

自旋-轨道耦合作用下双组分量子气体中的动力学结构因子与求和规则

贺丽 余增强

Dynamic structure factors and sum rules in two-component quantum gases with spin-orbit coupling

He Li Yu Zeng-Qiang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 131101 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.131101

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.131101>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I13>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

么正极限附近费米气体反常激发模式的涡旋

[Vortex of an anomalous mode in Fermi gas near unitarity limit](#)

物理学报.2013, 62(14): 140301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.140301>

雪茄形铷原子玻色-爱因斯坦凝聚中单极子模的朗道阻尼和频移

[Landau damping and frequency-shift of monopole mode in an elongated-rubidium Bose-Einstein condensate](#)

物理学报.2013, 62(13): 130307 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.130307>

利用光晶格自旋链中磁振子的激发模拟有限温度下光子的动力学 Casimir 效应

[Simulating dynamical Casimir effect at finite temperature with magnons in spin chain within an optical lattice](#)

物理学报.2013, 62(6): 060302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.060302>

费米-费米散射长度对费米超流气体在么正极限区域的隧穿现象影响

[The tunneling phenomena of the Fermi superfluid gases in unitarity by manipulating the Fermi-Fermi scattering length](#)

物理学报.2012, 61(18): 180303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.180303>

冲击加载过程中苯的液-固相转变

[Solidification transformation of benzene under quasi-isentropic compression](#)

物理学报.2011, 60(9): 090306 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.60.090306>

自旋-轨道耦合作用下双组分量子气体中的动力学结构因子与求和规则

贺丽^{1)†} 余增强²⁾

1) (山西大学物理电子工程学院, 太原 030006)

2) (山西大学理论物理研究所, 太原 030006)

(2016年1月25日收到; 2016年3月2日收到修改稿)

在自旋-轨道耦合作用下, 双组分量子气体中密度涨落和自旋涨落的动力学结构因子满足不同形式的求和规则. 特别是动力学结构因子的一阶矩一般不具有空间反演对称性. 针对两个特定的模型——Raman 耦合作用下的无相互作用费米气体与弱相互作用玻色气体, 分别计算了在不同参数条件下密度涨落和自旋涨落的动力学结构因子, 并讨论了实验上观测其一阶矩偏离空间反演对称所需达到的能谱分辨率.

关键词: 自旋-轨道耦合, 动力学结构因子, 求和规则, 费米气体, 玻色气体

PACS: 11.55.Hx, 03.75.Kk, 03.75.Ss

DOI: 10.7498/aps.65.131101

1 引言

在量子多体系统中, 动力学结构因子包含了丰富的元激发信息^[1]. 动力学结构因子的矩(moment)满足一定的求和规则, 这些规则作为一种有力的工具在实验和理论上都具有重要的应用: 一方面, 这些严格成立的关系式可以用来确定实验上的未知物理参数(比如, 用来归一化测量信号); 另一方面, 它们也对检验理论模型的各种近似方法提供了客观的依据. 在超冷原子气体中, 动力学结构因子可以通过双光子 Bragg 散射实验测得^[2,3]. 对于通常的双组费米气体或玻色气体而言, 密度涨落和自旋涨落的动力学结构因子满足相同形式的 f -求和规则(为简单起见, 本文设 $\hbar = k_B = 1$):

$$\int d\omega \omega S_D(\mathbf{q}, \omega) = \int d\omega \omega S_M(\mathbf{q}, \omega) = N \frac{q^2}{2m}, \quad (1)$$

其中 S_D 和 S_M 分别是密度涨落和自旋涨落的动力学结构因子, 二者均是波矢 \mathbf{q} 与频率 ω 的函数, N

是原子总数, m 为原子质量. (1) 式给出的求和规则在任何温度下都是严格成立的, 而且不依赖于原子的统计属性(费米或玻色统计)以及原子之间的相互作用强度.

近年来, 超冷原子气体中自旋-轨道耦合的实现为多体物理的研究开辟了一个新的平台^[4,5]. 目前, 广泛采用的实验方案是通过一组对射的 Raman 光产生相邻两个超精细能级之间的双光子跃迁. 迄今, 这一方案已经在 ⁸⁷Rb 玻色原子气体以及 ⁴⁰K, ⁶Li 费米原子气体中先后实现^[6-8]. 最近, 通过 Bragg 散射技术, 实验上测量了在 Raman 耦合作用下玻色凝聚体中密度涨落的动力学结构因子^[9], 并且初步验证了(在实验精度范围内)其同样满足(1)式所给出的 f -求和规则.

本文研究表明, 在自旋-轨道耦合作用下, 双组分量子气体中 f -求和规则的形式与(1)式不尽相同, 动力学结构因子的一阶矩(见下文定义)一般而言不满足空间反演对称性. 我们针对两个具体模型——Raman 耦合作用下的无相互作用费米气体和弱相互作用玻色气体, 分别计算密度涨落和自旋涨落的动力学结构因子, 并讨论实验上观测其一阶

† 通信作者. E-mail: heli@sxu.edu.cn

矩偏离空间反演对称所需达到的能谱分辨率.

2 自旋-轨道耦合作用下的求和规则

在一个(单体或多体)量子系统中,对于任意算符 O 可以定义其动力学结构因子

$$S_O(\omega) = \sum_{\ell \neq \ell'} P_\ell |\langle \Phi_{\ell'} | O | \Phi_\ell \rangle|^2 \times \delta(\omega + E_\ell - E_{\ell'}), \quad (2)$$

其中 $|\Phi_\ell\rangle$ 为体系哈密顿量 H 的第 ℓ 个本征态, E_ℓ 为对应的本征能量, $P_\ell = e^{-E_\ell/T}/Z$ 为温度 T 下 $|\Phi_\ell\rangle$ 态出现的热平衡概率, Z 为配分函数.利用能量本征态的完备性条件,不难证明,动力学结构因子的一阶矩(即其能量权重的积分)严格满足如下两个求和规则^[1]:

$$\int d\omega \omega [S_O(\omega) + S_{O^\dagger}(\omega)] = \langle [O^\dagger, [H, O]] \rangle, \quad (3)$$

$$\int d\omega \omega [S_O(\omega) - S_{O^\dagger}(\omega)] = \langle \{O^\dagger, [H, O]\} \rangle. \quad (4)$$

其中(3)式通常被称为 f -求和规则.

现在来考虑Raman耦合作用的下量子气体中的密度涨落和自旋涨落.

体系哈密顿量由两部分组成, $H = H_0 + H_{\text{int}}$, H_0 为原子的动能和势能项, H_{int} 为原子间的相互作用项.

$$H_0 = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left[\frac{(-i\nabla - \mathbf{k}_r \sigma^z)^2}{2m} + \frac{\Omega}{2} \sigma^x + \frac{\Delta}{2} \sigma^z + V_{\text{ex}}(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}), \quad (5)$$

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma' = \uparrow, \downarrow} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' U_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{r}) \times \psi_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{r}') \psi_{\sigma'}(\mathbf{r}') \psi_{\sigma}(\mathbf{r}), \quad (6)$$

其中 $\psi^\dagger = (\psi_\uparrow^\dagger, \psi_\downarrow^\dagger)$ 为原子(玻色子或费米子)的双分量场算符,自旋指标 \uparrow 和 \downarrow 分别标记原子的两个超精细态, σ^x 和 σ^z 为泡利矩阵, \mathbf{k}_r 为Raman光的反冲动量, Ω 为Raman耦合强度, Δ 为双光子失谐, V_{ex} 为外势场, $U_{\sigma\sigma'}$ 为不同组分原子之间的相互作用势.不失一般性,以下我们取反冲动量沿 x 方向,即 $\mathbf{k}_r = k_r \hat{x}$ (k_r 为正数). (5)式中动量的线性项称为自旋-轨道耦合项,在适当的自旋变换下,该项可视为Rashba与Dresselhaus两种自旋-轨道耦合形式的等权叠加^[6].

密度涨落与自旋涨落的动力学结构因子分别定义为

$$S_D(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\ell \neq \ell'} P_\ell |\langle \Phi_{\ell'} | \rho_{\mathbf{q}}^\dagger | \Phi_\ell \rangle|^2 \times \delta(\omega + E_\ell - E_{\ell'}), \quad (7)$$

$$S_M(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\ell \neq \ell'} P_\ell |\langle \Phi_{\ell'} | \sigma_{\mathbf{q}}^{z\dagger} | \Phi_\ell \rangle|^2 \times \delta(\omega + E_\ell - E_{\ell'}), \quad (8)$$

其中 $\rho_{\mathbf{q}}^\dagger = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ 是密度涨落算符的厄米共轭, $\sigma_{\mathbf{q}}^{z\dagger} = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \sigma^z \psi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ 是自旋涨落算符的厄米共轭.显然,根据定义, $\rho_{\mathbf{q}}^\dagger = \rho_{-\mathbf{q}}$, $\sigma_{\mathbf{q}}^{z\dagger} = \sigma_{-\mathbf{q}}^z$.

将哈密顿量(5)和(6)式代入(3)式中,通过算符对易关系的直接计算^[10,11],可以得到在Raman耦合作用下密度涨落和自旋涨落的 f -求和规则:

$$\int d\omega \omega [S_D(\mathbf{q}, \omega) + S_D(-\mathbf{q}, \omega)] = N \frac{\mathbf{q}^2}{m}, \quad (9)$$

$$\int d\omega \omega [S_M(\mathbf{q}, \omega) + S_M(-\mathbf{q}, \omega)] = N \left[\frac{\mathbf{q}^2}{m} - 2\Omega M_x \right]. \quad (10)$$

这两个关系式对于玻色气体和费米气体在任意温度下都严格成立,且形式上不依赖于原子间相互作用的细节.对比(1)式,可以看出Raman耦合导致的两点新变化:1)密度涨落与自旋涨落满足不同的 f -求和规则,在自旋涨落的关系式中出现了额外的 $-2\Omega M_x$ 项^[11],其中 $M_x = \int d\mathbf{r} \langle \psi^\dagger \sigma^x \psi \rangle / N$ 为平均每个原子的横向磁化强度;2)动力学结构因子的一阶矩不一定满足空间反演对称性, f -求和规则左式中 $\pm\mathbf{q}$ 两项的贡献一般而言并不相等.当Raman耦合关闭时(即 $\Omega = 0$),空间反演对称性总是保持的,(9)和(10)式即恢复到(1)的结果.

动力学结构因子一阶矩的 $\pm\mathbf{q}$ 不对称性更直接地体现在(4)式给出的求和规则.对于密度涨落和自旋涨落,该求和规则写为

$$\int d\omega \omega [S_D(\mathbf{q}, \omega) - S_D(-\mathbf{q}, \omega)] = \langle \{ \rho_{\mathbf{q}}, [H, \rho_{\mathbf{q}}^\dagger] \} \rangle, \quad (11)$$

$$\int d\omega \omega [S_M(\mathbf{q}, \omega) - S_M(-\mathbf{q}, \omega)] = \langle \{ \sigma_{\mathbf{q}}^z, [H, \sigma_{\mathbf{q}}^{z\dagger}] \} \rangle. \quad (12)$$

与 f -求和规则不同,上面两式的等号右端不能写成一个简单的解析形式,需通过实验测量或微观理论

计算给出. 当不存在 Raman 耦合时, (11) 和 (12) 式只给出平庸的零结果; 而当 Raman 耦合打开时, 这两个求和规则一般而言是非平庸的.

上述两类求和规则, 可以通过函数 $\Lambda_D(\mathbf{q})$ 与 $\Lambda_M(\mathbf{q})$ 来刻画, 其定义为

$$\Lambda_D(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \int d\omega \omega S_D(\mathbf{q}, \omega) - \frac{\mathbf{q}^2}{2m}, \quad (13)$$

$$\Lambda_M(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \int d\omega \omega S_M(\mathbf{q}, \omega) - \frac{\mathbf{q}^2}{2m} + \Omega M_x. \quad (14)$$

f -求和规则要求 $\Lambda_D(\mathbf{q})$ 与 $\Lambda_M(\mathbf{q})$ 应是波矢 \mathbf{q} 的奇函数; 而 $\Lambda_D(\mathbf{q}) - \Lambda_D(-\mathbf{q})$ 与 $\Lambda_M(\mathbf{q}) - \Lambda_M(-\mathbf{q})$ 则给出平均每个原子对于求和规则 (11) 式和 (12) 式的贡献; Λ_D 与 Λ_M 恒为零表示动力学结构因子的一阶矩具有空间反演对称性; Λ_D 和 Λ_M 的绝对值越大, 则说明动力学结构因子的一阶矩偏离空间反演对称越明显.

需要指出的是, 之前已有一些理论工作讨论了自旋-轨道耦合作用下的 f -求和规则^[10,11]. 然而, 在这些工作中都先验地假定了动力学结构因子的一阶矩具有空间反演对称性, 即 $\Lambda_D = \Lambda_M = 0$. 正如本文指出的, 这一假定并非总是成立的. 下面我们就根据两个具体模型——Raman 耦合作用下的无相互作用费米气体和弱相互作用玻色气体, 分别计算 Λ_D 与 Λ_M 随体系参数的变化行为. 为简单起见, 本文仅关注零温、无外势场的情形. 我们的结果很容易直接推广到有限温度, 并且可以通过局域密度近似方案拓展到有外势场的情形.

3 无相互作用费米气体

我们首先考虑无相互作用费米气体模型. 选取动量为单粒子态的好量子数, 对于给定动量 \mathbf{p} , 单粒子能谱有两个分支, 分别用量子数 $\alpha = \pm$ 标记. 无相互作用哈密顿量可以写为对角化的形式^[7,12]:

$$H_0 = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\alpha=\pm} \epsilon_{\mathbf{p},\alpha} \psi_{\mathbf{p},\alpha}^\dagger \psi_{\mathbf{p},\alpha}, \quad (15)$$

其中 $\epsilon_{\mathbf{p},\alpha}$ 为单粒子态本征能量

$$\epsilon_{\mathbf{p},\pm} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + E_r \pm \sqrt{(p_x k_r / m - \Delta/2)^2 + \Omega^2/4}, \quad (16)$$

$E_r = k_r^2/(2m)$ 为反冲能量. $\psi_{\mathbf{p},\alpha}$ 为能量本征态的费米子湮灭算符, 它与自旋基下的费米子湮灭算符

$\psi_{\mathbf{p},\sigma}$ 通过下式的幺正变换相联系:

$$\psi_{\mathbf{p},+} = u_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p},\uparrow} + v_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p},\downarrow}, \quad (17)$$

$$\psi_{\mathbf{p},-} = v_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p},\uparrow} - u_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p},\downarrow}. \quad (18)$$

变换系数 $u_{\mathbf{p}}$ 和 $v_{\mathbf{p}}$ (均取为正数) 满足关系式

$$u_{\mathbf{p}}^2 = 1 - v_{\mathbf{p}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{p_x k_r / m - \Delta/2}{\sqrt{(p_x k_r / m - \Delta/2)^2 + \Omega^2/4}} \right].$$

显然, $u_{\mathbf{p}}$ 和 $v_{\mathbf{p}}$ 的取值与垂直 Raman 光方向的动量 p_y, p_z 无关.

零温下, 基态的费米原子占据化学势能量以下所有单粒子能级. 基态化学势 μ 由原子数方程确定,

$$N = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\alpha=\pm} n_{\mathbf{p},\alpha}, \quad (19)$$

其中 $n_{\mathbf{p},\alpha} = \langle \psi_{\mathbf{p},\alpha}^\dagger \psi_{\mathbf{p},\alpha} \rangle = \Theta(\mu - \epsilon_{\mathbf{p},\alpha})$ 为能量本征态的动量分布, $\Theta(\cdot)$ 为阶梯函数.

在能量本征态的基矢下, 密度涨落算符可重新写为

$$\rho_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\alpha} [(u_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + v_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}) \psi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha}^\dagger \psi_{\mathbf{p},\alpha} - \alpha (u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{q}+\mathbf{q}} - v_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}) \psi_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha}^\dagger \psi_{\mathbf{p},-\alpha}],$$

代入 (7) 式, 可以得到密度涨落的动力学结构因子:

$$\begin{aligned} S_D(\mathbf{q}, \omega) &= \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\alpha=\pm} [(u_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + v_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})^2 n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha} \\ &\times (1 - n_{\mathbf{p},\alpha}) \delta(\omega + \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha} - \epsilon_{\mathbf{p},\alpha}) \\ &+ (u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - v_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})^2 n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha} \\ &\times (1 - n_{\mathbf{p},-\alpha}) \delta(\omega + \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha} - \epsilon_{\mathbf{p},-\alpha})]. \end{aligned} \quad (20)$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned} \Lambda_D(\mathbf{q}) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\alpha=\pm} [(u_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + v_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})^2 n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha} \\ &\times (1 - n_{\mathbf{p},\alpha}) (\epsilon_{\mathbf{p},\alpha} - \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha}) \\ &+ (u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - v_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})^2 n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha} \\ &\times (1 - n_{\mathbf{p},-\alpha}) (\epsilon_{\mathbf{p},-\alpha} - \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha})] \\ &- \frac{\mathbf{q}^2}{2m}. \end{aligned} \quad (21)$$

图 1 (a) 给出了在不同双光子失谐条件下 $\Lambda_D(\mathbf{q})$ 随波矢 q_x 变化的函数形式. 当 $\Delta = 0$ 时, 由于 $\epsilon_{\mathbf{p},\alpha} = \epsilon_{-\mathbf{p},\alpha}$, $u_{\mathbf{p}} = u_{-\mathbf{p}}$, $v_{\mathbf{p}} = v_{-\mathbf{p}}$, 故动力学结构因子的一阶矩总是空间反演对称的. 当 $\Delta \neq 0$ 时, $\epsilon_{\mathbf{p},\alpha} \neq \epsilon_{-\mathbf{p},\alpha}$, 相应地, 动力学结构因子的一阶

矩也会偏离空间反演对称. 尽管有限大的失谐对于给出非零的 Λ_D 是必要的, 但二者之间并非单调变化的关系. 图 1(b) 显示了在给定波矢 \mathbf{q} 条件下 Λ_D 随失谐大小的变化. 当 $|\Delta|$ 很大时, 体系成为近乎完全极化在 σ^z 方向的单分量费米气体, 自旋-轨道耦合项的效应基本上可以忽略, 从而 $|\Lambda_D|$ 会逐渐减小并趋于消失. 基于类似的原因, 对于给定的失谐, 当 Raman 耦合强度很大时, $|\Lambda_D|$ 也会逐渐趋于零 (见图 1(c)), 这是因为在大 Ω 极限下, 所有费米原子几乎都被极化在 σ^x 方向上. 图 1 的数值结果表明, 实验上若试图观测动力学结构因子一阶矩对于空间反演的偏离, Bragg 散射的能谱分辨率应达到 $10^{-2}E_r$.

类似地, 我们可以将自旋涨落算符在能量本征态基矢下写出, 由此得到自旋涨落的动力学结构因子为

$$\begin{aligned}
 S_M(\mathbf{q}, \omega) &= \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\alpha=\pm} [(u_{\mathbf{p}}u_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - v_{\mathbf{p}}v_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})^2 n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha} \\
 &\quad \times (1 - n_{\mathbf{p},\alpha}) \delta(\omega + \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha} - \varepsilon_{\mathbf{p},\alpha}) \\
 &\quad + (u_{\mathbf{p}}v_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + v_{\mathbf{p}}u_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})^2 n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha} \\
 &\quad \times (1 - n_{\mathbf{p},-\alpha}) \delta(\omega + \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha} - \varepsilon_{\mathbf{p},-\alpha})]. \quad (22)
 \end{aligned}$$

其一阶矩对空间反演对称的偏离为 (平均每个原子的贡献)

$$\begin{aligned}
 \Lambda_M(\mathbf{q}) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\alpha=\pm} [(u_{\mathbf{p}}u_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - v_{\mathbf{p}}v_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})^2 n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha} \\
 &\quad \times (1 - n_{\mathbf{p},\alpha}) (\varepsilon_{\mathbf{p},\alpha} - \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha}) \\
 &\quad + (u_{\mathbf{p}}v_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + v_{\mathbf{p}}u_{\mathbf{p}+\mathbf{q}})^2 n_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha} \\
 &\quad \times (1 - n_{\mathbf{p},-\alpha}) (\varepsilon_{\mathbf{p},-\alpha} - \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\alpha})] \\
 &\quad - \frac{\mathbf{q}^2}{2m} + \Omega M_x, \quad (23)
 \end{aligned}$$

其中横向磁化强度 $M_x = 2 \sum_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}v_{\mathbf{p}}(n_{\mathbf{p},+} - n_{\mathbf{p},-})/N$.

图 2 给出了理想费米气体中 Λ_M 在不同 Raman 耦合参数下的变化行为, 其基本趋势与密度涨落的情形大致相同. 但也有一些新的特征: 1) $\Lambda_M(\mathbf{q})$ 随波矢 \mathbf{q}_x 可能出现多次振荡或变号; 2) Λ_M 与 Λ_D 的符号未必相同, 多数情况下二者之间是反号的; 3) 一般说来 $|\Lambda_M|$ 的最大幅度小于 $|\Lambda_D|$, 换言之, 自旋涨落动力学结构因子的一阶对于空间反演的偏离更不易在实验上观测.

需要指出的是, 在图 1 和图 2 中我们仅给出了波矢 \mathbf{q} 沿 Raman 光方向时的结果. 对于其他方向的波矢, $|\Lambda_D|$ 与 $|\Lambda_M|$ 的幅度会更小, 从而实验上也更难以观测. 容易证明, 当波矢 \mathbf{q} 垂直 Raman 光方向时, 动力学结构因子与无自旋-轨道耦合时的形式相同, 即 $\Lambda_D = \Lambda_M = 0$.

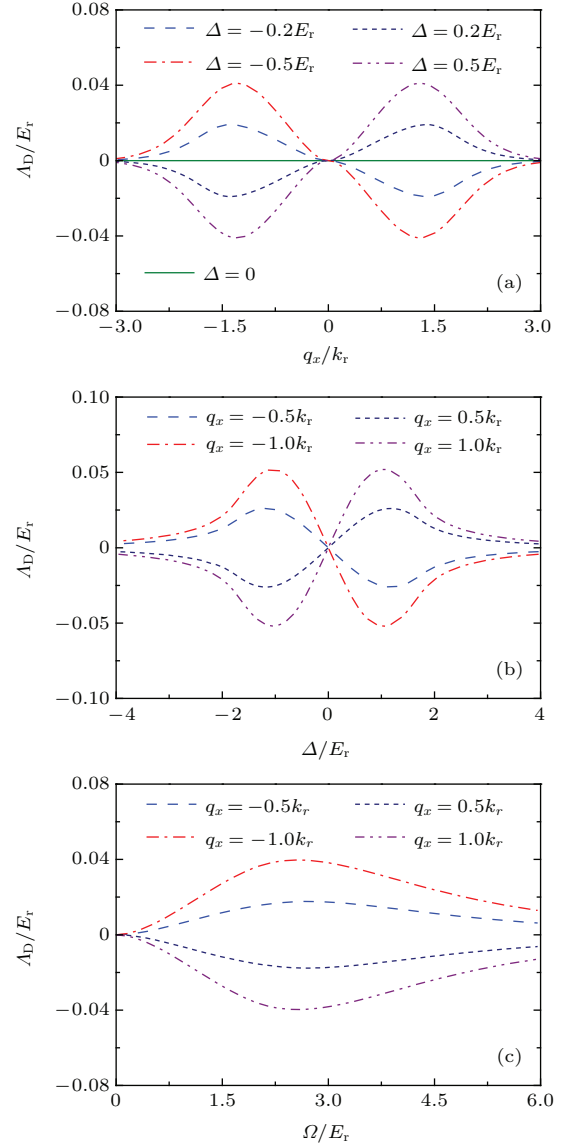


图 1 无相互作用自旋-轨道耦合费米气体中函数 Λ_D 随 (a) 波矢 q_x , (b) Raman 失谐 Δ , (c) Raman 耦合强度 Ω 的变化关系. 参数: (a), (b) $\Omega = 2E_r$; (c) $\Delta = -0.5E_r$; 所有曲线均取波矢平行于 Raman 光方向, 原子密度取 $n = k_r^3/(3\pi^2)$.
 Fig. 1. Λ_D as a function of (a) wave-vector q_x , (b) Raman detuning Δ , and (c) Raman coupling strength Ω in a noninteracting Fermi gas with spin-orbit coupling. Parameters: (a), (b) $\Omega = 2E_r$, (c) $\Delta = -0.5E_r$. For all plots, the wave-vector is parallel to the direction of Raman beams, and the atomic density is taken as $n = k_r^3/(3\pi^2)$.

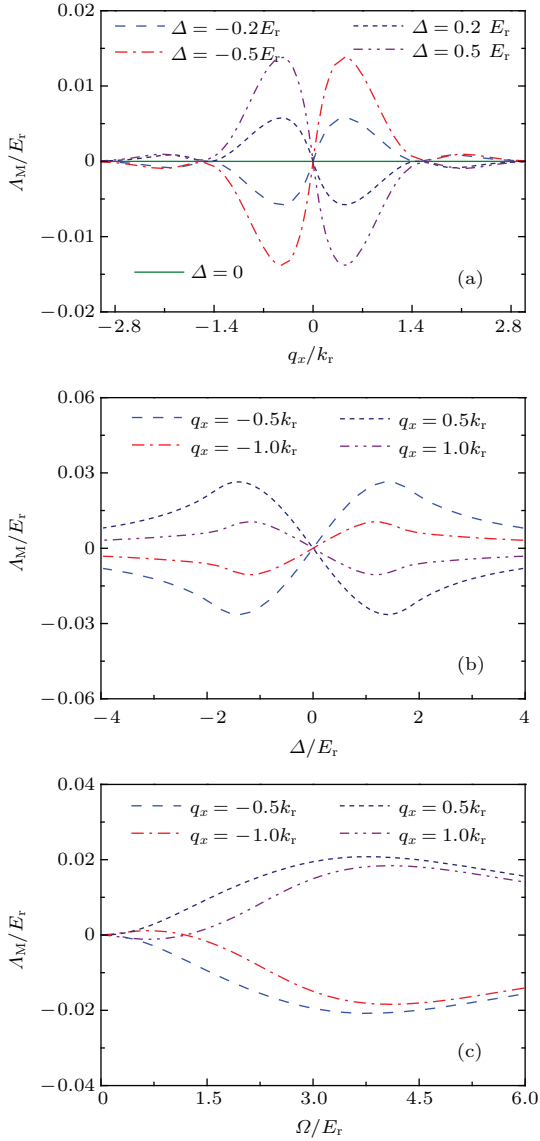


图2 无相互作用自旋-轨道耦合费米气体中函数 Λ_M 随 (a) 波矢 q_x , (b) Raman 失谐 Δ , (c) Raman 耦合强度 Ω 的变化关系 参数: (a), (b) $\Omega = 2E_r$; (c) $\Delta = -0.5E_r$; 所有曲线均取波矢平行于 Raman 光方向, 原子密度取 $n = k_r^3/(3\pi^2)$

Fig. 2. Λ_M as a function of (a) wave-vector q_x , (b) Raman detuning Δ , and (c) Raman coupling strength Ω in a noninteracting Fermi gas with spin-orbit coupling. Parameters: (a), (b) $\Omega = 2E_r$, (c) $\Delta = -0.5E_r$. For all plots, the wave-vector is parallel to the direction of Raman beams, and the atomic density is taken as $n = k_r^3/(3\pi^2)$.

4 弱相互作用玻色气体

在前面无相互作用费米气体模型的例子中, 动力学结构因子的一阶矩仅在 Raman 失谐不为零的情况下才会偏离空间反演对称. 这个结果看起来是较为自然的, 因为只有当 Raman 失谐为有限大时,

单粒子能谱才具有 $\pm p_x$ 的不对称性. 下面我们考虑一个物理上更为有趣的例子——弱相互作用玻色气体. 在这个体系中, 即使单粒子能谱是对称的, Λ_D 与 Λ_M 也会因为对称性自发破缺而给出非零的结果.

在稀薄原子气体中, 原子间的相互作用势可以用有效接触势模型代替 $U_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g_{\sigma\sigma'}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, 其中 $g_{\sigma\sigma'}$ 为相互作用强度. 为简单起见, 我们假定相互作用是排斥的, 且其强度与自旋无关, 即 $g_{\uparrow\uparrow} = g_{\downarrow\downarrow} = g_{\uparrow\downarrow} = g$. 显然, 在这种情况下, 体系的总哈密顿量 $H = H_0 + H_{\text{int}}$ 是具有 Z_2 对称性的.

玻色气体的基态由凝聚体与亏缺 (depletion) 两部分构成. 按照 Bogoliubov 的处理方案, 可以将场算符分解为如下形式来分别描述两部分的贡献:

$$\psi = \varphi_0 + \delta\psi, \quad (24)$$

其中 $\varphi_0 = \langle \psi \rangle$ 为凝聚波函数, $\delta\psi$ 为涨落部分的场算符. 体系基态在排斥相互作用下仍保持空间平移不变性, 凝聚波函数可写为 [13]

$$\varphi_0 = \sqrt{n_0} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} e^{ip_0x}, \quad (25)$$

其中 n_0 为凝聚原子密度, 在一阶近似下它就等于总原子密度 n ; p_0 为原子数出现宏观占据的凝聚动量, p_0 与参数 θ 的取值须由能量的极值条件确定. 根据简单的变分计算, 可以得到

$$p_0 = k_r \cos 2\theta = \pm k_r \sqrt{1 - \Omega^2/(16E_r^2)} \Theta(4E_r - \Omega). \quad (26)$$

当 $\Omega > 4E_r$ 时, 体系处于零动量相, $p_0 = 0$. 当 $\Omega < 4E_r$ 时, 体系处于平面波相, 凝聚动量可以选取上式正负值中的任意一个, 具体选取由 Z_2 对称性的自发破缺决定. 在实际数值计算中, 我们约定平面波相 $p_0 > 0$.

在 Bogoliubov 近似下, 体系中的涨落部分由如下巨正则哈密顿量描述,

$$K_{\text{Bog}} = \int d\mathbf{r} \delta\psi^\dagger (H_0 - \mu) \delta\psi + gn \sum_{\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_0} [(1 + \cos^2 \theta) \psi_{\mathbf{p}, \uparrow}^\dagger \psi_{\mathbf{p}, \uparrow} + (1 + \sin^2 \theta) \psi_{\mathbf{p}, \downarrow}^\dagger \psi_{\mathbf{p}, \downarrow} - \frac{1}{2} \sin 2\theta (\psi_{\mathbf{p}, \uparrow}^\dagger \psi_{\mathbf{p}, \downarrow} + \text{h.c.})] + \frac{1}{2} gn \sum_{\mathbf{q} \neq 0} (\cos^2 \theta \psi_{\mathbf{p}_0 + \mathbf{q}, \uparrow}^\dagger \psi_{\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}, \uparrow}^\dagger$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin^2 \theta \psi_{\mathbf{p}_0+\mathbf{q},\downarrow}^\dagger \psi_{\mathbf{p}_0-\mathbf{q},\downarrow}^\dagger \\
 & - \sin 2\theta \psi_{\mathbf{p}_0+\mathbf{q},\uparrow}^\dagger \psi_{\mathbf{p}_0-\mathbf{q},\downarrow}^\dagger + \text{h.c.}). \quad (27)
 \end{aligned}$$

引入正则变换,

$$\psi_{\mathbf{p}_0+\mathbf{q},\sigma} = w_{\mathbf{q},\sigma\alpha} \gamma_{\mathbf{q},\alpha} + w_{-\mathbf{q},\sigma\alpha} \gamma_{-\mathbf{q},\alpha}^\dagger, \quad (28)$$

可以将二次型哈密顿量 (27) 在准粒子表象下写为对角化形式:

$$K_{\text{Bog}} = \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\alpha=\pm} \omega_{\mathbf{q},\alpha} \gamma_{\mathbf{q},\alpha}^\dagger \gamma_{\mathbf{q},\alpha} + E_{\text{LHY}}, \quad (29)$$

其中 $\gamma_{\mathbf{p},\alpha}$ 为(玻色型)准粒子湮灭算符,它与自旋基下的玻色子湮灭算符 $\psi_{\mathbf{p},\sigma}$ 通过变换系数 $w_{\mathbf{p},\sigma\alpha}$ (取为正数) 相联系, $\alpha = \pm$ 是标记元激发谱两个分支的指标; $\omega_{\mathbf{q},\alpha}$ 为准粒子的元激发能量; E_{LHY} 为量子涨落造成的基态能量修正. 元激发谱 $\omega_{\mathbf{q},\alpha}$ 与变换系数 $w_{\mathbf{p},\sigma\alpha}$ 并无简单的解析形式,它们的具体求解过程已在文献 [10, 12] 中详细给出,此处不再赘述.

在 Bogoliubov 方案下,密度涨落算符和自旋涨落算符可以取一阶近似的形式

$$\rho_{\mathbf{q}} \simeq \sqrt{N} [\cos \theta (\psi_{\mathbf{p}_0-\mathbf{q},\uparrow}^\dagger + \psi_{\mathbf{p}_0+\mathbf{q},\uparrow}) - \sin \theta (\psi_{\mathbf{p}_0-\mathbf{q},\downarrow}^\dagger + \psi_{\mathbf{p}_0+\mathbf{q},\downarrow})], \quad (30)$$

$$\sigma_{\mathbf{q}}^z \simeq \sqrt{N} [\cos \theta (\psi_{\mathbf{p}_0-\mathbf{q},\uparrow}^\dagger - \psi_{\mathbf{p}_0+\mathbf{q},\uparrow}) + \sin \theta (\psi_{\mathbf{p}_0-\mathbf{q},\downarrow}^\dagger + \psi_{\mathbf{p}_0+\mathbf{q},\downarrow})]. \quad (31)$$

将自旋基下的产生湮灭算符转换到准粒子表象即可得到相应的动力学结构因子

$$\begin{aligned}
 S_{\text{D}}(\mathbf{q}, \omega) &= N \sum_{\alpha=\pm} [\cos \theta (w_{\mathbf{q},\uparrow\alpha} + w_{-\mathbf{q},\uparrow\alpha}) \\
 &\quad - \sin \theta (w_{\mathbf{q},\downarrow\alpha} + w_{-\mathbf{q},\downarrow\alpha})]^2 \\
 &\quad \times \delta(\omega - \omega_{\mathbf{q},\alpha}), \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{\text{M}}(\mathbf{q}, \omega) &= N \sum_{\alpha=\pm} [\cos \theta (w_{\mathbf{q},\uparrow\alpha} + w_{-\mathbf{q},\uparrow\alpha}) \\
 &\quad + \sin \theta (w_{\mathbf{q},\downarrow\alpha} + w_{-\mathbf{q},\downarrow\alpha})]^2 \\
 &\quad \times \delta(\omega - \omega_{\mathbf{q},\alpha}). \quad (33)
 \end{aligned}$$

于是,动力学结构因子一阶矩对于空间反演对称的偏离写为(平均每个原子的贡献)

$$\begin{aligned}
 A_{\text{D}}(\mathbf{q}) &= \sum_{\alpha=\pm} \omega_{\mathbf{q},\alpha} [\cos \theta (w_{\mathbf{q},\uparrow\alpha} + w_{-\mathbf{q},\uparrow\alpha}) \\
 &\quad - \sin \theta (w_{\mathbf{q},\downarrow\alpha} + w_{-\mathbf{q},\downarrow\alpha})]^2 - \frac{q^2}{2m}, \quad (34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{\text{M}}(\mathbf{q}) &= \sum_{\alpha=\pm} \omega_{\mathbf{q},\alpha} [\cos \theta (w_{\mathbf{q},\uparrow\alpha} + w_{-\mathbf{q},\uparrow\alpha}) \\
 &\quad + \sin \theta (w_{\mathbf{q},\downarrow\alpha} + w_{-\mathbf{q},\downarrow\alpha})]^2 - \frac{q^2}{2m}
 \end{aligned}$$

$$- \Omega \sin 2\theta. \quad (35)$$

图3显示了函数 A_{D} 随 Raman 耦合强度和相互作用参数的变化行为. 可以看到, A_{D} 在零动量相中(即 $\Omega > 4E_{\text{r}}$ 时)恒为零,而在平面波相中(即 $\Omega < 4E_{\text{r}}$ 时)会出现非零取值. 这是因为在零动量

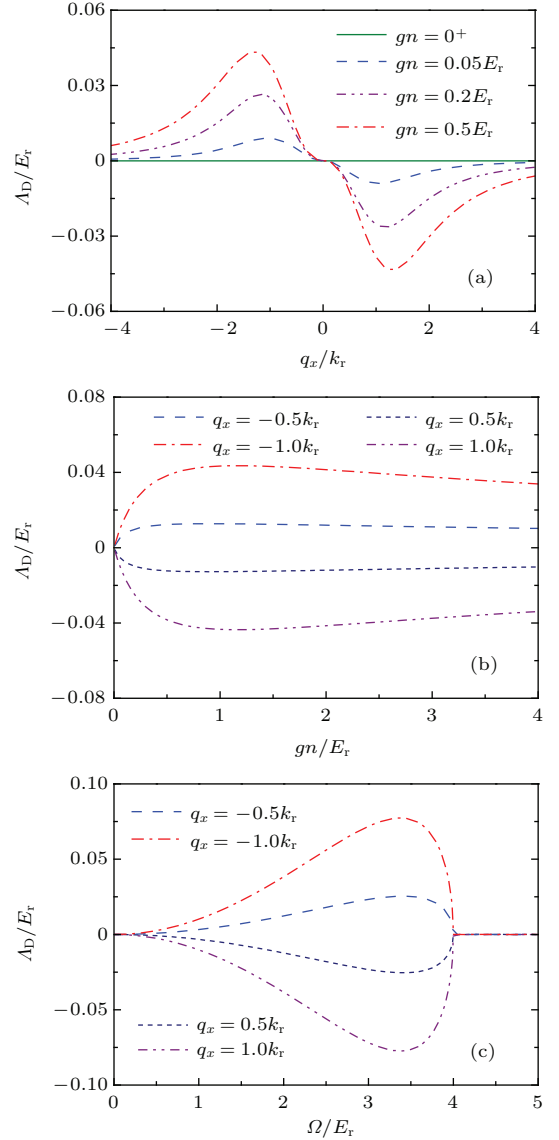


图3 弱相互作用自旋-轨道耦合玻色气体中函数 A_{D} 随 (a) 波矢 q_x , (b) 相互作用强度 gn , (c) Raman 耦合强度 Ω 的变化关系参数: (a), (b) $\Omega = 2E_{\text{r}}$; (c) $gn = 0.5E_{\text{r}}$; 所有曲线均取波矢平行于 Raman 光方向, 原子间相互作用假定与自旋无关

Fig. 3. A_{D} as a function of (a) wave-vector q_x , (b) interaction strength gn , and (c) Raman coupling strength Ω in a weakly interacting Bose gas with spin-orbit coupling. Parameters: (a), (b) $\Omega = 2E_{\text{r}}$; (c) $gn = 0.5E_{\text{r}}$. For all plots, the wave-vector is parallel to the direction of Raman beams, and the interactions between atoms are assumed to be spin-independent.

相中, $\omega_{\mathbf{q},\alpha} = \omega_{-\mathbf{q},\alpha}$, $w_{\mathbf{q},\sigma\alpha} = w_{-\mathbf{q},\sigma\alpha}$, 故动力学结构因子总满足空间反演对称性; 而在平面波相中, 基态发生了 Z_2 对称性自发破缺, 元激发能谱呈现非对称的形式 (能谱的下分支在动量的一侧可以出现类似于旋子的局域极小)^[10,12], 因此动力学结构因子的一阶矩也会偏离空间反演对称. 这种非对称

的元激发谱是一种相互作用效应, 当相互作用强度趋于零时, 元激发谱恢复为单粒子能谱的对称形式, $|\Lambda_D|$ 也随之消失. 与费米体系类似, 在玻色气体中 Λ_D 所能达到的最大幅度也在 $10^{-2}E_r$ 量级.

图 4 中给出了 $S_M(\mathbf{q}, \omega)$ 的一阶矩对于空间反演对称的偏离. 与密度涨落的情形相比, 可以看出: 1) Λ_D 与 Λ_M 的符号是相反的, 即前者为正时, 后者为负, 反之亦然; 2) Λ_M 对相互作用参数的依赖更敏感, 特别是在相互作用较强时, Λ_M 的幅度会有明显的提升.

需要指出的是, 在之前文献 [9] 的实验研究中, 已经报道了玻色气体中密度涨落动力学结构因子的测量结果. 然而, 由于测量精度仍低于前文所指出的能谱分辨率, 实验上并没有明确的证据表明动力学结构因子的一阶矩会偏离空间反演对称. 我们的理论结果预言, 相对于 Λ_D 来说, Λ_M 所体现的非对称性更容易观测 (特别是在高原子密度情况下). 实验上可以通过调节 Bragg 光的失谐实现对自旋涨落的动力学结构因子的测量^[3].

5 讨论与结论

本文重点考察了 Raman 耦合体系中动力学结构因子的一阶矩. 我们的计算也很容易推广到其他阶矩的情况. 一般地, 算符 O 的动力学结构因子的 j -阶矩定义为 $\int d\omega \omega^j S_O(\omega)$, 其中 j 为整数. 对于 Raman 耦合作用下的密度涨落和自旋涨落, 一个比较特殊的情况是动力学结构因子的零阶矩, 即静态结构因子. 在文献中 [10] 已经指出, 无论 Raman 耦合参数及原子间相互作用的具体细节如何, 静态结构因子总是具有空间反演对称性

$$S_D(\mathbf{q}) = S_D(-\mathbf{q}), \quad S_M(\mathbf{q}) = S_M(-\mathbf{q}). \quad (36)$$

这个结论不难利用对易关系加以证明: $S_D(\mathbf{q}) - S_D(-\mathbf{q}) = \langle [\rho_{\mathbf{q}}, \rho_{\mathbf{q}}^\dagger] \rangle = 0$, $S_M(\mathbf{q}) - S_M(-\mathbf{q}) = \langle [\sigma_{\mathbf{q}}^z, \sigma_{\mathbf{q}}^{z\dagger}] \rangle = 0$. 对于更高阶 ($j > 1$) 或更低阶的矩 ($j < 0$), 目前并没有普适的结论, 其空间反演性质需通过具体微观计算确定.

综上所述, 本文研究了 Raman 耦合作用下双组分量量子气体中的动力学结构因子. 我们指出, 动力学结构因子的一阶矩一般不具有空间反演对称性, 其对应的求和规则也有别于通常的形式. 针对两个具体模型——无相互作用费米气体和弱相互作用玻色气体, 我们分别计算了这种空间反演对称

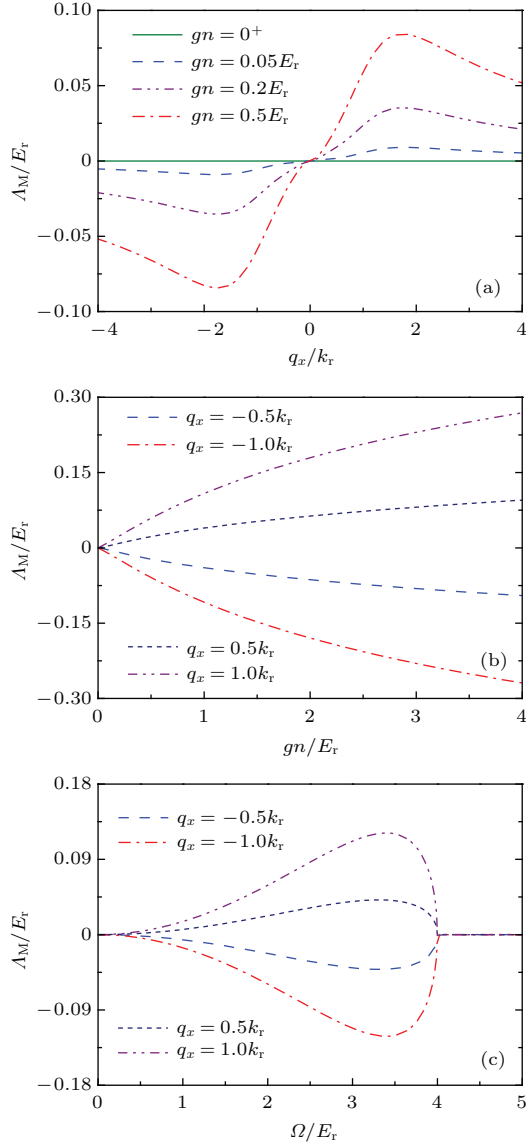


图 4 弱相互作用自旋-轨道耦合玻色气体中函数 Λ_M 随 (a) 波矢 q_x , (b) 相互作用强度 gn , (c) Raman 耦合强度 Ω 的变化关系. 参数: (a), (b) $\Omega = 2E_r$, (c) $gn = 0.5E_r$; 所有曲线均取波矢平行于 Raman 光方向, 原子间相互作用假定与自旋无关

Fig. 4. Λ_M as a function of (a) wave-vector q_x , (b) interaction strength gn , and (c) Raman coupling strength Ω in a weakly interacting Bose gas with spin-orbit coupling. Parameters: (a), (b) $\Omega = 2E_r$, (c) $gn = 0.5E_r$. For all plots, the wave-vector is parallel to the direction of Raman beams, and the interactions between atoms are assumed to be spin-independent.

的偏离幅度, 并研究了Raman耦合参数及相互作用强度的影响. 我们的理论结果有助于对Bragg散射实验做出更准确的定量分析.

参考文献

- [1] Pitaevskii L P, Stringari S 2003 *Bose-Einstein Condensation* (New York: Oxford University Press) pp 87–96
- [2] Stamper-Kurn D M, Chikkatur A P, Görlitz A, Inouye S, Gupta S, Pritchard D E, Ketterle W 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 2876
- [3] Hoinka S, Lingham M, Delehaye M, Vale C J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 050403
- [4] Goldman N, Juzeliūnas G, Öhberg P, Spielman I B 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 126401
- [5] Zhai H 2015 *Rep. Prog. Phys.* **78** 026001
- [6] Lin Y J, Jiménez-García K, Spielman I B 2011 *Nature* **471** 83
- [7] Wang P, Yu Z Q, Fu Z, Miao J, Huang L, Chai S, Zhai H, Zhang J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095301
- [8] Cheuk L W, Sommer A T, Hadzibabic Z, Yefsah T, Bakr W S, Zwierlein M W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095302
- [9] Ji S C, Zhang L, Xu X T, Wu Z, Deng Y, Chen S, Pan J W 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 105301
- [10] Martone G I, Li Y, Pitaevskii L P, Stringari S 2012 *Phys. Rev. A* **86** 063621
- [11] Yu Z Q 2014 *Phys. Rev. A* **90** 053608
- [12] Zheng W, Yu Z Q, Cui X, Zhai H 2013 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **46** 134007
- [13] Li Y, Pitaevskii L P, Stringari S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 225301

Dynamic structure factors and sum rules in two-component quantum gases with spin-orbit coupling

He Li^{1)†} Yu Zeng-Qiang²⁾

1) (*College of Physics and Electronic Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

2) (*Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

(Received 25 January 2016; revised manuscript received 2 March 2016)

Abstract

Sum rules for the dynamic structure factors are powerful tools to explore the collective behaviors in many-body systems at zero temperature as well as at finite temperatures. The recent remarkable realization of synthetic spin-orbit (SO) coupling in quantum gases is opening up new perspective to study the intriguing SO effects with ultracold atoms. So far, a specific type of SO coupling, which is generated by a pair of Raman laser beams, has been experimentally achieved in Bose-Einstein condensates of ⁸⁷Rb and degenerate Fermi gases of ⁴⁰K and ⁶Li. In the presence of SO coupling, the dynamic structure factors for the density fluctuation and spin fluctuation satisfy different sum rules. In particular, in the two-component quantum gases with inter-species Raman coupling, the f -sum rule for the spin fluctuation has an additional term proportional to the transverse spin polarization. Due to the coupling between the momentum and spin, the first moment of the dynamic structure factor does not necessarily possess the inversion symmetry, which is in strong contrast to the conventional system without SO coupling. Such an asymmetric behavior could be observed in both Fermi gases and Bose gases with Raman coupling. As a demonstration, we focus on the uniform case at zero temperature in this work. For the non-interacting Fermi gases, the asymmetric first moment appears only when the Raman detuning is finite. The asymmetric amplitude is quite limited, and it vanishes at both zero detuning and infinite detuning. For the weakly interacting Bose gases, the first moment is asymmetric in momentum space even at zero detuning, when the ground state spontaneously breaks the Z_2 symmetry in the plane-wave condensation phase. Using the Bogoliubov method, the dynamic structure factor and its first moment are explicitly calculated for various interaction parameters. We find that the asymmetric behavior in the spin channel could be much more significant than in the density channel, and the asymmetric amplitude is enhanced as the interaction strength increases. Experimentally, the dynamic structure factors can be directly measured through the two photon Bragg scattering. Numeric simulations show that to observe the deviation of inversion symmetry in the first moment, the resolution of the Bragg spectroscopy should reach a required value. For the typical parameters of the rubidium atomic gas, the required resolution is about $10^{-2}E_r$ with E_r being the recoil energy. Our predictions can be tested in the future experiment.

Keywords: spin-orbit coupling, dynamic structure factor, sum rule, Fermi gas, Bose gas

PACS: 11.55.Hx, 03.75.Kk, 03.75.Ss

DOI: 10.7498/aps.65.131101

† Corresponding author. E-mail: heli@sxu.edu.cn