

具有非线性阻尼涨落的线性谐振子的随机共振

田艳 何桂添 罗懋康

Stochastic resonance of a linear harmonic oscillator with non-linear damping fluctuation

Tian Yan He Gui-Tian Luo Mao-Kang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 060501 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.060501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.060501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I6>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

二值噪声激励下欠阻尼周期势系统的随机共振

Stochastic resonance in periodic potential driven by dichotomous noise

物理学报.2015, 64(24): 240502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.240502>

Levy 噪声激励下的幂函数型单稳随机共振特性分析

Characteristic analysis of power function type monostable stochastic resonance with Levy noise

物理学报.2015, 64(22): 220502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.220502>

带碰撞双稳态压电俘能系统的俘能特性研究

Vibration energy harvesting from a piezoelectric bistable system with two symmetric stops

物理学报.2015, 64(21): 210501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.210501>

二维耦合定向输运模型研究

A two-dimensional coupled directed transport model

物理学报.2015, 64(15): 150501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.150501>

科赫分形基底上受限固-固模型动力学标度行为的数值研究

Numerical investigations of dynamic behaviors of the restricted solid-on-solid model for Koch fractal substrates

物理学报.2015, 64(13): 130501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130501>

具有非线性阻尼涨落的线性谐振子的随机共振*

田艳¹⁾ 何桂添¹⁾ 罗懋康^{2)†}

1)(西南石油大学理学院, 成都 610500)

2)(四川大学数学学院, 成都 610064)

(2015年11月4日收到; 2015年12月14日收到修改稿)

较之于线性噪声, 非线性噪声更广泛地存在于实际系统中, 但其研究远不能满足实际情况的需要. 针对作为非线性阻尼涨落噪声基本构成成分的二次阻尼涨落噪声, 本文考虑了周期信号与之共同作用下的线性谐振子, 关注这类具有基本意义的阻尼涨落噪声的非线性对系统共振行为的影响. 利用 Shapiro-Logvinov 公式和 Laplace 变换推导了系统稳态响应振幅的解析表达式, 并分析了稳态响应振幅的共振行为, 且以数值仿真验证了理论分析的有效性. 研究发现: 系统稳态响应振幅关于非线性阻尼涨落噪声系数具有非单调依赖关系, 特别是非线性阻尼涨落噪声比线性阻尼涨落噪声更有助于增强系统对外部周期信号的响应程度; 而且, 非线性阻尼涨落噪声比线性阻尼涨落噪声使得稳态响应振幅关于噪声强度具有更为丰富的共振行为; 同时, 二次阻尼涨落噪声使得稳态响应振幅关于系统频率出现真正的共振现象; 而在这些现象和性质中, 非线性噪声项的非线性性质对共振行为起着关键的作用. 显然, 以二次阻尼涨落作为基本形式引入的非线性阻尼涨落噪声, 可以有助于提高微弱周期信号检测的灵敏度和实现对周期信号的频率估计.

关键词: 线性谐振子, 非线性阻尼涨落噪声, 随机共振

PACS: 05.40.-a, 05.40.Ca, 02.50.-r

DOI: 10.7498/aps.65.060501

1 引言

随机共振是由 Benzi 等^[1]在 20 世纪 80 年代为解释古气象冰川问题而首次提出的. 随机共振是在一定条件下噪声、信号和系统的非线性协作现象. 与传统的噪声有害思想相悖, 随机共振现象表明: 在一定的条件下, 有可能实现噪声能量向信号能量的转移, 进而增强系统的有序性^[2]. 随机共振理论的提出使人们意识到噪声对动力学系统的积极的调控作用. 传统的随机共振是指系统响应的信噪比随噪声的某些特征参数(如噪声的强度、相关率等)非单调变化的现象; 广义的随机共振是指系统响应的某些函数(如矩、自相关函数、功率谱或信噪比等)随系统的某些特征参数(如激励振幅、频率或噪声的强度、相关率等)非单调变化的现象^[3]. 随机

共振是随机动力学系统中一种较为普遍的现象, 在激光物理、生物物理、化学物理及信号处理等诸多领域有着广泛的应用^[4-7], 因此引起了人们的普遍关注和浓厚兴趣.

对随机共振现象的早期研究主要集中在由周期信号和加性噪声共同激励的非线性系统, 而且在相当长的一段时间内非线性被认为是随机共振出现的必要条件^[8-11]. 自从 Fulinski 等^[12]利用数值方法在受非 Markov 噪声驱动的线性随机流模型中发现系统响应的信噪比关于噪声强度存在随机共振现象, 线性系统的随机共振现象便引起广泛关注. 围绕各种线性系统和不同形式的激励噪声, 关于随机共振现象的研究进一步展开. 在由乘性色噪声和周期信号共同激励的线性系统, 或者仅由乘性色噪声激励的线性系统以及由关联的多种

* 国家自然科学基金(批准号: 11171238)、四川省教育厅科研基金(批准号: 14ZA0050, 13ZA0191)、西南石油大学校级科技基金(批准号: 2013XJZ027, 2013XJZ025, 2014PYZ015)和西南石油大学青年教师“过学术关”资助计划(批准号: 201331010049)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: makaluo@scu.edu.cn

噪声联合激励的线性系统中均发现了随机共振现象^[13–17].

线性谐振子是最简单也是最理想的力学系统,同时它还是物理、化学、电子等自然科学和工程科学中的一个重要的基础性模型. 系统往往不是孤立存在的,常受到外界涨落因素的影响,外噪声对线性谐振子动力学行为的影响很大,相关问题的研究近年来已成为学者们的关注热点^[18–23]. Brown 粒子在理想液体中的运动常被建模为线性谐振子. 针对物理、化学系统中常见的环境黏性介质, Gitterman 和 Shapiro^[18]在线性谐振子中引入质量涨落噪声来考察环境分子的吸附能力对系统动力学特性的影响:

$$\begin{aligned} [m + \xi(t)] \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) \\ = A_0 \cos(\Omega t) + \eta(t), \end{aligned} \quad (1)$$

发现谐振子的响应幅值增益存在随机共振现象. RLC 电路是各种电子设备中的基本电路,也常被建模为线性谐振子. 针对电子设备中数字电路和模拟电路常共存的情形, Jiang 等^[19]在线性谐振子中引入阻尼涨落噪声来刻画数字信号对模拟电路中电导的扰动,并考察其对系统动力学特性的影响:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma[1 + \xi(t)] \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) \\ = A_0 \cos(\Omega t) + \eta(t), \end{aligned} \quad (2)$$

发现谐振子的响应幅值增益存在随机共振现象. 此外,文献^[20–23]的作者在存在质量涨落、频率涨落的线性谐振子中也观察到了丰富的共振现象. 然而以上文献考虑的涨落噪声主要是线性噪声(即色噪声的一次线性函数),而对涨落噪声是色噪声的非线性函数的相关研究较少,还有待于进一步深入. 在激光抽运系统中,由于外部源的扰动,就存在着涨落噪声是抽运噪声的非线性函数的情况^[24],如 Zhang 等^[25]讨论的乘性噪声是抽运噪声的二次函数时的单模激光系统的随机共振现象. 事实上,由于设备或器件内外环境中电场强度的扰动以及更低尺度源于量子效应的各种热噪声,实际的物理、电子系统中,涨落噪声是常以色噪声的非线性函数的形式出现的^[26],二次幂的噪声是其最基本的成分. 如在 RLC 电路中,数字信号对模拟电路中电导的扰动就存在非线性的情况,即线性谐振子中阻尼涨落噪声为色噪声的非线性函数,因而,模型

(2) 可被重新建模为

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma[1 + f(\xi(t))] \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) \\ = A_0 \cos(\Omega t) + \eta(t), \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $f(\xi(t))$ 为 $\xi(t)$ 的非线性函数. 随机共振是信号、噪声与系统的非线性协作现象,这种现象自然与噪声的性质密切相关,噪声的非线性对系统动力学特性的影响是必须考虑的重要因素,在这种情况下,其相关研究便具有现实和客观的物理、技术需求和意义. 而二次函数的噪声,作为非线性噪声最基本的构成成分之一(幂级数展开中最基本的非线性影响因素),其性质和影响自然成为研究的重点;在这方面也已有一些先期的研究: Sagues 等^[27]研究了含二次噪声的随机微分方程的非 Markov 动力学特性; Hector 等^[28]发现由二次噪声驱动的单稳系统存在随机共振现象;张路等^[29]发现频率涨落为二次噪声的线性过阻尼系统也存在随机共振现象.

本文将非线性阻尼涨落噪声引入线性系统,针对作为非线性阻尼涨落噪声基本构成成分的二次阻尼涨落噪声,考虑周期信号与之共同作用的线性谐振子,主要关注阻尼涨落噪声的非线性对系统共振行为的影响. 本文以 Shapiro-Loginov 公式和 Laplace 变换为研究手段,推导获得了系统响应的一阶稳态矩和稳态响应振幅的解析表达式,深入分析了在二次阻尼涨落噪声作用下稳态响应振幅的共振行为,且以数值仿真验证了理论分析的有效性. 本文发现系统稳态响应振幅关于非线性阻尼涨落噪声系数具有非单调依赖关系,特别是非线性阻尼涨落噪声比线性阻尼涨落噪声更有助于实现噪声能量向周期信号能量的转移,即更有助于增强系统对外部周期信号的响应程度;而且,非线性阻尼涨落噪声使得系统稳态响应振幅关于噪声强度具有更为丰富的共振行为;同时,二次阻尼涨落噪声使得系统稳态响应振幅关于系统频率出现真正的共振现象,这是在线性阻尼涨落噪声情形下未观察到的现象;而在这些现象和性质中,非线性噪声的非线性项对共振行为起着关键的作用. 这些对随机共振在微弱周期信号检测及频率估计中的应用具有指导意义.

2 系统模型

具有二次阻尼涨落噪声(即阻尼涨落噪声为色噪声的二次函数)的线性谐振子可由如下随机微分

方程描述:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma[1 + \alpha_1\xi(t) + \alpha_2\xi^2(t)]\frac{dx(t)}{dt} \\ & + \omega_0^2x(t) \\ & = A_0 \cos(\Omega t) + \eta(t), \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\gamma > 0$ 为阻尼系数; ω_0 为系统的固有频率; $A_0 \cos(\Omega t)$ 表示系统受到的外部周期驱动力, 其振幅和频率分别为 A_0 和 Ω ; $\alpha_1\xi(t) + \alpha_2\xi^2(t)$ 是系统阻尼受扰动而引入的乘性二次噪声, α_1 和 α_2 分别为二次噪声的一次项系数和二次项系数.

本文将 $\xi(t)$ 建模为对称双态噪声, $\xi(t)$ 在 $\{-a, a\}$, ($a > 0$) 中取值, 满足 $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = a^2 \exp(-\lambda_\xi|t-s|)$, 其中 a^2 为 $\xi(t)$ 的噪声强度, λ_ξ 为噪声相关率. 这里将 $\xi(t)$ 建模为双态噪声是基于对系统动力学性质研究的普适性考虑: 一方面, 双态噪声是一种常见的色噪声, 它广泛存在于金属、晶体管、超导薄膜、纳米器件等材料和器件中, 常以对电阻、电导、电压或电流的影响表现出来; 另一方面, 双态噪声是一种具有基本构成形式的噪声, 以一定的方式和过程可以生成其他形式的非线性噪声, 从必要性上看, 其本身的性质和影响具有基本的研究价值; 还有一方面就是双态噪声是两状态泊松过程的实现, 在极限条件(噪声相关率 $\lambda_\xi \rightarrow +\infty$) 时, 它将退化为高斯白噪声, 从可行性上看, 将双态噪声以乘性方式引入线性系统可得到一个精确可解的模型, 而具有精确可解的模型更容易应用到各门具体学科的研究中 [30,31].

$\eta(t)$ 为系统内噪声, 本文将建模为高斯白噪声, 满足 $\langle \eta(t) \rangle = 0$, $\langle \eta(t)\eta(s) \rangle = 2D_\eta\delta(t-s)$, 其中 D_η 为 $\eta(t)$ 的噪声强度.

由于内、外噪声起源不同, 本文假设 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 互不相关, 即 $\langle \xi(t)\eta(s) \rangle = 0$.

3 系统响应的一阶稳态矩及稳态响应振幅

3.1 系统响应的一阶矩

对 (4) 式左右两边同时取平均, 得到一阶矩 $\langle x(t) \rangle$ 所满足的随机微分方程:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\langle x(t) \rangle}{dt^2} + \gamma\frac{d\langle x(t) \rangle}{dt} + \gamma\alpha_1\left\langle \xi(t)\frac{dx(t)}{dt} \right\rangle \\ & + \gamma\alpha_2\left\langle \xi^2(t)\frac{dx(t)}{dt} \right\rangle + \omega_0^2\langle x(t) \rangle \end{aligned}$$

$$= A_0 \cos(\Omega t). \quad (5)$$

利用 Shapiro-Loginov 公式和双态噪声的性质, 有

$$\begin{aligned} \left\langle \xi(t)\frac{dx(t)}{dt} \right\rangle &= \frac{d\langle \xi(t)x(t) \rangle}{dt} + \lambda_\xi\langle \xi(t)x(t) \rangle, \\ \left\langle \xi^2(t)\frac{dx(t)}{dt} \right\rangle &= a^2\frac{d\langle x(t) \rangle}{dt}. \end{aligned} \quad (6)$$

将 (6) 式代入 (5) 式, 得

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\langle x(t) \rangle}{dt^2} + (\gamma + \gamma\alpha_2a^2)\frac{d\langle x(t) \rangle}{dt} \\ & + \gamma\alpha_1\frac{d\langle \xi(t)x(t) \rangle}{dt} + \gamma\alpha_1\lambda_\xi\langle \xi(t)x(t) \rangle \\ & + \omega_0^2\langle x(t) \rangle \\ & = A_0 \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (7)$$

对 (4) 式左右两边同时乘以 $\xi(t)$ 后取平均, 得

$$\begin{aligned} & \left\langle \xi(t)\frac{d^2x(t)}{dt^2} \right\rangle + \gamma\left\langle \xi(t)\frac{dx(t)}{dt} \right\rangle \\ & + \gamma\alpha_1\left\langle \xi^2(t)\frac{dx(t)}{dt} \right\rangle \\ & + \gamma\alpha_2\left\langle \xi^3(t)\frac{dx(t)}{dt} \right\rangle + \omega_0^2\langle \xi(t)x(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

利用 Shapiro-Loginov 公式和双态噪声的性质, 有

$$\begin{aligned} & \left\langle \xi(t)\frac{d^2x(t)}{dt^2} \right\rangle \\ & = \frac{d^2\langle \xi(t)x(t) \rangle}{dt^2} + 2\lambda_\xi\frac{d\langle \xi(t)x(t) \rangle}{dt} + \lambda_\xi^2\langle \xi(t)x(t) \rangle, \\ & \left\langle \xi^3(t)\frac{dx(t)}{dt} \right\rangle \\ & = a^2\frac{d\langle \xi(t)x(t) \rangle}{dt} + a^2\lambda_\xi\langle \xi(t)x(t) \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

将 (9) 式代入 (8) 式, 得

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\langle \xi(t)x(t) \rangle}{dt^2} + (2\lambda_\xi + \gamma + \gamma\alpha_2a^2)\frac{d\langle \xi(t)x(t) \rangle}{dt} \\ & + (\lambda_\xi^2 + \gamma\lambda_\xi + \gamma\alpha_2a^2\lambda_\xi + \omega_0^2)\langle \xi(t)x(t) \rangle \\ & + \gamma\alpha_1a^2\frac{d\langle x(t) \rangle}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

令 $\langle x(t) \rangle = x_1$, $\langle \xi(t)x(t) \rangle = x_2$, 代入 (7) 和 (10) 式可得

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + (\gamma + \gamma\alpha_2a^2)\dot{x}_1 + \gamma\alpha_1\dot{x}_2 \\ \quad + \gamma\alpha_1\lambda_\xi x_2 + \omega_0^2x_1 \\ = A_0 \cos(\Omega t), \\ \ddot{x}_2 + (2\lambda_\xi + \gamma + \gamma\alpha_2a^2)\dot{x}_2 \\ \quad + (\lambda_\xi^2 + \gamma\lambda_\xi + \gamma\alpha_2a^2\lambda_\xi + \omega_0^2)x_2 \\ \quad + \gamma\alpha_1a^2\dot{x}_1 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

对 (11) 式进行 Laplace 变换并整理, 得

$$\begin{cases} [s^2 + (\gamma + \gamma\alpha_2 a^2)s + \omega_0^2]X_1(s) \\ + (\gamma\alpha_1 s + \gamma\alpha_1 \lambda_\xi)X_2(s) \\ = \frac{A_0 s}{s^2 + \Omega^2} + \dot{x}_1(0) + (s + \gamma + \gamma\alpha_2 a^2)x_1(0) \\ + \gamma\alpha_1 x_2(0), \\ \gamma\alpha_1 a^2 s X_1(s) + [s^2 + (2\lambda_\xi + \gamma + \gamma\alpha_2 a^2)s \\ + (\lambda_\xi^2 + \gamma\lambda_\xi + \gamma\alpha_2 a^2 \lambda_\xi + \omega_0^2)]X_2(s) \\ = \gamma\alpha_1 a^2 x_1(0) + (s + 2\lambda_\xi + \gamma \\ + \gamma\alpha_2 a^2)x_2(0) + \dot{x}_2(0), \end{cases} \quad (12)$$

其中, $X_i(s) = \int_0^{+\infty} x_i(t) e^{-st} dt, i = 1, 2,$
 $x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0)$ 为初值条件.

求解方程组 (12) 可得

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{k_4}{k_1 k_4 - k_2 k_3} \frac{A_0 s}{s^2 + \Omega^2} \\ + \frac{k_5 k_4 - k_2 k_6}{k_1 k_4 - k_2 k_3}, \\ X_2(s) = -\frac{k_3}{k_1 k_4 - k_2 k_3} \frac{A_0 s}{s^2 + \Omega^2} \\ + \frac{k_6 k_1 - k_5 k_3}{k_1 k_4 - k_2 k_3}, \end{cases} \quad (13)$$

其中,

$$\begin{aligned} k_1 &= s^2 + (\gamma + \gamma\alpha_2 a^2)s + \omega_0^2, \\ k_2 &= \gamma\alpha_1 s + \gamma\alpha_1 \lambda_\xi, \\ k_3 &= \gamma\alpha_1 a^2 s, \\ k_4 &= s^2 + (2\lambda_\xi + \gamma + \gamma\alpha_2 a^2)s \\ &\quad + (\lambda_\xi^2 + \gamma\lambda_\xi + \gamma\alpha_2 a^2 \lambda_\xi + \omega_0^2), \\ k_5 &= \dot{x}_1(0) + (s + \gamma + \gamma\alpha_2 a^2)x_1(0) + \gamma\alpha_1 x_2(0), \\ k_6 &= \gamma\alpha_1 a^2 x_1(0) + (s + 2\lambda_\xi + \gamma + \gamma\alpha_2 a^2)x_2(0) \\ &\quad + \dot{x}_2(0). \end{aligned}$$

记 $x_3(0) = \dot{x}_1(0), x_4(0) = \dot{x}_2(0)$, 对 (13) 式进行 Laplace 逆变换可得系统响应一阶矩 $x_1 = \langle x(t) \rangle, x_2 = \langle \xi(t)x(t) \rangle$ 的解析表达式:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= A_0 \int_0^t h_{i0}(t - \tau) \cos(\Omega\tau) d\tau \\ &\quad + \sum_{k=1}^4 h_{ik}(t)x_k(0) \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $h_{ik}(t)$ 的 Laplace 变换为 $H_{ik}(s), H_{ik}(s)$ 由方程组 (13) 确定. 特别地, $H_{10}(s)$ 和 $H_{20}(s)$ 可看作系

统传递函数, 相应的表达式如下:

$$\begin{cases} H_{10}(s) = \frac{k_4}{k_1 k_4 - k_2 k_3}, \\ H_{20}(s) = -\frac{k_3}{k_1 k_4 - k_2 k_3}. \end{cases} \quad (15)$$

3.2 系统稳态响应振幅

为保证 (14) 式所确定的系统响应一阶矩的稳定性, 要求系统传递函数分母对应的特征方程 $k_1 k_4 - k_2 k_3 = \sum_{i=0}^4 f_i s^4 = 0$ 的所有根均不能具有正实部, 其中,

$$\begin{aligned} f_0 &= \omega_0^2 (\lambda_\xi^2 + \gamma\lambda_\xi + \gamma\alpha_2 a^2 \lambda_\xi + \omega_0^2), \\ f_1 &= \gamma\lambda_\xi^2 + \gamma^2 \lambda_\xi + 2\gamma\omega_0^2 + 2\gamma^2 \alpha_2 a^2 \lambda_\xi^2 \\ &\quad + 2\gamma\alpha_2 a^2 \omega_0^2 + \gamma\alpha_2 a^2 \lambda_\xi^2 + \gamma^2 \alpha_2^2 a^4 \lambda_\xi \\ &\quad + 2\lambda_\xi \omega_0^2 - \gamma^2 \alpha_1^2 a^2 \lambda_\xi, \\ f_2 &= \lambda_\xi^2 + 2\omega_0^2 + 3\gamma\lambda_\xi + 3\gamma\alpha_2 a^2 \lambda_\xi + 2\gamma^2 \alpha_2 a^2 \\ &\quad + \gamma^2 + \gamma^2 \alpha_2^2 a^4 - \gamma^2 \alpha_1^2 a^2, \\ f_3 &= 2\lambda_\xi + 2\gamma + 2\gamma\alpha_2 a^2, \\ f_4 &= 1. \end{aligned}$$

利用 Routh-Hurwitz 稳定性判据, 可得系统稳定性条件为

$$f_3 > 0, f_1 < f_2 f_3, f_3^2 f_0 + f_1^2 < f_1 f_2 f_3, f_0 > 0.$$

本文后续讨论均在稳定性条件下进行. 令 $t \rightarrow \infty$, 经长时间演化, 初始条件对系统响应的影响将逐步消失, 系统将进入稳定状态. 由 (14) 式可推导系统响应一阶稳态矩的解析表达式为

$$\langle x(t) \rangle_{as} = \langle x(t) \rangle|_{t \rightarrow \infty} = A_{st} \cos(\Omega t + \varphi), \quad (16)$$

其中, A_{st} 和 φ 分别为系统稳态响应的振幅和相位.

利用 (15) 式可得系统稳态响应的振幅 A_{st} 和相位 φ 的解析表达式:

$$\begin{cases} A_{st} = A_0 \sqrt{\frac{I_1^2 + I_2^2}{I_3^2 + I_4^2}}, \\ \varphi = \arctan \left(\frac{I_2 I_3 - I_1 I_4}{I_1 I_3 + I_2 I_4} \right), \end{cases} \quad (17)$$

其中,

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_\xi^2 + \gamma\lambda_\xi + \gamma\alpha_2 a^2 \lambda_\xi + \omega_0^2 - \Omega^2, \\ I_2 &= (2\lambda_\xi + \gamma + \gamma\alpha_2 a^2)\Omega, \\ I_3 &= f_0 - f_2 \Omega^2 + f_4 \Omega^4, \\ I_4 &= f_1 \Omega - f_3 \Omega^3. \end{aligned}$$

4 系统稳态响应振幅的共振行为

在上一节中, 我们通过理论推导获得了系统稳态响应振幅 A_{st} 的解析表达式 (17), 下面将深入分析稳态响应振幅 A_{st} 的共振行为, 继而探讨阻尼涨落噪声的非线性对系统共振行为的影响.

4.1 稳态响应振幅 A_{st} 随二次阻尼涨落噪声的系数 α_1, α_2 的变化

图 1 (a) 绘制了稳态响应振幅 A_{st} 作为二次噪声的一次项系数 α_1 的函数随着不同的二次噪声的二次项系数 α_2 变化的曲线; 图 1 (b) 绘制了稳态响应振幅 A_{st} 作为二次噪声的二次项系数 α_2 的函数随着不同的二次噪声的一次项系数 α_1 变化的曲线. 其他各参数的取值为 $\gamma = 1, a^2 = 1, A_0 = 1, \omega_0 = 0.55, \Omega = 1, \lambda_\xi = 2$. 从图 1 (a) 中可以看出: 当 α_2 取不同值时, $A_{st}(\alpha_1)$ 曲线出现对称双峰共振和对称单峰共振两种共振现象. 当曲线为对称双峰共振时, 双峰位置关于 $\alpha_1 = 0$ 对称且两峰值相等; 当曲线为对称单峰共振时, 单峰位于 $\alpha_1 = 0$ 处. 这说明 A_{st} 与 $|\alpha_1|$ 直接相关, 而不受 α_1 正负性的影响. 事实上, $\alpha_1 \xi(t)$ 可看作噪声强度为 $(\alpha_1 a)^2$ 的零均值的双态噪声, 对系统行为起着关键作用的是 α_1^2 而非 α_1 , 故本文后续仅讨论 $\alpha_1 > 0$ 的情形. 从图 1 (b) 中可以看出: 当 α_1 取不同值时, $A_{st}(\alpha_2)$ 曲线呈现双峰共振, 但是双峰位置并不关于 $\alpha_2 = 0$ 对称, 两峰值也不相等. 这说明 A_{st} 不仅与 $|\alpha_2|$ 直接相关, 还受 α_2 正负性的影响. 这是因为: 根据双态噪声的性质, 有 $\langle \alpha_1 \xi(t) + \alpha_2 \xi^2(t) \rangle = \alpha_2 a^2$, 当其他参数一定时, $\alpha_2 > 0$ 意味着系统阻尼的增大, 而 $\alpha_2 < 0$ 意味着系统阻尼的减小, 因而系统行为与 α_2 正负性直接相关、受其影响, 故本文后续将就 $\alpha_2 > 0$ 与 $\alpha_2 < 0$ 两种情况分别展开讨论. 从图 1 (b) 中还可以看出: 当 α_1 一定时, 可存在一个 $\alpha_2 \neq 0$, 使得 $A_{st}(\alpha_2) > A_{st}(0)$, 即在一定参数条件下, 由二次噪声 $\alpha_1 \xi(t) + \alpha_2 \xi^2(t)$ 驱动得到的稳态响应振幅可比线性噪声 $\alpha_1 \xi(t)$ 情形下的更大.

图 1 表明: 在其他参数一定时, 系统稳态响应振幅 A_{st} 关于二次噪声系数 α_1, α_2 具有非单调依赖关系, 特别是二次阻尼涨落噪声比线性阻尼涨落噪声更有助于实现噪声能量向信号能量的转移, 即更有助于增强系统对外部周期信号的响应程度, 这就为提高微弱周期信号检测的灵敏度开创了新的思路.

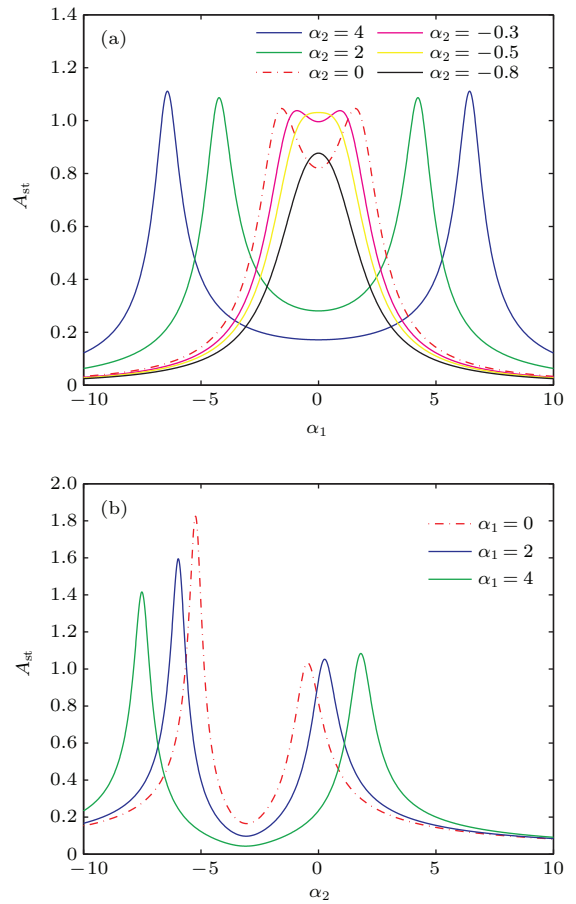


图 1 (网刊彩色) 稳态响应振幅 A_{st} 随二次噪声的系数 α_1, α_2 的变化曲线 (a) $A_{st}(\alpha_1)$; (b) $A_{st}(\alpha_2)$
 Fig. 1. (color online) The curves of the steady response amplitude A_{st} versus the quadratic noise coefficients α_1, α_2 : (a) $A_{st}(\alpha_1)$; (b) $A_{st}(\alpha_2)$.

4.2 稳态响应振幅 A_{st} 随噪声强度 a^2 的变化

图 2 绘制了稳态响应振幅 A_{st} 作为噪声强度 a^2 的函数随着不同的二次噪声系数 (α_1, α_2) 变化的曲线, 其他各参数的取值为 $\gamma = 1, A_0 = 1, \omega_0 = 0.55, \Omega = 1, \lambda_\xi = 2$. 图 2 (a) 绘制了 $\alpha_2 = 0$ 时, 即线性噪声情形下的 $A_{st}(a^2)$ 曲线, 可以看出, 当系统受线性噪声影响时, $A_{st}(a^2)$ 曲线可出现单峰共振, 随着 α_1 的增大, 共振峰逐渐左移, 峰值基本不变. 图 2 (b), (d), (f) 绘制了 $\alpha_2 < 0$ 时的 $A_{st}(a^2)$ 曲线, 可以看出, 当系统受二次噪声影响时, 若 $\alpha_2 < 0, A_{st}(a^2)$ 曲线可出现双峰共振, 二次噪声系数 α_1, α_2 共同影响着共振峰位置和共振强度. 图 2 (c), (e) 绘制了 $\alpha_2 > 0$ 时的 $A_{st}(a^2)$ 曲线, 可以看出, 当系统受二次噪声影响时, 若 $\alpha_2 > 0$ 时, $A_{st}(a^2)$ 曲线单调变化, 并没有出现共振现象. 这是因为当 $\alpha_2 > 0$ 时, a^2 的不断增大意味着系统阻尼也不断增大, 当其他参数不变

时, 系统阻尼的不断增大使得系统响应的振幅不断减小, 即 $A_{st}(a^2)$ 单调减小, 符合物理实际. 事实上, 随机共振是在一定条件下噪声、信号和系统的非线性协作现象, 该现象自然与噪声的非线性性质密切相关. 在本文所讨论的情况下, 二次噪声的系数 α_1, α_2 直接影响着噪声的非线性性质, 因此上述共振现象的出现、消失及性质也就与 α_1, α_2 直接关联.

图 2 表明: 二次阻尼涨落噪声使得系统共振行为为多样化: 当 $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0$ 时, $A_{st}(a^2)$ 可呈现单峰共振; 当 $\alpha_2 < 0$ 时, $A_{st}(a^2)$ 可呈现双峰共振; 当 $\alpha_2 > 0$ 时, 系统不会出现共振现象. 由此可见二次噪声的二次项对系统的共振行为起着关键作用, 通过调节二次噪声的系数, 可在一定范围内实现对线性谐振子随机共振的有效控制.

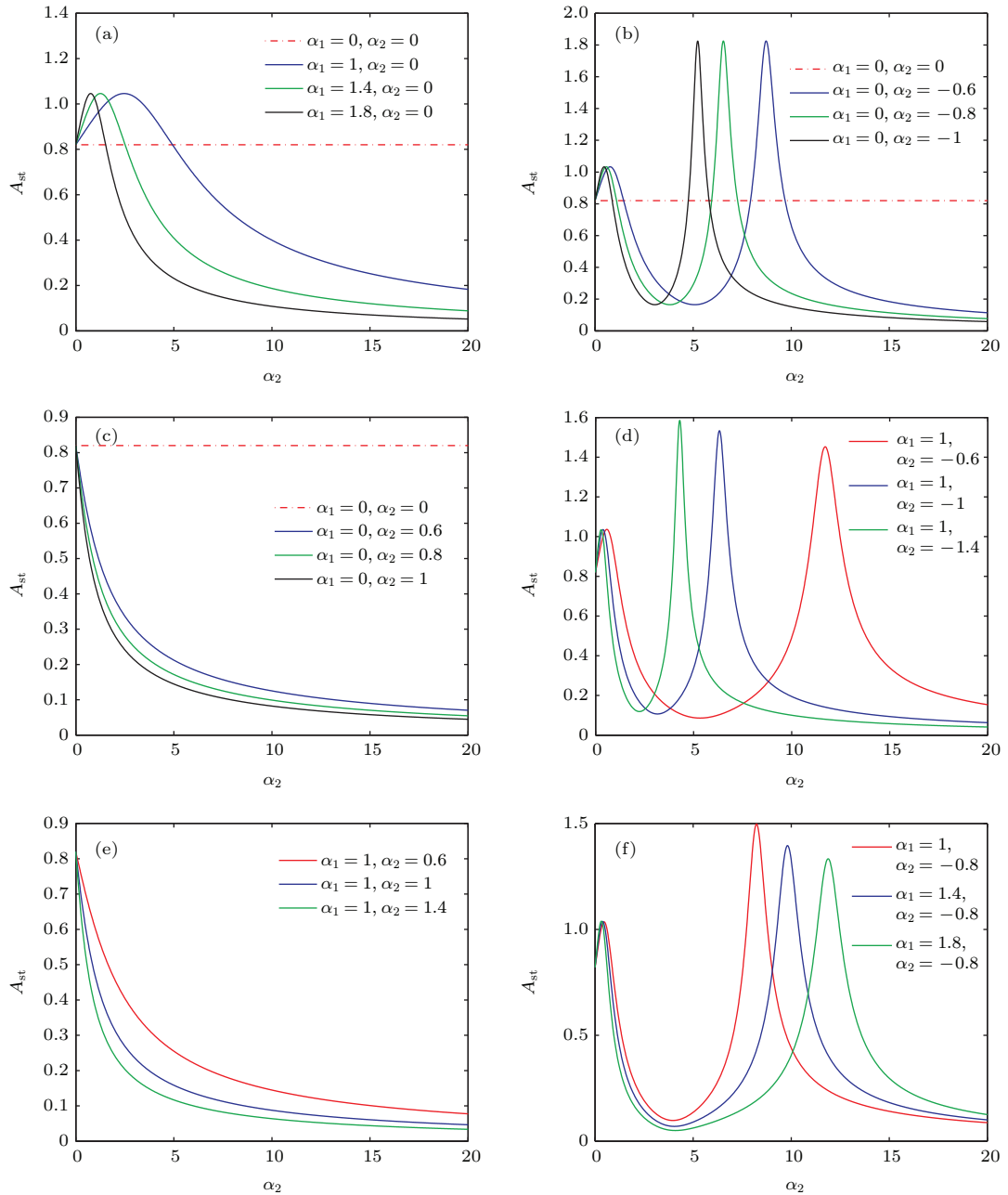


图 2 (网刊彩色) 当二次噪声系数 (α_1, α_2) 取不同参数时, 稳态响应振幅 A_{st} 随噪声强度 a^2 的变化 (a) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 = 0$; (b) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 < 0$; (c) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 > 0$; (d) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 < 0$; (e) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 > 0$; (f) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 = -0.8$

Fig. 2. (color online) The curves of the steady response amplitude A_{st} versus noise intensity a^2 with various noise coefficients (α_1, α_2) : (a) $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0$; (b) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 < 0$; (c) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 > 0$; (d) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 < 0$; (e) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 > 0$; (f) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 = -0.8$.

4.3 稳态响应振幅 A_{st} 随系统频率 ω_0 的变化

图3绘制了稳态响应振幅 A_{st} 作为系统频率 ω_0 的函数, 随着不同的外部信号频率 Ω 、不同的二次噪声系数 (α_1, α_2) 变化的曲线, 其他各参数的取值为 $\gamma = 1, A_0 = 1, a^2 = 1, \lambda_\xi = 2$. 图3(a)绘制了当 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ 时, 即系统不受阻尼涨落影响时, $A_{st}(\omega_0)$ 随着不同的外部信号频率 Ω 变化的曲线. 从图3(a)中可以看出: 在无阻尼涨落情况下, $A_{st}(\omega_0)$ 出现单峰共振, 共振峰出现在 $\omega_0 = \Omega$ 处, 即系统出现真正的共振现象. 图3(b)绘制了当 $\alpha_2 = 0, \Omega = 1$ 时, 即线性噪声情形下, $A_{st}(\omega_0)$ 随着不同的 α_1 变化的曲线. 从图3(b)中可以看出: $A_{st}(\omega_0)$ 出现单峰共振, 线性噪声使得共振峰在 $\omega_0 = \Omega$ 处发生右漂, 且同时影响共振峰的峰

值. 图3(c)绘制了当 $\alpha_1 = 0, \Omega = 1$ 时, 即非线性噪声为 $\alpha_2 \xi^2(t)$ 时, $A_{st}(\omega_0)$ 随着不同的 α_2 变化的曲线, 图中内插图为曲线 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.2$ 的局部图. 从图3(c)中可以看出: $A_{st}(\omega_0)$ 出现单峰共振, $\alpha_2 \xi^2(t)$ 影响共振峰位置和大小, 当 $\alpha_2 > 0$, 共振峰在 $\omega_0 = \Omega$ 处发生左漂; 当 $\alpha_2 < 0$, 共振峰在 $\omega_0 = \Omega$ 处发生右漂. 事实上, 当系统不受外噪声作用时, 由于内噪声强度极其微弱, 因而系统几乎未受到任何随机因素的影响, 从而当系统内外频率相同时, 系统响应达到最大, 即系统出现共振现象; 而当系统受到由双态噪声经过一定方式生成的阻尼涨落噪声作用时, 系统的阻尼必将依赖双态噪声及阻尼涨落生成方式而发生转换, 从而系统阻尼的转换性质、系统固有频率与外部周期驱动频率三者的交叉耦合作用使得系统的共振频率发生改变, 即共振峰位置改变.

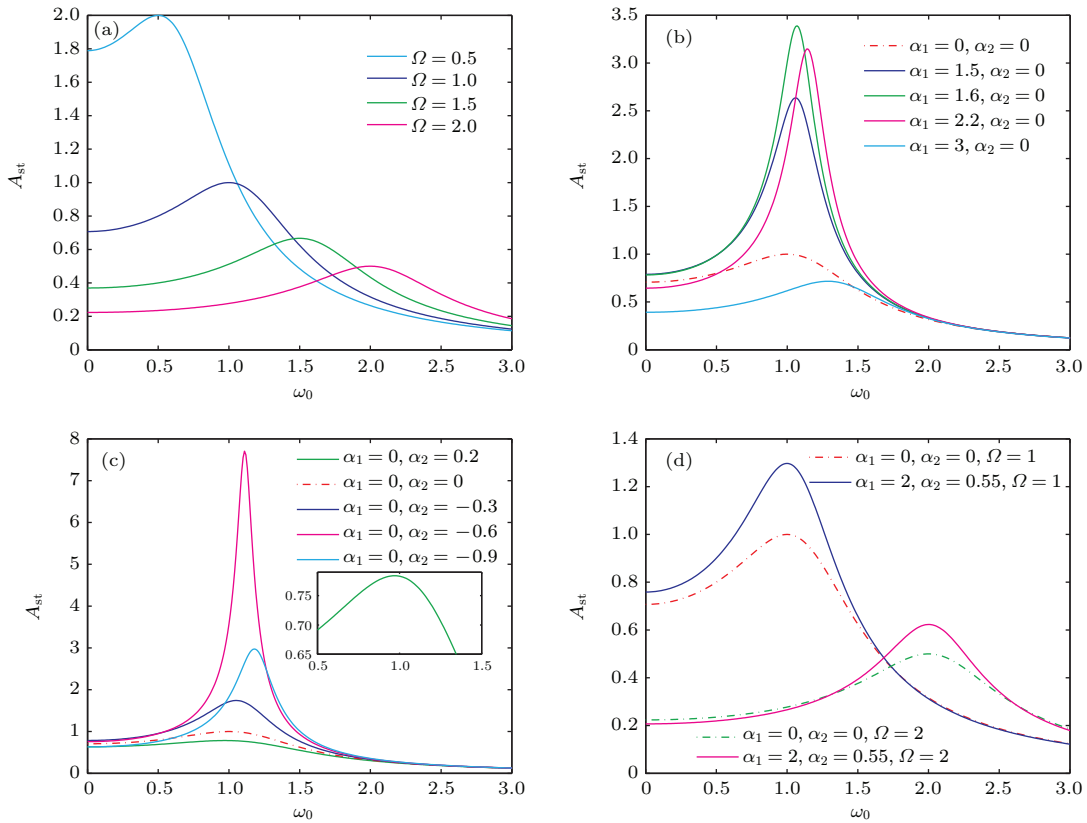


图3 (网刊彩色) 当二次噪声系数 (α_1, α_2) 和外部信号频率 Ω 取不同参数时, 稳态响应振幅 A_{st} 随系统频率 ω_0 的变化 (a) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$; (b) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 = 0, \Omega = 1$; (c) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0, \Omega = 1$; (d) $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0.55$
 Fig. 3. (color online) The curves of the steady response amplitude A_{st} versus the system intrinsic frequency ω_0 with various noise coefficients (α_1, α_2) and external signal frequency Ω : (a) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$; (b) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 = 0, \Omega = 1$; (c) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0, \Omega = 1$; (d) $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0.55$.

特别地, 若系统受到二次阻尼涨落影响时, 当二次噪声系数满足一定关系时, 系统不仅可出现真正的共振现象, 还可加强系统响应的共振效应.

例如, 在图3(d)中我们绘制了当 $\Omega = 1, 2$ 时, 在 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ 和 $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0.55$ 两种情形下的 $A_{st}(\omega_0)$ 曲线. 从图中可以看出: 当二次噪声系数

分别取 $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0.55$ 时, $A_{st}(\omega_0)$ 的共振峰出现在 $\omega_0 = \Omega$ 处, 即系统出现了真正的共振现象; 而且共振峰的峰值还大于 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ (即无阻尼涨落) 情形下的峰值.

图 3 表明: 在一定参数条件下, 在二次阻尼涨落噪声作用下, $A_{st}(\omega_0)$ 会出现真正的共振现象, 即共振峰位于 $\omega_0 = \Omega$ 处, 这是在线性阻尼涨落噪声情况下未观察到的现象, 该现象对微弱信号的频率估计具有理论指导意义.

5 仿真实验

下面采用四阶 Runge-Kutta 算法得到 (4) 式的数值解, 并考察数值仿真与解析结果是否相符. 在图 3(d) 的参数条件下, 取仿真时间为 3000 s, 采样间隔为 0.01 s, 外部周期信号频率 $\Omega = 2$, 系统固有频率 $\omega_0 = 2$, 可得系统输出信号频域图如图 4.

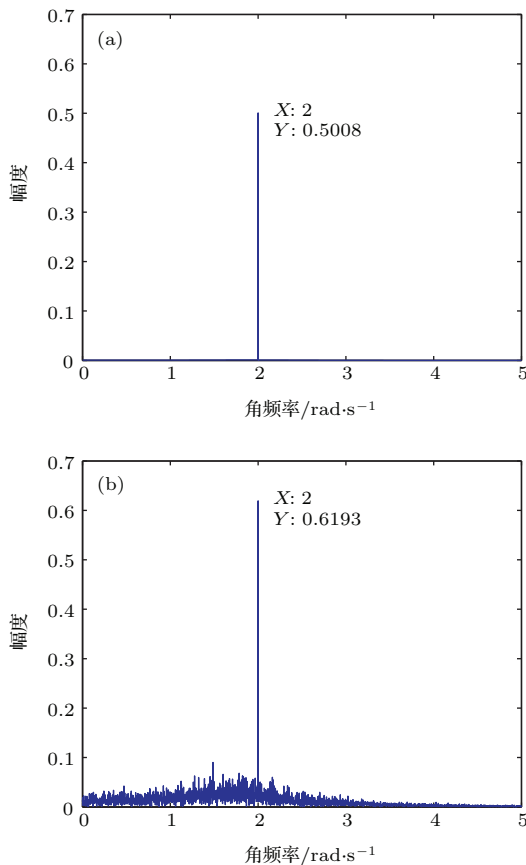


图 4 当二次噪声系数 (α_1, α_2) 取不同参数时, 系统输出信号的频域图 (a) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$; (b) $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0.55$

Fig. 4. The frequency spectrum of the output signal with various noise coefficients (α_1, α_2): (a) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$; (b) $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0.55$.

从图 4(a) 中可以看出: 在无阻尼涨落 (即 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$) 情况下, 系统几乎未受到任何随机扰动 (内噪声强度及其微弱, 对系统输出的影响可以忽略不计); 系统输出信号在频域上表现为外部周期信号频率 ($\Omega = 2$) 处的尖峰信号, 其峰值代表系统响应幅值 A' ; 在仿真误差允许范围内, 仿真结果 $A' = 0.5008$ 与 (17) 式给出的理论结果 $A_{st} = 0.5000$ 具有一致性.

从图 4(b) 中可以看出: 在二次阻尼涨落噪声 ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0.55$) 作用下, 系统输出信号在频域上表现为外部周期信号频率 ($\Omega = 2$) 处的尖峰信号, 其峰值代表系统响应幅值 A' ; 在仿真误差允许的范围内, 仿真结果 $A' = 0.6193$ 与 (17) 式得出的理论结果 $A_{st} = 0.6230$ 具有一致性. 噪声的引入使得系统输出存在随机噪声基底, 进而外部周期信号频率 ($\Omega = 2$) 处的响应幅值实际上是一个随机变量. 为考虑噪声的影响, 在相同参数条件下, 我们采用 Monte-Carlo 方法获得均方差 σ 与仿真次数 N 之间的关系如图 5 所示, 其中,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (A_n - A_{st})^2},$$

A_n 为第 n 次仿真得到响应幅值, A_{st} 为 (17) 式确定的稳态响应振幅. 从图 5 中可以看出: 当仿真次数 N 足够大 ($N > 400$) 时, 均方差 σ 将逐渐趋于 8.3×10^{-3} , 这就意味着仿真结果与 (17) 式确定的理论结果具有一致性.

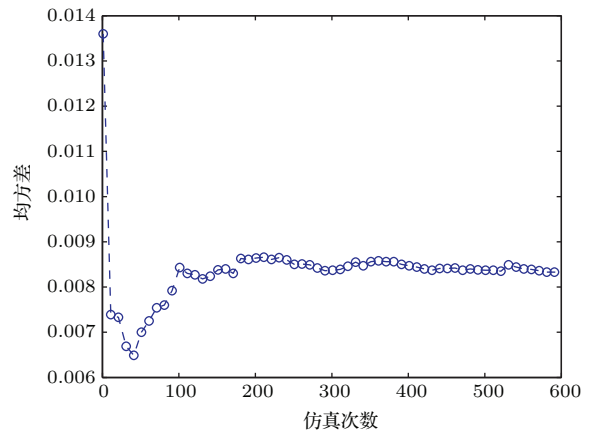


图 5 均方差与仿真次数关系图

Fig. 5. The curve of the mean squared error versus the simulation times.

6 结 论

较之于线性噪声, 非线性噪声能更广泛地存在于诸如激光系统等实际的物理、电子系统中, 但其

研究远不能满足实际情况的需要. 针对作为非线性阻尼涨落噪声基本构成成分的二次阻尼涨落噪声, 本文考虑了周期信号与之共同作用下的线性谐振子, 通过分析系统稳态响应振幅的共振行为后发现:

1) 系统稳态响应振幅关于非线性阻尼涨落噪声系数具有非单调依赖关系, 特别地, 非线性阻尼涨落噪声比线性阻尼涨落噪声更有助于增强系统对外部周期信号的响应程度;

2) 非线性阻尼涨落噪声比线性阻尼涨落噪声使得稳态响应振幅关于噪声强度具有更为丰富的共振行为;

3) 在二次阻尼涨落噪声作用下, 系统可出现真正的共振现象, 这是在线性阻尼涨落噪声情况下未被观察到的现象.

综上, 本文的研究工作充分说明非线性噪声项的非线性性质对系统共振行为起着关键的作用, 从而为深入研究非线性噪声对系统共振行为的影响提供了理论基础, 同时也为后续物理、工程的相关应用提供了坚实的理论依据.

参考文献

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** L453
- [2] Wiesenfeld K, Moss F 1995 *Nature* **373** 33
- [3] Gitterman M 2005 *Physica A* **352** 309
- [4] Benzi R 2010 *Nonlinear Proc. Geophys.* **17** 431
- [5] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 2009 *Eur. Phys. J. B* **69** 1
- [6] McDonnell M D, Abbott D 2009 *Plos Comput. Biol.* **5** e1000348
- [7] Wellens T, Shatokhin V, Buchleitner A 2004 *Rep. Prog. Phys.* **67** 45
- [8] Hänggi P, Jung P, Zerbe C, Moss F 1993 *J. Stat. Phys.* **70** 25
- [9] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [10] McNamara B, Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854
- [11] Fox R F 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4148
- [12] Fulinski A 1995 *Phys. Rev. E* **52** 4523
- [13] Katrin L, Romi M, Astrid R 2009 *Phys. Rev. E* **79** 051128
- [14] Berdichevsky V, Gitterman M 1996 *Europhys. Lett.* **36** 161
- [15] Tian Y, Huang L, Luo M K 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 050502 (in Chinese) [田艳, 黄丽, 罗懋康 2013 物理学报 **62** 050502]
- [16] Lin L F, Tian Y, Ma H 2014 *Chin. Phys. B* **23** 080503
- [17] Li D S, Li J H 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 298
- [18] Gitterman M, Shapiro I 2011 *J. Stat. Phys.* **144** 139
- [19] Jiang S Q, Guo F, Zhou Y R, Gu T X 2007 *International Conference on Communications, Circuits and Systems* Fukuoka, Japan, July 11–13, 2007 p1044
- [20] Ning L J, Xu W, Yao M L 2007 *Chin. Phys.* **16** 2595
- [21] Zhong S C, Yu T, Zhang L, Ma H 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 020202 (in Chinese) [钟苏川, 蔚涛, 张路, 马洪 2015 物理学报 **64** 020202]
- [22] Zhang L, Zhong S C, Peng H, Luo M K 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 090505
- [23] Gitterman M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 041101
- [24] Murray S I, Marlan O S, Willis E J 1974 *Laser Physics* (Redwood City: Addison-Wesley Publishing) p197
- [25] Zhang L Y, Cao L, Wu D J 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 1310
- [26] Sancho J M, San Miguel, Dürr M D 1982 *J. Stat. Phys.* **28** 291
- [27] Sagues F, Miguel S M, Sacho J M 1984 *Z. Phys. B* **55** 269
- [28] Hector C, Fernando M, Enrique T 2006 *Phys. Rev. E* **74** 022102
- [29] Zhang L, Zhong S C, Peng H, Luo M K 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 130503 (in Chinese) [张路, 钟苏川, 彭皓, 罗懋康 2012 物理学报 **61** 130503]
- [30] Bena I, Broeck C V D, Kawai R, Lindenberg K 2002 *Phys. Rev. E* **66** 045603
- [31] Bena I 2006 *Int. J. Mod. Phys. B* **20** 2825

Stochastic resonance of a linear harmonic oscillator with non-linear damping fluctuation*

Tian Yan¹⁾ He Gui-Tian¹⁾ Luo Mao-Kang^{2)†}

1) (School of Science, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China)

2) (College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

(Received 4 November 2015; revised manuscript received 14 December 2015)

Abstract

Although non-linear noise exists far more widely in actual systems than linear noise, the study on non-linear noise is far from meeting the needs of practical situations as yet. The phenomenon of stochastic resonance (SR) is a non-linear cooperative effect which is jointly produced by signal, noise, and system, obviously, it is closely related to the nature of the noise. As a result, the non-linear nature of the non-linear noise has an inevitable impact on the dynamic behavior of a system, so it is of great significance to study the non-linear noise's influence on the dynamic behavior of the system. The linear harmonic oscillator is the most basic model to describe different phenomena in nature, and the quadratic noise is the most basic non-linear noise. In this paper, we consider a linear harmonic oscillator driven by an external periodic force and a quadratic damping fluctuation. For the proposed model, we focus on the effect of non-linear nature of quadratic fluctuation on the system's resonant behavior. Firstly, by the use of the Shapiro-Loginov formula and the Laplace transform technique, the analytical expressions of the first moment and the steady response amplitude of the output signal are obtained. Secondly, by studying the impacts of noise parameters and system intrinsic frequency, the non-monotonic behaviors of the steady response amplitude are found. Finally, numerical simulations are presented to verify the effectiveness of the analytical result. According to the research, we have the following conclusions: 1) The steady response amplitude is a non-monotonic function of coefficients of the quadratic damping fluctuation. Furthermore, the non-linear damping fluctuation is easier to contribute the system's enhancing response to the external periodic signal than the linear fluctuation. 2) The evolution of the steady response amplitude versus noise intensity presents more resonant behaviors. One-peak SR phenomenon and double-peak SR phenomenon are observed at different values of coefficients of the quadratic noise, particularly, the SR phenomenon disappears at the positive quadratic coefficient of the quadratic noise. 3) The evolution of the steady response amplitude versus the system intrinsic frequency presents true resonance, i. e. the phenomenon of resonance appears when the external signal frequency is equal to the system intrinsic frequency. True resonance is not observed in the linear harmonic oscillator driven by a linear damping fluctuation as yet. In conclusion, all the researches show that the non-linear nature of non-linear noise plays a key role in system's resonant behavior, in addition, the non-linear damping fluctuation is conducive to the detection and frequency estimation of weak periodic signal.

Keywords: linear harmonic oscillator, non-linear damping fluctuation, stochastic resonance

PACS: 05.40.-a, 05.40.Ca, 02.50.-r

DOI: [10.7498/aps.65.060501](https://doi.org/10.7498/aps.65.060501)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238), the Scientific Research Foundation of the Education Department of Sichuan Province, China (Grant Nos. 14ZA0050, 13ZA0191), the Scientific Research Foundation of SWPU of China (Grant Nos. 2013XJZ027, 2013XJZ025, 2014 PYZ015), and the Young Scholars Development Fund of SWPU of China (Grant No. 201331010049).

† Corresponding author. E-mail: makaluo@scu.edu.cn