

光腔中两组分玻色-爱因斯坦凝聚体的受激辐射特性和量子相变

黄珊 刘妮 梁九卿

Stimulated radiation characteristics and quantum phase transition for two-component Bose-Einstein condensate in optical cavity

Huang Shan Liu Ni Liang Jiu-Qing

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 67, 183701 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20180971

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20180971>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I18>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[含时驱动的 Dicke 模型的混沌特性](#)

Chaos properties of the time-dependent driven Dicke model

物理学报.2017, 66(11): 110502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.110502>

[周期受击陀螺系统随时间演化波函数的多重分形](#)

Multifractal behaviors of the wave function for the periodically kicked free top

物理学报.2015, 64(20): 200505 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.200505>

[周期受击陀螺系统波函数的分形](#)

Wave function fractal dimensions for the periodically kicked free top

物理学报.2014, 63(22): 220507 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220507>

[二维 Sinai 台球系统的量子混沌研究](#)

Quantum chaos for two-dimensional Sinai billiard

物理学报.2014, 63(14): 140507 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.140507>

[基于天线辐射理论构建微波混沌腔的随机耦合模型](#)

Based on antenna theory to establish the random coupling model of microwave chaotic cavities

物理学报.2013, 62(7): 070504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.070504>

光腔中两组分玻色-爱因斯坦凝聚体的受激辐射特性和量子相变*

黄珊 刘妮[†] 梁九卿

(山西大学, 理论物理研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 太原 030006)

(2018年5月16日收到; 2018年6月7日收到修改稿)

研究了单模光腔中两组分玻色-爱因斯坦凝聚的基态性质和相关的量子相变. 通过利用自旋相干态变换将等效赝自旋哈密顿算符对角化并求得基态能量泛函. 基态能量泛函对其经典场变量进行变分并取极小值, 得到光子数解和相边界曲线. 通过稳定性讨论发现系统除了出现正常相和超辐射相之外, 还得到了多稳的宏观量子态; 受激辐射来自于原子数反转的集体态, 单组分的Dicke系统中并没有此现象; 受激辐射只能从一组分的原子中产生, 而另外的仍保持在普通超辐射状态. 通过调整相关的原子-场耦合强度和频率失谐, 超辐射和受激辐射态的顺序可以在原子的两个组分之间互换.

关键词: 量子相变, 自旋相干态变换, 能量泛函, 受激辐射

PACS: 37.30.+i, 42.50.Pq

DOI: 10.7498/aps.67.20180971

1 引言

Dicke模型描述的是 N 个二能级原子整体与一个单模量子化电磁场的相互作用^[1]. 该自旋-玻色模型展示了在光与物质相互作用系统中的集体现象^[2,3], 并且可以发生从正常相到超辐射相的二阶相变^[4-8]. 虽然标准Dicke模型形式简单, 但是体现了丰富而独特的多体量子理论, 且在量子信息等方面有广泛的研究^[9], 尤其在冷原子系统中讨论自旋轨道耦合的工作中也有很多丰富的研究成果^[10-13].

经典相变是指由于热涨落的影响导致物理系统突然发生态的改变, 例如由液态到固态的变化. 而Dicke模型中的量子相变描述的是在绝对零度下, 当改变多粒子系统的某一序参数时, 系统将从一种无序的状态连续变化到一种有序的状态. 为了在实验是实现Dicke模型的量子相变, 集体原子与光子的耦合强度应该与原子共振频率的数量级大

小相同, 这个条件很难得到满足^[14-17]. 最近, 在一个玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)-光学腔系统中成功地观测到超辐射量子相变, 实验中引入了独立的动量自旋态^[3,18]. 因此, BEC-光学腔系统常被用来探索奇异的多体现象.

近年来, 利用半经典近似法对双组分BEC中量子相变进行了研究, 揭示了原子对隧穿诱发的动力学^[19-21]. 相关文献已证明: 光学腔中耦合的双组分BEC具有光学、流体、多稳定性^[22,23]; 在具有自旋自由度的双组分BEC中也可产生大量的多粒子纠缠, 并且可观察到两组BEC之间的干扰^[23-25].

很多文献是基于Holstein-Primakoff变换, 即在热力学极限($N \rightarrow \infty$)下, 将赝自旋算符转化为单模玻色算符, 然后利用变分的方法研究Dicke模型的量子相变^[13]. 本文通过玻色子算符取平均场近似后, 得到一个等效赝自旋哈密顿算符, 并利用自旋相干态变换将其对角化得到能量泛函, 然后将

* 国家自然科学基金(批准号: 11772177, 61505100)、山西省科学基金(批准号: 201701D221001)和山西省“1331工程”重点学科设计划资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: 317446484@qq.com

求得的能量泛函对其经典场变量(复参数)变分并取极小值,从而给出基态能量和波函数的表达式.自旋相干态变分的方法可以方便地揭示多体物理系统的基态特性,既可以考虑正常赝自旋,又可以考虑反转赝自旋,同时能产生多稳的宏观量子态.在自旋为 N 且 $N \rightarrow \infty$ 时,我们看到的宏观量子态就是自旋相干态.本文采用自旋相干态变分的方法,展示了两组分BECs在单模光学腔中丰富的基态相图和量子相变特性.

2 模型

我们考虑两团超冷原子同时与频率为 ω 光学腔模耦合,但两团原子之间并没有相互作用(如图1),则两组分超冷原子与光腔相互作用的有效哈密顿量^[26](用自然单位 $\hbar = 1$)可表示为

$$H = \omega a^\dagger a + \sum_{j=1,2} \omega_j S_{jz} + \sum_{j=1,2} \frac{g_j}{\sqrt{N_j}} (a^\dagger + a)(S_{j+} + S_{j-}), \quad (1)$$

式中 a^\dagger , a 分别表示有效光场的产生算符和湮灭算符; S_{jz} , S_{j+} , S_{j-} 是集体赝自旋算符,自旋量子数 $S_j = N_j/2$ ($j = 1, 2$),其中 N_j 代表第 j 个组分原子数; ω_j 是第 j 个组分的原子频率; g_j 为第 j 个组分的原子与光场的耦合强度.

设变分的基态波函数为玻色场的相干态 $|\alpha\rangle$,即玻色子湮灭算符的本征态为 $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.在玻色场相干态表象中,方程(1)对应的哈密顿算符的期待值是一个等效的赝自旋哈密顿,即

$$H_{\text{eff}}(\alpha) = \langle \alpha | H | \alpha \rangle = \omega \alpha^* \alpha + \sum_{j=1,2} \omega_j S_{jz}$$

$$\begin{cases} R^+(n_j) S_{jz} R(n_j) = S_{jz} \cos \xi_j + \frac{1}{2} \sin \xi_j (S_{j+} e^{-i\eta_j} + S_{j-} e^{i\eta_j}), \\ R^+(n_j) S_{j+} R(n_j) = S_{j+} \cos^2 \frac{\xi_j}{2} - S_{j-} e^{2i\eta_j} \sin^2 \frac{\xi_j}{2} - S_{jz} e^{i\eta_j} \sin \xi_j, \\ R^+(n_j) S_{j-} R(n_j) = S_{j-} \cos^2 \frac{\xi_j}{2} - S_{j+} e^{-2i\eta_j} \sin^2 \frac{\xi_j}{2} - S_{jz} e^{-i\eta_j} \sin \xi_j. \end{cases} \quad (4)$$

将本征方程(3)左乘 $R^+(n_j)$,且考虑方程(4),可以得到

$$[\omega_j \alpha^2 + A_j(\alpha, \xi_j, \eta_j) S_{jz} + B_j(\alpha, \xi_j, \eta_j) S_{j+} + C_j(\alpha, \xi_j, \eta_j) S_{j-}] |\pm_j\rangle = E_\pm(\alpha) |\pm_j\rangle, \quad (5)$$

其中

$$\begin{cases} B_j(\alpha, \xi_j, \eta_j) = \frac{\omega_j}{2} e^{-i\eta_j} \sin \xi_j + \frac{g_j}{\sqrt{N_j}} (\alpha + \alpha^*) \left(\cos^2 \frac{\xi_j}{2} - e^{-2i\eta_j} \sin^2 \frac{\xi_j}{2} \right), \\ C_j(\alpha, \xi_j, \eta_j) = \frac{\omega_j}{2} e^{i\eta_j} \sin \xi_j + \frac{g_j}{\sqrt{N_j}} (\alpha + \alpha^*) \left(\cos^2 \frac{\xi_j}{2} - e^{2i\eta_j} \sin^2 \frac{\xi_j}{2} \right). \end{cases} \quad (6)$$

$$+ \sum_{j=1,2} \frac{g_j}{\sqrt{N_j}} (\alpha^* + \alpha)(S_{j+} + S_{j-}). \quad (2)$$

这意味着等效赝自旋哈密顿量可以通过将玻色场算符取平均场近似得到,这里经典场的变量(复数)为变分参数,因此求能量泛函的关键是通过自旋相干态变换将赝自旋哈密顿进行对角化,从而得到系统相应的本征值和本征态.本征方程为

$$H_{\text{eff}} |\pm n_j\rangle = E(\alpha) |\pm n_j\rangle. \quad (3)$$

整体的态直接用两组分的自旋态直积产生 $|\pm n_j\rangle = |\pm n_1\rangle |\pm n_2\rangle$.本征态 $|+n_j\rangle$ 和 $|-n_j\rangle$ 分别为自旋算符在 \mathbf{n} 方向投影的北、南极规范自旋相干态,其中 $\mathbf{n}_j = (\sin \xi_j \cos \eta_j, \sin \xi_j \sin \eta_j, \cos \xi_j)$ 是用分量极角 ξ_j 和方位角 η_j 描述的单位矢量.自旋相干态也可以通过旋转算符 $R(n_j) = e^{\frac{\xi_j}{2}(S_{j+} e^{-i\eta_j} - S_{j-} e^{i\eta_j})}$,由 S_z 的本征态 $|\pm\rangle$ 生成,即 $|\pm n_j\rangle = R(n_j) |\pm_j\rangle$, ξ_j, η_j 是待定参数.

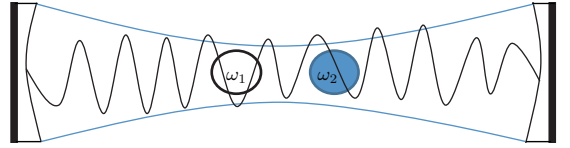


图1 频率为 ω 的高精细光腔中具有频率为 ω_1 和 ω_2 的两组分超冷原子(白色和蓝色)的示意图

Fig. 1. Schematic diagram for two ensembles of ultra-cold atoms (white and blue) with transition frequencies ω_1, ω_2 in an optical cavity of frequency ω .

在自旋相干态变化下,原来的集体赝自旋算符 S_{jz}, S_{j+}, S_{j-} 变为^[20]

其中(5)式成立的条件是

$$\begin{cases} B_j(\alpha, \xi_j, \eta_j) = 0, \\ C_j(\alpha, \xi_j, \eta_j) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

通过条件(7)式求得 ξ_j 和 η_j ,并代入到 $A_j(\alpha, \xi_j, \eta_j)$ 中,得到能量泛函为

$$E(\alpha) = \omega\alpha^2 \pm \sum_{j=1,2} \frac{N_j}{2} A_j(\alpha, \xi_j, \eta_j), \quad (8)$$

其中 $A_j(\alpha, \xi_j, \eta_j) = \omega_j \cos \xi_j - \frac{g_j}{\sqrt{N_j}}(\alpha + \alpha^*)(e^{i\eta_j} + e^{-i\eta_j}) \sin \xi_j$. 令 $\alpha = \gamma e^{i\eta}$,通过进一步求解(7)式最终求得参数,并将其代入能量泛函表达式.关于光子数的能量泛函是

$$\frac{E(\gamma)}{\omega} = \gamma^2 \pm \sum_{j=1,2} \frac{N_j}{2} \sqrt{\left(\frac{\omega_j}{\omega}\right)^2 + \frac{16g_j^2}{N_j} \left(\frac{g_j}{\omega}\right)^2}. \quad (9)$$

从(9)式可以发现:正常和反常的赝自旋态都将影响体系的多重稳定态.有四种自旋情况:两个反方向自旋($\uparrow\uparrow$);第一个反向自旋,第二个正常自旋($\uparrow\downarrow$);第一个正常自旋,第二个反向自旋($\downarrow\uparrow$);两个正常自旋($\downarrow\downarrow$).首先考虑第一种情况:两个反向自旋($\uparrow\uparrow$),此时能量泛函为

$$\frac{E_{\uparrow\uparrow}(\gamma)}{\omega} = \gamma^2 + \sum_{j=1,2} \frac{N_j}{2} \sqrt{\left(\frac{\omega_j}{\omega}\right)^2 + \frac{16g_j^2}{N_j} \left(\frac{g_j}{\omega}\right)^2}. \quad (10)$$

且我们假设两组分原子数目相等,为 $N_1 = N_2 = N/2$,则基态的平均能量是

$$\varepsilon_{\uparrow\uparrow} = \frac{E_{\uparrow\uparrow}(\gamma)}{N\omega}. \quad (11)$$

对基态的平均能量对光子数 γ 变分,能量的极值条件为

$$\frac{\partial \varepsilon_{\uparrow\uparrow}}{\partial \gamma} = 2\gamma_{\uparrow\uparrow} P_{\uparrow\uparrow}(\gamma_{\uparrow\uparrow}) = 0, \quad (12)$$

其中 $P_{\uparrow\uparrow}(\gamma_{\uparrow\uparrow}) = 1 + \sum_{j=1,2} \frac{4g_j^2}{\omega^2 F_j(\gamma_{\uparrow\uparrow})}$,而 $F_j(\gamma_{\uparrow\uparrow}) =$

$\sqrt{\left(\frac{\omega_j}{\omega}\right)^2 + 32\left(\frac{g_j}{\omega}\right)^2 \frac{\gamma_{\uparrow\uparrow}^2}{N}}$.由此可以得出:(12)式存在光子数为零的解($\gamma_{\uparrow\uparrow} = 0$),且当光子数为零时能量的二阶导是恒大于零,其区域由 $N_{\uparrow\uparrow}$ 表示.

接下来考虑第二种情况:第一个反向自旋,第二个正常自旋($\uparrow\downarrow$),无量纲的基态能量为

$$\varepsilon_{\uparrow\downarrow} = \frac{\gamma^2}{N} + \frac{1}{4}[F_1(\gamma_{\uparrow\downarrow}) - F_2(\gamma_{\uparrow\downarrow})], \quad (13)$$

其中 $F_j(\gamma_{\uparrow\downarrow}) = \sqrt{\left(\frac{\omega_j}{\omega}\right)^2 + 32\left(\frac{g_j}{\omega}\right)^2 \frac{\gamma_{\uparrow\downarrow}^2}{N}}$. 能量

的极值条件为 $\frac{\partial \varepsilon_{\uparrow\downarrow}}{\partial \gamma} = 2\gamma_{\uparrow\downarrow} P_{\uparrow\downarrow}(\gamma_{\uparrow\downarrow}) = 0$,且

$P_{\uparrow\downarrow}(\gamma_{\uparrow\downarrow}) = 1 + \frac{4}{\omega^2} \left(\frac{g_1^2}{F_1(\gamma_{\uparrow\downarrow})} - \frac{g_2^2}{F_2(\gamma_{\uparrow\downarrow})} \right)$,由此

可以得到有稳定的光子数为零的解($\gamma_{\uparrow\downarrow} = 0$).

根据能量泛函的二阶导数 $\frac{\partial^2(\varepsilon_{\uparrow\downarrow}(\gamma_{\uparrow\downarrow} = 0))}{\partial \gamma^2} =$

$\frac{2}{N} \left[1 + \frac{4}{\omega} \left(\frac{g_1^2}{\omega_1} - \frac{g_2^2}{\omega_2} \right) \right] > 0$,可以确定其稳定区域,并且用 $N_{\uparrow\downarrow}$ 表示,其区域范围为

$$\frac{g_2^2}{\omega_2} - \frac{g_1^2}{\omega_1} < \frac{\omega}{4}. \quad (14)$$

下面考虑第三种情况:第一个正常自旋,第二个反向自旋($\downarrow\uparrow$).能量泛函为 $\varepsilon_{\downarrow\uparrow} = \frac{\gamma^2}{N} -$

$\frac{1}{4}[F_1(\gamma_{\downarrow\uparrow}) - F_2(\gamma_{\downarrow\uparrow})]$,能量的极值条件为 $\frac{\partial \varepsilon_{\downarrow\uparrow}}{\partial \gamma} =$

$2\gamma_{\downarrow\uparrow} P_{\downarrow\uparrow}(\gamma_{\downarrow\uparrow}) = 0$,且 $P_{\downarrow\uparrow}(\gamma_{\downarrow\uparrow}) = 1 - \frac{4}{\omega^2} \left(\frac{g_1^2}{F_1(\gamma_{\downarrow\uparrow})} -$

$\frac{g_2^2}{F_2(\gamma_{\downarrow\uparrow})} \right)$,此时稳定零解的区域用 $N_{\downarrow\uparrow}$ 表示,范围为

$$\frac{g_1^2}{\omega_1} - \frac{g_2^2}{\omega_2} < \frac{\omega}{4}. \quad (15)$$

最后一种情况:两个正常自旋 $\downarrow\downarrow$.无量纲基态能量为 $\varepsilon_{\downarrow\downarrow} = \frac{\gamma^2}{N} - \frac{1}{4}[F_1(\gamma_{\downarrow\downarrow}) + F_2(\gamma_{\downarrow\downarrow})]$,能

量的极值条件为 $\frac{\partial \varepsilon_{\downarrow\downarrow}}{\partial \gamma} = 2\gamma_{\downarrow\downarrow} P_{\downarrow\downarrow}(\gamma_{\downarrow\downarrow}) = 0$,且

$P_{\downarrow\downarrow}(\gamma_{\downarrow\downarrow}) = 1 - \frac{4}{\omega^2} \left(\frac{g_1^2}{F_1(\gamma_{\downarrow\downarrow})} + \frac{g_2^2}{F_2(\gamma_{\downarrow\downarrow})} \right)$,稳定零

解的区域用 $N_{\downarrow\downarrow}$ 表示,区域为

$$\frac{g_1^2}{\omega_1} + \frac{g_2^2}{\omega_2} < \frac{\omega}{4}. \quad (16)$$

接下来,讨论以上四种情况的非零光子数的解,统一表示为

$$P_k(\gamma_{sk}) = 0, \quad (17)$$

其中 $k = \downarrow\downarrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \uparrow\uparrow$.可以通过(17)式来数值求解光子数.在图2(a)中给出了稳定的非零光子解 γ_{sk} ,被称为超辐射态,其中 $k = \downarrow\downarrow$ (黑线), $\downarrow\uparrow$ (红线), $\uparrow\downarrow$ (蓝线),图2(b)为相对应的能量 ε_{sk} .

对于第二组分原子与场的耦合强度 $g_2/\omega = 0.1$ 时,从图2(a1)和图2(b1)可以看出只有两种情况下极值方程的解 $\gamma_{s\downarrow\downarrow}$ 和 $\gamma_{s\downarrow\uparrow}$ 是稳定的,即相对应的关于参数 γ 的基态能量函数的二阶导数为正,此时对应的能量为局域的最小值. $\gamma_{s\downarrow\uparrow}$ 表示第二组分原子整体反转的非

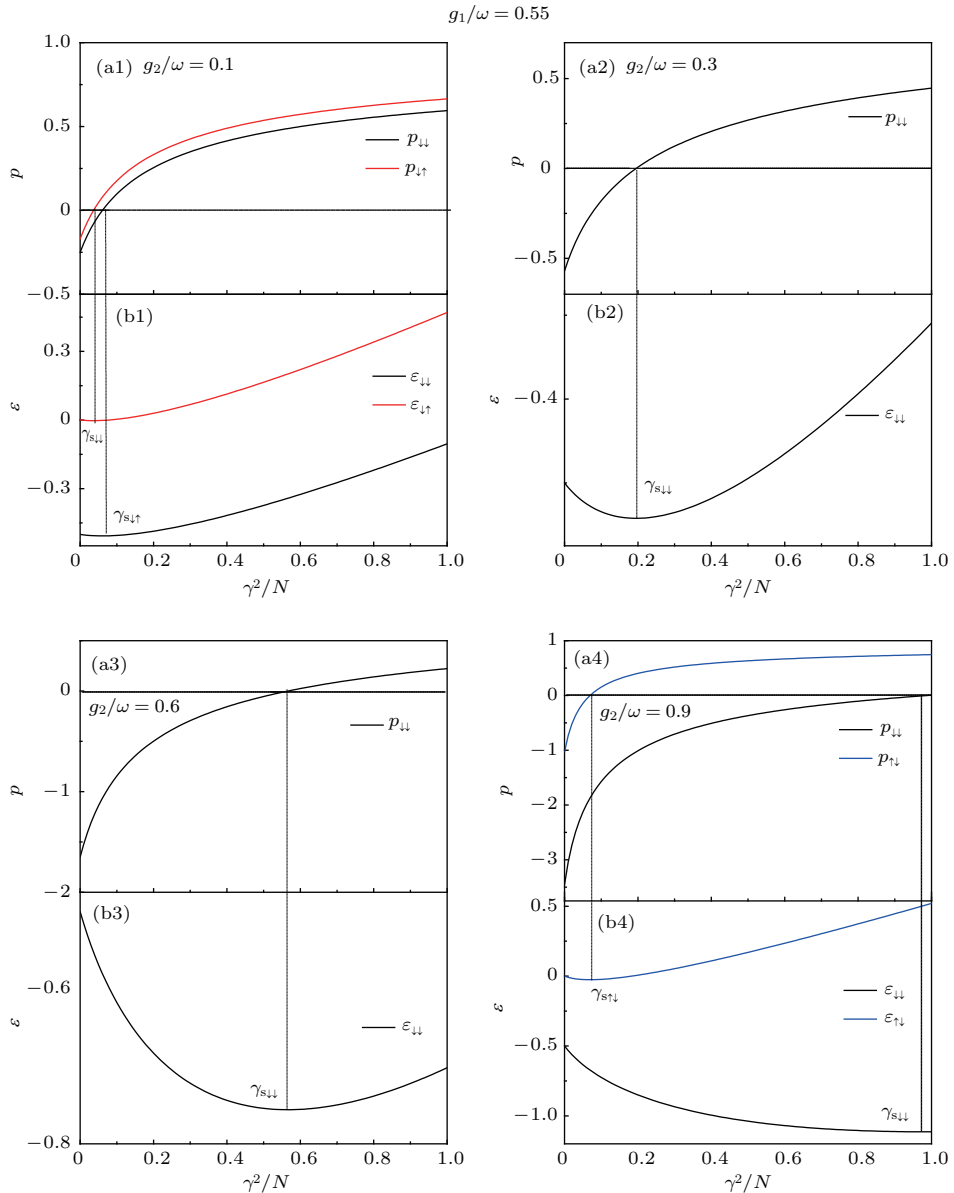


图2 极值方程 $P_k(\gamma_{sk}) = 0$ (a1)–(a4) 和平均能量曲线 ε (b1)–(b4) 随平均光子数 γ^2/N 的变化 (给定的条件是: 第一组分原子与场的耦合强度为 $g_1/\omega = 0.55$ 和 $g_2/\omega = 0.1, 0.3, 0.6, 0.9$, 其中 $k = \downarrow\downarrow$ (黑线), $k = \downarrow\uparrow$ (红线), $k = \uparrow\downarrow$ (蓝线))
 Fig. 2. Graphical solutions of the extremum equation $P_k(\gamma_{sk}) = 0$ (a1)–(a4) and the corresponding average energy curves ε (b1)–(b4) as the function of the mean photon number γ^2/N for $k = \downarrow\downarrow$ (black line) and $k = \downarrow\uparrow$ (red line) (or $k = \uparrow\downarrow$ (blue line)). The plotted parameters are given by $g_1/\omega = 0.55$ and $g_2/\omega = 0.1, 0.3, 0.6, 0.9$.

零光子数的稳定解. 将第二组分原子与场的耦合强度提高到 $g_2/\omega = 0.3$ (图2(a2) 以及图2(b2)) 和 $g_2/\omega = 0.6$ (图2(a3) 和图2(b3)) 时, 发现只有一个稳定解 $\gamma_{s\downarrow\downarrow}$. 但是当耦合强度提高到 $g_2/\omega = 0.9$ 时出现了两个稳定的解 $\gamma_{s\downarrow\downarrow}$ 和 $\gamma_{s\uparrow\downarrow}$ (图2(a4) 和图2(b4)), $\gamma_{s\uparrow\downarrow}$ 表示来自第一组分原子反转的受激辐射解. 根据图2(a4) 和图2(b4), 发现原子数反转的集体辐射变成了第一组分的原子反转这一有趣的现象. 自旋相干态变分法的观测结果表明: 除了基态可以获得稳定的宏观量子态之外, 同时也获

得了较高能量的稳定宏观量子态.

3 讨论

我们考虑不同组分原子与场的失谐分别为

$$\omega_1 = \omega - \Delta, \quad \omega_2 = \omega + \Delta, \quad (18)$$

其中 $\Delta \in [-0.9, 0.9]$, 而原子与场的耦合不平衡参数 δ 表示为

$$g_1 = g, \quad g_2 = (1 + \delta)g. \quad (19)$$

将(18)和(19)式代入到相对应的能量泛函,并根据极值条件可以得到正常态 $N_{\downarrow\downarrow}$ 和反转态 $N_{\downarrow\uparrow}, N_{\uparrow\downarrow}$ 的相边界:

$$\begin{aligned} g_{c\downarrow\downarrow} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega^2 - \Delta^2}{\omega[2\omega + (\omega - \Delta)(2\delta + \delta^2)]}}, \\ g_{c\downarrow\uparrow} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega^2 - \Delta^2}{\omega[2\Delta - (\omega - \Delta)(2\delta + \delta^2)]}}, \\ g_{c\uparrow\downarrow} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega^2 - \Delta^2}{\omega[(\omega - \Delta)(2\delta + \delta^2) - 2\Delta]}}. \end{aligned} \quad (20)$$

正常态 $N_{\downarrow\downarrow}$ 和超辐射态 $S_{\downarrow\downarrow}$ 的平均光子数可以由相关的波函数直接求得,根据给出的自旋态,得到光子数为

$$n_p(\downarrow\downarrow) = \frac{\langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle}{N} = \begin{cases} 0, & g < g_{c\downarrow\downarrow}, \\ \frac{\gamma_{\downarrow\downarrow}^2}{N}, & g > g_{c\downarrow\downarrow}, \end{cases} \quad (21)$$

同时原子布居数为

$$\Delta n_a(\downarrow\downarrow) = -\frac{1}{4} \sum_{j=1,2} \frac{\omega_j}{\omega F_j(\gamma_{\downarrow\downarrow})}. \quad (22)$$

对于 $\Delta n_a(\downarrow\downarrow) = -1/2$ 类似于标准 Dicke 模型,此时为正常相.在临界耦合强度 $g_{c\downarrow\downarrow}$ 前后,正常态 $N_{\downarrow\downarrow}$

和超辐射态 $S_{\downarrow\downarrow}$ 的平均能量分别为

$$\varepsilon_{\downarrow\downarrow} = \begin{cases} -0.5, & g < g_{c\downarrow\downarrow}, \\ \frac{\gamma_{\downarrow\downarrow}^2}{N} - \frac{1}{4} \sum_{j=1,2} F_j(\gamma_{\downarrow\downarrow}), & g > g_{c\downarrow\downarrow}. \end{cases} \quad (23)$$

对于另外两种态 N_k, S_k ,其中相对应的自旋极化 $k = \downarrow\uparrow, \uparrow\downarrow$,它们的平均光子数为

$$n_p(N_k) = 0, n_p(S_k) = \frac{\gamma_k^2}{N}, \quad (24)$$

正常态的非平衡原子数为

$$\Delta n_a(N_k) = 0. \quad (25)$$

而对于超辐射态的非平衡原子数可整理为

$$\begin{aligned} \Delta n_a(S_{\downarrow\uparrow}) &= \frac{1}{4\omega} \left[-\frac{\omega_1}{F_1(\gamma_{\downarrow\uparrow})} + \frac{\omega_2}{F_2(\gamma_{\downarrow\uparrow})} \right], \\ \Delta n_a(S_{\uparrow\downarrow}) &= \frac{1}{4\omega} \left[\frac{\omega_1}{F_1(\gamma_{\uparrow\downarrow})} - \frac{\omega_2}{F_2(\gamma_{\uparrow\downarrow})} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

根据 $P_k(\gamma_{sk}) = 0$ 求出非零光子数 γ_{sk} ,将其代入到能量泛函内可以得到平均能量 $\varepsilon_k(S_k)$.正常态时,平均能量 $\varepsilon_k(N_k) = 0$.而对应零光子数解的反转自旋态的非平衡原子数 $\Delta n_a(\uparrow\uparrow) = 0.5$,平均能量为 $\varepsilon(N_{\uparrow\uparrow})$,且 $\varepsilon(N_{\uparrow\uparrow}) = \frac{1}{4\omega}(\omega_1 + \omega_2)$,在 $N_{\uparrow\uparrow}$ 这种情况下反转自旋对应的零光子数解都是不稳定的.

图3的(a1)和(a2)为第二组分原子不存在($\omega_2 = 0$)时的平均光子数 n_p 和非平衡原子数 Δn_a ,

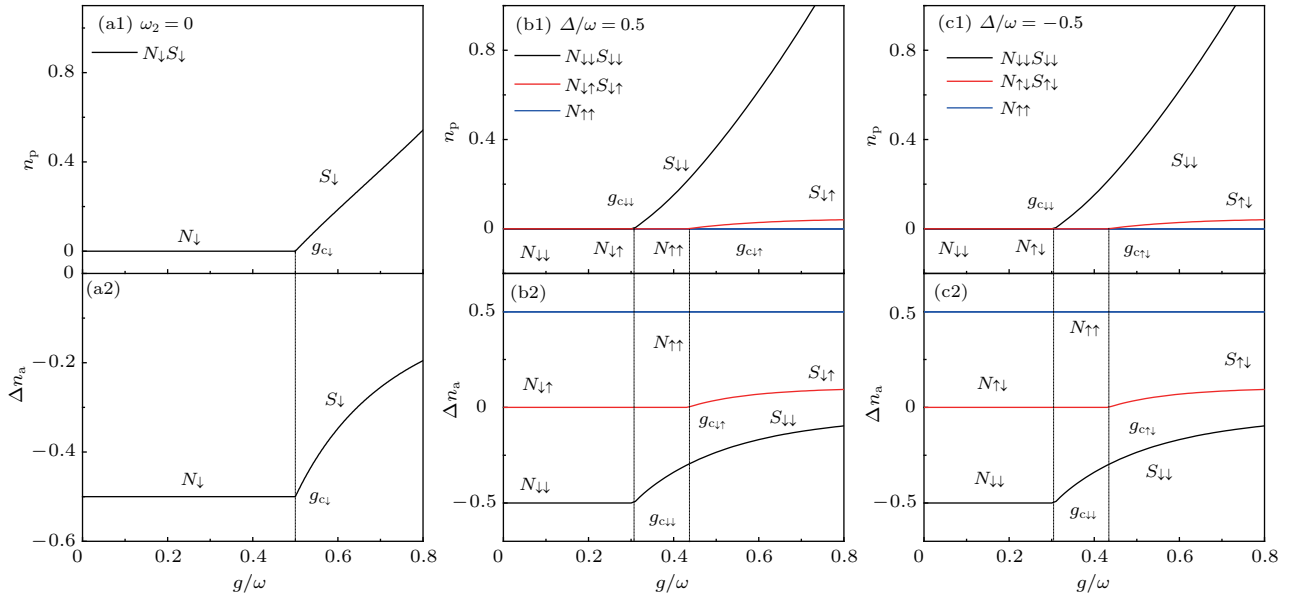


图3 平均光子数 n_p 和非平衡原子数 Δn_a 随原子-场耦合强度的变化(其中原子-场耦合强度 $g_1 = g_2 = 1$) (a) 对应第二组分原子不存在,即 $\omega_2 = 0$ 情况; (b) 和 (c) 分别对应原子与场的失谐频率 $\Delta/\omega = 0.5, -0.5$ 情况

Fig. 3. Variations of the average photon number n_p and atom population imbalance Δn_a with respect to the coupling constant $g_1 = g_2 = 1$ in the absence of the second-component atom frequency, i.e., $\omega_2 = 0$ (a), and atom-field frequency detuning $\Delta/\omega = 0.5$ (b) and $\Delta/\omega = -0.5$ (c).

且图3的不平衡参数 $\delta = 0$. 当 $\omega_2 = 0$ 时, (1) 式的哈密顿量可简化成标准的 Dicke 模型, 当耦合强度达到临界条件 $g_c = 0.5$ 会发生从正常相 N_{\downarrow} 到超辐射相 S_{\downarrow} 的量子相变, 是典型的 Dicke 量子相变. 图3(b)和图3(c)给出了在红失谐 ($\Delta = 0.5$) 和蓝失谐 ($\Delta = -0.5$) 时的平均光子数 n_p 和非平衡原子数 Δn_a . 在原子-场耦合强度 g 低于边界条件 $g_{c\downarrow}$ 时, 系统有稳定的零光子态, 能量为最小值, 即基态; 在临界条件 $g_{c\downarrow}$ 和 $g_{c\uparrow}$ 图3(b) (或 $g_{c\uparrow}$ (图3(c)) 之间时, 超辐射态 S_{\downarrow} (黑线) 和 $N_{\downarrow\uparrow}$ (或 $N_{\uparrow\downarrow}$) (红线) 以及 $N_{\uparrow\uparrow}$ (蓝线) 共存; 在原子-场耦合强度 g 高于临界条件 $g_{c\downarrow}$ (图3(b)) 或 $g_{c\uparrow}$ (图3(c)) 时, 超辐射态 S_{\downarrow} (黑线) 和 $S_{\downarrow\uparrow}$ (或 $S_{\uparrow\downarrow}$) (红线) 以及 $N_{\uparrow\uparrow}$ (蓝线) 共存. 从正常相 N_{\downarrow} 到超辐射相 S_{\downarrow} 的量子相变是典型的 Dicke 量子相变, 在临界点 $g_{c\downarrow}$ 发生相变. 从图3(b) 可以看到, 当 $\Delta/\omega = 0.5$, 出现了反转自旋极化的态 $N_{\downarrow\uparrow}$ 和 $S_{\downarrow\uparrow}$ 的情况, 这是第一激发态. 而在图3(c) 中, 对于负失谐 $\Delta/\omega = -0.5$, 两组分发生交换, 两个组分之间的自旋极化由 $N_{\downarrow\uparrow}$ 和 $S_{\downarrow\uparrow}$ 态转变为 $N_{\uparrow\downarrow}$ 和 $S_{\uparrow\downarrow}$, 仍为第一激发态. 我们观察到: 当耦合强度达到临界点 $g_{c\downarrow}$ (或 $g_{c\uparrow}$) 时, 系统发生正常态 $N_{\downarrow\uparrow}$ (或 $N_{\uparrow\downarrow}$) 到超辐射状态 $S_{\downarrow\uparrow}$ (或 $S_{\uparrow\downarrow}$) 的相变, 这是图3 呈现的一个新奇的量子相变, 这是一组分 BEC 集体反演的整体受激辐射态. 在正常态 $N_{\downarrow\uparrow}$ (或 $N_{\uparrow\downarrow}$) 和超辐射态 $S_{\downarrow\uparrow}$ (或 $S_{\uparrow\downarrow}$) 的临界点 $g_{c\downarrow}$ (或 $g_{c\uparrow}$) 并没有改变基态, 且这两个态 $N_{\downarrow\uparrow}$ (或 $N_{\uparrow\downarrow}$) 和 $S_{\downarrow\uparrow}$ (或 $S_{\uparrow\downarrow}$) 是系统的集体激发态. 对于给定的频率失谐 $\Delta/\omega = \pm 0.5$, 临界点可以根据 (20) 式精确地计算出 $g_{c\downarrow} = 0.306$, $g_{c\uparrow} = g_{c\downarrow} = 0.433$. 值得一提的是, 两组分的原子集体反演的正常态 $N_{\uparrow\uparrow}$ (蓝线) 并未参与超辐射过程.

图4为 g - δ 平面的相图. 相变边界可以根据方程(20) 准确求得. 在 NP_{ts} (由临界线 $g_{c\downarrow}$ 限定) 的区域中, 存在三重零光子态, 其中具有最低能量的 $N_{\downarrow\downarrow}$ 为基态, 该区域分为 $NP_{ts}(N_{\downarrow\downarrow}, N_{\uparrow\downarrow}, N_{\uparrow\uparrow})$ (I) 和 $NP_{ts}(N_{\downarrow\downarrow}, N_{\downarrow\uparrow}, N_{\uparrow\uparrow})$ (II) 两个区域, 由水平线 ($\delta = 0$ (a), $\delta = 0.723$ (b), $\delta = -0.423$ (c)) 分离开. I 区和 II 区只有一个状态不同, I 区域中的状态 $N_{\uparrow\downarrow}$ 在 II 区域被替换为 $N_{\downarrow\uparrow}$. 通过调整原子-场耦合强度 g 和原子-场耦合不平衡参数 δ , 可以看到从 $N_{\downarrow\uparrow}$ 到 $N_{\uparrow\downarrow}$ 同时转变 (II \rightarrow I 和 IV \rightarrow III). 区

域 III (或区域 IV) 对应的态 $SP_{co}(S_{\downarrow\downarrow}, N_{\uparrow\downarrow}, N_{\uparrow\uparrow})$ (或态 $SP_{co}(S_{\downarrow\downarrow}, N_{\downarrow\uparrow}, N_{\uparrow\uparrow})$) 是指态 $N_{\uparrow\downarrow}$ (或态 $N_{\downarrow\uparrow}$) 与超辐射态 $S_{\downarrow\downarrow}$ 共存的超辐射区域 ($N_{\uparrow\uparrow}$ 态指零光子的激发态), 其中水平线 ($\delta = 0$ (a), $\delta = 0.723$ (b), $\delta = -0.423$ (c)) 将 SP 超辐射区域分成两个区域 (区域 III 和区域 IV). 在水平线的上面, 只有第一激发态从 $N_{\downarrow\uparrow}$ 变化到 $N_{\uparrow\downarrow}$ 态, 这主要是通过耦合变化引起自旋反转. 在临界线 $g_{c\downarrow}$ 下 (区域 VI), 除了超辐射基态 $S_{\downarrow\downarrow}$, 还有一个受激辐射态 $S_{\downarrow\uparrow}$, 这是由正常态 $N_{\downarrow\uparrow}$ (区域 IV) 变为超辐射相 $S_{\downarrow\uparrow}$. 而在临界线 $g_{c\uparrow}$ 上面的区域内 (区域 V), 同样有第一激发态正常态 $N_{\uparrow\downarrow}$ (区域 III) 变为超辐射相 $S_{\uparrow\downarrow}$. 两个超辐射态 $S_{\uparrow\downarrow}$ 和 $S_{\downarrow\uparrow}$ 是双组分 BEC 中的新观测, 被认为是

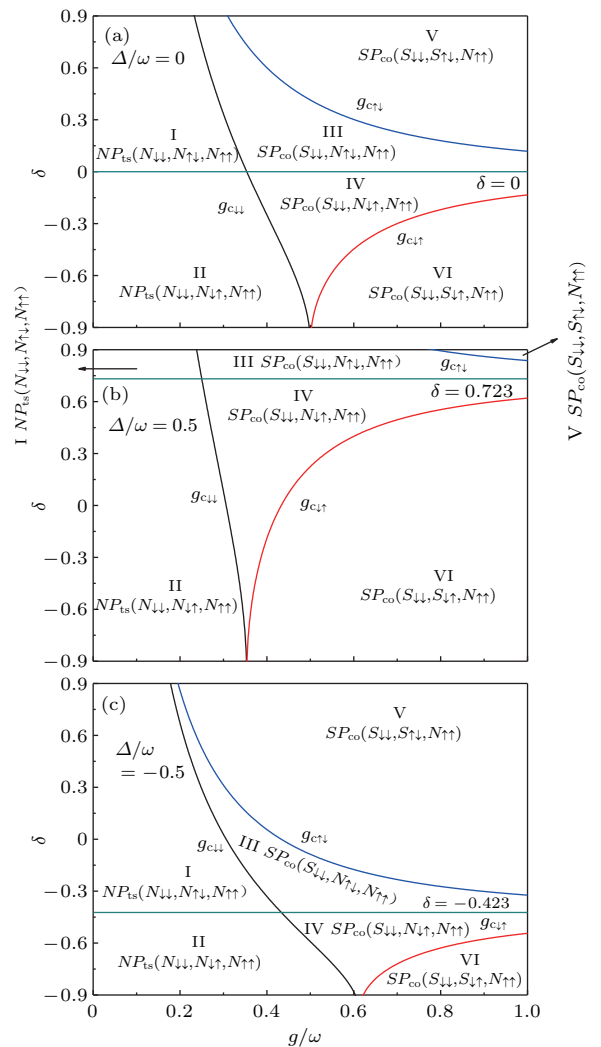


图4 g - δ 空间的相图, 其中原子与光场的频率失谐 $\Delta/\omega = 0$ (a), $\Delta/\omega = 0.5$ (b), $\Delta/\omega = -0.5$ (c)
 Fig. 4. Phase diagram in g - δ space with the atom-field frequency detuning $\Delta/\omega = 0$ (a), $\Delta/\omega = 0.5$ (b), $\Delta/\omega = -0.5$ (c).

来自较高能量原子能级的受激辐射. 两个分量的稳定布居数反演态 $N_{\uparrow\uparrow}$ 存在于整个区域. 原子与场频率的失谐仅会改变不同量子区的范围, 但原子与场频率失谐和原子与场不平衡参数共同调控新的宏观多稳态. 本文观察到的多稳的宏观量子态与非平衡量子相变的动力学研究一致 [27,28].

图 5 分别给出了平均光子数 ((a1) 和 (a2))、非平衡原子数 ((b1) 和 (b2))、平均能量 ((c1) 和 (c2)) 在共振条件 $\Delta = 0$ 下随原子-场耦合常数的变化, 其中非平衡参数为 $\delta = \pm 0.6$. 在非平衡参数 $\delta = -0.6$ 时, 且当原子-场耦合强度达到临界条件 $g_{c\downarrow\downarrow} = 0.46$, 系统发生从正常相 $N_{\downarrow\downarrow}$ 到超辐射相 $S_{\downarrow\downarrow}$ 的量子相变. 从图 5 (a1)—5 (c1) 可以看到: 相比于临界值 $g_{c\downarrow\downarrow} = 0.46$, 第二组分具有较高的耦

合值, 即在临界点 $g_{c\downarrow\uparrow} = 0.55$ 处, 此时出现新的量子相变, 即从集体激发态 $N_{\downarrow\uparrow}$ 到集体激发态 $S_{\downarrow\uparrow}$ 之间的相变. 这种从原子数反转的正常态到超辐射态相变是由于第二组分原子的存在导致的, 可通过观测非平衡原子布居数和平均能量来理解该相变. 当将不平衡参数调整为 $\delta = 0.6$ 时, 在达到临界条件 $g_{c\downarrow\downarrow} = 0.26$ 时, 系统发生从正常相 $N_{\downarrow\downarrow}$ 到超辐射相 $S_{\downarrow\downarrow}$ 的量子相变, 如图 5 (a2)—5 (c2) 所示. 新的相变是第一个分量发生改变, 在临界耦合 $g_{c\uparrow\downarrow} = 0.401$ 时发生从 $N_{\uparrow\downarrow}$ 到 $S_{\uparrow\downarrow}$ 的量子相变, 此时集体受激辐射转移到了第一组分. 负的不平衡参数 δ 使临界相变点 $g_{c\downarrow\downarrow}$ 和 $g_{c\downarrow\uparrow}$ 右移, 而正的不平衡参数 δ 使临界相变点 $g_{c\downarrow\downarrow}$ 和 $g_{c\uparrow\downarrow}$ 左移, 此结论与相图 4 中的结论是一致的.

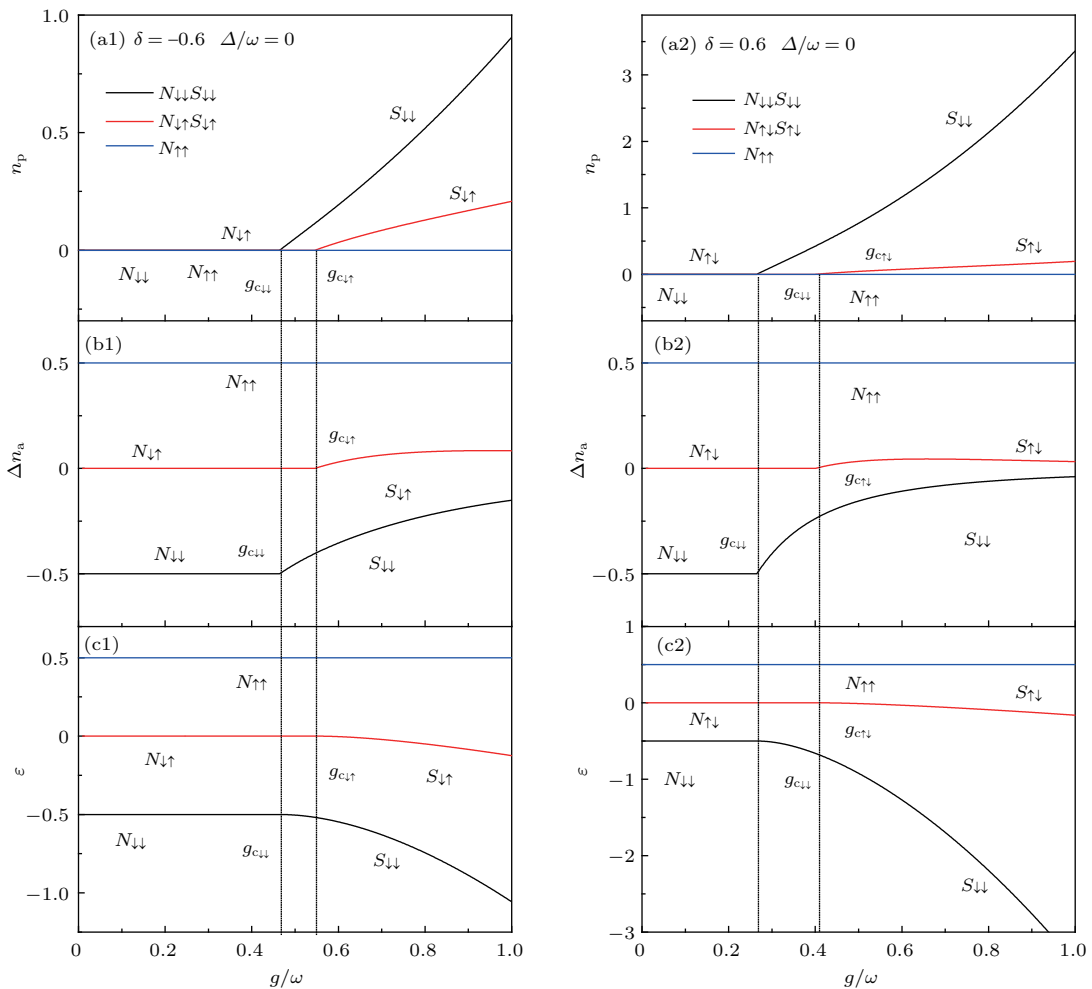


图 5 在原子与场的失谐 $\Delta = 0$, 原子-场耦合非平衡常数 $\delta = -0.6$ 和 $\delta = 0.6$ 时的平均光子数 n_p (a)、非平衡原子布居数 Δn_a (b) 和平均能量 ε (c)

Fig. 5. Variations of the average photon number n_p (a), atom population imbalance Δn_a (b), and average energy ε (c) with respect to the atom-field frequency detuning $\Delta = 0$ in the the atom-field coupling imbalance parameter $\delta = -0.6$ and $\delta = 0.6$.

4 结 论

利用自旋相干态变分方法分析了单模腔中双组分 BEC 的多稳宏观量子态. 当调控两个组分之间的原子与场耦合不平衡参数和原子与场频率失谐时, 体系出现了丰富的相图. 实际上, 当两个分量在正常自旋状态下时, 基态显示了从正常相到超辐射相的量子相变, 这是典型的 Dicke 模型的量子相变. 当两个分量之间的原子-场耦合不平衡参数增加时, 在相对较低的耦合值时, 正常的自旋状态变到反转的自旋态, 该状态的辐射是来自原子集体反演的受激辐射. 受激辐射还可以通过操纵原子与场频率失谐产生. 在特定情况下, 当两组分原子与场的耦合常数消失一个或两个耦合相等时, 基态和相关量子相变退回到标准 Dicke 模型. 自旋相干态变分方法是研究原子整体与腔场相互作用系统宏观量子特性的有力工具, 因为它考虑了正常和反转的赝自旋 (导致多个宏观量子态), 这与 Dicke 模型中非平衡量子相变的半经典动力学一致^[29].

参考文献

- [1] Dicke R H 1954 *Phys. Rev.* **93** 99
- [2] Colombe Y, Steinmetz T, Dubois G, Linke F, Hunger D, Reichel J 2007 *Nature* **450** 272
- [3] Baumann K, Mottl R, Brennecke F, Esslinger T 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 140402
- [4] Ritsch H, Domokos P, Brennecke F, Esslinger T 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 553
- [5] Liang J Q, Liu J L, Li W D, Li Z J 2009 *Phys. Rev. A* **79** 033617
- [6] Song L J, Yan D, Gai Y J, Wang Y B 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020302 (in Chinese) [宋立军, 严冬, 盖永杰, 王玉波 2011 物理学报 **60** 020302]
- [7] Song L J, Yan D, Gai Y J, Wang Y B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3695 (in Chinese) [宋立军, 严冬, 盖永杰, 王玉波 2010 物理学报 **59** 3695]
- [8] Cao H, Fu L B 2012 *Eur. Phys. J. D* **66** 97
- [9] Zhang Y C, Zhou X F, Guo G C, Zhou X, Pu H, Zhou Z W 2014 *Phys. Rev. A* **89** 053624
- [10] Zhang Y, Chen G, Zhang C 2013 *Sci. Rep.* **3** 1937
- [11] Lian J L, Yu L, Liang J Q, Chen G, Jia S T 2013 *Sci. Rep.* **3** 3166
- [12] Huang Y, Hu Z D 2015 *Sci. Rep.* **5** 8006
- [13] Hamner C, Qu C, Zhang Y, Chang J, Gong M, Zhang C 2014 *Nature Commun.* **5** 4023
- [14] Emary C, Brandes T 2003 *Phys. Rev. E* **67** 066203
- [15] Dimer F, Estienne B, Parkins A S, Carmichael H J 2007 *Phys. Rev. A* **75** 013804
- [16] Chen G, Wang X G, Liang J Q, Wang Z D 2008 *Phys. Rev. A* **78** 023634
- [17] Nagy D, Kónya G, Szirmai G, Domokos P 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 130401
- [18] Baumann K, Guerlin C, Brennecke F, Esslinger T 2010 *Nature* **464** 1301
- [19] Timmermans E 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5718
- [20] Pu H, Bigelow N P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 1130
- [21] Dong Y, Ye J W, Pu H 2011 *Phys. Rev. A* **83** 031608
- [22] Sasaki K, Suzuki N, Saito H 2011 *Phys. Rev. A* **83** 053606
- [23] Sørensen A, Duan L M, Cirac J I, Zoller P 2001 *Nature* **409** 63
- [24] Gordon D, Savage C M 1999 *Phys. Rev. A* **59** 4623
- [25] Andrews M R, Townsend C G, Miesner H J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1997 *Science* **275** 637
- [26] Bhattacharjee A B 2014 *Phys. Lett. A* **378** 3244
- [27] Liu N, Li J D, Liang J Q 2013 *Phys. Rev. A* **87** 053623
- [28] Keeling J, Bhaseen M J, Simons B D 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 043001
- [29] Bhaseen M J, Mayoh J, Simons B D 2012 *Phys. Rev. A* **85** 013817

Stimulated radiation characteristics and quantum phase transition for two-component Bose-Einstein condensate in optical cavity*

Huang Shan Liu Ni[†] Liang Jiu-Qing

(Institute of Theoretical Physics, State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

(Received 16 May 2018; revised manuscript received 7 June 2018)

Abstract

Dicke model describes a collective interaction between the two-level atoms and the light cavity and has been predicted to show a peculiar quantum phase transition, which is a second-order phase transition from a normal phase (in a weak-coupling strength) to a superradiant phase (in a strong-coupling strength). The model plays an important role in illustrating the quantum ground-state properties of many-body macroscopic quantum states. In the experiment, Dicke quantum phase transition in an open system could be formed by a Bose-Einstein condensate coupled to a high-finesse optical cavity. This experiment on the Bose-Einstein condensate trapped in the optical cavity have opened new frontiers, which could combine the cold atoms with quantum optics and makes it possible to enter into the strongly coupled regime of cavity quantum electrodynamics. In strong coupled regime, the atoms exchange the photons many times before spontaneous emission and cavity losses set in. It has become a hot research topic in recent years and plays an important role in many fields of modern physics, such as condensed matter physics, nuclear physics, etc. It can be applied to the manipulation of the geometric phase and entanglement in quantum information and computing. Quantum phase transition has been widely studied for the Dicke model as a typical example. Many different research methods about the mean-field approximation have been used to analyze the ground state properties of the Dicke model. In this paper, we study the ground state properties of two-component Bose-Einstein condensate in a single-mode cavity. Meanwhile, the associated quantum phase transition is described by the spin-coherent-state variational method, whose advantage is that the ground state energy and wave function can be obtained without the thermodynamic limit. By taking the average in the boson coherent state, we obtain an equivalent effective pseudospin Hamiltonian, which will be diagonalized by using the spin coherent state. Finally, we can obtain the energy functional, which is the basics of the variation to obtain the numerical solution of photon number and the expression of the atomic number and the ground state energy. This paper presents a rich phase diagram, which can be manipulated by changing the atom-field coupling imbalance between two components and the atom-field frequency detuning. While in the single-mode Dicke model there exist only the normal phase and the superradiation phase. When the frequency of one component atom is zero or the frequency of the two component atoms are equal in optical cavity, the system returns to the standard Dicke model, in which there occurs the second-order phase transition from the normal phase to the superradiant phase by adjusting the atom-field coupling. In conclusion, we discover that the stimulated radiation comes from the collective state of atomic population inversion, which does not exist in the single-mode Dicke model. Meanwhile, the new stimulated-radiation state $S_{\uparrow\downarrow}$ and $S_{\downarrow\uparrow}$, which can only be produced by one component of the atom, are observed in the two-component Bose-Einstein condensates in the single-mode optical cavity. By adjusting the atom-field coupling imbalance and the atom-field frequency detuning (the blue or red detuning), the order of the superradiation state and the stimulated-radiation states can be exchanged between the two components of the atom.

Keywords: quantum phase transition, spin-coherent-state transformation, energy function, stimulated radiation

PACS: 37.30.+i, 42.50.Pq

DOI: 10.7498/aps.67.20180971

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11772177, 61505100), the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 201701D221001), and the Fund for Shanxi "1331Project" Key Subjects, China.

† Corresponding author. E-mail: 317446484@qq.com