

双层耦合非对称反应扩散系统中的振荡图灵斑图

刘雅慧 董梦菲 刘富成 田淼 王硕 范伟丽

Oscillatory Turing patterns in two-layered coupled non-symmetric reaction diffusion systems

Liu Ya-Hui Dong Meng-Fei Liu Fu-Cheng Tian Miao Wang Shuo Fan Wei-Li

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 158201 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20201710

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201710>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

双层耦合非对称反应扩散系统中的超点阵斑图

Super-lattice patterns in two-layered coupled non-symmetric reaction diffusion systems

物理学报. 2020, 69(2): 028201 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191353>

双层耦合介质中四边形图灵斑图的数值研究

Numerical investigation on square Turing patterns in medium with two coupled layers

物理学报. 2019, 68(6): 068201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182167>

反应扩散模型在图灵斑图中的应用及数值模拟

Application of reaction diffusion model in Turing pattern and numerical simulation

物理学报. 2018, 67(5): 050503 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171791>

反应扩散系统中反螺旋波与反靶波的数值研究

Numerical investigation on antispiral and antitarget wave in reaction diffusion system

物理学报. 2018, 67(18): 188201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180864>

非对称双原子分子在输运扩散中的取向效应

Orientation effect of asymmetric diatomic molecules in transport diffusion

物理学报. 2018, 67(22): 226601 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181376>

用久期微扰理论将弹簧振子模型退化为耦合模理论

The spring oscillator model degenerated into the coupled-mode theory by using secular perturbation theory

物理学报. 2020, 69(7): 074501 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191505>

双层耦合非对称反应扩散系统中的振荡图灵斑图*

刘雅慧¹⁾ 董梦菲¹⁾ 刘富成^{1)2)†} 田淼¹⁾ 王硕¹⁾ 范伟丽¹⁾

1) (河北大学物理科学与技术学院, 保定 071002)

2) (河北大学生命科学与绿色发展研究院, 保定 071002)

(2020 年 10 月 15 日收到; 2021 年 2 月 22 日收到修改稿)

采用线性耦合 Brusselator 模型和 Lengyel-Epstein 模型, 数值研究了双层耦合非对称反应扩散系统中振荡图灵斑图的动力学, 并分析了图灵模、高阶模以及霍普夫模之间的相互作用及其对振荡图灵斑图的影响. 模拟结果表明, 在 Lengyel-Epstein 模型激发的超临界图灵模 k_1 的激励下, Brusselator 模型中处于霍普夫区域的高阶模 $\sqrt{3}k_1$ 被激发, 这两个模式相互作用从而产生了同步振荡六边形斑图. 随着控制参数 b 的增加, 该振荡六边形斑图首先经历倍周期分岔进入双倍振荡周期, 经历多倍振荡周期后, 在霍普夫模式的参与下, 最终进入时空混沌态. 同步振荡六边形斑图形成的条件是 Brusselator 模型中的次临界图灵模 k_2 的本征值高度低于处于霍普夫区域的高阶图灵模 $\sqrt{3}k_1$ 的本征值高度, 且两个图灵模之间不存在空间共振关系. 当两个图灵模满足空间共振时, 系统优先选择空间共振模式, 从而产生超点阵斑图. 霍普夫模和图灵模共同作用下只能产生非同步振荡图灵斑图. 此外, 耦合强度对振荡图灵斑图也有重要的影响.

关键词: 非对称耦合反应扩散系统, 振荡图灵斑图, 图灵模, 高阶模, 霍普夫模

PACS: 82.40.Ck, 05.45.-a, 05.65.+b, 45.70.Qj

DOI: 10.7498/aps.70.20201710

1 引言

自组织斑图是非线性动力学系统的一个典型特征, 普遍存在于自然界以及众多非线性系统中, 例如物理、化学以及生物系统等^[1-7]. 在过去的大半个世纪内, 人们对斑图形成机理的认识有了突飞猛进的发展. 众所周知, 非线性系统中时空斑图的形成源于系统的失稳, 且总是伴随着相应的对称性破缺现象, 不同的对称性破缺 (或者说分岔类型) 对应着不同的时空斑图类型. 其中最为常见的分岔类型有三种: 霍普夫分岔、图灵分岔以及短波分岔, 产生的斑图分别为时序振荡态、静态图灵斑图以及时空振荡斑图^[1,4].

近年来, 时空振荡斑图由于其丰富的动力学行为而越来越受到人们的关注^[2,8,9]. 产生时空振荡斑

图的方式有很多, 除了上面提到的短波分岔外, 不同分岔引发的模式之间的相互作用也可以形成时间上和空间上均具有周期性的斑图结构. 例如当系统处于图灵和霍普夫切空间点时, 就可以形成行波^[10]、驻波^[11]、振荡四边形^[12]、振荡六边形、螺旋波等^[13].

耦合反应扩散系统是目前研究不同模式之间相互作用的一种最为常用的方法^[14-16]. 例如, 2002 年 Yang 等^[17] 在研究两个图灵模相互作用时发现, 当一个图灵长波模的次谐波处于霍普夫区域时, 通过次谐波图灵模与霍普夫模相互作用, 可以形成一种由三套子六边形相互嵌套的弛豫型振荡的振荡六边形斑图, 其中三个子六边形之间的相位相差 $2\pi/3$. 2003 年, 该小组还详细研究了图灵和短波模之间的相互作用, 获得了一种眨眼六边形斑图, 同样, 该斑图由三套相位相差 $2\pi/3$ 的六边形相

* 国家自然科学基金 (批准号: 11975089, 11875014) 和河北省优秀青年基金 (批准号: A2017201099) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hdlfc@hbu.cn

互嵌套而成, 但是其振荡属于正弦振荡. 除了眨眼六边形斑图外, 还获得了各种相互嵌套的其他类型的时空振荡斑图, 例如螺旋波和同心圆波混合但是呈现六边形分布的时空斑图^[18]. Anguelov 和 Stoltz^[19] 对比了单层和双层耦合反应扩散系统中图灵-霍普夫相互作用的区别, 得到了反六边形振荡以及反条纹振荡斑图, 并给出了各种时空斑图的空间相图. 最近, Li 等^[20] 通过非线性耦合双层反应扩散模型, 获得了振荡四边形斑图. Pal 等^[21] 研究发现在两个耦合反应系统中也存在着时空反共振现象.

然而, 这些研究大多集中于相同反应扩散模型之间的耦合, 对于不同模型之间耦合的研究还比较少. 在实际的非线性系统中, 不同系统的局部动力学行为是不同的^[22–24]. 例如, 在生物系统中, 热带鲶鱼的皮肤结构主要由表层表皮和底层真皮组成. 由于不同皮肤层是由不同类型的细胞构成的, 即不同皮肤层的局部动力学行为是不同的^[22]. 在复杂网络系统中, 系统是由具有不同功能的动态单元 (例如大脑中的神经元或社会中的个体) 间的耦合相互作用而成^[23]. 介质阻挡放电系统也是一种典型的多层耦合斑图形成系统^[24–26]. 它由放电层和电介质层组成, 放电产生的体电荷部分积累到介质表面形成表面电荷, 反过来表面电荷也会直接影响体放电, 两者相互耦合, 从而可以产生丰富多彩的时空斑图, 例如, 四边形斑图、六边形斑图、超点阵斑图、螺旋波斑图等^[27–29]. 研究表明, 气体放电系统一种特殊的反应扩散系统, 可以唯象地用反应扩散模型来描述^[25,26,30]. 为了进一步弄清介质阻挡放电系统中各类时空斑图形成的机理, 尤其是体电荷和表面电荷之间的耦合, 最近本小组线性耦合了两种不同的反应扩散模型, 获得了许多与实验相符合的模拟结果^[31]. 除此以外, 还发现了一种新型的振荡六边形结构, 与以前发现的振荡六边形不同, 该振荡六边形是由图灵模与处于霍普夫区域的高阶模相互作用而成的, 但耦合机制还不甚清楚^[31]. 为了进一步研究其动力学行为以及产生条件, 本文通过线性耦合两个不同的反应扩散模型, 系统研究了超临界图灵模、次临界图灵模、高阶图灵模以及霍普夫模之间的相互作用, 并分析了它们对振荡图灵斑图形成机理和时空动力学行为的影响.

2 物理模型

线性耦合两个不同的反应扩散模型, 构建一个非对称的双层耦合反应扩散系统模型. 在无量纲的情况下, 该模型具有以下形式^[17]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = f_1(u_1, v_1) + \alpha(u_2 - u_1) + D_{u_1} \nabla^2 u_1, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} = g_1(u_1, v_1) + D_{v_1} \nabla^2 v_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = f_2(u_2, v_2) + \alpha(u_1 - u_2) + D_{u_2} \nabla^2 u_2, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} = g_2(u_2, v_2) + D_{v_2} \nabla^2 v_2, \end{cases} \quad (1)$$

其中, (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2) 分别表示第一层和第二层的子反应扩散系统, 这里 u 和 v 分别为反应扩散系统中的活化子浓度和阻塞子浓度, D_u 和 D_v 分别为它们的扩散系数, ∇^2 为拉普拉斯算符. α 为两个子系统活化子之间的耦合强度, 方程 $f(u, v)$ 和 $g(u, v)$ 为每层的子反应扩散系统的局部动力学方程, 不同的反应系统有着不同的具体表达式. 本文选取 Brusselator 模型和 Lengyel-Epstein 模型来分别充当两个子系统. 在无量纲的情况下, Brusselator 模型的局部动力学方程具有下列形式^[32]:

$$\begin{cases} f_1(u_1, v_1) = a - (b+1)u_1 + u_1^2 v_1, \\ g_1(u_1, v_1) = bu_1 - u_1^2 v_1, \end{cases} \quad (2)$$

其中, 系数 a 和 b 是系统的控制参数.

Lengyel-Epstein 模型在无量纲情况下形式如下^[33]:

$$\begin{cases} f_2(u_2, v_2) = c - u_2 - 4 \frac{u_2 v_2}{1 + u_2^2}, \\ g_2(u_2, v_2) = d \left(u_2 - \frac{u_2 v_2}{1 + u_2^2} \right), \end{cases} \quad (3)$$

式中, 系数 c 和 d 是系统的控制参数. 对于子系统 1 和子系统 2, 其均匀定态解分别为 $(u_{10}, v_{10}) = (a, b/a)$ 和 $(u_{20}, v_{20}) = \left(\frac{c}{5}, 1 + \frac{c^2}{25} \right)$. 通过系统的色散关系可以分析失稳模的性质以及系统的分岔类型. 对于模型以及数值算法的详细描述可参见文献^[31].

图 1(a) 为双层线性耦合反应扩散系统的色散关系曲线图, 而图 1(b) 和图 1(c) 分别给出了单层 Brusselator 模型和单层 Lengyel-Epstein 模型的色

散关系图. 可以看出, 双层耦合系统中存在着两个图灵模式: 一个为超临界图灵模, 其波数较小 (长波模), 我们称其为 k_1 , 相应的本征值大小为 h_1 , 此模式是由第二层子系统 Lengyel-Epstein 模型所激发的失稳模; 另一个为次临界图灵模, 其波数较大 (短波模), 我们称其为 k_2 , 相应的本征值大小为 h_2 ,

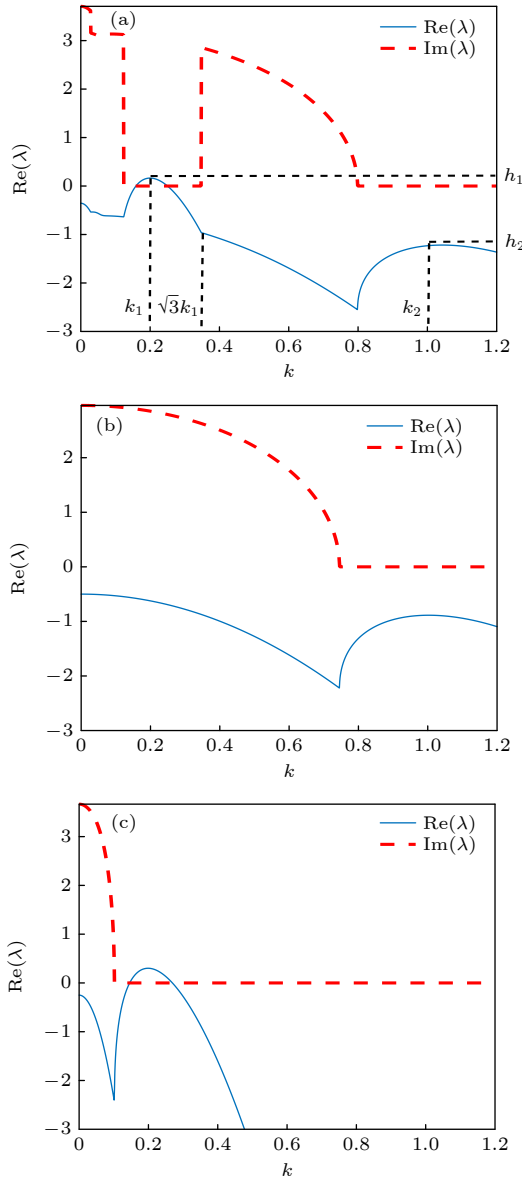


图1 双层线性耦合系统以及单层系统的色散关系 (a) 双层线性耦合系统; (b) 单层 Brusselator 模型; (c) 单层 Lengyel-Epstein 模型. 参数取值为: $(a, b) = (3, 9)$, $(c, d) = (15, 9)$, $D_{u_1} = 2.2$, $D_{v_1} = 4.0$, $D_{u_2} = 21.9$, $D_{v_2} = 400$, $\alpha = 0.15$

Fig. 1. Dispersion relationship of two-layered linear coupling system and single layer system: (a) Two-layered linear coupling system; (b) single layer Brusselator model; (c) single layer Lengyel-Epstein model. Parameter: $(a, b) = (3, 9)$, $(c, d) = (15, 9)$, $D_{u_1} = 2.2$, $D_{v_1} = 4.0$, $D_{u_2} = 21.9$, $D_{v_2} = 400$, $\alpha = 0.15$.

此模式是由第一层子系统 Brusselator 模型所激发的稳定模. 对于图灵模, 其波数大小与系统变量的扩散系数成反比, 而本征值高度则与系统内阻塞子和活化子的扩散系数之比正相关, 所以通过调节模型中各变量的扩散系数, 可以改变两个图灵模的大小和本征值高度.

3 模拟结果与讨论

采用欧拉向前差分的方法进行积分, 数值模拟在一个含有 128×128 个空间格点的二维平面上进行, 取时间积分步长 $\Delta t = 0.01$ 个时间单位, 取空间积分步长 $\Delta x = \Delta y = 1.0$ 个空间单位, 扩散项在数值计算中选择五点差分格式. 边界条件选用周期性边界条件, 初始条件为均匀定态加上一个很小的随机扰动. 扩散参数 D_u 和 D_v 的乘积决定图灵模波数 k 的大小, 而 D_u 和 D_v 的相对大小决定图灵模的本征值高度. 本文先确定波数 k 的大小, 再通过改变 D_u 和 D_v 的相对大小来调节相应的本征值高度.

3.1 同步振荡六边形斑图的基本性质

图2给出了双层非对称耦合反应扩散系统在图1(a)色散关系下的同步振荡六边形斑图. 图2(a)为该同步振荡六边形斑图的振幅分布图, 显然, 振幅呈现六边形阵列排布, 并且幅值大小跟第二层活化子浓度 u_2 成反比, 也就是说图灵模 u_2 的静态效应会抑制 u_1 的振幅. 该振幅六边形阵列的空间波数为 $k_1 = 0.2$, 由于六边形阵列中的每一个斑点的振荡都是同相位的, 所以图2(b)给出了六边形阵列中任意一个斑点处 (图2(a)中A点) 活化子 u_1 随时间 t 的变化图, 可以看出该同步振荡六边形斑图呈现正弦式的振荡, 振荡周期 $T = 2.37$, 相应的圆频率 $\omega = 2.66$. 从单层 Brusselator 模型的色散关系图 (图1(b)) 可知, 圆频率 $\omega = 2.66$ 对应的波数为 0.33 , 此波数约为 $\sqrt{3}k_1$, 因此我们判断时间振荡来源于 $\sqrt{3}k_1$ 模式. 在单层 Brusselator 模型中, 此模式是次临界模, 原本是稳定的, 但是由于受到另一层 Lengyel-Epstein 系统中 k_1 模式的驱动, 而被激发出来了. 也就是说, 受到 Lengyel-Epstein 系统中的超临界图灵模 k_1 的激励, Brusselator 系统中同时激发了图灵模 k_1 和处于霍普夫区域的高阶超临界图灵模 $\sqrt{3}k_1$, 这两种模式相互作用形成了同步振荡六边形斑图.

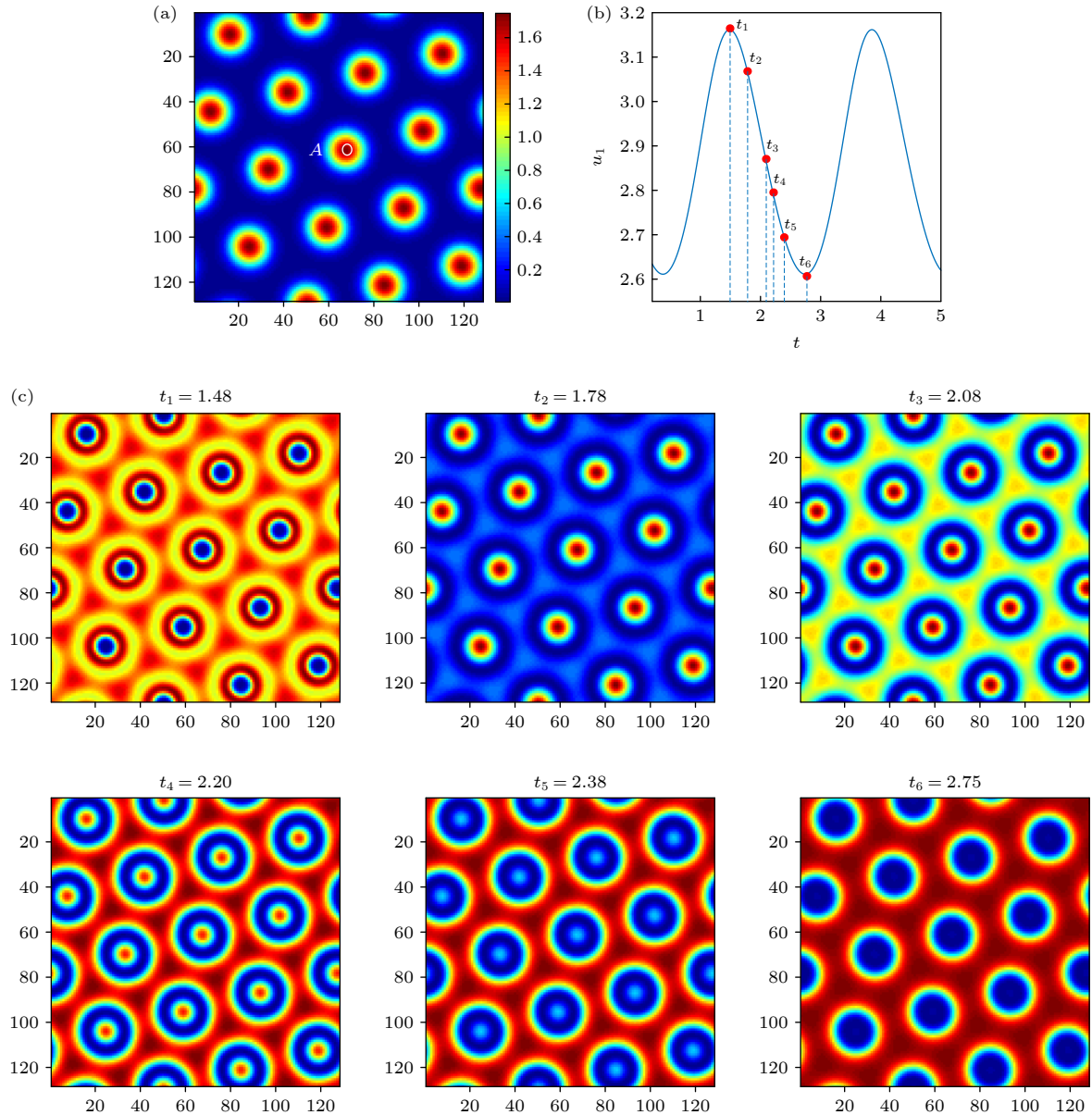


图 2 同步振荡六边形斑图 (参数与图 1 相同) (a) 振幅分布; (b) A 点 u_1 的时间变化关系图; (c) 半个振荡周期内的斑图演化过程
 Fig. 2. Synchronous oscillatory hexagon pattern: (a) Amplitude distribution; (b) time variation of u_1 at position A ; (c) evolution of pattern in half an oscillating period. Parameters are the same as those in Fig. 1.

图 2(c) 给出了该同步振荡六边形斑图在半个振荡周期内的时空演化过程. 在 $t_1 = 1.48$ 时刻, 六边形亮斑结构中心处浓度最低, 外围浓度最高, 再向外浓度降低, 从而形成了一种具有圆环结构的超六边形斑图. 在 $t_2 = 1.78$ 时刻, 中心斑点处浓度最高, 从中心向外浓度逐渐降低, 形成了一种超点阵六边形斑图. 随着时间演化, 中心斑点处浓度开始降低, 在 $t_5 = 2.38$ 时刻, 从中心斑点向外, 浓度先降低再升高, 呈现白眼六边形斑图. 在 $t_6 = 2.75$ 时刻, 中心斑点处浓度降至最低, 远远低于最外环浓度, 此时形成了简单的蜂窝状六边形斑图.

3.2 霍普夫模式对振荡六边形斑图的影响

为了研究霍普夫模式在同步振荡六边形斑图形成过程中所起的作用, 固定其他参数不变, 通过改变控制参数 b 来调节霍普夫模本征值的大小. 图 3(a) 为不同参数 b 下的色散关系曲线图及其局部放大图. 控制参数 b 的改变, 除了可以调节霍普夫模本征值的大小, 还对图灵模 k_2 和 h_2 有影响, 对 k_1 和 h_1 影响很小. 但由于 h_2 的值非常小, 也就是说图灵模 k_2 的作用很微弱, 因此这里主要考虑图灵模 k_1 与霍普夫之间的相互作用, 后面将详细讨论图灵模 k_2 和 h_2 对斑图的影响. 在 $8.5 < b < 9.33$ 范围内,

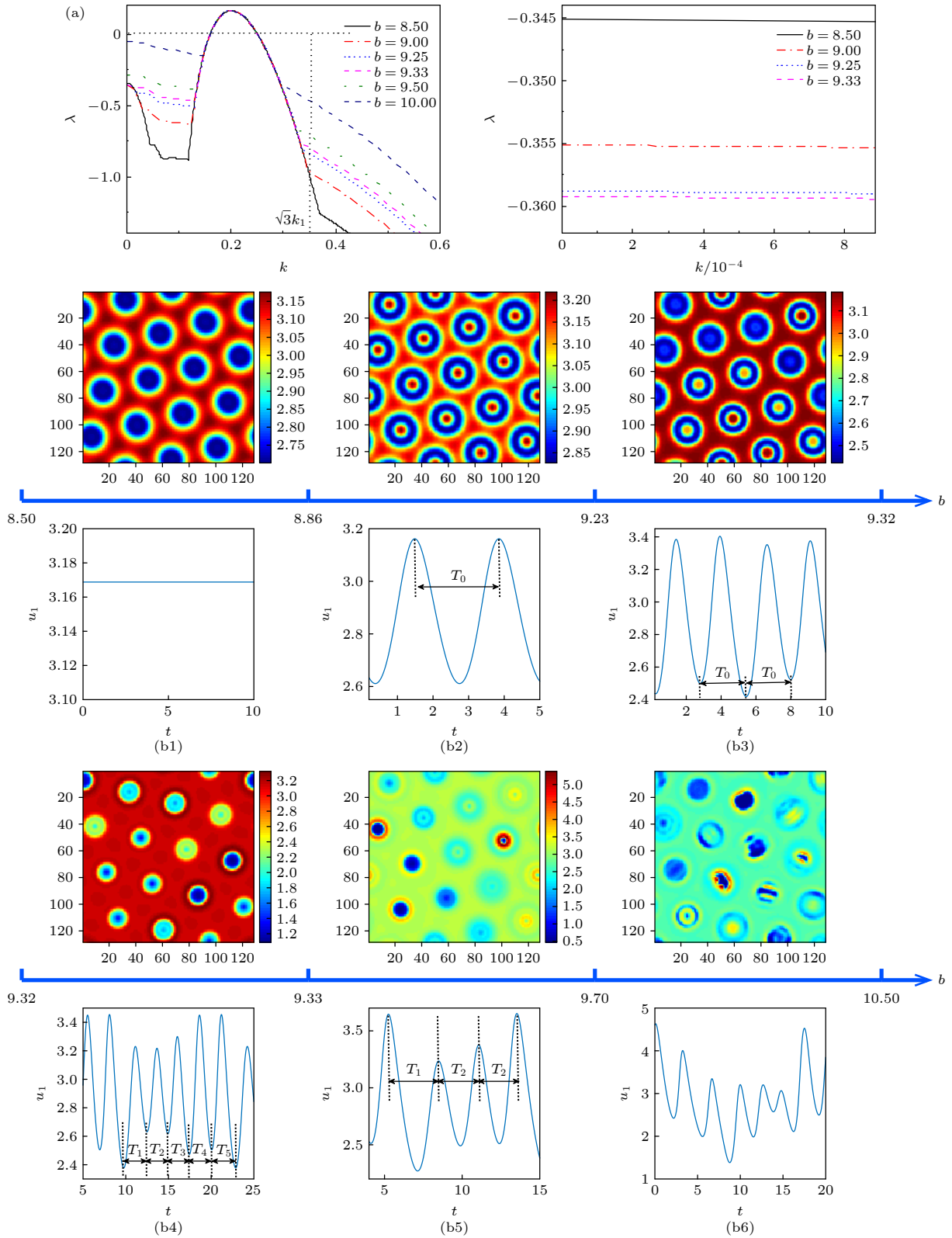


图 3 参数 b 对时空斑图的影响 (a) 不同参数 b 下的色散关系曲线; (b1) 静态蜂窝状六边形斑图, $b = 8.5$; (b2) 单倍周期同步振荡六边形斑图, $b = 9$; (b3) 2 倍周期非同步振荡六边形斑图, $b = 9.25$; (b4) 5 倍周期非同步振荡六边形斑图, $b = 9.33$; (b5) 3 倍周期非同步振荡斑图, $b = 9.5$; (b6) 时空混沌, $b = 10$

Fig. 3. Influence of parameter b on spatio-temporal patterns: (a) Dispersion curves under different parameters b ; (b1) static honeycomb hexagon pattern at $b = 8.5$; (b2) single-period synchronous oscillation hexagon pattern at $b = 9$; (b3) non-synchronous oscillation hexagon pattern of 2 times the period at $b = 9.25$; (b4) non-synchronous oscillation hexagon pattern of 5 times the period at $b = 9.33$; (b5) non-synchronous oscillation pattern of 3 times the period at $b = 9.5$; (b6) spatio-temporal chaos at $b = 10$.

霍普夫模本征值的大小随着参数 b 的增大呈现下降趋势; 在 $9.33 < b < 10$ 范围内, 霍普夫模本征值的大小随着参数 b 的增大而增大. 图 3(b) 为不同参数 b 下获得的时空斑图及相应的活化子浓度 u_1 随时间 t 的变化图. 当 $b = 8.5$ 时, 系统距离霍普夫分岔点还比较远, 霍普夫模本征值比较小, 此时图灵模 k_1 及其高阶模 $\sqrt{3}k_1$ 均处于图灵区域内, 此时系统产生了静态蜂窝状六边形斑图, 如图 3(b1) 所示. 这与介质阻挡放电系统中的静态蜂窝状六边形斑图一致^[34,35]. 在 $8.86 < b < 9.32$ 范围内, 随着参数 b 的增大, 霍普夫模本征值的大小呈现下降趋势, 但是高阶图灵模 $\sqrt{3}k_1$ 进入到霍普夫区域内, 此时系统产生了振荡六边形斑图 (图 3(b2) 和图 3(b3)), 这就说明该振荡六边形斑图是由超临界图灵模 k_1 与处于霍普夫区域的高阶模 $\sqrt{3}k_1$ 相互作用而成的. 当 $b < 9.23$ 时, 振荡六边形具有单一的振荡周期 T_0 , 如图 3(b2) 所示. 此斑图与介质阻挡放电实验中得到的点环斑图相符合^[5,28]. 当 $b > 9.23$ 时, 振荡六边形经历倍周期分岔而进入双倍周期振荡, 即 $T = 2T_0$, 如图 3(b3) 所示. 在 $9.32 < b < 9.33$ 这个很小的范围内, 系统处于近似 5 倍周期振荡, 但每次振荡的周期各不相同, 即 $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 \approx 5T_0$, 尽管振幅依然呈现六边形阵列排布, 但是振荡相位各不相同, 即系统产生的是非同步六边形斑图, 如图 3(b4) 所示. 在参数 $9.33 < b < 9.7$ 范围内, 霍普夫模本征值的大小随着参数 b 的增大而增大, 霍普夫模式开始被激发. 当 $b = 9.5$ 时, 非同步斑图的六边形空间结构开始破缺, 其振荡周期呈现为近似三倍周期, 且有 $T = T_1 + 2T_2 \approx 3T_0$, 如图 3(b5) 所示. 当 $b > 9.7$ 时, 霍普夫模式引起的振荡起主导作用, 此时无论是空间上还是时间上, 都进入到混沌状态 (图 3(b6)). 目前人们已经在介质阻挡放电系统中实验观测到了辉光模式下的倍周期分岔和混沌现象^[36,37], 尽管斑图模式下还未见有实验报道, 但是在等离子体流体模拟中获得了相似的结果^[38].

3.3 图灵模强度 h_2 对振荡六边形斑图的影响

由前文可知, 振荡六边形斑图是由图灵模 k_1 与其高阶模 $\sqrt{3}k_1$ 相互作用而成. 接下来研究 Brusselator 系统的图灵模强度 h_2 对振荡六边形斑图的影响. 分两种情况来讨论: 一是两个图灵模之间满足

空间共振关系; 二是不满足空间共振关系. 首先讨论不满足空间共振的情况. 以波数比为 1:5 为例, 固定参数 $D_{u_2} = 21.9$, $D_{v_2} = 400$, 使图灵模始终保持 $k_1 = 0.2$, $h_1 = 0.3$, 并且固定耦合强度 $\alpha = 0.15$. 通过调节参数 D_{u_1} 和 D_{v_1} 的大小, 保证图灵模 $k_2 = 1$ 不变, 而只改变图灵模强度 h_2 的大小, 探究图灵模强度 h_2 对振荡六边形斑图的影响. 图 4 给出了不同 h_2 下的各种时空斑图. 从图 4(b) 可以看出: 在 $h_2 < -4.8$ 范围内, 形成的是静态图灵斑图; 在 $-4.8 < h_2 < -0.74$ 范围内, 形成的是动态斑图; 在 $h_2 > -0.74$ 范围内, 形成的是静态图灵斑图. 当 $h_2 = -5.5$ 时, 本征值高度 h_2 很低, 系统中的次临界图灵模 k_2 不能被激发出来, 且此时高阶图灵模 $\sqrt{3}k_1$ 处于图灵区域内, 所以系统形成了静态蜂窝状六边形斑图, 如图 4(b1) 所示. 增大本征值高度 h_2 至 -3.44 时, 系统中的高阶图灵模 $\sqrt{3}k_1$ 处于霍普夫区域内, 且其本征值高于次临界图灵模的本征值 h_2 , 此时系统呈现如图 4(b2) 所示的同步振荡六边形斑图, 同样证实了振荡六边形斑图是由图灵模 k_1 与其高阶模 $\sqrt{3}k_1$ 相互作用而成的. 继续增大本征值高度 h_2 , 当 $h_2 = -0.56$ 时, 次临界图灵模的本征模 h_2 高于高阶模 $\sqrt{3}k_1$, 尽管高阶模也处于霍普夫区域, 但是系统优先选择 k_2 , 因此在两个图灵模 k_1 和 k_2 的相互作用下形成了一种具有两种空间尺度的静态超六边形斑图, 该斑图中每个晶胞均由四个相邻的暗点排列而成, 如图 4(b3) 所示. 该斑图与介质阻挡放电实验中观察到的超六边形斑图相类似^[39]. 继续升高 h_2 至 -0.21 , 与前面所述相同, 系统仍然优先选择 k_2 , 此时系统呈现六边形和条纹混合的静态叠加斑图, 晶胞整体呈现六边形排列, 其内部有两种结构, 一种是六边形结构, 另一种是条纹结构, 如图 4(b4) 所示. 在 $0 < h_2 < 0.6$ 范围内, 此时图灵模 k_2 转变为失稳模, 因此 Brusselator 模型的斑图类型主要由图灵模 k_2 决定, 但是依然受到图灵模 k_1 的影响, 因此系统中呈现斑点与条纹的静态混合斑图, 如图 4(b5) 所示. 继续增大本征值高度 h_2 , 系统呈现单一波长的静态条纹斑图, 即系统完全由其自身的本征模 k_2 所决定, 如图 4(b6) 所示.

由此可知, 在非共振条件下, 要想形成振荡六边形斑图, 除了系统中的高阶图灵模 $\sqrt{3}k_1$ 处于霍普夫区域内外, 还需满足 Brusselator 模型中的次临界图灵模 k_2 对应的本征值高度低于处于霍普夫区域的高阶图灵模 $\sqrt{3}k_1$ 的本征值高度. 此外, 在

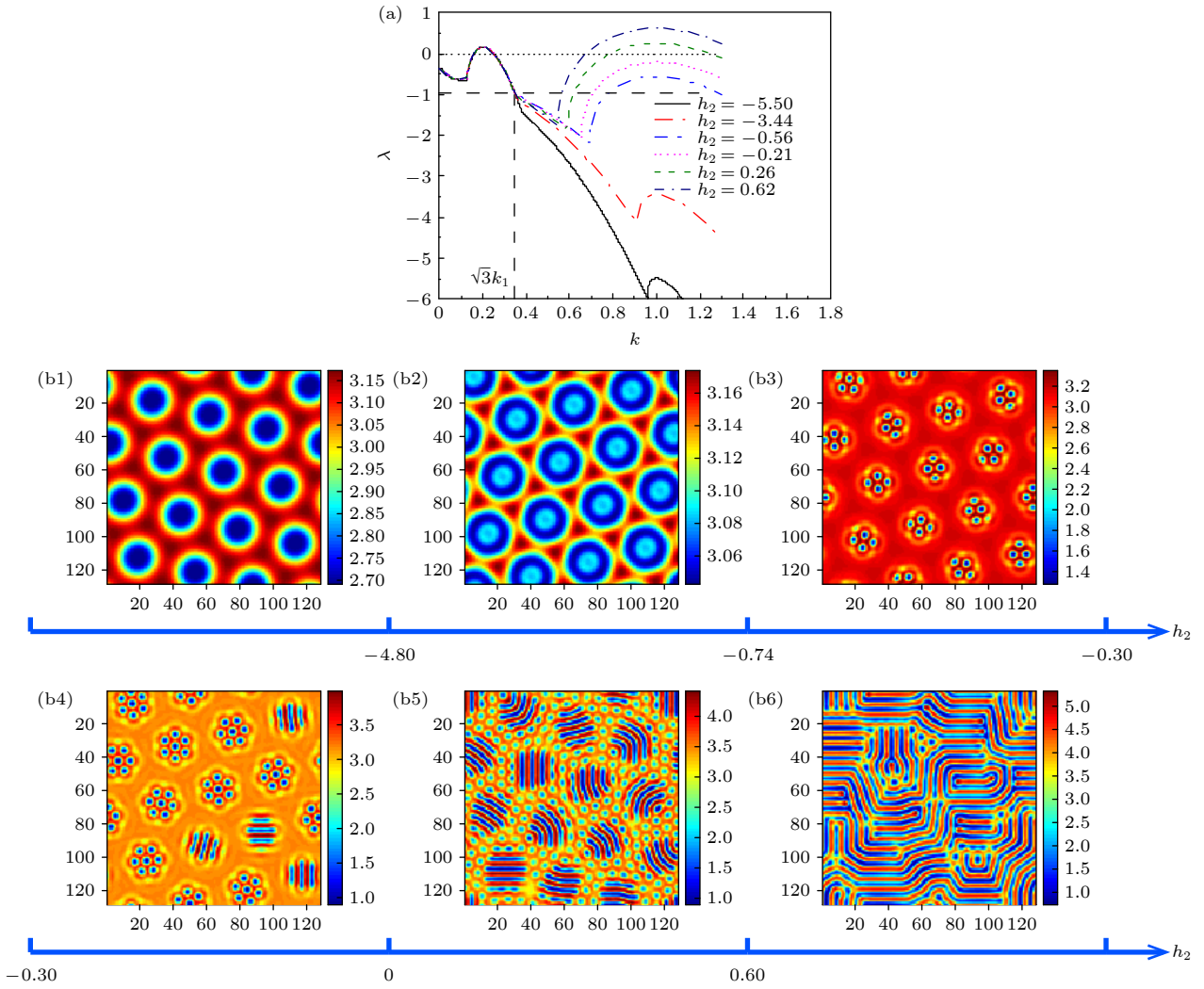


图 4 非共振时不同本征值 h_2 下的时空斑图 (a) 不同本征值 h_2 下的色散关系曲线; (b1) 静态蜂窝状六边形斑图, $h_2 = -5.50$, $D_{u_1} = 5.25$, $D_{v_1} = 6.5$; (b2) 同步振荡六边形斑图, $h_2 = -3.44$, $D_{u_1} = 3.62$, $D_{v_1} = 5$; (b3) 超六边形斑图, $h_2 = -0.56$, $D_{u_1} = 2.2$, $D_{v_1} = 4.6$; (b4) 叠加斑图, $h_2 = -0.21$, $D_{u_1} = 2.1$, $D_{v_1} = 4.8$; (b5) 混合斑图, $h_2 = 0.26$, $D_{u_1} = 2.03$, $D_{v_1} = 5.3$; (b6) 条纹斑图, $h_2 = 0.62$, $D_{u_1} = 1.98$, $D_{v_1} = 5.8$

Fig. 4. Complex patterns under different eigenvalues h_2 at non-resonance: (a) Dispersion curves under different eigenvalues h_2 ; (b1) static honeycomb hexagon pattern, $h_2 = -5.50$, $D_{u_1} = 5.25$, $D_{v_1} = 6.5$; (b2) synchronous oscillation hexagon pattern, $h_2 = -3.44$, $D_{u_1} = 3.62$, $D_{v_1} = 5$; (b3) super-hexagon pattern, $h_2 = -0.56$, $D_{u_1} = 2.2$, $D_{v_1} = 4.6$; (b4) superposition pattern, $h_2 = -0.21$, $D_{u_1} = 2.1$, $D_{v_1} = 4.8$; (b5) hybrid pattern, $h_2 = 0.26$, $D_{u_1} = 2.03$, $D_{v_1} = 5.3$; (b6) stripe pattern, $h_2 = 0.62$, $D_{u_1} = 1.98$, $D_{v_1} = 5.8$.

某些参数条件下, 处于霍普夫区域 $\sqrt{2}k_1$ 模式也可能被激发, 它与基模相互作用可以形成振荡四边形斑图, 但是该振荡四边形是不稳定的, 最终会演变为振荡六边形斑图.

接下来讨论图灵模满足空间共振的情况. 固定参数 $D_{u_2} = 21.9$, $D_{v_2} = 400$, 保证图灵模大小 $k_1 = 0.2$ 及其相应的本征值高度 $h_1 = 0.3$ 不变, 并且固定耦合强度 $\alpha = 0.15$. 通过调节参数 D_{u_1} 和 D_{v_1} 的大小, 探究图灵模强度 h_2 对振荡六边形斑图的影响. 图 5 给出了不同 h_2 下的各种时空斑图. 当

$h_2 < -1.5$ 时, 本征值高度 h_2 比较低, 且此时高阶模 $\sqrt{3}k_1$ 处于图灵区域内, 因此在超临界图灵模 k_1 的调制下, 系统形成了静态蜂窝状六边形斑图 (图 5(b1)). 增大本征值高度 h_2 , 在 $-1.5 < h_2 < 0$ 范围内, 两个子系统中均呈现六边形阵列排布, 对称性相同, 满足空间共振关系. 此时虽然高阶图灵模 $\sqrt{3}k_1$ 被激发, 并高于次临界图灵模 k_2 , 但是由于空间共振作用, 系统依然优先选择 k_1 和 k_2 两个图灵模间的相互作用, 因此在系统中呈现静态黑眼斑图, 如图 5(b2) 所示. 在 $h_2 > 0$ 范围内, 图灵模 k_2

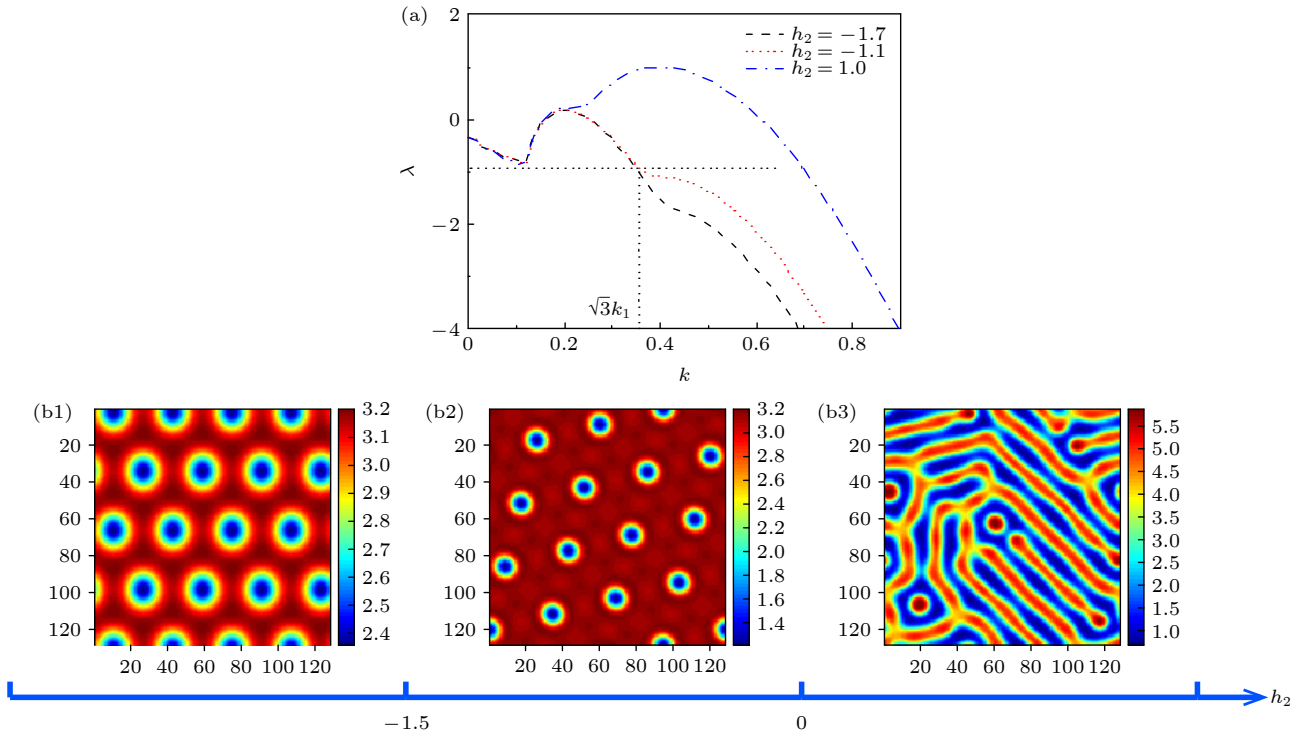


图 5 共振时不同本征值 h_2 下的时空斑图 (a) 不同本征值 h_2 下的色散关系曲线; (b1) 静态蜂窝状六边形斑图, $h_2 = -1.7$, $D_{u_1} = 14.55$, $D_{v_1} = 24$; (b2) 静态黑眼斑图, $h_2 = -1.1$, $D_{u_1} = 13.6$, $D_{v_1} = 25$; (b3) 条纹斑图, $h_2 = 1.0$, $D_{u_1} = 12$, $D_{v_1} = 40$

Fig. 5. Spatiotemporal patterns under different eigenvalues h_2 at resonance: (a) Dispersion curves under different eigenvalues h_2 ; (b1) static honeycomb hexagon pattern, $h_2 = -1.7$, $D_{u_1} = 14.55$, $D_{v_1} = 24$; (b2) static black eye pattern, $h_2 = -1.1$, $D_{u_1} = 13.6$, $D_{v_1} = 25$; (b3) stripe pattern, $h_2 = 1.0$, $D_{u_1} = 12$, $D_{v_1} = 40$.

为失稳模, 此时系统完全由其自身的本征模 k_2 决定, 形成了如图 5(b3) 所示的具有单一波长的条纹斑图, 该条纹斑图与介质阻挡放电系统中观察到的条纹斑图相符合 [25,28].

3.4 耦合强度对振荡六边形斑图的影响

耦合强度也是影响不同模式之间相互作用的一个重要因素. 图 6(a) 给出了不同耦合强度下的色散关系曲线图及其局部放大图. 可以看出, 霍普夫模本征值的大小随着耦合强度的增大先减小后增大. 图 6(b) 给出了不同耦合强度下获得的相应的时空斑图. 当耦合强度 $\alpha = 0.1$ 时, 与图 3(b1) 的情况类似, 系统距离霍普夫分岔点还比较远, 霍普夫模本征值比较小, 且高阶图灵模 $\sqrt{3}k_1$ 处于图灵区域内, 因此系统形成静态蜂窝状六边形斑图, 如图 6(b1) 所示. 在 $0.12 < \alpha < 0.42$ 范围内, 霍普夫模本征值的大小随着耦合强度的增大呈现下降趋势, 但是高阶图灵模 $\sqrt{3}k_1$ 进入到霍普夫区域内, 系统产生了振荡六边形斑图 (图 6(b2) 和图 6(b3)). 这再一次证实了振荡六边形斑图是由图灵模 k_1 与其高阶模 $\sqrt{3}k_1$ 相互作用而成. 继续增大耦合强度,

在 $0.42 < \alpha < 1$ 范围内, 系统中的 k_1 由原来的超临界图灵模变为了次临界图灵模, 系统呈现均匀态. 因此系统要想产生振荡六边形斑图, k_1 必须是超临界图灵模, 且形成六边形阵列排布.

3.5 振荡黑眼斑图

接下来讨论两个图灵模 k_1 , k_2 以及霍普夫模共同作用下生成的振荡复杂斑图. 图 7 给出了两个图灵模满足空间共振时获得的振荡黑眼斑图. 色散关系如图 7(a) 所示. 图 7(b) 为该振荡黑眼斑图的振幅分布图, 可以看出, 振幅呈现六边形阵列排布, 且振幅中心斑点处的浓度远小于外围浓度. 由于该振荡黑眼斑图为非同步振荡, 所以在图 7(c) 给出了 3 个不同斑点处 (分别标记为 A, B, C) 活化子 u_1 随时间 t 的变化图, 可以看出该振荡黑眼斑图呈现正弦型时间振荡, 3 个位置处的振荡周期相同, 均为 $T = 2.84$, 但是相位不相同, A, B, C 相位依次延迟, 且 3 点的振荡幅度也不相同, A 点的振荡幅度最大. 图 7(d) 为该振荡黑眼斑图的时空演化过程, 显然, 在振荡过程中, 各个斑点为非同步振荡, 但在整体上呈现六边形阵列排布.

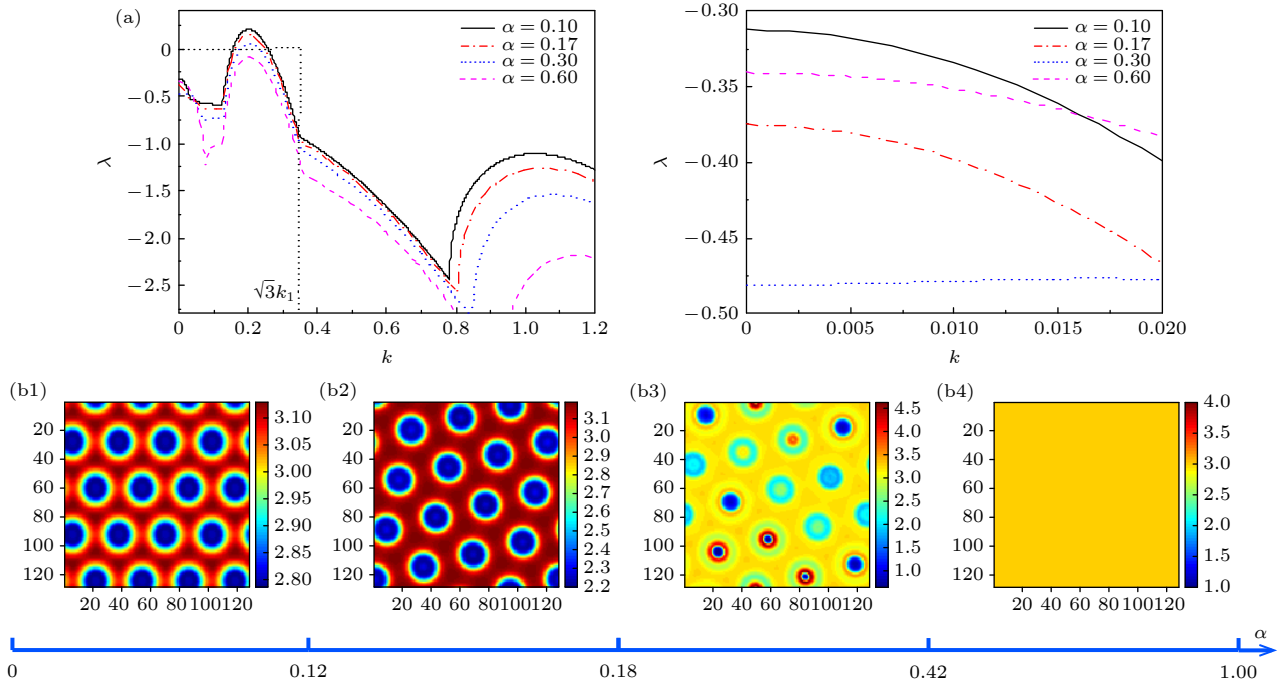


图6 不同耦合强度下的时空斑图(其他参数同图1) (a) 不同耦合强度下的色散关系曲线图; (b1) 静态蜂窝状六边形斑图, $\alpha = 0.1$; (b2) 同步振荡六边形斑图, $\alpha = 0.17$; (b3) 非同步振荡六边形斑图, $\alpha = 0.3$; (b4) 均匀态, $\alpha = 0.6$

Fig. 6. Spatio-temporal patterns under different coupling intensities at non-resonance: (a) Dispersion relationship curve diagram under different coupling intensities; (b1) static honeycomb hexagon pattern at $\alpha = 0.1$; (b2) synchronous oscillation hexagon pattern at $\alpha = 0.17$; (b3) non-synchronous oscillation hexagon pattern at $\alpha = 0.3$; (b4) uniform state at $\alpha = 0.6$. Other parameters are the same as those in Fig. 1.

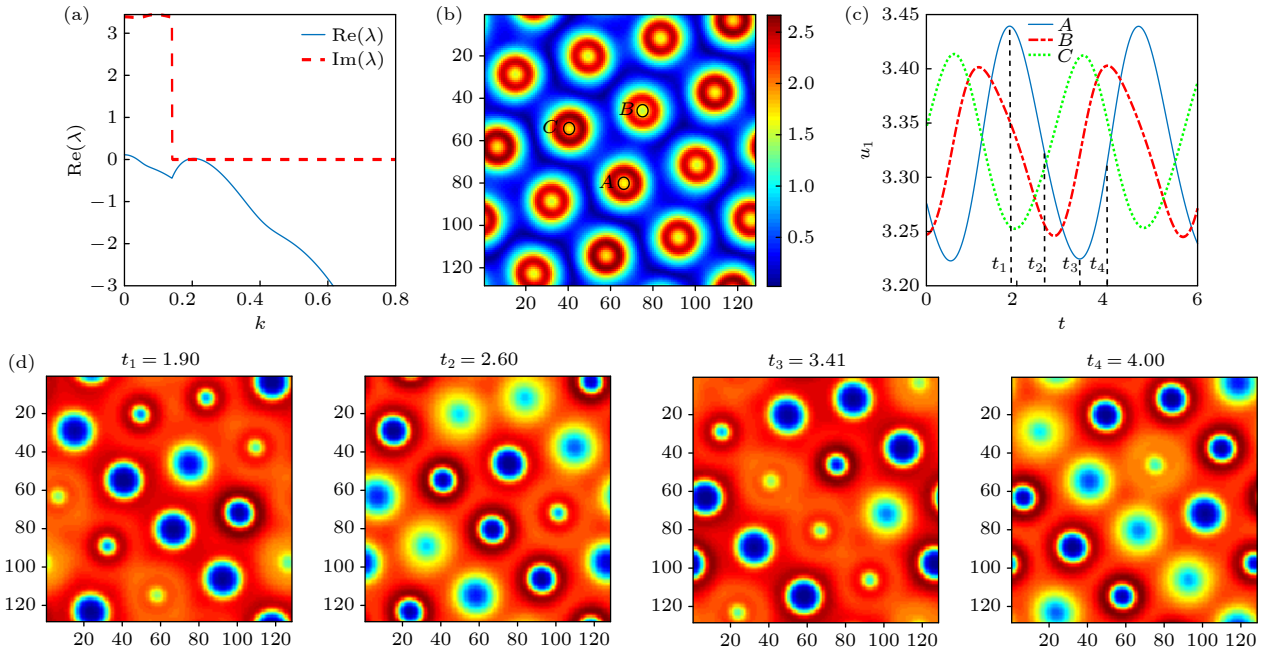


图7 振荡黑眼斑图 ($(a, b) = (3, 10.5)$, $(c, d) = (15, 9)$, $D_{u1} = 15$, $D_{v1} = 23$, $D_{u2} = 21.9$, $D_{v2} = 400$, $\alpha = 0.45$) (a) 耦合系统的色散关系曲线; (b) 振幅分布; (c) 3个位置处 u_1 的时间变化关系图; (d) 斑图演化过程

Fig. 7. Oscillatory black-eye pattern ($(a, b) = (3, 10.5)$, $(c, d) = (15, 9)$, $D_{u1} = 15$, $D_{v1} = 23$, $D_{u2} = 21.9$, $D_{v2} = 400$, $\alpha = 0.45$): (a) Dispersion curve of coupled system; (b) amplitude distribution; (c) time variation of u_1 at three positions; (d) evolution of pattern.

该振荡黑眼斑图的形成机理与图 5(b2) 的黑眼斑图有所不同. 与图 5(b2) 相比, 在这种情况下, 系统经历了霍普夫分岔, 激发了霍普夫模式, 因此该振荡黑眼斑图是在超临界图灵模 k_1 、次临界图灵模 k_2 以及霍普夫模的共同作用下形成的.

4 结 论

通过线性耦合 Brusselator 模型和 Lengyel-Epstein 模型, 数值研究了双层耦合非对称反应扩散系统中振荡图灵斑图的动力学行为. 模拟结果表明, 时空振荡图灵斑图的形成和选择取决于霍普夫模、图灵模及其高阶模之间的相互作用. Lengyel-Epstein 模型中激发的超临界图灵模 k_1 , 不仅在 Brusselator 模型中产生了图灵模 k_1 , 还激励了处于霍普夫区域的次临界模 $\sqrt{3}k_1$, 在这两个模式的相互作用下产生了同步振荡六边形斑图. 此振荡六边形斑图形成的条件是 Brusselator 模型中的次临界图灵模 k_2 的本征值高度低于处于霍普夫区域的高阶图灵模 $\sqrt{3}k_1$ 的本征值高度, 且两个图灵模之间不存在空间共振关系. 随着控制参数 b 的增加, 该振荡六边形斑图首先经历倍周期分岔进入双倍振荡周期, 经历多倍振荡周期后, 在霍普夫模式的参与下, 最终进入时空混沌态. 当系统的两个图灵模满足空间共振时, 系统优先选择空间共振模式, 从而产生静态超点阵斑图. 霍普夫模和图灵模共同作用下只能产生非同步振荡图灵斑图, 例如振荡黑眼斑图. 此外, 耦合强度也是影响振荡图灵斑图的一个重要因素. 耦合强度不仅可以影响斑图的振幅大小, 还影响空间结构的具体形式, 随着耦合强度逐渐增大, 系统依次经历了静态蜂窝状六边形斑图、同步振荡六边形斑图以及非同步振荡六边形斑图, 最终进入均匀状态.

本文的研究结果有助于人们进一步认知各种非线性系统中不同模式之间的相互作用及相应的斑图选择机理.

参考文献

- [1] Marino F, Giacomelli G 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 174102
- [2] Bleicher P, Sciortino A, Bausch A R 2020 *Sci. Rep.* **10** 62151
- [3] Fencil M 2020 *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* **196** 111815
- [4] Gao Y P, Zhang Y F, Schwen D, Jiang C, Gan J 2019 *Sci. Rep.* **9** 7835
- [5] Dong L F, Mi Y L, Pan Y Y 2020 *Phys. Plasmas* **27** 023504
- [6] Yu G L, Dong L F, Guo L T, Liu F C, Li C X, Dou Y Y, Ren C H, Pan Y Y 2020 *Phys. Plasmas* **27** 053503

- [7] Zheng Z G, Zhai Y 2020 *Sci. China, Ser. G* **50** 69 (in Chinese) [郑志刚, 翟云 2020 中国科学: 物理学 力学 天文学 **50** 69]
- [8] Gao J, Gu C G 2019 *IEEE Access* **7** 140391
- [9] Gu L C, Gong P L, Wang H Q 2020 *Discrete Dyn. Nat. Soc.* **2020** 5293748
- [10] Yang R, Song Y L 2016 *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **31** 356
- [11] Dolnik M, Rovinsky A B, Zhabotinsky A M, Epstein I R 1999 *J. Phys. Chem. A* **103** 38
- [12] Yang L F, Zhabotinsky A M, Epstein I R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 198303
- [13] Zhabotinsky A M, Dolnik M, Epstein I R 1995 *J. Chem. Phys.* **103** 10306
- [14] Konishi K, Hara N 2018 *Phys. Rev. E* **97** 052201
- [15] Li X Z, Bai Z G, Li Y 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 068201 (in Chinese) [李新政, 白占国, 李燕 2019 物理学报 **68** 068201]
- [16] Paquin-Lefebvre F, Xu B, Dipietro K L, Lindsay A E, Jilkine A 2020 *J. Theor. Biol.* **497** 110242
- [17] Yang L F, Dolnik M, Zhabotinsky A M, Epstein I R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 208303
- [18] Yang L F, Epstein I R 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 178303
- [19] Anguelov R, Stoltz S M 2017 *Math. Comput. Simul.* **133** 39
- [20] Li X Z, Bai Z G, Li Y, Zhao K 2016 *Mod. Phys. Lett. B* **30** 1650085
- [21] Pal K, Paul S, Ray D S 2020 *Phys. Rev. E* **101** 052203
- [22] Scarabotti P, Govezensky T, Bolcatto P 2020 *Sci. Rep.* **10** 124451
- [23] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M, Hwang D U 2006 *Phys. Rep.* **424** 175
- [24] Li C X, Dong L F, Feng J Y, Huang Y P 2019 *Phys. Plasmas* **26** 023505
- [25] Callegari T, Bernecker B, Boeuf J P 2014 *Plasma Sources Sci. Technol.* **23** 054003
- [26] Trelles J P 2016 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **49** 393002
- [27] Chen J Y, Dong L F, Li Y Y, Song Q, Ji Y F 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 075211 (in Chinese) [陈俊英, 董丽芳, 李媛媛, 宋倩, 嵇亚飞 2012 物理学报 **61** 075211]
- [28] Feng J Y, Pan Y Y, Li C X, Liu B B, Dong L F 2020 *Phys. Plasmas* **27** 063516
- [29] Dong L F, Li B, Shen Z K, Liu L 2012 *Phys. Rev. E* **86** 056217
- [30] Dong L F, Shen Z K, Li B, Bai Z G 2013 *Phys. Rev. E* **87** 042914
- [31] Liu F C, Liu Y H, Zhou Z X, Guo X, Dong M F 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 028201 (in Chinese) [刘富成, 刘雅慧, 周志向, 郭雪, 董梦菲 2020 物理学报 **69** 028201]
- [32] Gambino G, Lombardo M C, Sammartino M, Sciacca V 2013 *Phys. Rev. E* **88** 042925
- [33] Li J, Wang H L, Ouyang Q 2014 *Chaos* **24** 023115
- [34] Feng J Y, Dong L F, Wei L Y 2016 *Chin. J. Chromatogr.* **37** 1076 (in Chinese) [冯建宇, 董丽芳, 魏领燕 2016 发光学报 **37** 1076]
- [35] Dong L F, Liu W L, Wang H F, He Y F, Fan W L, Gao R L 2007 *Phys. Rev. E* **76** 046210
- [36] Dai D, Zhao X F, Wang Q M 2014 *EPL* **107** 15002
- [37] Wang X Q, Dai D, Hao Y P, Li L C 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 230504 (in Chinese) [王敦青, 戴栋, 郝艳捧, 李立涅 2012 物理学报 **61** 230504]
- [38] Zhang J, Wang Y H, Wang D Z, Zhuang J 2014 *Plasma Sci. Technol.* **16** 110
- [39] Dong L F, Li B, Lu N, Li X C, Shen Z K 2012 *Phys. Plasmas* **19** 052304

Oscillatory Turing patterns in two-layered coupled non-symmetric reaction diffusion systems^{*}

Liu Ya-Hui¹⁾ Dong Meng-Fei¹⁾ Liu Fu-Cheng^{1)2)†} Tian Miao¹⁾
Wang Shuo¹⁾ Fan Wei-Li¹⁾

1) (*College of Physics Science and Technology, Hebei University, Baoding 071002, China*)

2) (*Institute of Life Science and Green Development, Hebei University, Baoding 071002, China*)

(Received 15 October 2020; revised manuscript received 22 February 2021)

Abstract

Pattern formation and self-organization are ubiquitous in nature and commonly observed in spatially extended non-equilibrium systems. As is well known, the origin of spatio-temporal patterns can be traced to the instability of the system, and is always accompanied by a symmetry breaking phenomenon. In reality, most of non-equilibrium systems are constructed by interactions among several different units, each of which has its unique symmetry breaking mechanism. The interaction among different units described by coupled pattern forming system gives rise to a variety of self-organized patterns including stationary and/or oscillatory patterns. In this paper, the dynamics of oscillatory Turing patterns in two-layered coupled non-symmetric reaction diffusion systems are numerically investigated by linearly coupling the Brusselator model and the Lengyel-Epstein model. The interaction among the Turing modes, higher-order harmonics and Hopf mode, and their effects on oscillatory Turing pattern are also analyzed. It is shown that the supercritical Turing mode k_1 in the Lengyel-Epstein model is excited and interacts with the higher-order harmonics $\sqrt{3}k_1$ located in the Hopf region in the Brusselator model, and thus giving rise to the synchronous oscillatory hexagon pattern. The harmonic $\sqrt{2}k_1$ that can also be excited initially is some parameter domain, but it is unstable and vanishes finally. As the parameter b is increased, this oscillatory hexagon pattern first undergoes period-doubling bifurcation and transits into two-period oscillation, and then into multiple-period oscillation. When the Hopf mode participates in the interaction, the pattern will eventually transit into chaos. The synchronous oscillatory hexagon pattern can only be obtained when the subcritical Turing mode k_2 in the Brusselator model is weaker than the higher-order harmonics $\sqrt{3}k_1$ located in the Hopf region and neither of the two Turing modes satisfies the spatial resonance condition. The system favorites the spatial resonance and selects the super-lattice patterns when these modes interact with each other. The interaction between Hopf mode and Turing mode can only give rise to non-synchronous oscillatory patterns. Moreover, the coupling strength also has an important effect on the oscillatory Turing pattern. These results not only provide a new pattern forming mechanism which can be extended to other nonlinear systems, but also gives an opportunity for more in-depth understanding the nature and their relevance to technological applications.

Keywords: non-symmetric coupled reaction diffusion system, oscillatory Turing patterns, Turing mode, higher-order mode, Hopf mode

PACS: 82.40.Ck, 05.45.-a, 05.65.+b, 45.70.Qj

DOI: 10.7498/aps.70.20201710

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11975089, 11875014) and the Excellent Young Scientists Fund of Hebei Province, China (Grant No. A2017201099).

[†] Corresponding author. E-mail: hdlfc@hbu.cn