

双势阱产生正负电子对过程中的正电子波干涉与克莱因隧穿现象

吴广智 王强 周沧涛 傅立斌

Positron wave interference and Klein tunnel during the production of pairs in the double-well potential

Wu Guang-Zhi Wang Qiang Zhou Cang-Tao Fu Li-Bin

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, **66**, 070301 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.070301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.070301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I7>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

双势阱中玻色-费米混合气体的周期调制效应

[The periodic modulation of a Bose-Fermi mixture in double-well trap](#)

物理学报.2013, 62(16): 160303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.160303>

玻色-爱因斯坦凝聚态 Rosen-Zener 跃迁中的多体量子涨落效应

[Many-body quantum fluctuation effects of Rosen-Zener transition in Bose-Einstein condensates](#)

物理学报.2012, 61(22): 220305 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.220305>

费米-费米散射长度对费米超流气体在幺正极限区域的隧穿现象影响

[The tunneling phenomena of the Fermi superfluid gases in unitarity by manipulating the Fermi-Fermi scattering length](#)

物理学报.2012, 61(18): 180303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.180303>

Fermi 超流气体在 unitarity 区域和 Bose-Einstein 凝聚区域的自俘获现象研究

[The self-trapping of superfluid Fermi gases in the Bose-Einstein condensation regime and in unitarity](#)

物理学报.2012, 61(10): 100301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.100301>

双势阱产生正负电子对过程中的正电子波干涉与 克莱因隧穿现象*

吴广智^{1)2)†} 王强¹⁾ 周沧涛¹⁾ 傅立斌¹⁾

1)(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

2)(中国工程物理研究院研究生院, 北京 100088)

(2016年11月7日收到; 2017年1月13日收到修改稿)

通过将狄拉克场量子化并且数值求解狄拉克方程的方法研究在一维情况下双势阱激发正负电子对产生的过程. 研究发现双势阱激发的正电子波在双势阱之间会出现干涉现象, 过程中伴随着克莱因隧穿效应, 并且在双势阱之间的距离取正电子波对应的驻波条件时, 在双势阱之间会表现出驻波形式的正电子干涉波. 并且驻波的出现对正负电子对的产生过程也存在相应的影响, 驻波最终会通过克莱因隧穿效应衰减消失.

关键词: 克莱因隧穿, 双势阱, 正负电子对, 干涉波

PACS: 03.65.Pm, 12.20.Ds

DOI: 10.7498/aps.66.070301

1 引言

1950年, Schwinger^[1]研究了静态均匀强电磁场下真空中的正负电子对产生问题, 并且给出真空中激发出正负电子对的场强阈值, 约为 10^{18} V/m. 随着激光技术的发展, 激光所能达到的最高电场强度已经接近该阈值, 这也使得越来越多的物理学家开始研究真空中正负电子对产生问题. Keitel等^[2-6]采用散射矩阵的方法, 通过定义入射态与出射态, 求解长时间电子对的产生几率. Narozhny等^[7-9]利用Schwinger公式, 通过求出模型中的电磁场的等效电场, 然后代入Schwinger公式中求积分得到长时间的电子对增长率. Dunne等^[10-14]利用他们发展的对于有效作用量基于半经典近似的费曼路径积分世界线瞬时子方法来研究电子对的产生问题, 该方法可以用来研究多于一维时空坐标下的非均匀的场. 另外, 文献^[15-18]发展出了一

种数值计算方法, 通过量子化狄拉克场以及数值求解狄拉克方程的方法, 能够得到极短时间内的电子对产生过程中的粒子产额、空间分布以及能谱等参数. 该方法已经用于解释很多电子对产生的相关问题, 如克莱因佯谬、产生粒子的狄拉克振动^[19]等. 本文也采用该方法做相关的计算.

本文研究了一维情况下双势阱中的正负电子对的产生问题. 发现两势阱之间的正电子波会发生干涉现象, 并且会通过克莱因隧穿效应隧穿到两势阱之外; 当两势阱的参数及其距离满足相应的驻波条件时, 会产生驻波形式的干涉波, 驻波的产生对于电子对的产额也有相应的影响.

2 基本原理及单势阱的相关计算

让我们首先考虑所使用数值计算方法的基本原理:

* 国家重点研发计划(批准号: 2016YFA0401100)、国家自然科学基金(批准号: 11374040)、国家重点基础研究发展计划(批准号: 2013CB834100)和NSAF联合基金(批准号: U1630246)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wuguangzhic@126.com

从量子场论的角度考虑, 狄拉克场算符 $\hat{\varphi}(x, t)$ 的含时演化满足狄拉克方程:

$$i \frac{\partial \hat{\varphi}(x, t)}{\partial t} = [cp\sigma_1 + c^2\sigma_3 + \mathbf{I}V(x, t)]\hat{\varphi}(x, t), \quad (1)$$

此处使用原子单位制, 仅考虑一维情况, 并忽略电子自旋, 其中 c 为光速, \mathbf{I} 为单位矩阵, σ_1, σ_3 为泡利矩阵, $V(x, t)$ 为外加电场带来的势能.

求解此方程, 可以将场算符使用平面波解展开:

$$\hat{\varphi}(x, t) = \sum_p \hat{b}_p(t) W_p(x) + \sum_n \hat{d}_n^+(t) W_n(x), \quad (2)$$

其中 $W_p(x)$ 和 $W_n(x)$ 分别为自由狄拉克方程的正能平面波解与负能平面波解, $\hat{b}_p(t)$ 和 $\hat{d}_n^+(t)$ 为相应的产生湮灭算符. 对 (2) 式采用波戈留波夫变换得

$$\begin{aligned} & \sum_p \hat{b}_p(t) W_p(x) + \sum_n \hat{d}_n^+(t) W_n(x) \\ &= \sum_p \hat{b}_p(t=0) W_p(x, t) + \sum_n \hat{d}_n^+(t=0) W_n(x, t). \end{aligned} \quad (3)$$

对 (3) 式左乘平面波解并积分可得

$$\begin{aligned} \hat{b}_p(t) &= \sum_{p'} \hat{b}_{p'}(t=0) \langle p|U(t)|p' \rangle \\ &+ \sum_{n'} \hat{d}_{n'}^+(t=0) \langle p|U(t)|n' \rangle, \\ \hat{d}_n^+(t) &= \sum_{p'} \hat{b}_{p'}(t=0) \langle n|U(t)|p' \rangle \\ &+ \sum_{n'} \hat{d}_{n'}^+(t=0) \langle n|U(t)|n' \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $|p\rangle$ 代表动量为 p 的单粒子正能态, 其中 $|n\rangle$ 代表动量为 n 的单粒子负能态, $U(t)$ 为编时算符:

$$U(t) = \hat{T} \exp \left\{ -i \int [cp\sigma_1 + c^2\sigma_3 + \mathbf{I}V(x, t)] dt \right\}. \quad (5)$$

本文求解狄拉克方程的含时演化采用的是劈裂算符法, 另外还有许多其他方法可以运用^[20,21].

若考虑单势阱势场 (见图 1 (a)):

$$V(x) = V_0 \{ \tanh[(x - W/2)/D] - \tanh[(x + W/2)/D] \}, \quad (6)$$

其中 V_0 为势阱深度, D 为阱边宽度, W 为阱宽. 正电子的动量分布为

$$\rho_p(p, t) = 1 - \langle 0|\hat{d}_n(t)\hat{d}_n^+(t)|0 \rangle. \quad (7)$$

之所以考虑正电子的动量分布是由于正电子出现在势阱外部, 产生后就不再受势场的影响, 从而保持了产生时的动量. 观察正电子动量分布随时间的变化 (见图 1 (b)) 发现, 在图 1 (a) 给出的势阱参数下, 正电子的动量谱为对称的双峰, 即产生的正电子的动能谱单一的峰, 这是由于仅有一个能量高于势阱底部的瞬时能量本征态能够深入到真空的狄拉克海中^[22]. 该动量绝对值为 $p_0 = 115.2$ a.u., 对应能量约为 $1.3c^2$ a.u. 的正电子.

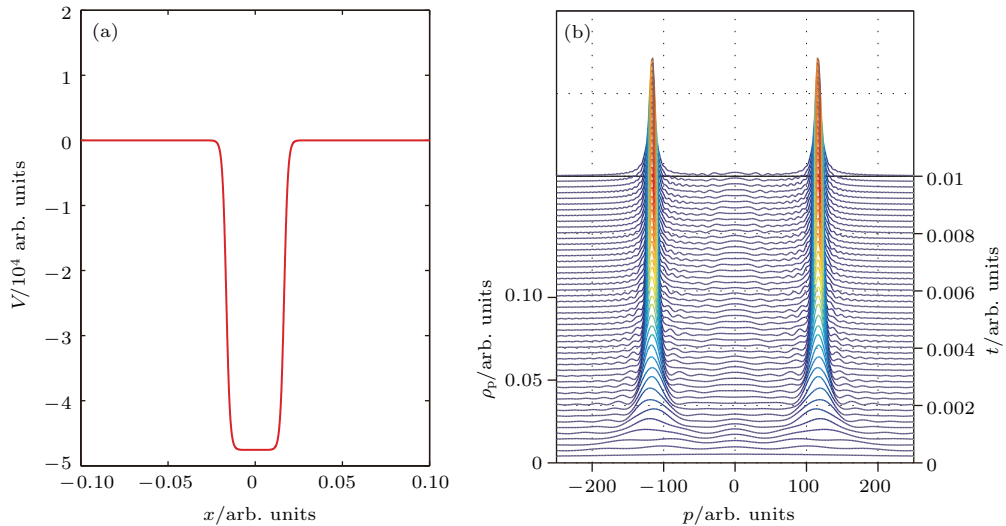


图 1 (网刊彩色) 单势阱相关计算 (a) 单势阱势场, 参数为 $V_0 = 2c^2 + 10^4$, $D = 0.3\lambda_C$, $W = 4.55\lambda_C$, $\lambda_C = 1/c$ 为康普顿波长; (b) 单势阱情况下正电子的动量分布随时间 t 的变化

Fig. 1. (color online) Simulation in the single well: (a) The single well with the parameter $V_0 = 2c^2 + 10^4$, $D = 0.3\lambda_C$, $W = 4.55\lambda_C$, $\lambda_C = 1/c$ is the Compton wavelength; (b) evolving momentum distribution of the positrons in the single well.

3 双势阱之间的正电子波干涉现象与克莱因隧穿效应

本文中的双势阱是由图 1(a) 对应的单势阱左右平移得到的, 两势阱之间的距离为 a , 左势阱的右边界与右势阱的左边界产生的正电子波将在两势阱中间发生干涉. 由于单个势阱产生的正电子具有单一的能量, 所以其正电子波可以近似地看作单色波, 则正电子波在双势阱中间的干涉情况可以近似地看作方向相反的两束单色波的叠加:

$$W_{-p_0}(x) + W_{p_0}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi E}} \begin{pmatrix} \sqrt{E + c^2} \cos(p_0 x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中 $E = \sqrt{c^2 p_0^2 + c^4}$ 为正电子能量, 上式已忽略作为小量的旋量二分量.

叠加后形成的正电子波对应的正电子空间分布为

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{E + c^2} \cos(p_0 x)}{\sqrt{4\pi E}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{E + c^2} \cos(p_0 x)}{\sqrt{4\pi E}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{(E + c^2) \cos^2(p_0 x)}{4\pi E}, \quad (9)$$

则干涉波一个波包的长度为 $L = \pi/p_0$. 所以若取两势阱中间的距离 $a = \pi/p_0$, $a = 2\pi/p_0$, $a = 3\pi/p_0 \dots$ 时满足相应的驻波条件.

分析双势阱中的正电子波干涉现象, 我们主要观察的是两个物理量: 双势阱产生的粒子对数目(正电子数目)(10)式与正电子的位置分布(11)式:

$$N(t) = \sum_p \langle 0 | \hat{b}_p^\dagger(t) \hat{b}_p(t) | 0 \rangle, \quad (10)$$

$$\rho_x(x, t) = \sum_n |W_n(x)|^2 - \langle 0 | \hat{\varphi}_{e^+}^\dagger(t) \hat{\varphi}_{e^+}(t) | 0 \rangle, \quad (11)$$

其中 $\hat{\varphi}_{e^+}(t) = \sum_n \hat{d}_n^\dagger(t) W_n(x)$ 为场算符(2)式的负能部分(正电子部分). 由于正电子波干涉出现在两势阱中间, 所以只需观察两势阱中间的正电子分布即可.

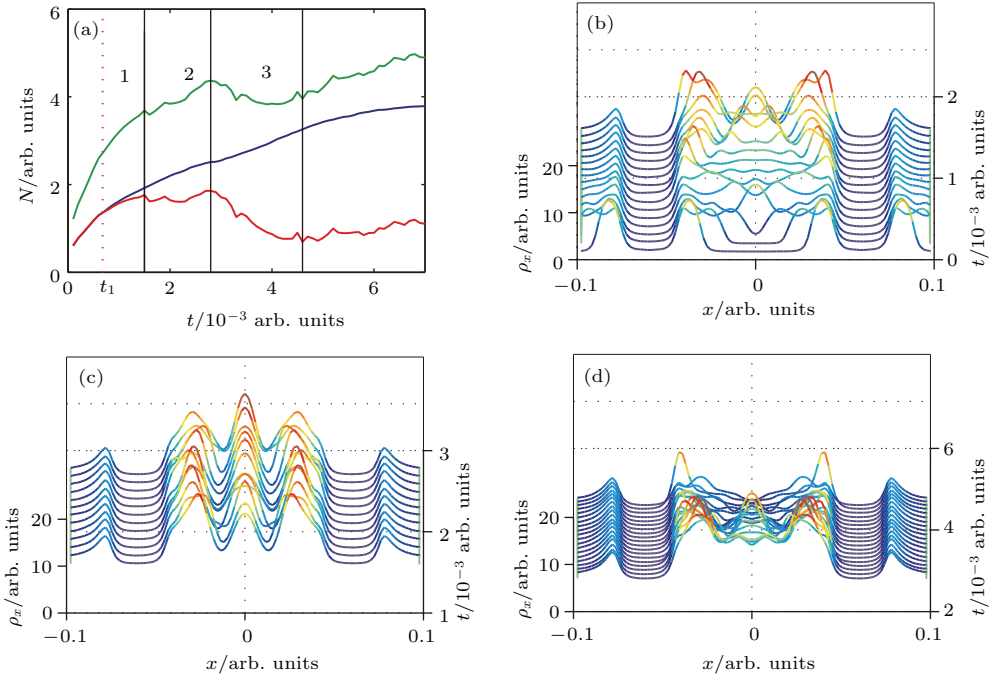


图 2 (网刊彩色) 正电子数目以及两势阱中间正电子分部随时间的变化 ($a = 3\pi/p_0$) (a) 正电子数目随时间的变化 (红线代表出现在两势阱中间的正电子数目, 蓝线代表出现在两势阱外部的正电子数目, 绿线代表正电子的总数目); (b) 第一时间段内两势阱之间正电子分部随时间的变化; (c) 第二时间段内两势阱之间正电子分部随时间的变化; (d) 第三时间段内两势阱之间正电子分部随时间的变化

Fig. 2. (color online) Evolving distribution and number of the positrons between the double well ($a = 3\pi/p_0$): (a) Evolving number of the positrons between the double well (red line for the positrons between the double well, blue line for the positrons outside the double well, green line for all of the positrons); (b) evolving distribution of the positrons between the double well in the first time quantum; (c) evolving distribution of the positrons between the double well in the second time quantum; (d) evolving distribution of the positrons between the double well in the third time quantum.

而由于正电子波与势阱(对正电子是势垒)的关系满足 $V_0 > c^2 + E$, 因此两势阱之间的正电子波隧穿到势阱外为典型的克莱因隧穿现象. 分析正电子波的克莱因隧穿现象主要观察分布于两势阱之间与两势阱外部的正电子数目的变化情况, 即对 (11) 式分别进行势阱内部与势阱外部的积分, 而对于克莱因隧穿率 β 的计算本文采用 (12) 式, 其中 $\max(N_{in})$ 为双势阱内部正电子数目的最大值, $\min(N_{in})$ 为克莱因隧穿效应出现后双势阱内部正电子数目的最小值.

$$\beta = 1 - \frac{\min(N_{in})}{\max(N_{in})}. \quad (12)$$

经过计算可以发现双势阱中的正电子波干涉现象大致可以分为三种不同的情况, 第一种情况两势阱之间的正电子数目波动出现早于其数目达到峰值(见图 2(a)), 此时两势阱距离较近, 如 ($a = 3\pi/p_0$), 根据双势阱中的正电子数目随时间的变化(见图 2(a)) 可以将粒子对的产生过程分为三个时间段.

从势场加入至电子对数目增长情况首先出现波动可以看做为第一个时间段, 在第一个时间段里, 观察两势阱中间的正电子位置分布情况(见图 2(b)) 可以看出在这一时间段里初始时期正电子波并没有出现干涉作用, 追踪其波峰的移动可以得到波峰的移动速度为 $V_g = 125.56$ a.u., 进而可得正电子波经过时间 $t_1 = a/V_g$ 由一侧阱壁到达另一侧阱壁, 此时克莱因隧穿效应出现, 正电子波由两势阱之间隧穿到势阱外部, 导致双势阱外部的正电子数目多于内部, 而双势阱内部的正电子数目仍在增加, 说明正电子的产生与隧穿机制共同存在(见图 2(a)), 之后在第一时间段的末期正电子波经过一次势阱壁的反射后, 正电子波的相互作用开始出现(说明正电子波只能与自身的反射波发生相互作用), 并于第一时间段的最后时刻出现比较明显的三个共振峰(见图 2(b)), 这与驻波条件是相符合的. 此刻刻约为 t_1 的两倍, 说明驻波的形成时间为正电子波的反射波回到原处的时间.

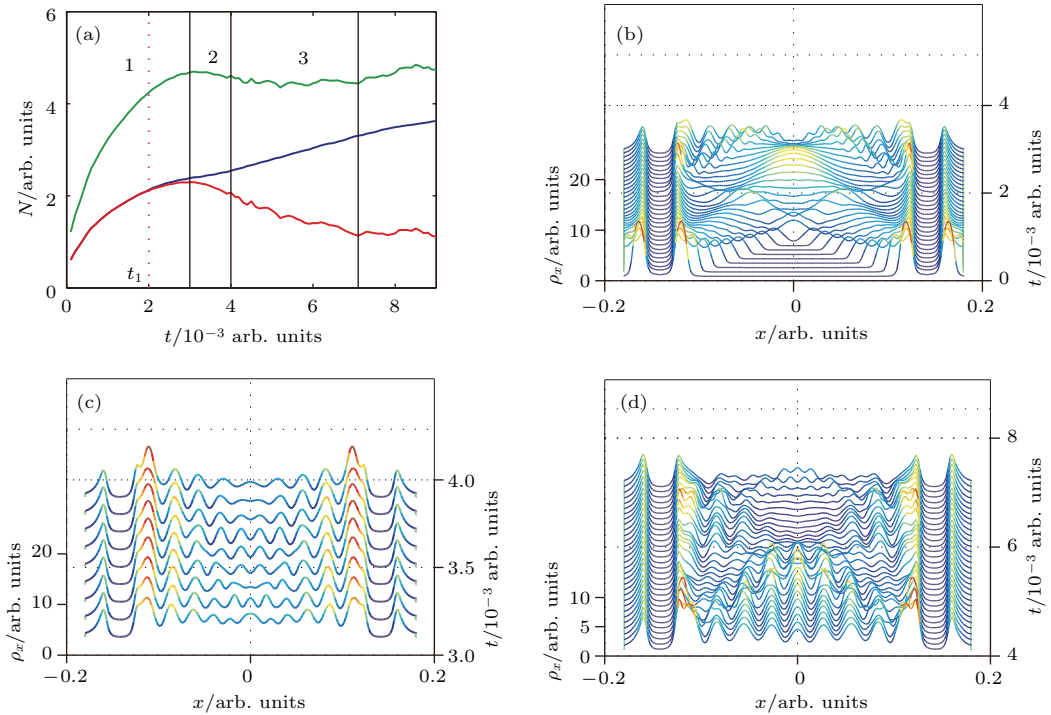


图3 (网刊彩色) 正电子数目以及两势阱中间正电子分部随时间的变化 ($a = 9\pi/p_0$) (a) 正电子数目随时间的变化; (b) 第一时间段内两势阱中间正电子分部随时间的变化; (c) 第二时间段内两势阱中间正电子分部随时间的变化; (d) 第三时间段内两势阱中间正电子分部随时间的变化

Fig. 3. (color online) Evolving distribution and number of the positrons between the double well ($a = 9\pi/p_0$): (a) Evolving number of the positrons; (b) evolving distribution of the positrons between the double well in the first time quantum; (c) evolving distribution of the positrons between the double well in the second time quantum; (d) evolving distribution of the positrons between the double well in the third time quantum.

正电子数目的波动增长过程为第二个时间段, 根据两势阱中间的正电子位置分布情况(见图 2c) 可以看出在这一时间段中两势阱中间的正电子干涉波呈现比较稳定的三个驻波. 由于正电子数目为波动变化(见图 2(a)), 所以在这一时间段里正电子隧穿与产生的两种机制存在比较强的竞争, 但数目整体是增加的. 另外, 在单势阱中的电子波也能观察到类似的波形, 但并不是由于电子波的干涉产生的, 而是深入负能海中的能态叠加造成的 [23].

两势阱中间的正电子数目从最大值波动下降的过程为第三个时间段(见图 2(d)), 这一时间段是正电子波的克莱因隧穿效应导致三个驻波塌缩的过程, 最终两势阱中间会留有一部分正电子, 克莱因隧穿的隧穿率为 $\beta = 0.66$.

第二种情况是两势阱之间的正电子数目波动出现晚于其数目达到峰值(见图 3(a)), 此时两势阱距离较第一种情况远, 如 ($a = 9\pi/p_0$), 类似地, 可以将粒子对的产生过程分为三个时间段(见图 3(a)).

第一时间段里的物理过程与之前是类似的(见图 3(b)), 克莱因隧穿现象同样出现在时间 t_1 (见图 3(a)).

第二个时间段是正电子数目持续下降的过程, 因此这一时间段内正电子的隧穿效应超过产生效应, 通过图 3(c) 可以发现这一时间段对应正电子的干涉波形成九个驻波的过程, 而驻波形成的时间同样约为 t_1 的两倍, 驻波形成后正电子的数目变化出现波动.

第三个时间段内同样是九个驻波通过隧穿塌缩的过程(见图 3(d)), 由于两势阱相距较远, 所以可以比较清晰地看出, 驻波的塌缩过程是从势阱壁开始的, 而中间位置的驻波由于驻波特有的性质则可以保持较长的时间. 克莱因隧穿的隧穿率为 $\beta = 0.58$.

第三种情况是两势阱相距更远 ($a = 17\pi/p_0$), 这种情况类似于第二种情况, 不同之处在于由于两势阱距离较大, 所以正电子的数目存在一个平台期波(见图 4 第二时间段). 同样地, 克莱因隧穿现象出现于时间 t_1 , 而在两倍 t_1 的时间点正电子数目的变化开始出现波动(见图 4). 由于模拟时长的限制, 双势阱内部的正电子数目并未下降到最小值, 因此克莱因隧穿的隧穿率 β 应当大于 0.52.

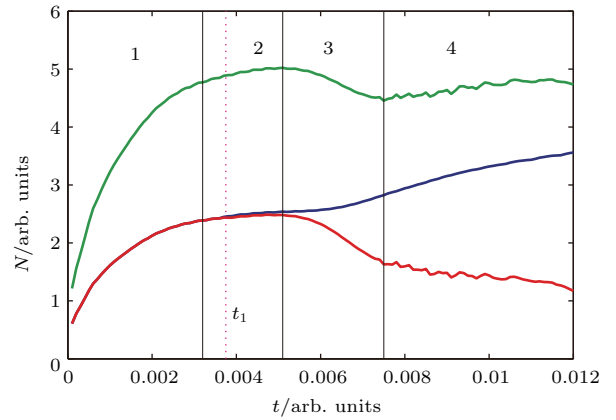


图 4 (网刊彩色) 正电子数目随时间的变化 ($a = 17\pi/p_0$)
Fig. 4. (color online) Evolving number of the positrons ($a = 17\pi/p_0$).

4 结 论

经过相关计算我们发现双势阱产生电子对的过程中, 两势阱中间的正电子波会与自身的反射波发生干涉作用并存在克莱因隧穿效应, 其基本过程是左势阱右壁产生的正电子波与右势阱左壁产生的正电子波第一次相遇时并不会出现相互作用. 在正电子波达到对面的势阱壁时克莱因隧穿效应开始发生, 且正电子波经过一次反射后会出现相互作用, 出现干涉波, 而干涉波会逐渐产生根据驻波条件确定个数的驻波, 当驻波产生后正电子的数目变化会出现波动, 证明正电子的隧穿机制与产生机制存在比较强烈的竞争, 由于两势阱的距离不同, 这一过程可能是两势阱中间的正电子波动增加或者波动减少的过程. 所形成的驻波若不受影响可以保持较长时间. 之后是两势阱中间的正电子驻波由于克莱因隧穿效应从势阱壁向中间塌缩的过程, 这一过程是两势阱中间的正电子波动减少的过程.

参考文献

- [1] Schwinger J 1951 *Phys. Rev.* **82** 664
- [2] Piazza A D, Hatsagortsyan K Z, Keitel C H 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 010403
- [3] Piazza A D, Milstein A I, Keitel C H 2007 *Phys. Rev. A* **76** 032103
- [4] Salamin Y I, Hu S X, Hatsagortsyan K Z, Keitel C H 2006 *Phys. Rep.* **427** 41
- [5] Wollert A, Klaiber M, Bauke H, Keitel C H 2015 *Phys. Rev. D* **91** 065022
- [6] Piazza A D, Lotstedt E, Milstein A I, Keitel C H 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 170403

- [7] Bulanov S S, Mur V D, Narozhny N B, Nees J, Popov V S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 220404
- [8] Narozhny N B, Fedotov A M 2014 *Eur. Phys. J: Spec. Top.* **223** 1083
- [9] Gelfer E G, Mur V D, Narozhny N B, Fedotov A M 2011 *J. Exp. Theor. Phys.* **113** 934
- [10] Dunne G V, Schubert C 2005 *Phys. Rev. D* **72** 105004
- [11] Dunne G V, Wang Q H, Gies H, Schubert C 2006 *Phys. Rev. D* **73** 065028
- [12] Dunne G V, Wang Q H 2006 *Phys. Rev. D* **74** 065015
- [13] Dietrich D D, Dunne G V 2007 *J. Phys. A: Math.Theor.* **40** F825
- [14] Dumlu C K, Dunne G V 2011 *Phys. Rev. D* **84** 125023
- [15] Holstein B R 1998 *Am. J. Phys.* **66** 507
- [16] Krekora P, Su Q, Grobe R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 040406
- [17] Lamb K D, Gerry C C, Su Q, Grobe R 2007 *Phys. Rev. A* **75** 013425
- [18] Dombey N, Calogeracos A 1999 *Phys. Rep.* **315** 41
- [19] Krekora P, Su Q, Grobe R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 043004
- [20] Sari R A, Suparmi A, Cari C 2016 *Chin. Phys. B* **25** 10301
- [21] Kurniawan A, Suparmi A, Cari C 2015 *Chin. Phys. B* **24** 30302
- [22] Krekora P, Cooley K, Su Q, Grobe R 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 070403
- [23] Liu Y, Jiang M, Lü Q Z, Li Y T, Grobe R, Su Q 2014 *Phys. Rev. A* **89** 012127

Positron wave interference and Klein tunnel during the production of pairs in the double-well potential*

Wu Guang-Zhi^{1)2)†} Wang Qiang¹⁾ Zhou Cang-Tao¹⁾ Fu Li-Bin¹⁾

1) (Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China)

2) (Graduate School, China Academy of Engineering Physics, Beijing 100088, China)

(Received 7 November 2016; revised manuscript received 13 January 2017)

Abstract

In this paper, the electron-positron creation process in a double well scheme is investigated. A series of simulations is conducted by solving the quantized Dirac equation numerically. Here the split operator scheme is used to solve the Dirac equation, and the Fourier analysis is adopted to study the evolution of the wave function. The evolution starts from the state that all the negative energy eigenstates are occupied. By projecting the time dependent wave function to the positive energy eigenstates, the distributions of electrons and positrons in coordinate space and momentum space would be calculated. The total number of the electrons and positrons can be obtained by integrating the momentum distributions, and the number of the positrons in different parts of coordinate space can be achieved by integrating the space distributions. At first the electron-positron is created at the double-well edge, and positrons are emitted from the edges of double-well potential and propagate out while the electrons are bounded by the barriers. It is found that when the positron waves from different double-well edges encounter in the double-well for the first time, there occurs no positron wave interference phenomenon. The wave interference emerges after the positron no indent wave is reflected by the barriers. At the same time, because of Klein tunneling the number of positrons outside the double well begin to surpass the positrons inside the double well. After a piece of time, the amplitude of interference wave would reach its peak, and then collapses since Klein tunneling. If the double-well potential meets the standing-wave conditions, a stationary wave would be found before the interference wave reaches its peak if the distance between the double wells is short, and a stationary wave would be found after the interference wave has reached its peak if the distance between the double wells is long. And the stationary wave occurs when the positron wave is reflected by the barriers for the second time. The occurring of the stationary wave would affect the pairs producing process by making the number of pairs fluctuate. Because of Klein tunneling, the wave packages close to the double-well would disappear first, and the others can last for a longer time when the standing-wave condition is fulfilled, but all of the stationary wave packages disappear in the double well finally. And there is barely no positrons left inside the double well to the end since Klein tunneling.

Keywords: Klein tunneling, double-well potential, pairs, interference wave

PACS: 03.65.Pm, 12.20.Ds

DOI: 10.7498/aps.66.070301

* Project supported by the National Key Program for S&T Research and Development (Grant No. 2016YFA0401100), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11374040), the National Basic Research Program of China Project (Grant No. 2013CB834100), and the NSAF (Grant No. U1630246).

† Corresponding author. E-mail: wuguangzhite@126.com