

二维函数光子晶体

肖利 雷天宇 梁禹 赵敏 刘慧 张斯淇 李宏 马季 吴向尧

Two-dimensional function photonic crystal

Xiao Li Lei Tian-Yu Liang Yu Zhao Min Liu Hui Zhang Si-Qi Li Hong Ma Ji Wu Xiang-Yao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 134207 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.134207

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.134207>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I13>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

偶极子位置及偏振对激发光子晶体 H1 微腔的影响

Effects of location and polarization of a dipole source on the excitation of a photonic crystal H1 cavity

物理学报.2016, 65(13): 134206 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.134206>

一种基于共享孔径 Fabry-Perot 谐振腔结构的宽带高增益磁电偶极子微带天线

Design of a broadband and highgain shared-aperture fabry-perot resonator magneto-electric microstrip antenna

物理学报.2016, 65(13): 134205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.134205>

光子晶体理论研究的新方法 -----混合变分法

A powerful method to analyze of photonic crystals: mixed variational method

物理学报.2016, 65(12): 124206 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.124206>

表层厚度渐变一维耦合腔光子晶体的反射相位特性及其应用

Reflection phase characteristics and their applications based on one-dimensional coupled-cavity photonic crystals with gradually changed thickness of surface layer

物理学报.2016, 65(7): 074201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.074201>

等离子体填充金属光子晶体 Cherenkov 辐射源模拟研究

Simulation of cherenkov radiation oscillation in a plasma-filled metallic photonic crystal

物理学报.2016, 65(7): 074208 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.074208>

# 二维函数光子晶体\*

肖利<sup>1)</sup> 雷天宇<sup>1)</sup> 梁禹<sup>1)</sup> 赵敏<sup>1)</sup> 刘慧<sup>1)</sup> 张斯淇<sup>2)</sup> 李宏<sup>3)</sup>  
马季<sup>1)</sup> 吴向尧<sup>1)†</sup>

1) (吉林师范大学物理学院, 四平 136000)

2) (吉林大学物理学院, 长春 130012)

3) (东北师范大学物理学院, 长春 130012)

(2016年1月30日收到; 2016年4月17日收到修改稿)

光子晶体是由两种或两种以上不同介电常数材料所构成的周期性光学纳米结构. 光子晶体结构可分为一维、二维和三维, 其中二维光子晶体已成为研究的热点. 可调带隙的二维光子晶体可以设计出新型的光学器件, 因此, 对它的研究具有重要的理论意义和应用价值. 本文提出的二维新型函数光子晶体可以实现光子晶体带隙的可调性. 所谓二维函数光子晶体, 即组成它的介质柱的介电常数是空间坐标的函数, 它不同于介电常数为常数的二维常规光子晶体. 二维函数光子晶体是通过光折变非线性光学效应或电光效应使介质柱的介电常数成为空间坐标的函数. 运用平面波展开法给出了TE和TM波的本征方程, 由傅里叶变换得到二维函数光子晶体介电常数 $\epsilon(\mathbf{r})$ 的傅里叶变换 $\epsilon(\mathbf{G})$ , 其傅里叶变换比常规二维光子晶体的复杂. 计算发现当介质柱介电常数为常数时, 其傅里叶变换与常规二维光子晶体的相同, 因此二维常规光子晶体是二维函数光子晶体的特例. 在此基础上具体研究了二维函数光子晶体TE波和TM波的带隙结构, 其介质柱介电常数函数形式取为 $\epsilon(r) = k \cdot r + b$ , 其中 $k, b$ 为可调的参数. 并与二维常规光子晶体TE波和TM波的带隙结构进行了比较, 发现二维函数光子晶体与二维常规光子晶体TE波和TM波的带隙结构有明显的区别, 二维函数光子晶体的带隙数目、位置以及宽度随参数 $k$ 的变化而发生改变. 从而实现了二维函数光子晶体带隙结构的可调性, 为基于二维光子晶体的光学器件的设计提供了新的设计方法和重要的理论依据.

**关键词:** 二维函数光子晶体, 平面波展开法, 带隙结构

**PACS:** 42.70.Qs, 78.20.Bh, 73.20.At

**DOI:** 10.7498/aps.65.134207

## 1 引言

在过去的几十年里, 人们利用光子晶体<sup>[1,2]</sup>可以达到控制光的目的, 这使得人们对光子晶体的研究产生了浓厚的兴趣. 光子晶体由不同介电常数的两个或两个以上材料构成, 其重要特征为光子带隙, 缺陷态, 光局域化等<sup>[3-6]</sup>. 这些特点使其能够控制光子的运动, 所以可以用来制造一些全新的高性能设备, 如高效的半导体激光器、发光二极管、光学滤波器、波导、光学衰减器以及光学放大器<sup>[7-9]</sup>等. 对光子晶体的深入研究将有助于光电集成和光

通信的应用和发展<sup>[10-12]</sup>. 众所周知, 目前光子晶体可以由一维、二维或者三维的光子禁带构成. 对二维光子晶体光电性质的研究可以实现对电磁波的控制, 重要的是还可以得到完全的光子带隙<sup>[13]</sup>. 平面波展开法和转移矩阵法都是计算光子晶体能带结构的方法, 这两种方法都能有效并且高精度地计算光子晶体的能带结构, 但是这两种方法也各有优劣. 平面波法的特点是可以根据指定的方向来显示出该方向上的频率, 其本质是对电磁场和光子晶体介质参数进行傅里叶级数展开, 但其受到计算机内存的限制. 转移矩阵法是一种逐层计算, 是通过给定的频率计算所有可能的波矢量. 在凝聚态

\* 吉林省科技发展计划项目(批准号: 20130101031JC)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wuxy2066@163.com

物理中, 拓扑特性的研究是来自于量子霍尔效应的发现<sup>[14,15]</sup>. 在凝聚态物理中拓扑缺陷得到广泛的研究和应用, 最近拓扑缺陷也被引入到光子晶体中, 使拓扑光子晶体成为国内外目前主要研究的热点<sup>[16]</sup>. 目前所制备的光子晶体绝大多数是不可调的, 即光子晶体制作出来之后, 禁带位置、形状就不能再发生变化. 如果光子晶体的禁带可调, 例如通过施加电场、光场、磁场或者改变温度来改变折射率、晶格结构等参数, 从而改变了光子晶体的周期性介电分布, 使光子带隙的位置和宽度发生变化. 近年来, 随着可调谐光学器件的广泛需求, 可调谐光子晶体也引起了人们的广泛关注. 采用光注入半导体材料以改变材料折射率来制备全光开关的研究也受到越来越多的关注. 国内外的一些学者对光子晶体进行了一系列研究和探索<sup>[17,18]</sup>. 例 Zhang 等<sup>[19]</sup> 制备出一种多通道可调的太赫兹滤波器, Dai 等<sup>[20]</sup> 设计出一种基于等离子体量子阱结构的双通道窄带可调滤波器. 在本文中, 我们提出了二维函数光子晶体的概念, 其介质柱的折射率是空间坐标的函数, 它不同于介质柱的折射率是常数的二维常规光子晶体, 它可以通过对介质柱施加电场、光场、磁场来改变其折射率, 使其成为空间位置的分布函数, 从而可以制作二维函数光子晶体. 我们应用平面波展开法计算二维函数光子晶体的带隙结构, 经过计算发现二维函数光子晶体带隙结构与二维常规光子晶体有明显的区别, 它可以通过参数的调节使二维函数光子晶体带隙的个数、位置以及宽度发生变化, 使带隙结构具有可调节性, 从而为二维光子晶体光学器件的设计提供重要理论依据.

## 2 二维光子晶体平面波展开法

设构成光子晶体的介质是无源的, 麦克斯韦方程可写为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (4)$$

其中  $\varepsilon(\mathbf{r})$  是与位置有关的介电常数, 当单色平面电磁波通过介质时, 有

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (5)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}. \quad (6)$$

对于二维光子晶体, 介电常数为  $\varepsilon_a(\mathbf{r})$  的介质柱位于介电常数  $\varepsilon_b$  的背景中, 介质柱平行于  $z$  轴. 下面, 我们分别考虑 TM 和 TE 波两种情况.

1) 对于 TM 波, 电场和磁场强度分别为

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = (0, 0, H_z(\mathbf{r})) e^{-i\omega t}, \quad (7)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_x(\mathbf{r}), E_y(\mathbf{r}), 0) e^{-i\omega t}, \quad (8)$$

其中  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ .

将 (7) 和 (8) 式代入 (3) 和 (4) 式, 我们得到

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega\mu_0 H_z, \quad (9)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) E_y, \quad (10)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = -i\omega\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) E_x. \quad (11)$$

在 (9)–(11) 式中, 我们消去  $E_x$  和  $E_y$ , 得到  $H_z$  的表达式:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \frac{\partial H_z(\mathbf{r})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \frac{\partial H_z(\mathbf{r})}{\partial y} \right] \\ &= -\frac{\omega^2}{c^2} H_z(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (12)$$

在二维光子晶体周期性介质中, 介电常数  $\varepsilon(\mathbf{r})$  满足周期性条件

$$\varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \varepsilon(\mathbf{r}), \quad (13)$$

其中  $\mathbf{R} = l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2$  是晶格矢量,  $\mathbf{a}_1$  和  $\mathbf{a}_2$  是原胞基矢, 其中  $l_1$  和  $l_2$  是任意整数. 我们引入倒易空间基矢  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  以及倒格矢  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 \\ (m_1, m_2 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (15)$$

在周期性介质中, 磁场强度  $H_z(\mathbf{r})$  是周期性分布的, 因此满足布洛赫定理

$$\begin{cases} H_z(\mathbf{r}) = H_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \\ H_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = H_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \end{cases} \quad (16)$$

其中  $\mathbf{k}$  是布洛赫波矢.

我们可以在倒易空间中对  $H_z(\mathbf{r})$  和  $\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})}$  进行傅里叶级数展开:

$$H_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} H_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} = \sum_{\mathbf{G}'} \varepsilon^{-1}(\mathbf{G}') e^{i\mathbf{G}' \cdot \mathbf{r}}. \quad (18)$$

把 (17) 式代入 (16) 式可得

$$H_z(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} H_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}}. \quad (19)$$

把(18)和(19)式代入(12)式,我们得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{\mathbf{G}''} \varepsilon^{-1}(\mathbf{G}'') e^{i\mathbf{G}'' \cdot \mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}'} i(k_x + G'_x) \right. \\ & \quad \times H_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}') e^{i(\mathbf{k}_x + \mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}} \left. \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sum_{\mathbf{G}''} \varepsilon^{-1}(\mathbf{G}'') e^{i\mathbf{G}'' \cdot \mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}'} i(k_y + G'_y) \right. \\ & \quad \times H_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}') e^{i(\mathbf{k}_x + \mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}} \left. \right] \\ & = -\frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\mathbf{G}} H_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (20)$$

即

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{G}', \mathbf{G}''} (k_x + G'_x)(k_x + G'_x + G''_x) \varepsilon^{-1}(\mathbf{G}'') \\ & \quad \times H_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}') e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}' + \mathbf{G}'') \cdot \mathbf{r}} \\ & + \sum_{\mathbf{G}', \mathbf{G}''} (k_y + G'_y)(k_y + G'_y + G''_y) \varepsilon^{-1}(\mathbf{G}'') \\ & \quad \times H_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}') e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}' + \mathbf{G}'') \cdot \mathbf{r}} \\ & = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\mathbf{G}} H_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (21)$$

令  $\mathbf{G}' + \mathbf{G}'' = \mathbf{G}$ , (21)式可以写为

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{G}', \mathbf{G}''} (k_x + G'_x)(k_x + G_x) \varepsilon^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \\ & \quad \times H_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}') e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}} \\ & + \sum_{\mathbf{G}', \mathbf{G}''} (k_y + G'_y)(k_y + G_y) \varepsilon^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \\ & \quad \times H_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}') e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}} \\ & = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\mathbf{G}} H_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (22)$$

由于对于不同的  $\mathbf{G}$ ,  $e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}}$  是相互独立的,因此(22)式中每项对应系数都相等,有

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{G}'} [(k_x + G'_x)(k_x + G_x) \\ & \quad + (k_y + G'_y)(k_y + G_y)] \varepsilon^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}') \\ & \quad \times H_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}') \\ & = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\mathbf{G}} H_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}), \end{aligned} \quad (23)$$

即

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{G}'} (\mathbf{k} + \mathbf{G}') \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}) \varepsilon^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}') H_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}') \\ & = \frac{\omega^2}{c^2} H_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}), \end{aligned} \quad (24)$$

方程(24)即为TM波的特征方程.

2)对于TE波,电场强度和磁场强度分别为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (0, 0, E_z(\mathbf{r})) e^{-i\omega t}, \quad (25)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = (H_x(\mathbf{r}), H_y(\mathbf{r}), 0) e^{-i\omega t}. \quad (26)$$

将方程(25)和(26)代入方程(3)和(4)得

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) E_z, \quad (27)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\omega \mu_0 H_y, \quad (28)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -i\omega \mu_0 H_x. \quad (29)$$

在方程(27)–(29)中,消去  $H_x$  和  $H_y$ ,得到关于  $E_z$  的方程

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] E_z(\mathbf{r}) = -\frac{\omega^2}{c^2} H_z(\mathbf{r}). \quad (30)$$

类似方程(19),  $E_z(\mathbf{r})$  可以写为

$$E_z(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} E_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) e^{i(\mathbf{K} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}}. \quad (31)$$

类似于方程(18)–(22)的计算过程,得到TE波的特征方程为

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{G}'} |\mathbf{k} + \mathbf{G}'| |\mathbf{k} + \mathbf{G}| \varepsilon^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{G}') E_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}') \\ & = \frac{\omega^2}{c^2} E_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}). \end{aligned} \quad (32)$$

### 3 二维函数光子晶体介电常数的傅里叶变换

对于二维函数光子晶体,介质柱介电常数是空间坐标系  $\mathbf{r}$  的函数,它不同于介电常数为常数的二维常规光子晶体,二维函数光子晶体的介质柱介电常数可以写为

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} \varepsilon_a(\mathbf{r}) & r \leq r_a, \\ \varepsilon_b & r > r_a, \end{cases} \quad (33)$$

即

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_a(\mathbf{r})} & r \leq r_a, \\ \frac{1}{\varepsilon_b} & r > r_a. \end{cases} \quad (34)$$

(34)式可以写为

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} = \frac{1}{\varepsilon_b} + \left( \frac{1}{\varepsilon_a(\mathbf{r})} - \frac{1}{\varepsilon_b} \right) s(r), \quad (35)$$

其中

$$s(r) = \begin{cases} 1 & r \leq r_a, \\ 0 & r > r_a. \end{cases} \quad (36)$$

$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})}$  的傅里叶变换为

$$\varepsilon^{-1}(\mathbf{G}) = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} d\mathbf{r} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}}. \quad (37)$$

在二维倒易空间中

$$\varepsilon^{-1}(\mathbf{G}_{\parallel}) = \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_{V_0^{(2)}} d\mathbf{r}_{\parallel} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r}_{\parallel})} e^{-i\mathbf{G}_{\parallel}\cdot\mathbf{r}_{\parallel}}, \quad (38)$$

其中  $\mathbf{G}_{\parallel} = m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2$ ,  $\mathbf{r}_{\parallel} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ,  $V_0^{(2)}$  表示二维空间的原胞面积. 将 (35) 式代入到 (38) 式, 可得

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}(\mathbf{G}_{\parallel}) &= \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_{V_0^{(2)}} d\mathbf{r}_{\parallel} \left[ \frac{1}{\varepsilon_b} + \left( \frac{1}{\varepsilon_a} - \frac{1}{\varepsilon_b} \right) s(\mathbf{r}_{\parallel}) \right] \\ &\quad \times e^{-i\mathbf{G}_{\parallel}\cdot\mathbf{r}_{\parallel}} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_b} \frac{1}{V_0^{(2)}} V_0^{(2)} \delta_{\mathbf{G}_{\parallel},0} \\ &\quad + \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_{V_0^{(2)}} d\mathbf{r}_{\parallel} \left( \frac{1}{\varepsilon_a} - \frac{1}{\varepsilon_b} \right) \\ &\quad \times s(\mathbf{r}_{\parallel}) e^{-i\mathbf{G}_{\parallel}\cdot\mathbf{r}_{\parallel}} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_b} \delta_{m,0} \delta_{n,0} + \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_{V_0^{(2)}} d\mathbf{r}_{\parallel} \left( \frac{1}{\varepsilon_a} - \frac{1}{\varepsilon_b} \right) \\ &\quad \times s(\mathbf{r}_{\parallel}) e^{-i\mathbf{G}_{\parallel}\cdot\mathbf{r}_{\parallel}} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_b} \delta_{m,0} \delta_{n,0} + I, \end{aligned} \quad (39)$$

其中

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_{V_0^{(2)}} d\mathbf{r}_{\parallel} \left( \frac{1}{\varepsilon_a} - \frac{1}{\varepsilon_b} \right) s(\mathbf{r}_{\parallel}) e^{-i\mathbf{G}_{\parallel}\cdot\mathbf{r}_{\parallel}} \\ &= \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_{V_0^{(2)}} d\mathbf{r}_{\parallel} \frac{1}{\varepsilon_a} s(\mathbf{r}_{\parallel}) e^{-i\mathbf{G}_{\parallel}\cdot\mathbf{r}_{\parallel}} \\ &\quad - \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_{V_0^{(2)}} d\mathbf{r}_{\parallel} \frac{1}{\varepsilon_b} s(\mathbf{r}_{\parallel}) e^{-i\mathbf{G}_{\parallel}\cdot\mathbf{r}_{\parallel}} \\ &= I_1 - I_2, \end{aligned} \quad (40)$$

其中

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_{V_0^{(2)}} d\mathbf{r}_{\parallel} \frac{1}{\varepsilon_b} s(\mathbf{r}_{\parallel}) e^{-i\mathbf{G}_{\parallel}\cdot\mathbf{r}_{\parallel}} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_b} \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_{V_0^{(2)}} d\mathbf{r}_{\parallel} s(\mathbf{r}_{\parallel}) e^{-i\mathbf{G}_{\parallel}\cdot\mathbf{r}_{\parallel}} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_b} \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_0^{r_a} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-iG_{\parallel}\cdot r\cdot\cos\theta} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_b} \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_0^{r_a} r dr \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\theta e^{-iG_{\parallel}\cdot r\cdot\sin(\theta-\frac{\pi}{2})}. \end{aligned} \quad (41)$$

当  $|\mathbf{r}_{\parallel}| = r_{\parallel} = r$ ,  $|\mathbf{G}_{\parallel}| = G_{\parallel}$ ,  $d\mathbf{r}_{\parallel} = ds = r dr d\theta$  时, 其中  $\theta$  是  $\mathbf{r}_{\parallel}$  和  $\mathbf{G}_{\parallel}$  的夹角.

根据公式

$$e^{i\omega\cdot\sin\theta} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\omega) e^{il\theta}, \quad (42)$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{il(\theta-\frac{\pi}{2})} = \begin{cases} 0 & (l \neq 0), \\ 2\pi & (l = 0) \end{cases} \quad (43)$$

和

$$\int x^m J_{m-1}(x) dx = x^m J_m(x) + c, \quad (44)$$

可得

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\varepsilon_b} \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_0^{r_a} r dr \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(G_{\parallel}\cdot r) \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\theta e^{il(\theta-\frac{\pi}{2})} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_b} \frac{1}{V_0^{(2)}} \frac{2\pi r_a}{G_{\parallel}} \cdot J_1(G_{\parallel}\cdot r_a) \quad (\mathbf{G}_{\parallel} \neq 0). \end{aligned} \quad (45)$$

当  $G_{\parallel} \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow 0, n \rightarrow 0$ ), 我们可以得到

$$\begin{aligned} &I_2(m=0, n=0) \\ &= \lim_{G_{\parallel} \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_b} \frac{1}{V_0^{(2)}} 2\pi r_a \frac{J_1(G_{\parallel}\cdot r_a)}{G_{\parallel}} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_b} \frac{1}{V_0^{(2)}} 2\pi r_a \lim_{G_{\parallel} \rightarrow 0} \frac{(J_1(G_{\parallel}\cdot r_a))'}{(G_{\parallel})'} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_b} \frac{1}{V_0^{(2)}} 2\pi r_a \lim_{G_{\parallel} \rightarrow 0} J_1'(G_{\parallel}\cdot r_a) \cdot r_a \\ &= \frac{1}{\varepsilon_b} \frac{\pi r_a^2}{V_0^{(2)}} \\ &= \frac{f}{\varepsilon_b} \quad (\mathbf{G}_{\parallel} = 0), \end{aligned} \quad (46)$$

其中  $J_1'(0) = \frac{1}{2}$ ,  $f = \frac{\pi r_a^2}{V_0^{(2)}}$  为填充比.

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_{V_0^{(2)}} d\mathbf{r}_{\parallel} \frac{1}{\varepsilon_a(r, \theta)} s(\mathbf{r}_{\parallel}) e^{-i\mathbf{G}_{\parallel}\cdot\mathbf{r}_{\parallel}} \\ &= \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_0^{r_a} r dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon_a(r, \theta)} e^{iG_{\parallel}\cdot r_{\parallel}\cdot\sin(\theta-\frac{\pi}{2})} d\theta \\ &= \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_0^{r_a} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{\varepsilon_a(r, \theta)} \\ &\quad \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(G_{\parallel}\cdot r) e^{il(\theta-\frac{\pi}{2})} \\ &= \frac{1}{V_0^{(2)}} \int_0^{r_a} r \frac{1}{\varepsilon_a(r)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(G_{\parallel}\cdot r) dr \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\theta e^{il(\theta-\frac{\pi}{2})} \\ &= \frac{2\pi}{V_0^{(2)}} \int_0^{r_a} r \frac{1}{\varepsilon_a(r)} J_0(G_{\parallel}\cdot r) dr \end{aligned}$$

$$(\mathbf{G}_{\parallel} \neq 0). \tag{47}$$

在方程(47)中, 我们考虑  $\varepsilon_a(r, \theta) = \varepsilon_a(r)$ . 当  $G_{\parallel} = 0$  时, 由于  $J_0(0) = 1$ , 得到

$$I_1 = \frac{2\pi}{V_0^{(2)}} \int_0^{r_a} r \frac{1}{\varepsilon_a(r)} dr \quad (\mathbf{G}_{\parallel} = 0). \tag{48}$$

将  $I_1, I_2$  以及  $I$  代入到(39)式中, 得到

$$\varepsilon^{-1}(\mathbf{G}_{\parallel}) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_b}(1-f) + \frac{2f}{r_a^2} \int_0^{r_a} r \frac{1}{\varepsilon_a(r)} dr & (\mathbf{G}_{\parallel} = 0), \\ \frac{2f}{r_a^2} \int_0^{r_a} r \frac{1}{\varepsilon_a(r)} J_0(\mathbf{G}_{\parallel} \cdot r) dr & \\ -\frac{2f J_1(\mathbf{G}_{\parallel} \cdot r_a)}{\varepsilon_b \mathbf{G}_{\parallel} \cdot r_a}, & (\mathbf{G}_{\parallel} \neq 0). \end{cases} \tag{49}$$

当  $\varepsilon_a(r) = \varepsilon_a$  时,  $\varepsilon_a$  是常数, 方程(49)变为

$$\varepsilon^{-1}(\mathbf{G}_{\parallel}) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_b} + \left(\frac{1}{\varepsilon_a} - \frac{1}{\varepsilon_b}\right)f & (\mathbf{G}_{\parallel} = 0), \\ 2f \left(\frac{1}{\varepsilon_a} - \frac{1}{\varepsilon_b}\right) \frac{J_1(\mathbf{G}_{\parallel} \cdot r_a)}{\mathbf{G}_{\parallel} \cdot r_a} & (\mathbf{G}_{\parallel} \neq 0). \end{cases} \tag{50}$$

方程(50)即为二维常规光子晶体介电常数的傅里叶变换, 因此, 二维常规光子晶体是二维函数光子晶体的特殊情况.

### 4 数值分析

下面对二维函数光子晶体进行数值分析. 为了比较二维常规和二维函数光子晶体的带隙结构, 首先计算二维常规光子晶体的带隙结构. 二维常规光子晶体的基本参数为: 背景介质为空气 ( $\varepsilon_b = 1$ ), 介质柱按三角结构排列, 介质柱半径  $r_a = 0.65a$ , 其中  $a = 10^{-6}$  m 是晶格常数, 介质柱的介电常数  $\varepsilon_a = 9.86$ . 图1(a)和图1(b)分别为二维常规光子晶体TE波和TM波的带隙结构图. 在频率范围0—0.8(单位  $a/2\pi c$ ) 内, TE波有4条带隙, TM波仅有两条带隙.

下面计算二维函数光子晶体的带隙结构. 二维函数光子晶体基本参数为: 背景介质为空气 ( $\varepsilon_b = 1$ ), 介质柱按三角结构排列, 介质柱半径  $r_a = 0.65a$ , 其中  $a = 10^{-6}$  m 是晶格常数, 介质柱的介电常数是空间坐标的函数, 可表示为  $\varepsilon_a(\mathbf{r}) = kr + 9.86$  ( $0 \leq r \leq r_a$ ), 其中系数  $k$  被称作函数系数, 当  $k = 0$  时, 即为二维常规光子晶体,  $k \neq 0$  时, 即为二维函数光子晶体. 图2(a)和图2(b)分别为函数系数  $k = 5 \times 10^6$ , 即  $\varepsilon_a(\mathbf{r}) = 5 \times 10^6 r + 9.86$  ( $0 \leq r \leq r_a$ ) 时二维函数光子晶体TE波和TM波的带隙结构图, 在0—0.8频率范围内, TE波有3条带隙, TM波仅有1条带隙.

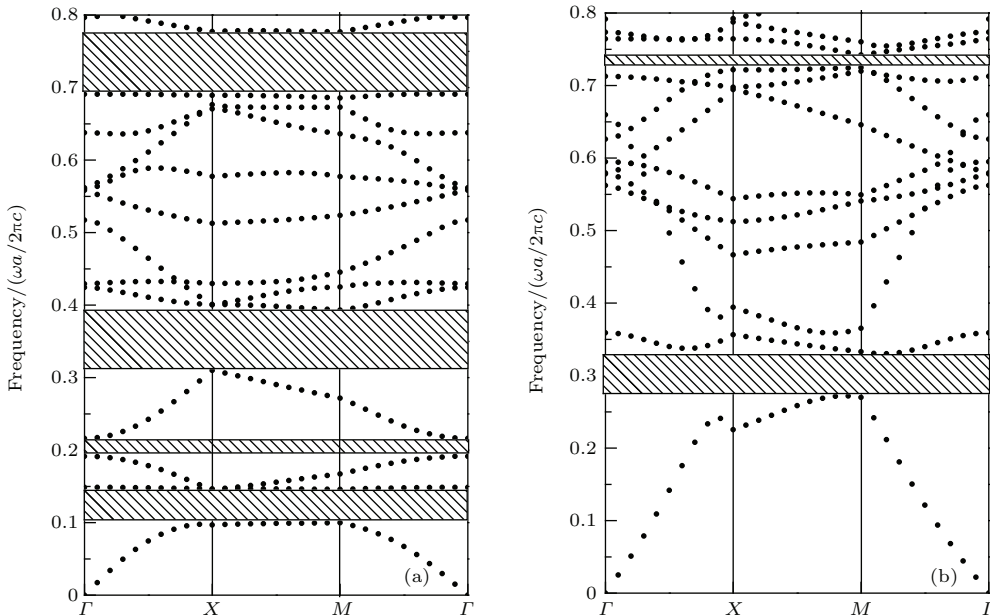


图1 三角晶格二维常规光子晶体带隙结构 ( $\varepsilon_b = 1, \varepsilon_a = 9.86$  介质柱半径  $r_a = 0.65a$ ) (a) TE波; (b) TM波  
 Fig. 1. Triangular lattice two-dimensional conventional photonic crystals band gap structure ( $\varepsilon_b = 1, \varepsilon_a = 9.86$ , media column radius  $r_a = 0.65a$ ): (a) TE wave; (b) TM wave.



分别比较图1和图2 TE波和TM波的带隙结构, 可以发现: 二维函数光子晶体带隙与二维常规光子晶体带隙有明显的区别, 即在0—0.8频率范围内带隙的个数、位置以及宽度都不相同。

图3(a)和图3(b)分别为函数系数  $k = -5 \times$

$10^6$ , 即  $\varepsilon_a(\mathbf{r}) = -5 \times 10^6 r + 9.86$  ( $0 \leq r \leq r_a$ ) 时二维函数光子晶体TE波和TM波的带隙结构图, 在0—0.8频率范围内, TE波有5条带隙, TM波有2条带隙。与图2进行比较可以发现: 随着函数系数  $k$  的改变带隙数目和带隙位置都改变。

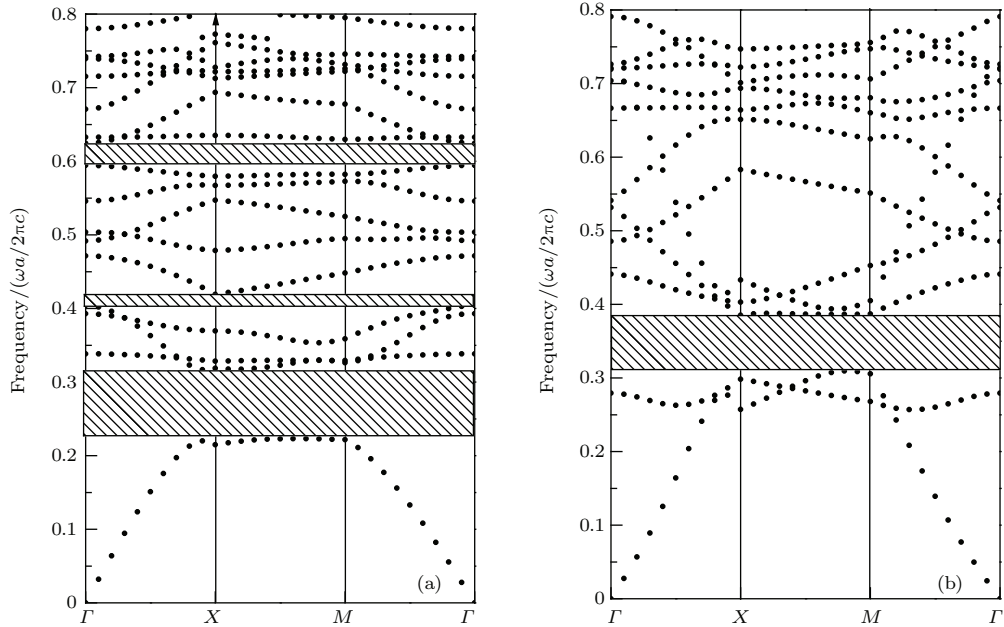


图2 三角晶格二维函数光子晶体带隙结构 ( $\varepsilon_b = 1$ ,  $\varepsilon_a = k \cdot r + 9.86$ . 函数系数  $k = 5 \times 10^6$ , 介质柱半径  $r_a = 0.65a$ ) (a) TE波; (b) TM波

Fig. 2. Triangular lattice two-dimensional function photonic crystals band gap structure ( $\varepsilon_b = 1$ ,  $\varepsilon_a = k \cdot r + 9.86$ ; function coefficient  $k = 5 \times 10^6$ , media column radius  $r_a = 0.65a$ ): (a) TE wave; (b) TM wave.

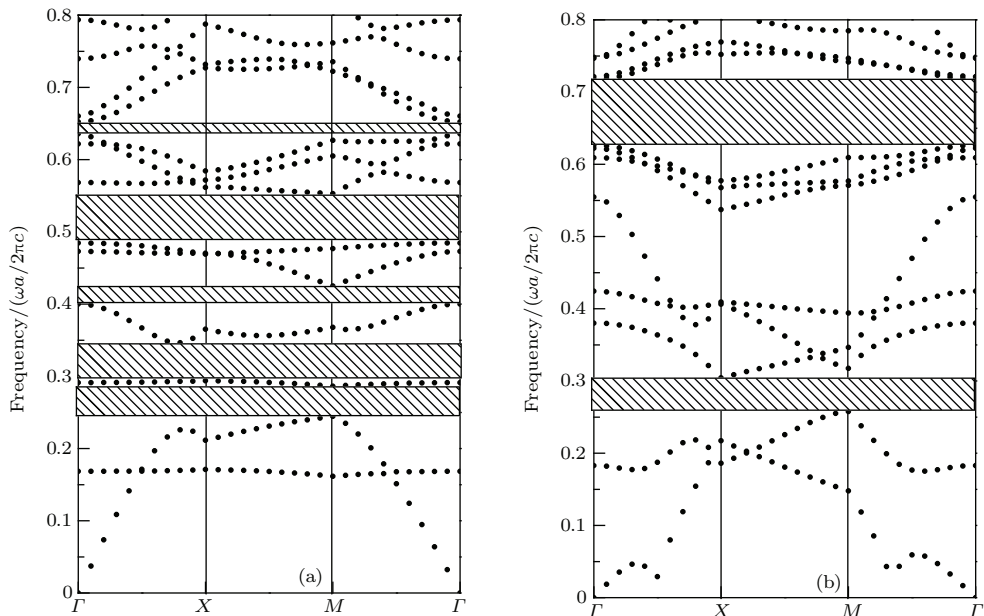


图3 三角晶格二维函数光子晶体带隙结构 ( $\varepsilon_b = 1$ ,  $\varepsilon_a = k \cdot r + 9.86$ ; 函数系数  $k = -5 \times 10^6$ , 介质柱半径  $r_a = 0.65a$ ) (a) TE波; (b) TM波

Fig. 3. Triangular lattice two-dimensional function photonic crystals band gap structure ( $\varepsilon_b = 1$ ,  $\varepsilon_a = k \cdot r + 9.86$ ; function coefficient  $k = -5 \times 10^6$ , media column radius  $r_a = 0.65a$ ): (a) TE wave; (b) TM wave.

图4(a)和图4(b)分别为函数系数 $k = -30 \times 10^6$ ,  $\varepsilon_a(\mathbf{r}) = -30 \times 10^6 r + 9.86$  ( $0 \leq r \leq r_a$ )时二维函数光子晶体TE波和TM波的带隙结构图, 在0—0.8 频率范围内, TE波有1条很宽的带隙, TM波有3条带隙. 分别比较图1和图4 TE波和

TM波的带隙结构我们可以发现:  $k < 0$ 时, 二维函数光子晶体带隙与二维常规光子晶体带隙有明显的区别, 即在0—0.8频率范围内带隙的个数、位置以及宽度都不相同, 并且可以得到宽带隙.

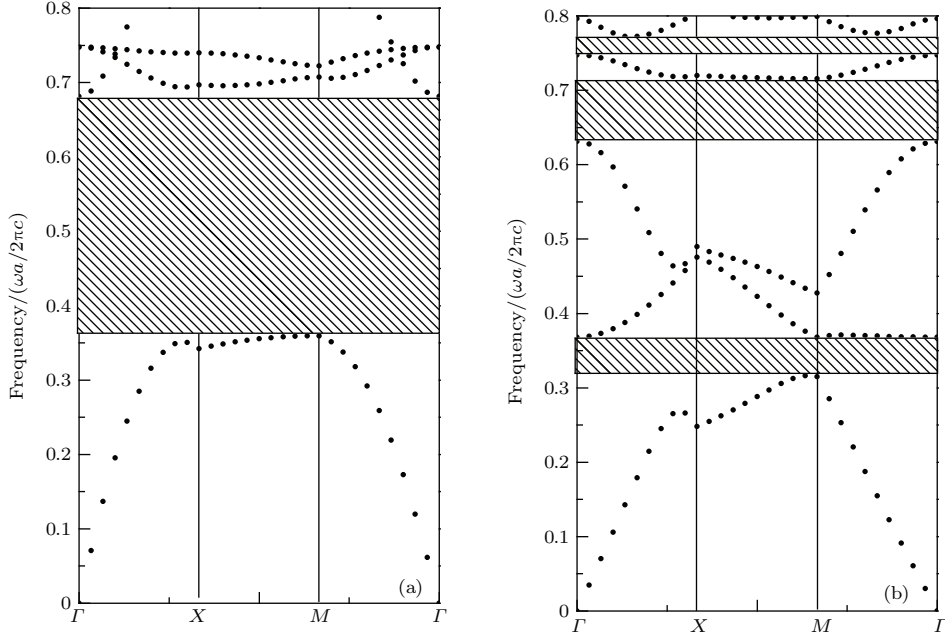


图4 三角晶格的二维函数光子晶体带隙结构 ( $\varepsilon_b = 1$ ,  $\varepsilon_a = k \cdot r + 9.86$ ; 函数系数  $k = -30 \times 10^6$ , 介质柱半径  $r_a = 0.65a$ ) (a) TE波; (b) TM波

Fig. 4. Triangular lattice two-dimensional function photonic crystals band gap structure ( $\varepsilon_b = 1$ ,  $\varepsilon_a = k \cdot r + 9.86$ ; function coefficient  $k = -30 \times 10^6$ , media column radius  $r_a = 0.65a$ ): (a) TE wave; (b) TM wave.

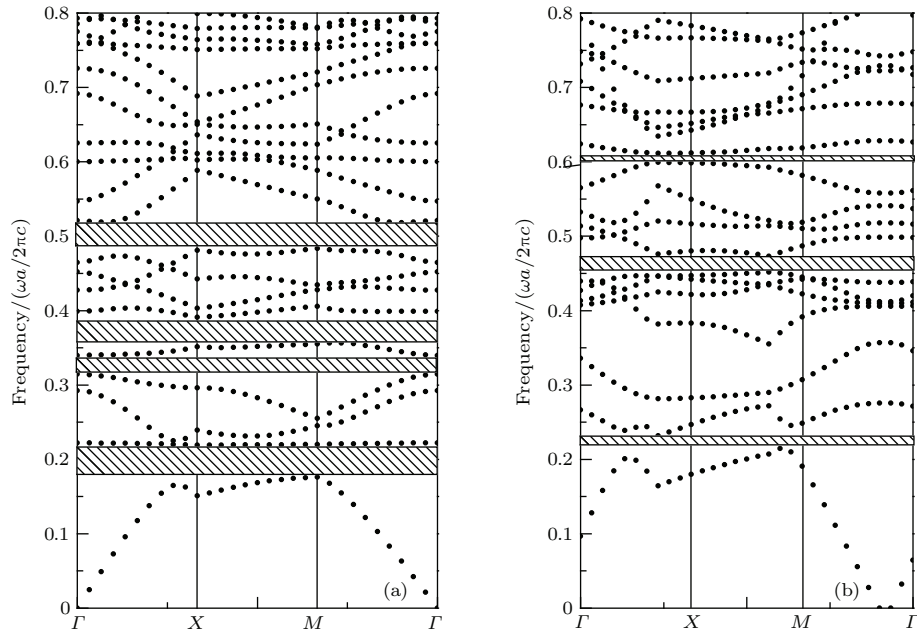


图5 三角晶格的二维函数光子晶体带隙结构 ( $\varepsilon_b = 1$ ,  $\varepsilon_a = k \cdot r + 9.86$ ; 函数系数  $k = 30 \times 10^6$ , 介质柱半径  $r_a = 0.65a$ ) (a) TE波; (b) TM波

Fig. 5. Triangular lattice two-dimensional function photonic crystals band gap structure ( $\varepsilon_b = 1$ ,  $\varepsilon_a = k \cdot r + 9.86$ ; function coefficient  $k = 30 \times 10^6$ , media column radius  $r_a = 0.65a$ ): (a) TE wave; (b) TM wave.



图 5(a) 和图 5(b) 分别为函数系数  $k = 30 \times 10^6$ , 即  $\varepsilon_a(\mathbf{r}) = 30 \times 10^6 r + 9.86 (0 \leq r \leq r_a)$  时二维函数光子晶体 TE 波和 TM 波的带隙结构图, 在 0—0.8 频率范围内, TE 波有 4 条带隙, TM 波有 3 条带隙. 与图 4 进行比较发现, 随着函数系数  $k$  的数值改变, 二维函数光子晶体 TE 波和 TM 波的带隙数目、带隙位置和宽度都发生变化. 为了验证函数系数  $k$  对二维函数光子晶体 TE 波和 TM 波带隙数目的调节, 我们计算多组  $k$  值的带隙结构所对应的带隙数目列在表 1 中, 即表 1 给出了不同函数系数  $k$  所对应的 TE 波 TM 波带隙数目. 从表 1 可以发现: 不同的函数系数  $k$  所对应的二维函数光子晶体 TE 波和 TM 波的带隙数目不同, 即函数系数  $k$  可实现对二维函数光子晶体带隙的调节.

表 1 不同函数系数  $k$  对应的 TE 波 TM 波带隙数目  
Table 1. TE and TM waves photonic band gap numbers corresponding to different function coefficients  $k$ .

函数系数 $k(\times 10^6)$	30	20	10	5	-5	-10	-20	-30
TE 波带隙数目	4	3	5	3	5	2	2	1
TM 波带隙数目	3	1	0	1	2	4	1	3

## 5 结 论

我们用平面波展开法研究了二维函数光子晶体的带隙结构, 并分别对 TE 和 TM 波带隙结构进行了数值分析, 同时与二维常规光子晶体带隙结构进行比较, 发现二维函数光子晶体与二维常规光子晶体的带隙结构有明显的区别, 通过参数的调节使二维函数光子晶体带隙个数、位置以及宽度发生变化, 为二维光子晶体光学器件的设计提供了重要理论依据.

## 参考文献

- [1] Yablonovitch E 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2059
- [2] John S 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2486
- [3] Benisty H, Weisbuch C, Olivier S 2004 *SPIE* **5360** 119
- [4] Lou S Q, Wang Z, Ren G B 2004 *Acta Opt. Sin.* **24** 313 (in Chinese) [娄淑琴, 王智, 任国斌 2004 光学学报 **24** 313]
- [5] Shang P G, Sacharia A 2003 *Opt. Express* **11** 167
- [6] Yin J L, Huang X G, Liu S H 2007 *Chin. J. Lasers* **34** 671 (in Chinese)[殷建玲, 黄旭光, 刘颂豪 2007 中国激光 **34** 671]
- [7] Wang H, Li Y P 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2172 (in Chinese) [王辉, 李永平 2001 物理学报 **50** 2172]
- [8] Zhao Y H, Qian C J, Qiu K S, Gao Y N, Xu X L 2015 *Opt. Express* **23** 9211
- [9] Li Z J, Zhang Y, Li B J 2006 *Opt. Express* **14** 3887
- [10] Geng T, Wu N, Dong X M, Gao X M 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 014213 (in Chinese) [耿滔, 吴娜, 董祥美, 高秀敏 2016 物理学报 **65** 014213]
- [11] Susa N 2002 *J. Appl. Phys.* **91** 3501
- [12] Yu J L, Shen H J, Ye S, Hong Q S 2012 *Acta Opt. Sin.* **32** 1106003 (in Chinese) [余建立, 沈宏君, 叶松, 洪求三 2012 光学学报 **32** 1106003]
- [13] Wang X, Chen L C, Liu Y H, Shi Y L, Sun Y 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 174206 (in Chinese) [王晓, 陈立潮, 刘艳红, 石云龙, 孙勇 2015 物理学报 **64** 174206]
- [14] Klitzing V, Klaus 1986 *Rev. Mod. Phys.* **58** 519
- [15] Zhang X, Zhang H J, Wang J, Felser C, Zhang S C 2012 *Science* **335** 1464
- [16] Seng F L, Sebastian K, Wen X, Hui C 2015 *Phys. Rev. A* **91** 023811
- [17] Lu C, Li W, Jiang X Y, Cao J C 2014 *Chin. Phys. B* **23** 097802
- [18] Francesco M, Andrea A 2014 *Chin. Phys. B* **23** 047809
- [19] Zhang H Y, Gao Y, Zhang Y P, Wang S F 2011 *Chin. Phys. B* **20** 094101
- [20] Dai Y, Liu S B, Wang S Y, Kong X K, Chen C 2014 *Chin. Phys. B* **23** 065202

# Two-dimensional function photonic crystal\*

Xiao Li<sup>1)</sup> Lei Tian-Yu<sup>1)</sup> Liang Yu<sup>1)</sup> Zhao Min<sup>1)</sup> Liu Hui<sup>1)</sup> Zhang Si-Qi<sup>2)</sup>  
Li Hong<sup>3)</sup> Ma Ji<sup>1)</sup> Wu Xiang-Yao<sup>1)†</sup>

1) (Jilin Normal University, Institute of Physics, Siping 136000, China)

2) (Jilin University, Institute of Physics, Changchun 130012, China)

3) (Northeast Normal University, Institute of Physics, Changchun 130012, China)

( Received 30 January 2016; revised manuscript received 17 April 2016 )

## Abstract

Photonic crystal is a kind of periodic optical nanostructure consisting of two or more materials with different dielectric constants, which has attracted great deal of attention because of its wide range of potential applications in the field of optics. Photonic crystal can be fabricated into one-, or two-, or three-dimensional one. Among them, the two-dimensional photonic crystal turns into a hot focus due to its fantastic optical and electrical properties and relatively simple fabrication technique. Since the tunable band gaps of two-dimensional photonic crystals are beneficial to designing the novel optical devices, to study their optical and electrical properties for controlling the electromagnetic wave is quite valuable in both theoretical and practical aspects. In this work, we propose a new type of two-dimensional function photonic crystal, which can tune the band gaps of photonic crystals. The two-dimensional function photonic crystal is different from the traditional photonic crystal composed of medium columns with spatially invariant dielectric constants, since the dielectric constants of medium column are the functions of space coordinates. Specifically, the photorefractive nonlinear optical effect or electro-optic effect is utilized to turn the dielectric constant of medium column into the function of space coordinates, which results in the formation of two-dimensional function photonic crystal. We use the plane-wave expansion method to derive the eigen-equations for the TE and TM mode. By the Fourier transform, we obtain the Fourier transform form  $\varepsilon(\mathbf{G})$  for the dielectric constant function  $\varepsilon(\mathbf{r})$  of two-dimensional function photonic crystal, which is more complicated than the Fourier transform in traditional two-dimensional photonic crystal. The calculation results indicate that when the dielectric constant of medium column is a constant, the Fourier transforms for both of them are the same, which implies that the traditional two-dimensional photonic crystal is a special case for the two-dimensional function photonic crystal. Based on the above theory, we calculate the band gap structure of two-dimensional function photonic crystal, especially investigate in detail the corresponding band gap structures of TE and TM modes. The function of dielectric constant can be described as  $\varepsilon(r) = k \cdot r + b$ , in which  $k$  and  $b$  are adjustable parameters. Through comparing the calculation results for both kinds of photonic crystals, we can find that the band structures of TE and TM modes in two-dimensional function photonic crystals are quite different from those in traditional two-dimensional photonic crystal. Adjusting parameter  $k$ , we can successfully change the number, locations and widths of band gaps, indicating that the band gap structure of two-dimensional function photonic crystal is tunable. These results provide an important design method and theoretical foundation for designing optical devices based on two-dimensional photonic crystal.

**Keywords:** two-dimensional function photonic crystals, plane wave expansion, band gap structure

**PACS:** 42.70.Qs, 78.20.Bh, 73.20.At

**DOI:** 10.7498/aps.65.134207

\* Project supported by the Scientific and Technological Development Foundation of Jilin Province (Grant No. 20130101031JC).

† Corresponding author. E-mail: [wuxy2066@163.com](mailto:wuxy2066@163.com)