



临界中性 Gauss-Bonnet-anti-de Sitter 黑洞复杂度演化

梁华志 张靖仪

Evolution of complexity for critical neutral Gauss-Bonnet-anti-de Sitter black holes

Liang Hua-Zhi Zhang Jing-Yi

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 030401 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20201286

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201286>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

转动双星同步和轨道圆化的物理过程研究

Physical process of tidal synchronization and orbital circularization in rotating binaries

物理学报. 2018, 67(19): 199701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181056>

大质量转动沃尔夫-拉叶星的形成及内部核合成研究

Formation and internal nucleosynthesis in massive rotating Wolf-Rayet stars

物理学报. 2019, 68(21): 219701 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191040>

中间测量对受驱单量子比特统计复杂度的影响

Influence of intermediated measurements on quantum statistical complexity of single driven qubit

物理学报. 2020, 69(23): 230301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200802>

基于近似熵的斯隆数字化巡天中类星体光变复杂性分析

Analysis on complexity of optical variability based on approximate entropy in Sloan digital sky survey quasars

物理学报. 2019, 68(14): 149801 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182071>

非均匀等离子体中1/4临界密度附近受激散射的非线性演化

Nonlinear evolution of stimulated scattering near 1/4 critical density

物理学报. 2019, 68(19): 195202 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190883>

基于领域相似度的复杂网络节点重要度评估算法

Node importance measurement based on neighborhood similarity in complex network

物理学报. 2017, 66(3): 038902 <https://doi.org/10.7498/aps.66.038902>

临界中性 Gauss-Bonnet-anti-de Sitter 黑洞复杂度演化*

梁华志 张靖仪†

(广州大学物理与材料科学学院, 广州 510006)

(2020年8月7日收到; 2020年10月5日收到修改稿)

利用 Fan 和 Liang (Fan Z Y, Liang H Z 2019 *Phys. Rev. D* **100** 086016) 研究一般高阶导数引力复杂度的方法, 对临界中性 Gauss-Bonnet-anti-de Sitter (Gauss-Bonnet-anti-de Sitter, AdS) 黑洞的复杂度演化进行研究, 并且将研究结果和一般中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的结果进行了比较. 研究发现, 二者的复杂度演化的整体规律是一致的, 它们的主要区别在无量纲的临界时间上. 对于五维的临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞, 当黑洞视界为平面或者球面时, 不同大小的黑洞的无量纲的临界时间相同, 都取到了最小值. 当维度超过五维时, 不同大小的球对称临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的无量纲临界时间的差异明显要比一般的情况小. 这些差异很可能和中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的临界性有关.

关键词: 黑洞, 临界性, 复杂度, 演化**PACS:** 04.20.-q, 04.25.dg, 04.50.-h, 04.70.Dy**DOI:** 10.7498/aps.70.20201286

1 引言

复杂度是量子信息理论中的概念, 大致说来, 可以将复杂度理解为衡量从一个给定的参考状态构造出一个目标状态的难度的量. 给定参考状态 $|A\rangle$ 以及目标状态 $|B\rangle$, 可以定义一个测量这两个量子态之间的距离的特殊“度规”, 称为相对复杂度, 用 C 表示. 相对复杂度的物理含义是从一个参考状态 $|A\rangle$ 到一个目标状态 $|B\rangle$ 所需“门”的最小数目. 在量子信息理论中, “门”指的就是简单操作. 两个量子态之间通过幺正算符 U 相联系, 即: $|B\rangle = U|A\rangle$, 其中, 幺正算符 U 包含了一系列的“门”. U 有时候也被称为“电路”, 尽管它没有任何的周期性.

由于受到黑洞的贝肯斯坦-霍金熵正比于黑洞视界面积的启发, 't Hooft^[1] 在 1993 年首次提出了全息原理, 随后 Susskind^[2] 对全息原理进行了进一

步的研究和阐述. 1997 年, Maldacena^[3] 在 IIB 型超弦理论背景下, 利用 N 张重合的 D3-brane 的低能极限, 找到了全息原理的第一个, 也是极其重要的一个具体实现的例子——AdS/CFT (anti-de Sitter/conformal field theory) 对偶. AdS/CFT 对偶指出 $(d+1)$ 维的反德西特时空中的引力理论等价于 d 维边界的共形场论. 之后, Witten^[4] 和 Gubser 等^[5] 分别独立给出了一套数学上的对应关系. 一直以来, 除了几个简单的模型以外, 想要直接去计算黑洞的复杂度是十分困难的. AdS/CFT 对偶为黑洞复杂度的研究打开了一扇新的窗户. 基于 AdS/CFT 对偶, Susskind 研究组先后提出了复杂度/长度对偶^[6] 以及复杂度/体积对偶^[7,8], 经过逐步改进, 最后发展出了复杂度/作用量对偶^[9,10]. 复杂度/作用量对偶指出 d 维边界全息状态的量子计算复杂度对偶于 $(d+1)$ 维 Wheeler-Dewitt 片的经典作用量. 复杂度/作用量对偶把黑洞复杂度

* 国家自然科学基金 (批准号: 11873025) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhangjy@gzhu.edu.cn

问题归结为对引力作用量的计算. 经过几年发展, 人们已经利用复杂度/作用量对偶得到了许多黑洞复杂度演化的结果^[10–35].

给定一个宇宙学常数, 一般的 Gauss-Bonnet 引力都会存在两个 AdS 时空作为它的真空解. 研究发现, 存在一个参数空间的临界点, 两个 AdS 真空合并成一个, 这种临界的引力理论没有传播子, 因此一般的引力子模型不再适用, 这种引力理论被形象地称为没有引力子的引力^[36]. 临界中性 Gauss-Bonnet-anti-de Sitter (Gauss-Bonnet-anti-de Sitter, AdS) 黑洞性质上和一般的情况有很大不同, 进一步研究临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的复杂度演化, 不仅对黑洞复杂度研究的发展有所贡献, 同时对 Gauss-Bonnet 引力临界性的研究也有一定意义.

2019 年, Fan 和 Liang^[11] 得到了一般高阶导数引力的复杂度演化公式, 并利用数值方法对平面 ($k=0$) 的 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞以及平面 ($k=0$) 的三阶 Lovelock-AdS 黑洞的复杂度演化进行了详细的讨论. 后来, 本课题组利用 Fan 和 Liang 给出的一般高阶导数引力的复杂度演化公式, 把他们对中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞复杂度的演化推广到了一般的情况 (k 任意), 得到了一般中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的复杂度演化公式, 并利用数值方法画出了演化图和微分图, 找出了不同视界几何的中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞复杂度演化的共同点以及差异^[12]. 本文将进一步利用 Fan 和 Liang 给出的一般高阶导数引力的复杂度演化公式, 研究临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞复杂度演化, 通过和一般中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的结果作对比^[12], 找出其临界性对复杂度演化的影响.

2 临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞复杂度演化

2.1 临界点

对于含有宇宙学常数的一般的 Gauss-Bonnet 引力, 都会允许两个 AdS 时空作为它的真空解, 这种一般的 Gauss-Bonnet 引力理论可以用线性引力子模型去解释, 线性引力子在其中一个 AdS 真空中具有正的动能, 而在另一个 AdS 真空中具有负的动能. 研究发现, Gauss-Bonnet-AdS 引力理论

的参数空间存在一个的临界点, 两个 AdS 真空会合并成一个, 同时动能项的有效耦合常数消失, 这种临界点的引力理论没有传播子, 因此一般的引力子模型不再适用, 这种引力理论被形象地称为没有引力子的引力^[36]. 参数空间的临界点也可看作是一个相变点, 超过这个临界点, 引力理论不再具有最大对称性的时空解. 1983 年, Hawking 和 Page 发现 AdS 黑洞的热力学系统存在 Hawking-Page 相变^[37]. 后来研究发现, 随着黑洞温度的升高, 5 维的中性球对称 ($k=1$) 的 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞同样存在相变现象^[38], 类比于范德瓦耳斯系统, 黑洞系统在相变点的临界指数 ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) 分别为 $\alpha=0, \beta=1/2, \gamma=1, \delta=3$. 需要特别强调的是, 本文所说的 Gauss-Bonnet-AdS 引力的临界点和 Hawking-Page 相变的临界点并无关系.

下面先给出中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞参数空间临界点的临界条件. Gauss-Bonnet-AdS 引力包含两个非平凡的参数空间, 分别是裸宇宙学常数 Λ_0 以及耦合常数 λ . 首先, 可以利用裸宇宙学常数 Λ_0 去定义一个有效宇宙学常数 Λ ^[36]:

$$\frac{1}{2}(\Lambda - \Lambda_0) + \Delta_0 \Lambda^2 = 0, \quad (1)$$

其中,

$$\Delta_0 \equiv \frac{(D-3)(D-4)}{(D-1)(D-2)}\gamma, \quad (2)$$

这里的 γ 表示 Gauss-Bonnet-AdS 引力的拉格朗日密度 \mathcal{L} 中的系数, 分别有

$$\mathcal{L} = R - 2\Lambda_0 + \gamma(R^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R_{\mu\nu\lambda\rho}^2), \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{\lambda\ell^2}{(D-3)(D-4)}. \quad (4)$$

此处的 λ 为 Gauss-Bonnet 耦合常数, 它是表征 Gauss-Bonnet 引力和爱因斯坦引力差异的参数. 当 $\lambda=0$ 时, Gauss-Bonnet 引力会退回到爱因斯坦引力. Gauss-Bonnet 引力的耦合常数的取值被边界理论的微观因果关系所强烈约束. 关于 Gauss-Bonnet 耦合常数的取值, Brigante 等基于 AdS/CFT 对偶, 最先给出了 5 维 Gauss-Bonnet 黑洞耦合常数的上界为 “ $\lambda \leq 9/100$ ”^[39,40]. 而后, Buchel 和 Myers 进一步给出了 5 维 Gauss-Bonnet 黑洞耦合常数的下界为 “ $\lambda \leq -7/36$ ”^[41]. 最后, Camanho 和 Edelstein 指出, 一个 D 维 Gauss-Bonnet 引力的耦合常数的取值范围为^[42]

$$-\frac{(D-3)(3D-1)}{4(D+1)^2} \leq \lambda \leq \frac{(D-3)(D-4)(D^2-3D+8)}{4(D^2-5D+10)^2}. \quad (5)$$

由 (5) 式可以看出, 当 $D=5$ 时, (5) 式给出的 Gauss-Bonnet 耦合常数的上界以及下界跟前人得到的结果 [39–41] 完全一致. 对于一个负的 λ , 线元的解将会在视界内有限半径处存在另外一个奇点. 为了避免这种情况以及考虑到“当 $\lambda=0$ 时, Gauss-Bonnet 引力会退回到爱因斯坦引力”, 所以对 Gauss-Bonnet 耦合常数的取值作了进一步的限制, 即要求 $\lambda > 0$. 从弦论的角度看, 这也是一个物理上感兴趣的例子. 因此, 本文中的 Gauss-Bonnet 耦合常数所允许的范围为

$$0 < \lambda \leq \frac{(D-3)(D-4)(D^2-3D+8)}{4(D^2-5D+10)^2}. \quad (6)$$

通过对 (1) 式进行求解, 可以求得两个有效宇宙学常数 Λ_{\pm} 分别为

$$\Lambda_{\pm} = \frac{\pm\sqrt{1+8\Delta_0\Lambda_0}-1}{4\Delta_0}, \quad (7)$$

这里的两个有效宇宙学常数 Λ_{\pm} 分别对应着两个 AdS 时空.

对于 (7) 式, 一般中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞要求 Λ_{\pm} 是一个实数, 因此有

$$1+8\Delta_0\Lambda_0 \geq 0. \quad (8)$$

当 (8) 式取等号时, 就得到了中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的临界条件, 即

$$\Lambda_0 = -\frac{1}{8\Delta_0}, \quad (9)$$

或

$$\Delta_0 = -\frac{1}{8\Lambda_0} = \frac{\ell^2}{4(D-1)(D-2)}. \quad (10)$$

在临界条件 (9) 式或 (10) 式下, 两个有效宇宙学常数 Λ_{\pm} 相等, 即两个 AdS 时空合并成了一个, 此时有

$$\Lambda_+ = \Lambda_- = \Lambda^* \equiv 2\Lambda_0. \quad (11)$$

综合 (2) 式、(4) 式和 (10) 式, 可推导出中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞关于参数空间的临界条件为

$$\lambda = 1/4. \quad (12)$$

2.2 临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的线元表达式

对于一个时空维度为 D ($D \geq 5$) 的一般中性

Gauss-Bonnet-AdS 黑洞, 它的线元表达式为

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{D-2,k}^2, \quad (13)$$

这里度规函数 $f(r)$ 为

$$f(r) = k + \frac{r^2}{2\lambda\ell^2} \left[1 - \sqrt{1 - 4\lambda + \frac{64\pi\lambda\ell^2 GM}{(D-2)\omega_{D-2}r^{D-1}}} \right], \quad (14)$$

其中, $k = 1, 0, -1$ 分别表示视界为球面、平面以及双曲抛物面的黑洞; ℓ 为 AdS 半径; M 为黑洞质量; ω_{D-2} 是与视界几何相关的余二维的单位体积. Gauss-Bonnet 耦合常数 λ 定义如度规函数 (14) 式所示. 由 (14) 式可以看出, 对于一个负的 λ , (13) 式的解将会在视界内有限半径处存在另外一个奇点. 可以利用参数 g 把有效宇宙学常数 Λ 重新定义为

$$\Lambda = -\frac{1}{2}(D-1)(D-2)g^2. \quad (15)$$

根据前面的分析, 在临界条件下

$$\Lambda = 2\Lambda_0 = \frac{(D-1)(D-2)}{\ell^2}. \quad (16)$$

综合 (15) 式和 (16) 式, 有

$$\ell^2 = 2g^{-2}. \quad (17)$$

将临界条件 (12) 式以及 (17) 式代入 (14) 式中, 可以得到

$$f(r) = g^2 r^2 + k - \frac{\mu}{r^{\frac{D-5}{2}}}, \quad (18)$$

其中,

$$\mu = \sqrt{\frac{32\pi GMg^2}{(D-2)\omega_{D-2}}}. \quad (19)$$

(18) 式就是临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的度规函数, 进一步地, 可以利用 (19) 式, 解得黑洞质量 M 为

$$M = \frac{(D-2)\omega_{D-2}}{32\pi Gg^2} \mu^2. \quad (20)$$

不难证明, (20) 式给出的黑洞质量表达式和利用 Wald formalism 得到的结果是一致的 [43–45]. 根据 Gauss-Bonnet-AdS 引力的 Wald 公式, 有

$$\delta H = \frac{\omega_{D-2} r^{D-2}}{16\pi G} \left[-\frac{D-2}{r} + \frac{2(D-2)(D-3)(D-4)\gamma(f-k)}{r^3} \right] \delta f. \quad (21)$$

这里的 f 是度规函数 $f(r)$ 的简写. 对于临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞, 度规函数如 (18) 式所示, 故

$$\delta f = -r^{-\frac{D-5}{2}} \delta \mu. \quad (22)$$

将 (22) 式代入 (21) 式, 化简后可以得到

$$\delta H = \frac{(D-2)\omega_{D-2}}{16\pi G} \left(r^{\frac{D-1}{2}} - g^2 r^{\frac{D-1}{2}} + \frac{\mu}{g^2} \right) \delta \mu. \quad (23)$$

对于渐进无穷远, 即 $r \rightarrow \infty$, 有 $\delta H_\infty = \delta M$. 根据 (23) 式可以得到

$$\delta M = \delta H_\infty = \frac{(D-2)\omega_{D-2}}{16\pi G g^2} \mu \delta \mu. \quad (24)$$

不难看出, 由 (24) 式得到的黑洞质量表达式和 (20) 式给出的结果完全一致.

进一步, 根据 $f(r_h) = 0$, 可以得到

$$\mu = r_h^{\frac{D-5}{2}} (g^2 r_h^2 + k), \quad (25)$$

这里 r_h 为黑洞事件视界半径, 需要指出的是, (25) 式是一个重要的化简条件.

2.3 临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞热力学量

根据之前的研究 [11,12], 黑洞复杂度的演化结果依赖于黑洞的热力学量, 为了进一步研究临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的复杂度演化, 需要先计算出相关的热力学量. Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的温度函数 $\hat{T}(r)$ 以及 Wald 熵函数 $\hat{S}(r)$ 定义在任意的超曲面 $t = \text{const}$ 以及 $r = \text{const}$ 上, 定义式分别为 [11]

$$\hat{T}(r) = \frac{f'(r)}{4\pi}, \quad (26)$$

$$\hat{S}(r) = -\frac{1}{8G} \int_{\Sigma_{D-2}} d^{D-2} y \sqrt{\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}} \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\rho\sigma}, \quad (27)$$

其中 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 表示超曲面的副法矢. 将 (3) 式的拉格朗日密度以及 (18) 式的度规函数分别代入上述定义式, 不难推导出临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的温度函数 $\hat{T}(r)$ 以及 Wald 熵函数 $\hat{S}(r)$ 分别为

$$\hat{T}(r) = \frac{4g^2 r + (D-5)r^{-\frac{D-3}{2}} \mu}{8\pi}, \quad (28)$$

$$\hat{S}(r) = \frac{\omega_{D-2} r^{D-2}}{4G} \left[1 + \frac{(D-2) \left(r^{-\frac{D-5}{2}} \mu - g^2 r^2 \right)}{(D-4)g^2 r^2} \right]. \quad (29)$$

在 (28) 式和 (29) 式的化简中, 利用了 (25) 式的条件, 需要注意的是 (28) 式和 (29) 式并不是黑洞真正的温度和熵, 后者是定义在黑洞事件视界上的. 可以证明, 当超曲面在晚期接近黑洞事件视界时, 它们的确会变成黑洞真正的温度和熵. 因此临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的温度 T 以及熵 S 分别为

$$T = \hat{T}(r_h) = \frac{(D-1)g^2 r_h^2 + k(D-5)}{8\pi r_h}, \quad (30)$$

$$S = \hat{S}(r_h) = \frac{\omega_{D-2} r_h^{D-2}}{4G} \left[1 + \frac{(D-2)k}{(D-4)g^2 r_h^2} \right]. \quad (31)$$

2.4 临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞复杂度演化公式

根据复杂度/作用量对偶 (complexity/action duality, CA 对偶) [10], 有

$$\mathcal{C} = I/(\pi \hbar), \quad (32)$$

其中, \mathcal{C} 表示复杂度, I 表示作用量, π 是一个比例系数, 没有特指数学上的圆周率. \hbar 是普朗克常数, 这里使用自然单位制, $\hbar = 1$. 相比于黑洞的复杂度, 更多的时候关心的是黑洞复杂度的增长速率 $d\mathcal{C}/dt$, 把 (32) 式对时间 t 求导, 可以得到

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{dI}{dt}. \quad (33)$$

这里的 dI/dt 表示作用量增长速率. 根据 Fan 和 Liang [11] 给出的结果, 对于一个高阶导数引力理论下的中性黑洞, 它的复杂度在临界时间 t_c 以前 ($t \leq t_c$) 不演化, 即

$$t \leq t_c: \quad \frac{d\mathcal{C}}{dt} = 0. \quad (34)$$

而在临界时间 t_c 以后 ($t > t_c$), 它的复杂度增长速率为

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = \frac{\Delta}{\pi} - \frac{\hat{S}'(r_m)}{4\pi^2} |f(r_m)| \log \left(\frac{|f(r_m)|}{\alpha^2} \right), \quad (35)$$

这里的 Δ 表示总作用量增长速率的晚期极限. 图 1 给出了一般的临界中性双边 AdS 黑洞 Wheeler-Dewitt 片的示意图, r_m 为 Wheeler-Dewitt 片两条过去类光边界交界处的径向坐标. 需要特别说明的是, 上文所说的临界时间 t_c 指的是 Wheeler-Dewitt 片两条过去类光边界相交的“节点”恰好落在过去奇点上所对应的时间 t , 与前文所说的临界 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的临界点并无关系. 这里的时间 t 指

的是两侧边界时间之和, 即

$$t \equiv t_L + t_R = -2r^*(r_m), \quad (36)$$

其中乌龟坐标 $r^*(r)$ 定义为^[11]

$$r^*(r) = - \int_r^\infty \frac{1}{f(r)} dr. \quad (37)$$

所以 $r^*(\infty) = 0$.

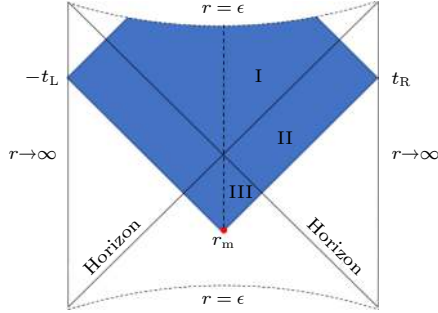


图 1 一般的中性双边 AdS 黑洞 Wheeler-DeWitt 片

Fig. 1. The Wheeler-DeWitt patch for a general neutral two-sided AdS black hole.

引力作用量的 Gibbons-Hawking-York(GHY) 表面项的定义式以及它的增长速率公式为^[11]

$$I_{\text{GHY}} = - \frac{1}{8\pi G} \int_{r=\epsilon} d^{D-1} x \sqrt{h} 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\mu\sigma\nu\rho}} n_\sigma n_\rho K_{\mu\nu}, \quad (38)$$

$$\frac{dI_{\text{GHY}}}{dt} = -\hat{T}(\epsilon) \hat{S}(\epsilon) + \Delta, \quad (39)$$

其中 $K_{\mu\nu}$ 为外曲率. 根据 (38) 式、(39) 式及 (18) 式, 可以推导出临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的总作用量增长速率晚期极限 Δ 为

$$\Delta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \frac{(D-2)\omega_{D-2}}{8(D-4)\pi G} \epsilon^{D-5} f(\epsilon) \{ (D-4)\epsilon^2 + g^{-2} [(D-4)(k - f(\epsilon)) - \epsilon f'(\epsilon)] \}. \quad (40)$$

进一步计算, 可以得到

$$D = 5: \quad \Delta = \frac{3\omega_{D-2}\mu(\mu - k)}{8\pi G g^2},$$

$$D \geq 6: \quad \Delta = \frac{(D-2)(D-3)\omega_{D-2}}{16\pi G g^2 (D-4)} \mu^2. \quad (41)$$

至此, 只要把 (18) 式的度规函数、(29) 式的 Wald 熵函数以及 (41) 式的作用量增长速率的晚期极限代入 (35) 式, 就可得到临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞复杂度演化的公式.

2.5 数值结果

为了更直观地看出临界中性 Gauss-Bonnet-

AdS 黑洞复杂度演化的情况, 需要进行数值分析, 利用数值方法画出黑洞复杂度的演化图以及微分图. 最直接了当的方法是利用数值方法去求解 (36) 式, 得到 r_m 随时间 t 的演化函数, 然后代入 (35) 式从而得到复杂度演化的函数, 从而进一步去画出复杂度演化的图像, 理论上这样求解并不困难. 但是需要注意的是, 由于乌龟坐标 $r^*(r)$ 在事件视界 r_h 处是奇异的, 使得直接求解 (36) 式难以进行. 和 Fan 和 Liang^[11] 的文章一样, 为了解决这个问题, 必须引入新的函数 $F(r)$ 以及 $H(r)$

$$f(r) \equiv F(r)(r^2 - r_h^2), \quad (42)$$

$$H(r) \equiv \frac{2r_h [F(r_h) - F(r)]}{F(r)F(r_h)(r^2 - r_h^2)}, \quad (43)$$

其中一个有用的关系式是 $F(r_h) = 2\pi T/r_h$.

此时, 乌龟坐标 $r^*(r)$ 可以重新表示为

$$r^*(r) = \frac{1}{4\pi T} \log \left| \frac{r - r_h}{r + r_h} \right| - \frac{1}{2r_h} \int_r^\infty H(\tilde{r}) d\tilde{r}. \quad (44)$$

不难看出, 乌龟坐标的奇异部分已分离到 (44) 式右边第一项, 现在可以很容易得到乌龟坐标的数值解.

同时, 时间 t 以及临界时间 t_c 也可以分别重新表示为

$$t = -2r^*(r_m) = - \frac{1}{2\pi T} \log \left| \frac{r_m - r_h}{r_m + r_h} \right| + \frac{1}{r_h} \int_{r_m}^\infty H(\tilde{r}) d\tilde{r}, \quad (45)$$

$$t_c = \frac{1}{r_h} \int_0^\infty H(\tilde{r}) d\tilde{r}. \quad (46)$$

在数值方法中, 本课题组习惯采用无量纲的量. 因此本文采用无量纲的时间 $t/\beta = Tt$, 其中 β 表示热时间 $\beta = 1/T$. 此时, 无量纲的时间 Tt 以及临界时间 Tt_c 分别表示为

$$Tt = - \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{r_m - r_h}{r_m + r_h} \right| + \frac{T}{r_h} \int_{r_m}^\infty H(\tilde{r}) d\tilde{r}, \quad Tt \geq 0, \quad (47)$$

$$Tt_c = \frac{T}{r_h} \int_0^\infty H(\tilde{r}) d\tilde{r}, \quad Tt_c \geq 0. \quad (48)$$

同样地, 复杂度增长速率也需要通过除以晚期极限来无量纲化, 即

$$\frac{dC}{dt} \bigg/ \left(\frac{\Delta}{\pi} \right) = \frac{\pi}{\Delta} \frac{dC}{dt}. \quad (49)$$

下面利用数值方法给出临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的复杂度演化的数值结果. 图 2 为用

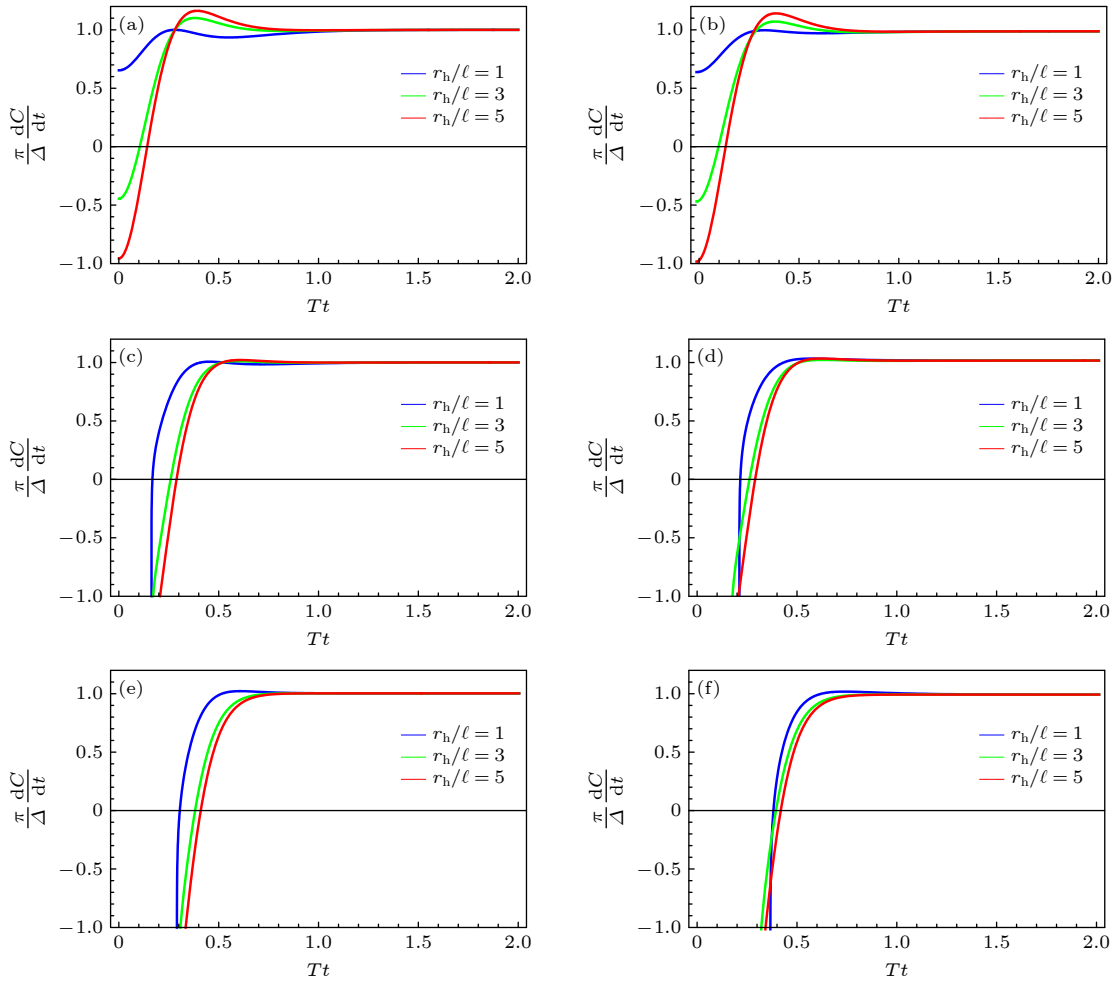


图 2 临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的复杂度演化图 (a) $D = 5, k = 0$; (b) $D = 5, k = 1$; (c) $D = 6, k = 0$; (d) $D = 6, k = 1$; (e) $D = 7, k = 0$; (f) $D = 7, k = 1$

Fig. 2. Complexity evolution diagram of the critical neutral Gauss-Bonnet-AdS black holes: (a) $D = 5, k = 0$; (b) $D = 5, k = 1$; (c) $D = 6, k = 0$; (d) $D = 6, k = 1$; (e) $D = 7, k = 0$; (f) $D = 7, k = 1$.

数值方法画出的不同大小的 $D = 5, 6, 7$ 维的临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的复杂度演化图, 横坐标表示无量纲的时间 Tt , 纵坐标表示无量纲的复杂度增长速率 $\frac{\pi}{\Delta} \frac{dC}{dt}$, 其中, $k = 0, 1, r_h/\ell = 1, 3, 5$. 图 3 为对应的复杂度微分图, 横坐标表示无量纲的时间 Tt , 纵坐标表示无量纲的复杂度微分 $\frac{\pi}{\Delta} \frac{\delta C}{\beta}$, 其中, 复杂度微分 $\delta C = C(t) - C(t_c)$ 通过对 dC/dt 积分得到. 为了方便画图, 在图 2 和图 3 中, 已经让 $G = \alpha = 1, \omega_{D-2} = 16\pi$. 表 1 和表 2 分别列出了不同大小以及不同维度的临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的无量纲的临界时间 Tt_c .

根据数值分析的结果, 可以看出临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的复杂度演化和一般中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的复杂度演化^[12] 的整体规律是一致的. 复杂度增长的整体趋势都是先增

长到一个局部的极大值, 再开始下降, 最后趋近于晚期极限. 而且随着维度 D 的增加, 相同大小的临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的复杂度演化的图像会整体往右移, 说明对于相同大小的临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞来说, 维度越高, 相应的无量纲的临界时间 Tt_c 越大. 当 $k = 0$ 时, 不同大小的临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞无量纲的临界时间 Tt_c 总是相同的. 但是当 $k = 1, D \geq 6$ 时, 不同大小的黑洞无量纲的临界时间 Tt_c 却不再相同, 在相同维度下, 黑洞越大 (r_h/ℓ 的值越大), 无量纲的临界时间 Tt_c 越小, 而且维度越高 (D 越大), 不同大小黑洞的无量纲的临界时间 Tt_c 差别越大. 同时也发现, 大黑洞 ($r_h/\ell = 3, 5$) 的复杂度演化图无论是位置还是演化的趋势整体上都非常相似, 而小黑洞 ($r_h/\ell = 1$) 的复杂度演化图和大黑洞的差别较大.

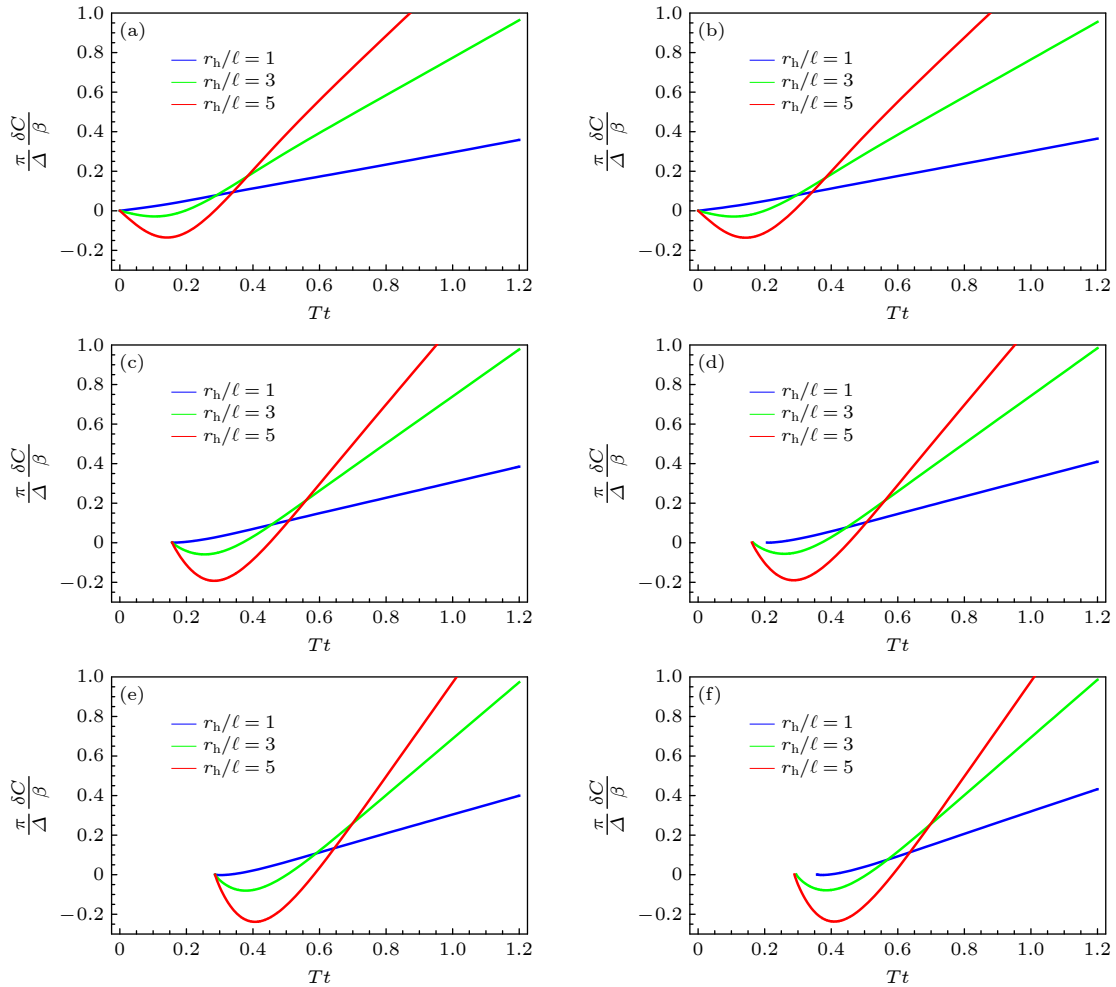


图 3 临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的复杂度微分图 (a) $D = 5, k = 0$; (b) $D = 5, k = 1$; (c) $D = 6, k = 0$; (d) $D = 6, k = 1$; (e) $D = 7, k = 0$; (f) $D = 7, k = 1$

Fig. 3. Complexity difference diagram of the critical neutral Gauss-Bonnet-AdS black holes: (a) $D = 5, k = 0$; (b) $D = 5, k = 1$; (c) $D = 6, k = 0$; (d) $D = 6, k = 1$; (e) $D = 7, k = 0$; (f) $D = 7, k = 1$.

表 1 $k = 0$ 时, 临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞无量纲的临界时间 Tt_c ($\lambda = 0.05$)

Table 1. Dimensionless critical time Tt_c of critical neutral Gauss-Bonnet-AdS black holes ($\lambda = 0.05$) for $k = 0$.

| 维度 | $Tt_c(r_h/\ell = 1)$ | $Tt_c(r_h/\ell = 3)$ | $Tt_c(r_h/\ell = 5)$ |
|---------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $D = 5$ | 0 | 0 | 0 |
| $D = 6$ | 0.162460 | 0.162460 | 0.162460 |
| $D = 7$ | 0.288675 | 0.288675 | 0.288675 |
| $D = 8$ | 0.398736 | 0.398736 | 0.398736 |

表 2 $k = 1$ 时, 临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞无量纲的临界时间 Tt_c ($\lambda = 0.05$)

Table 2. Dimensionless critical time Tt_c of critical neutral Gauss-Bonnet-AdS black holes ($\lambda = 0.05$) for $k = 1$.

| 维度 | $Tt_c(r_h/\ell = 1)$ | $Tt_c(r_h/\ell = 3)$ | $Tt_c(r_h/\ell = 5)$ |
|---------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $D = 5$ | 0 | 0 | 0 |
| $D = 6$ | 0.209745 | 0.168224 | 0.164552 |
| $D = 7$ | 0.359752 | 0.297391 | 0.291841 |
| $D = 8$ | 0.490653 | 0.409981 | 0.402820 |

但是临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞复杂度演化也有和一般中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞复杂度演化不同的地方, 二者的差别主要体现在无量纲的临界时间 Tt_c 上. 对于临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞, 当 $D = 5$ 时, 不仅是 $k = 0$ 的不同大小黑洞的无量纲的临界时间 Tt_c 相同, 而且

$k = 1$ 的不同大小黑洞的无量纲的临界时间 Tt_c 也都相同, 同时 $k = 0$ 和 $k = 1$ 的不同大小黑洞的无量纲的临界时间 Tt_c 都趋近于 0, 由于要求 $Tt_c \geq 0$, 所以 $k = 0, 1, D = 5$ 的临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的无量纲临界时间 Tt_c 都取到了最小值. 同时也发现, 随着维度 D 的增加, $k = 1, D \geq 6$ 的

不同大小临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞之间的无量纲临界时间 Tt_c 的差别明显要小于一般中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的情况.

3 结论与展望

通过计算, 得到了临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的复杂度演化公式, 并用数值方法画出了它的复杂度演化图以及微分图, 最后和一般中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的复杂度演化结果作对比. 由于临界 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞本质上还是属于 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞, 所以发现二者的复杂度演化的整体规律是一致的. 但又由于 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞临界性的影响, 二者的复杂度演化又有一些明显的不同. 这些不同主要体现在无量纲的临界时间 Tt_c 上.

相同点 1) 复杂度增长的整体趋势都是先增长到一个局部的极大值, 再开始下降, 最后趋近于晚期极限; 2) 随着维度 D 的增加, 复杂度演化的图像会整体往右移, 即无量纲临界时间 Tt_c 增大; 3) 当 $k = 0$ 时, 不同大小的黑洞无量纲的临界时间 Tt_c 总是相同的; 4) 当 $k = 1$, $D \geq 6$ 时, 不同大小的黑洞无量纲的临界时间 Tt_c 不相同, 黑洞越大 (r_h/ℓ 的值越大), 无量纲的临界时间 Tt_c 越小, 而且维度越高 (D 越大), 无量纲的临界时间 Tt_c 差别越大; 5) 大黑洞 ($r_h/\ell = 3, 5$) 的复杂度演化图, 无论是位置还是演化的趋势整体上都非常相似, 而小黑洞 ($r_h/\ell = 1$) 的复杂度演化图和大黑洞的差别较大.

不同点 1) 当 $k = 1$, $D = 5$ 时, 不同大小的一般中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的无量纲的临界时间 Tt_c 不相同, 但是不同大小的临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的无量纲的临界时间 Tt_c 都相同, 而且和 $k = 0$, $D = 5$ 的无量纲的临界时间 Tt_c 一样, 都取到了最小值; 2) $k = 1$, $D \geq 6$ 的不同大小的临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞之间的无量纲临界时间 Tt_c 的差别明显要小于一般中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的情况.

分析后知道, 当 $k = 0, 1$, $D = 5$ 时, 不同大小的临界的中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的无量纲临界时间 Tt_c 的积分函数 $H(r)$ 会趋近于 0, 所以无量纲的临界时间 Tt_c 都为 0, 均取到了最小值, 这是数学上的必然结果. 猜测这种无量纲的临界时间 Tt_c 的差异现象可能和 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞的

临界性有关.

研究发现, 临界中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞复杂度演化和一般的情况确实有一些明显的差别, 这对中性 Gauss-Bonnet-AdS 黑洞临界性的研究是有指导性意义的. 但是现阶段对于这种临界的高阶导数引力黑洞的复杂度演化的研究还远远不够, 期待后续可以对更多临界的高阶导数引力黑洞的复杂度演化进行研究, 特别是三阶的临界 Lovelock-AdS 黑洞, 这样会知道更多高阶导数引力黑洞的临界性的细节.

感谢广州大学天体物理中心范仲英老师的讨论.

参考文献

- [1] 't Hooft G 1993 arXiv: gr-qc/9310026
- [2] Susskind L 1995 *J. Math. Phys.* **36** 6377
- [3] Maldacena J M 1998 *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 231
- [4] Witten E 1998 *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 253
- [5] Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M 1998 *Phys. Lett. B* **428** 105
- [6] Susskind L 2016 *Fortsch. Phys.* **64** 24
- [7] Susskind L 2016 *Fortsch. Phys.* **64** 44
- [8] Stanford D, Susskind L 2014 *Phys. Rev. D* **90** 126007
- [9] Brown A R, Roberts D A, Susskind L, Swingle B, Zhao Y 2016 *Phys. Rev. Lett* **116** 191301
- [10] Brown A R, Roberts D A, Susskind L, Swingle B, Zhao Y 2016 *Phys. Rev. D* **93** 086006
- [11] Fan Z Y, Liang H Z 2019 *Phys. Rev. D* **100** 086016
- [12] Liang H Z, Zhang J Y 2020 *J. Hunan Univ. Arts Sci. (Science and Technology)* **32** 26 (in Chinese) [梁华志, 张靖仪 2020 湖南文理学院学报 (自然科学版) **32** 26]
- [13] Mahapatra S, Roy P 2018 *J. High Energy Phys.* **2018** 138
- [14] Chapman S, Marrochio H, Myers R C 2017 *J. High Energy Phys.* **2017** 62
- [15] Carmi D, Myers R C, Rath P 2017 *J. High Energy Phys.* **2017** 118
- [16] Yang R Q, Niu C, Kim K Y 2017 *J. High Energy Phys.* **2017** 42
- [17] Yang R Q 2017 *Phys. Rev. D* **95** 086017
- [18] Chapman S, Marrochio H, Myers R C 2018 *J. High Energy Phys.* **2018** 46
- [19] Chapman S, Marrochio H, Myers R C 2018 *J. High Energy Phys.* **2018** 114
- [20] Moosa M 2018 *J. High Energy Phys.* **2018** 31
- [21] Alishahiha M, Astanceh A F, Mozaffar M R M, Mollabashi A 2018 *J. High Energy Phys.* **2018** 42
- [22] An Y S, Peng R H 2018 *Phys. Rev. D* **97** 066022
- [23] Jiang J 2018 *Phys. Rev. D* **98** 086018
- [24] Yang R Q, Niu C, Zhang C Y, Kim K Y 2018 *J. High Energy Phys.* **2018** 82
- [25] Yang R, Jeong H S, Niu C, Kim K Y 2019 *J. High Energy Phys.* **2019** 146
- [26] Cai R G, Ruan S M, Wang S J, Yang R Q, Peng R H 2016 *J. High Energy Phys.* **2016** 161
- [27] Lehner L, Myers R C, Poisson E, Sorkin R D 2016 *Phys. Rev.*

- D* **94** 084046
- [28] Huang H, Feng X H, Lu H 2017 *Phys. Lett. B* **769** 357
- [29] Cano P A, Hennigar R A, Marrochio H 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 121602
- [30] Jiang J, Zhang H 2019 *Phys. Rev. D* **99** 086005
- [31] Feng X H, Liu H S 2019 *Eur. Phys. J. C* **79** 40
- [32] Alishahiha M, Astaneh A F, Naseh A, Vahidinia M H 2017 *J. High Energy Phys.* **2017** 9
- [33] Carmi D, Chapman S, Marrochio H, Myers R C, Sugishita S 2017 *J. High Energy Phys.* **2017** 188
- [34] Jiang J, Ge B X 2019 *Phys. Rev. D* **99** 126006
- [35] Moosa M 2018 *Phys. Rev. D* **97** 106016
- [36] Fan Z Y, Chen B, Lü H 2016 *Eur. Phys. J. C* **76** 542
- [37] Haking S W, Page D N 1983 *Commun. Math. Phys.* **87** 577
- [38] Liu X M, Lei Y L, Chen L, Han C 2015 *J. Hubei Univ. Nationalities (Nat. Sci. Ed.)* **33** 1 (in Chinese) [刘显明, 雷焱林, 陈丽, 韩成 2015 湖北民族学院学报 (自然科学版) **33** 1]
- [39] Brigante M, Liu H, Myers R C, Shenker S, Yaida S 2008 *Phys. Rev. D* **77** 126006
- [40] Brigante M, Liu H, Myers R C, Shenker S, Yaida S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 191601
- [41] Buchel A, Myers R C 2009 *J. High Energy Phys.* **2009** 8
- [42] Camanho X O, Edelstein J D 2010 *J. High Energy Phys.* **2010** 7
- [43] Wald R M 1993 *Phys. Rev. D* **48** 3427
- [44] Iyer V, Wald R M 1994 *Phys. Rev. D* **50** 846
- [45] Fan Z Y, Lü H 2015 *Phys. Rev. D* **91** 064009

Evolution of complexity for critical neutral Gauss-Bonnet-anti-de Sitter black holes*

Liang Hua-Zhi Zhang Jing-Yi †

(School of Physics and Materials Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

(Received 7 August 2020; revised manuscript received 5 October 2020)

Abstract

General Gauss-Bonnet gravity with a cosmological constant allows two anti-de Sitter (AdS) spacetimes to be taken as its vacuum solutions. It is found that there is a critical point in the parameter space where the two AdS vacuums coalesce into one, which is very different from the general Gauss-Bonnet gravity. Susskind's team proposed a Complexity/Action duality based on AdS/CFT duality, which provides a new method of studying the complexity of black holes. Fan and Liang (Fan Z Y, Liang H Z 2019 *Phys. Rev. D* **100** 086016) gave the formula of the evolution of complexity for general higher derivative gravity, and discussed the complexity evolution of the neutral planar Gauss-Bonnet-AdS black holes in detail by the numerical method. With the method of studying the complexity of general higher derivative gravity proposed by Fan and Liang (2019), we investigate the complexity evolution of critical neutral Gauss-Bonnet-AdS black holes, and compare these results with the results of the general neutral Gauss-Bonnet-AdS black holes, showing that the overall regularities of the evolution of the complexity of these two objects are consistent, and their main difference lies in the dimensionless critical time. As for the five-dimensional critical neutral Gauss-Bonnet-AdS black holes, when the event horizon of the black holes is flat or spherical, the dimensionless critical times of black holes with different sizes are identical, all reaching their minimum values. While in the higher dimensional cases, the differences in dimensionless critical time among spherically symmetric critical neutral Gauss-Bonnet-AdS black holes with different sizes are obviously less than those of general ones. These differences are probably related to the criticality of the neutral Gauss-Bonnet-AdS black holes.

Keywords: black holes, criticality, complexity, evolution

PACS: 04.20.-q, 04.25.dg, 04.50.-h, 04.70.Dy

DOI: 10.7498/aps.70.20201286

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11873025).

† Corresponding author. E-mail: zhangjy@gzhu.edu.cn