数分子马达运动的原因, 所以这就解释了此类系统粒子链要形成定向运输必须有外力的存在. ATP 水解转化为机械能所产生的力比环境所施的无规则的力要小许多, 这与本文中耦合强度与噪声只在外力较小时, 对粒子链的定向运输造成显著影响这一结论相符合. 大多数分子马达都是由 ATP 水解而产生定向运输的, 如果没有 ATP 水解, 粒子链很难产生定向运输现象. 这是由于如果阻尼力较大且外力为零, 无论环境内部所施的力如何变化, 粒子链不会发生定向运输现象. 研究人员之所以能在显微镜下看到一些系统粒子链的运动是由于这些系统粒子链的运动速度较慢, 而粒子链的运动速度较慢则是由于阻尼力的影响, 所以阻尼力在实际问题的研究中是一个不可忽视的因素, 这也说明分数阶模型更适合描述现实情况.

文献^[24]中, 整数阶对数耦合系统, 无论外力如何变化, 耦合力和噪声的存在均会使粒子链产生定向运输现象, 而在分数阶对数耦合系统中, 我们观测到了更为丰富的动力学行为. 用分数阶系统描述粒子链的定向运输现象会比整数阶更精确, 并且能看到一些整数阶所看不到的新现象, 解释一些整数阶系统所不能解释的现象产生原因. 在此类分数阶对数耦合系统中, 耦合力与噪声强度对粒子链的运动影响范围是很小的. 在阶数小的系统中, 它们

克服不了阻尼力的作用. 在外力很大时, 它们对粒子链运动的影响微乎其微, 这些都是分数阶线性耦合系统所不能描述的. 所以, 本文所研究的分数阶非线性对数耦合系统无疑更接近实际情况.

参考文献

- [1] Mateos J L 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 258
- [2] Barbi M, Salerno M 2000 *Phys. Rev. E* **62** 1988
- [3] Zheng Z G, Hu G, Hu B B 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2273
- [4] Hanggi P, Marchesoni F 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 387
- [5] Zheng Z G 2004 *Spantiotemporal Dynamics and Collective Behaviors in Coupled Nonlinear System* (Beijing: Higher Education Press) [郑志刚 2004 耦合非线性动力系统的时空动力学与合作行为 (北京: 高等教育出版社)]
- [6] Machura L, Kostur M, Luczka J 2010 *Chem Phys.* **375** 445
- [7] Mielke A 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 818
- [8] Guerin T, Prost J, Martin P 2010 *Current Opininion in Cell Biology* **22** 14
- [9] Chen H B, Zheng Z G 2012 *J. Univ. Shanghai Sci. Technol.* 346 (in Chinese) [陈宏斌, 郑志刚 2012 上海理工大学学报 346]
- [10] Lipowsky R, Klumpp S, Nieuwenhuizen T M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 108101
- [11] Downton M T, Zuchermann M J, Craig E M, Plischke M, Linke H 2006 *Phys. Rev. E* **73** 011909
- [12] Kumar K V, Ramaswamy S, Rao M 2008 *Phys. Rev. E* **77** 020102
- [13] Fendrik A J, Romanelli L, Reale M V 2012 *Phys. Rev. E* **85** 041149
- [14] Savel E S, Marchesoni F, Nori F 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 10601
- [15] Veigel C, Schmidt C F 2011 *Nat. Rev. Mol. Cel. Biol.* **12** 163
- [16] Ai B Q, He Y F, Zhong W R 2010 *Phys. Rev. E* **82** 061102
- [17] Ernst D, Hellmann M, Kohler J, Weiss M 2012 *Soft. Matter. Comput.* **8** 4886
- [18] Tu Z, Lai L, Luo M K 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 120503 (in Chinese) [屠浙, 赖莉, 罗懋康 2014 物理学报 **63** 120503]
- [19] Wang F, Deng C, Tu Z, Ma H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 040501 (in Chinese) [王飞, 邓翠, 屠浙, 马洪 2013 物理学报 **62** 040501]
- [20] Liu F, Anh V V, Turner I, Zhuang p 2003 *J. Appl. Math. Comp.* **13** 233
- [21] Benson D A, Wheatcraft S W, Meerschaert M M 2000 *Water Resour. Pes.* **36** 1403
- [22] Zhang L, Deng K, Luo M K 2012 *Chin. Phys. B* **21** 090505
- [23] Lin L F, Zhou X W, Ma H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 240501 (in Chinese) [林丽烽, 周兴旺, 马洪 2013 物理学报 **62** 240501]
- [24] de Souza Silva C C, van de Vondel J, Morelle M, Moshchalkov V V 2006 *Nature* **440** 651

[25] Bao J D 2009 *Random Simulation Method of Classical and Quantum Dissipation* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [包景东 2009 经典和量子耗散系统的随机模拟方

法 (北京: 科学出版社)]

[26] Podlubny I 1998 *Fractional Differential Equation* (San Diego: Academic Press)

The directional transport phenomenon in fractional logarithm coupled system under a non-periodic external force*

Yang Jian-Qiang¹⁾ Ma Hong¹⁾ Zhong Su-Chuan^{2)†}

1) (Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

2) (Department of Aeronautics and Astronautics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

(Received 31 January 2015; revised manuscript received 22 April 2015)

Abstract

Using the fractional calculus theory, we investigate the directional transport phenomenon in a fractional logarithm coupled system under the action of a non-periodic external force. When a Brownian particle moves in the media with memory such as viscoelastic media, the system should be modeled as a nonlinear fractional logarithm coupled one. Using the method of fractional difference, we can solve the model numerically and discuss the influences of the various system parameters on the average transport velocity of the particles. Numerical results show that: 1) The directional transport phenomenon in this fractional logarithmic coupled model appears only when the external force exists, and the value of the average transport velocity of the particles increases with increasing external force. 2) When the fractional order of the system is small enough, the damping memory has a significant impact on the average transport velocity of the particles. Furthermore, the average transport velocity of the particles has an upper bound (although it is very small), no matter how the external force, coupled force and the intensity of noise change, the average transport velocity of the particles is no more than the upper bound. When there is no external force and the damping force is big enough, the directional transport phenomenon disappears. 3) When the fractional order of the system and the external force are big enough, although the directional transport phenomenon appears, the coupled force and the intensity of noise have no impact on the system. 4) Only when the external force is small enough, could the coupled force and noise intensity influence the average transport velocity of the particles. In this situation, the directional transport phenomenon appears when the fractional order of the system is big enough, and the average transport velocity of the particles changes along with the change of the coupled force and the noise intensity.

Keywords: fractional logarithm coupled system, media with memory, generalized stochastic resonance, directional transport phenomenon

PACS: 05.10.Gg, 45.10.Hj

DOI: 10.7498/aps.64.170501

* Project supported by the the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11471229), and the Young Teacher Fund of Sichuan Uninversity, China (Grant No. 2082604174031).

† Corresponding author. E-mail: zsczsc48@hotmail.com