



## 面向近原子尺度制造的光学测量精度极限分析

战海洋 邢飞 张利

### Analysis of optical measurement precision limit for close-to-atomic scale manufacturing

Zhan Hai-Yang Xing Fei Zhang Li

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 060703 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20201924

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201924>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

能够突破标准量子极限的原子双数态的制备研究

Generation of twin-Fock states for precision measurement beyond the standard quantum limit

物理学报. 2018, 67(16): 160303 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181029>

拉曼激光边带效应对冷原子重力仪测量精度的影响

Influence of Raman laser sidebands effect on the measurement accuracy of cold atom gravimeter

物理学报. 2019, 68(19): 194205 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190581>

基于交替起振光电振荡器的大量程高精度绝对距离测量技术

Long-range, high-precision absolute distance measurement technology based on alternately oscillating optoelectronic oscillator

物理学报. 2019, 68(13): 130601 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190238>

基于原子重力仪的车载静态绝对重力测量

Static measurement of absolute gravity in truck based on atomic gravimeter

物理学报. 2020, 69(6): 060302 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191765>

超冷原子系综的非高斯纠缠态与精密测量

Non-Gaussian entangled states and quantum metrology with ultracold atomic ensemble

物理学报. 2019, 68(4): 040306 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190147>

Ti纳米粒子熔化与凝结的原子尺度模拟

Simulations of Ti nanoparticles upon heating and cooling on an atomic scale

物理学报. 2019, 68(16): 166402 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190228>

## 专题—原子制造: 基础研究与前沿探索

## 面向近原子尺度制造的光学测量精度极限分析\*

战海洋 邢飞† 张利

(清华大学精密仪器系, 北京 100084)

(2020 年 11 月 16 日收到; 2020 年 12 月 21 日收到修改稿)

纳米级乃至更高精度的测量是原子及近原子尺度制造技术发展的基础和保障. 光学测量具有精度高、测量范围广、测量直观等优点, 其对单个成像光斑中心的定位可达远超衍射极限的精度. 但由于光本身散粒噪声、探测器暗电流噪声等随机性的存在, 光学测量存在精度极限. 本文基于克拉美罗下界理论发展了可适用于任意强度分布像斑的精度极限计算方法, 并以典型艾里斑为例, 分析了成像过程中反映信噪比、能量集中度、计算方式的参数对定位精度极限的影响规律并给出提高精度的建议和结论. 对实验所得像斑进行了精度极限计算, 验证了所得结论对类似艾里斑的像斑的适用性. 研究为原子及近原子尺度制造过程中光学测量的应用和优化提供了分析方法和理论指导.

**关键词:** 原子制造, 光学测量, 精度极限**PACS:** 07.60.-j, 06.20.DK, 02.50.-r**DOI:** 10.7498/aps.70.20201924

## 1 引言

高精度制造在国家科技和经济发展中发挥着重要作用. 随着科技的发展, 制造技术的精度跨越了毫米、微米尺度, 进入纳米量级. 以量子理论为基础的原子及近原子尺度制造是下一代制造技术的主流发展方向<sup>[1,2]</sup>, 而纳米级甚至更高精度的测量技术是原子制造技术发展的基础和保障. 光学测量具有精度高、测量范围广、测量直观等优点, 虽然具有百纳米级的衍射极限限制, 但此极限仅针对两个相邻目标的辨识问题, 对单个成像光斑中心的测量可以达到更高精度. 如 2014 年诺贝尔化学奖授予的光激活定位显微技术 (photoactivated localization microscopy, PALM), 通过对细胞内的单分子进行分时点亮定位, 实现了对活细胞中单分子的超越衍射极限的成像测量<sup>[3,4]</sup>. 显微领域利用相关技术, 实现了对 DNA、溶酶体、线粒体等微

小细胞结构的清晰成像<sup>[5-8]</sup> 和对膜上单分子运动等动态过程的纳米级测量<sup>[9-11]</sup>, 这对理解具有原子级结构特征及装配精度的细胞的内部机理具有重要意义, 为复杂原子功能结构的制造奠定了基础<sup>[1]</sup>. 光学测量也广泛应用于超精密加工制造领域. 在用于加工高端芯片的光刻机中, 通过测量晶圆反射光成像点确定晶圆的固定位置<sup>[12]</sup>, 直接影响着芯片的加工精度. 美国喷气推进实验室 (jet propulsion laboratory, JPL) 先后使用激光静态和动态干涉条纹对图形探测器像素偏移进行测量, 达到微像素级标定精度<sup>[13-15]</sup>. 原子力显微镜 (atomic force microscopy, AFM) 通过测量激光光斑的中心位置, 计算悬臂梁发生的微位移, 以实现近原子尺度的测量精度<sup>[16]</sup>. 光学测量也是 AFM 校准如温漂误差的测量及补偿中重要的技术手段<sup>[17]</sup>.

虽然对单个成像目标中心位置的测量不受衍射极限的直接制约, 但根据量子力学理论, 成像过程中探测器上产生的光电子数是波动的, 此波动被

\* 国家重点研发计划 (批准号: 2016YFB0501201) 和国家重大科研仪器研制项目 (批准号: 51827806) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xingfei@mail.tsinghua.edu.cn

描述为散粒噪声 (shot noise), 服从泊松分布<sup>[18]</sup>. 散粒噪声和探测器暗电流噪声等随机噪声的存在决定了由灰度响应估计像中心位置的过程中, 测量精度不可能达到无限高. Winick<sup>[19]</sup> 基于克拉美罗下界 (Cramer-Rao lower bound, CRLB) 理论推导了特定形式下的点目标像的测量精度极限, 其适用于像斑点扩散函数 (point spread function, PSF) 为高斯函数的情况. Wang 等<sup>[17,20]</sup> 学者对固连在仪器上的微球进行成像以精确测量仪器运动, 讨论了微球尺寸等参数对成像强度分布和测量精度的影响, 但没有完整地统计学角度建立这些参数和测量精度的直接定量关系.

针对以上背景和问题, 本文基于 CRLB 理论等前人工作, 发展了适用于任意强度分布成像的光学测量精度极限计算方法, 并以典型点目标光斑艾里斑为例, 分析了光强、波长、光学系统相对孔径、探测器噪声等参数与光学测量极限的定量关系, 给出了适用于类似艾里斑的 PSF 的提高测量精度的建议. 对于 PSF 和艾里斑有较大差异的, 也可使用本文方法进行推导分析. 对测量极限的定量分析, 为原子及近原子尺度制造过程中光学测量方式的应用和优化, 提供了分析方法和理论指导.

## 2 精度极限分析方法

### 2.1 任意强度分布的二维定位精度极限

由目标发出的光经过光学系统打在探测器上, 形成灰度响应. 若不考虑量子效率, 像素  $(i, j)$  由光信号产生的光电子数为

$$g_{ij}(x_0, y_0) = \int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} \int_{y_i-h/2}^{y_i+h/2} I(x, y, x_0, y_0) dx dy, \quad (1)$$

其中,  $I(x, y, x_0, y_0)$  为到达探测器上的任意光强分布, 单位为每平方微米内的光电子数;  $(x_0, y_0)$  为探测器上像斑的中心;  $(x, y)$  为探测器上的任意位置;  $(x_i, y_i)$  为像素  $(i, j)$  的中心位置;  $h$  为矩形像素尺寸 (边长), 单位均为  $\mu\text{m}$ . 由于散粒噪声的存在,  $g_{ij}(x_0, y_0)$  实际上为像素  $(i, j)$  上的光电子数均值, 而此光生电子数服从泊松分布<sup>[18]</sup>.

以 CCD 或 CMOS 探测器为例, 根据其像素响应标准模型<sup>[18]</sup>, 像素  $(i, j)$  产生的光电子数有一部分来自于暗信号, 而暗电流噪声主要由曝光时间

内电子的热运动产生, 也服从泊松分布, 假设此噪声均值和方差为  $\sigma_d^2$ . 故在像斑中心为  $(x_0, y_0)$  的情况下, 像素  $(i, j)$  产生光电子数为  $s_{ij}$  的概率密度函数为

$$p(s_{ij}|x_0, y_0) = \frac{(g_{ij}(x_0, y_0) + \sigma_d^2)^{s_{ij}}}{s_{ij}!} e^{-(g_{ij}(x_0, y_0) + \sigma_d^2)}. \quad (2)$$

进而使得探测器局部区域  $A$  产生光电子数矩阵  $\mathbf{S}$  的联合概率密度函数为

$$p(\mathbf{S}|x_0, y_0) = \prod_{ij, ij \in A} \frac{(g_{ij}(x_0, y_0) + \sigma_d^2)^{s_{ij}}}{s_{ij}!} e^{-(g_{ij}(x_0, y_0) + \sigma_d^2)}. \quad (3)$$

其中局部区域  $A$  可以任意选取, 可以将像斑分布的所有像素全部囊括, 也可以根据具体强度分布选取特征最明显的像斑局部.

CRLB 是数理统计领域进行参数估计时任何无偏估计方法都不能低于的方差<sup>[21-23]</sup>. 文献<sup>[19]</sup> 对高斯强度分布的 CRLB 进行了推导, 为进行化简在过程中使用了两个条件, 分别是

$$\begin{aligned} \sum_{ij, ij \in A} g_{ij}(x_0, y_0) &= 1, \\ \sum_{ij, ij \in A} \frac{dg_{ij}(x_0, y_0)}{dx_0} &= \frac{dg_{ij}(x_0, y_0)}{dy_0} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

此处区域  $A$  内的像素产生的光电子数和为 1, 是因为文献中对  $g_{ij}(x_0, y_0)$  进行了归一化操作. (4) 式成立的条件是区域  $A$  包含了像斑分布的全部像素. 考虑到更一般的情况, 即像斑较大或较复杂时, 只用特征明显和信噪比高的区域可能会获得更高的精度. 因此本文在 (4) 式不成立的条件下, 推导任意强度分布的精度极限.

根据 CRLB 的计算过程<sup>[19]</sup>

$$Q_x = \frac{\partial \ln p(\mathbf{S}|x_0, y_0)}{\partial x_0} = \sum_{ij, ij \in A} \left( \frac{s_{ij}}{g_{ij}(x_0, y_0) + \sigma_d^2} - 1 \right) \frac{\partial g_{ij}(x_0, y_0)}{\partial x_0}, \quad (5)$$

$$Q_y = \frac{\partial \ln p(\mathbf{S}|x_0, y_0)}{\partial y_0} = \sum_{ij, ij \in A} \left( \frac{s_{ij}}{g_{ij}(x_0, y_0) + \sigma_d^2} - 1 \right) \frac{\partial g_{ij}(x_0, y_0)}{\partial y_0}, \quad (6)$$

其中,  $Q_x$  和  $Q_y$  代表 (3) 式的对数对  $x_0$  和  $y_0$  的偏导. 分别计算  $Q_x^2$ ,  $Q_y^2$  和  $Q_x Q_y$  的数学期望

$$Q_x^2 = \sum_{ij} \left( \frac{s_{ij}}{g_{ij}(x_0, y_0) + \sigma_d^2} - 1 \right)^2 \left( \frac{\partial g_{ij}(x_0, y_0)}{\partial x_0} \right)^2$$

$$+ \sum_{ij} \sum_{mn, mn \neq ij} \left( \frac{s_{ij}}{g_{ij}(x_0, y_0) + \sigma_d^2} - 1 \right)$$

$$\times \left( \frac{s_{mn}}{g_{mn}(x_0, y_0) + \sigma_d^2} - 1 \right)$$

$$\times \frac{\partial g_{ij}(x_0, y_0)}{\partial x_0} \frac{\partial g_{mn}(x_0, y_0)}{\partial x_0}, \quad (7)$$

由于

$$E[s_{ij}] = g_{ij}(x_0, y_0) + \sigma_d^2,$$

$$E[s_{ij}^2] = (g_{ij}(x_0, y_0) + \sigma_d^2)(1 + g_{ij}(x_0, y_0) + \sigma_d^2), \quad (8)$$

且  $s_{ij}$  与  $s_{mn, mn \neq ij}$  相互独立, 因此 (7) 式的第二项数学期望为 0, 对第一项的数学期望进行计算, 化简得

$$E[Q_x^2] = \sum_{ij} \frac{1}{g_{ij}(x_0, y_0) + \sigma_d^2} \left( \frac{\partial g_{ij}(x_0, y_0)}{\partial x_0} \right)^2. \quad (9)$$

由 (9) 式发现, 无论 (4) 式成立与否,  $Q_x^2$  的数学期望形式并不受影响. 同理可得

$$E[Q_y^2] = \sum_{ij} \frac{1}{g_{ij}(x_0, y_0) + \sigma_d^2} \left( \frac{\partial g_{ij}(x_0, y_0)}{\partial y_0} \right)^2, \quad (10)$$

$$E[Q_x Q_y]$$

$$= \sum_{ij} \frac{1}{g_{ij}(x_0, y_0) + \sigma_d^2} \frac{\partial g_{ij}(x_0, y_0)}{\partial x_0} \frac{\partial g_{ij}(x_0, y_0)}{\partial y_0}. \quad (11)$$

在估计像斑中心横坐标  $x_0$  时的 CRLB 为

$$\text{CRLB}_x = \frac{E[Q_y^2]}{E[Q_x^2]E[Q_y^2] - (E[Q_x Q_y])^2}. \quad (12)$$

将 (9)—(11) 式代入 (12) 式即可得到最终结果. 纵坐标  $y_0$  的 CRLB 同理, 只需将 (12) 式的  $x$  和  $y$  下标调换顺序. 如 (1) 式所示,  $g_{ij}(x_0, y_0)$  可由任意光强分布函数积分获得,  $\sigma_d^2$  可通过查探测器参数或由光子转移法计算得到 [18,24]. 另外, 由于 CRLB 反映的是方差的下界, 在本文中取根号值, 即标准差下界, 并称其为无偏估计方法的精度极限.

## 2.2 艾里斑模型

光学成像系统的光瞳多呈圆形, 正入射时, 圆孔的夫琅禾费衍射斑为艾里斑, 其强度分布公式为

$$I(\theta) = I_0(2J_1(t)/t)^2, \quad (13)$$

式中

$$t = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta, \quad (14)$$

其中,  $\theta$  为衍射角,  $D$  为光瞳直径,  $\lambda$  为波长;  $I_0$  为中心强度;  $J_1(t)$  为一阶贝塞尔函数. 假设在像平面上点  $(x, y)$  距离像斑中心  $(x_0, y_0)$  为  $r$ ,  $r$  可近似为

$$r \approx f \sin \theta, \quad (15)$$

其中  $f$  为光学系统焦距, 则

$$t = \frac{\pi D}{\lambda f} r = \frac{\pi}{\lambda F} r,$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r. \quad (16)$$

这里,  $F$  为镜头  $F$  数, 即焦距与光瞳直径之比. 将 (16) 式代入 (13) 式中, 即可得到像面上的光强分布函数

$$I(x, y, x_0, y_0)$$

$$= I_0 \left\{ \frac{2J_1[\pi \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} / (\lambda F)]}{\pi \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} / (\lambda F)} \right\}^2. \quad (17)$$

将 (17) 式代入 (1) 式, 即可得到  $g_{ij}(x_0, y_0)$ , 进而根据 (12) 式, 可计算不同参数与精度极限之间的关系. 图 1 给出了艾里斑的光强分布函数和像素灰度响应的示例, 两个灰度响应的差异是因为像斑中心落在了像素内的不同位置.

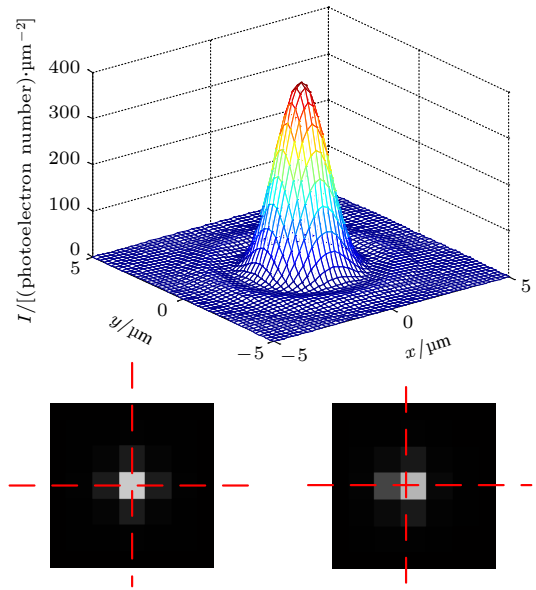


图 1 艾里斑的光强分布函数及相应的像素灰度响应示例  
Fig. 1. Intensity function of an Airy spot and its corresponding pixel response.



### 3 艾里斑光学测量精度极限分析

#### 3.1 能量与噪声

像斑的能量、散粒噪声、探测器暗电流噪声是影响图像信噪比的参数. 由 (12) 式, 这些噪声和能量耦合在一起, 无法通过单个或多个像素的信噪比直接对精度极限进行评估. 因此通过仿真的方式, 对表征像斑能量和散粒噪声的  $I_0$ , 表征暗电流噪声的  $\sigma_d^2$  进行分析.

仿真条件为  $F$  数取 4, 像素尺寸为  $2\text{ }\mu\text{m}$ , 波长为  $500\text{ nm}$ , 中心强度为  $400\text{ 光子数}/\mu\text{m}^2$ , 暗电流噪声  $\sigma_d^2$  分别设置为 0 和 25 (如果探测器光电子转灰度的增益为 0.2, 则  $\sigma_d^2 = 25$  对应的灰度值标准差为 1). 由 (12) 式, 精度极限与像斑中心的位置有关. 将像斑中心分别均匀落在一个像素的不同位置内, 计算对像斑横坐标  $x_0$  估计的精度极限. 其中像斑中心相对于像素边缘的位置, 称为像素相位. 仿真结果如图 2 所示, 精度极限和像素相位的关系为

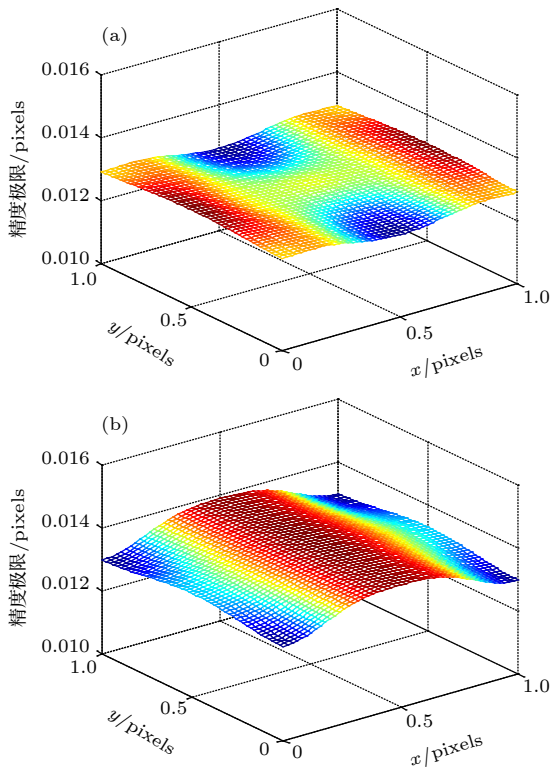


图 2 精度极限-像素相位曲面 (a) 中心强度为 400, 暗电流噪声为 0; (b) 中心强度为 400, 暗电流噪声为 25

Fig. 2. Relationship of the precision limit to the  $x$  and  $y$  pixel phase: (a) The central intensity is 400, the dark current noise is 0; (b) the central intensity is 400, the dark current noise is 25.

一个复杂的曲面, 无暗电流噪声时, 在此仿真条件下, 定位精度极限约为 0.013 像素, 暗电流噪声的出现使得精度极限变差.

进一步地, 取  $y$  像素相位为 0.5 的截面, 分别在  $I_0 = 400$ ,  $\sigma_d^2 = 0, 25, 100, 400$  和  $I_0 = 400, 800, 1600, 3200$ ,  $\sigma_d^2 = 400$  的条件下计算  $x$  方向精度极限与  $x$  方向像素相位的曲线并进行对比, 结果如图 3 所示. 固然像斑能量越高, 暗电流噪声越小, 精度极限越好. 值得注意的是, 当暗电流噪声不可忽略而像斑能量又不够高时, 精度极限曲线的波动幅度变大, 这意味着像斑中心位于像素中心和位于像素边缘时定位精度有较大的差异, 在像素边缘处能够实现更高的定位精度.

由此可以看出, 研究精度极限不仅需要关注整体的精度情况, 还要研究精度极限随像素相位的波动程度. 为方便分析, 对于如图 2 所示的精度极限

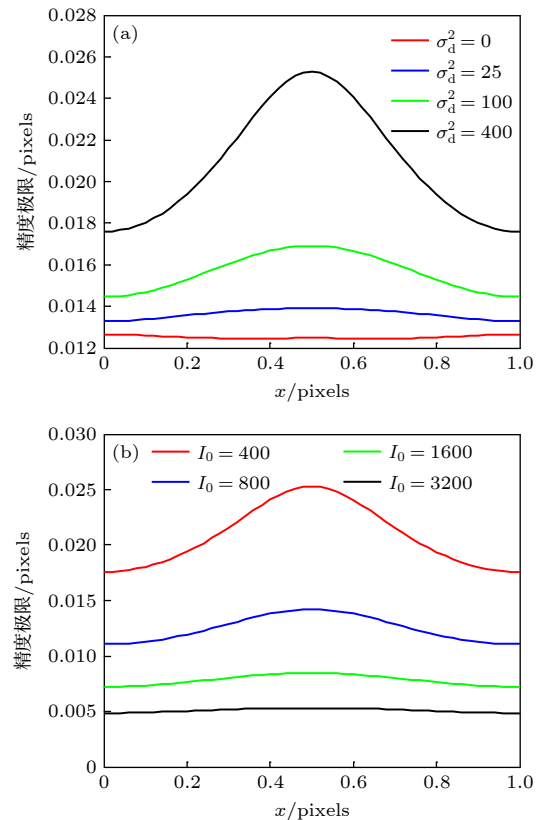


图 3  $y$  像素相位为 0.5 时的精度极限- $x$  像素相位曲线 (a) 中心强度为 400, 暗电流噪声分别取 0, 25, 100, 400; (b) 暗电流噪声为 400, 中心强度分别取 400, 800, 1600, 3200

Fig. 3. Relationship of the precision limit and the  $x$  pixel phase when the  $y$  pixel phase is 0.5: (a) The central intensity is 400, the dark current noise is 0, 25, 100, 400, respectively; (b) the dark current noise is 400, the central intensity is 400, 800, 1600, 3200, respectively.

表 1 不同能量和噪声条件下  $\sigma_{\text{all}}$  和  $\Delta_{\text{std}}$  结果 (保留小数点后四位)  
Table 1. Results of  $\sigma_{\text{all}}$  and  $\Delta_{\text{std}}$  under different levels of spot energy and noise.

	$\sigma_{\text{all}} (\Delta_{\text{std}})/\text{pixels}$			
	$\sigma_d^2 = 0$	$\sigma_d^2 = 25$	$\sigma_d^2 = 100$	$\sigma_d^2 = 400$
$I_0 = 400$	0.0125 (0.0001)	0.0136 (0.0003)	0.0157 (0.0011)	0.0217 (0.0033)
$I_0 = 800$	0.0088 (0.0001)	0.0093 (0.0001)	0.0102 (0.0004)	0.0127 (0.0014)
$I_0 = 1600$	0.0062 (0.0001)	0.0064 (0.0000)	0.0068 (0.0001)	0.0079 (0.0006)
$I_0 = 3200$	0.0044 (0.0000)	0.0045 (0.0000)	0.0046 (0.0000)	0.0051 (0.0002)

曲面, 定义两个指标  $\sigma_{\text{all}}$  和  $\Delta_{\text{std}}$ , 其中  $\sigma_{\text{all}}$  为精度极限曲面所有值的均方根 (root mean square, RMS), 反映像斑中心均匀分布在各个像素相位的情况下对精度极限的整体期望,  $\Delta_{\text{std}}$  为精度极限曲面所有值的标准差, 反映其随像素相位的波动程度. 对不同像斑能量和暗电流噪声计算这两个指标, 结果如表 1 所列. 可以看出, 当暗电流噪声为 0 时, 能量每增大  $n$  倍, 精度会提高  $\sqrt{n}$  倍; 当暗电流噪声变大时, 总体精度极限  $\sigma_{\text{all}}$  变差, 精度极限随像素相位波动  $\Delta_{\text{std}}$  也会变大. 由 (9) 式可知, 暗电流噪声的作用相当于均匀抬高了灰度分布函数  $g_{ij}(x_0, y_0)$ .

总结来说, 探测器暗电流噪声很小时, 像斑能量增大  $n$  倍, 精度极限提高  $\sqrt{n}$  倍. 随着暗电流噪声变大, 总体精度极限变差, 精度极限随像素相位的波动也显现出来并逐渐变大. 为尽量减少暗电流噪声的影响, 应使像斑中心位于像素边缘. 当  $F$  数为 4, 像素尺寸为  $2 \mu\text{m}$ , 波长为  $500 \text{ nm}$ , 中心强度为  $400 \text{ 光子数}/\mu\text{m}^2$ , 暗电流噪声方差为 25 (探测器增益为 0.2 时其对应的灰度值标准差为 1),  $x_0$  定位的总体精度极限为 0.014 像素 (28 nm), 像素中心位置有最差精度 0.014 像素 (28 nm), 像素边缘位置有最优精度 0.013 像素 (26 nm). 当暗电流噪声方差变为 100 (对应灰度值标准差为 2) 时, 总体精度极限变为 0.016 像素 (32 nm), 最差精度变为 0.017 像素 (34 nm), 最优精度变为 0.014 像素 (28 nm).

### 3.2 $F$ 数、波长和像素尺寸

光学系统  $F$  数、光的波长、探测器像素尺寸是影响像斑能量集中程度的参数. 为研究像斑集中程度对定位精度极限的影响, 需控制到达探测器上的艾里斑能量总值不变, 而不是中心强度不变. 即在变化  $F$  数和波长的条件下, 保持光强分布函数在探测器上的积分为常数, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, y, x_0, y_0) dx dy = \text{const.} \quad (18)$$

采用图 2(b) 中的仿真条件, 保持艾里斑能量总值不变, 将  $F$  数由 4 分别变为 2 和 8, 结果如图 4 所示. 对比图 2(b) 可知,  $F$  数较小时, 即像斑能量集中时, 精度极限曲面波动很大, 在像素边缘处取得最优定位精度, 但在像素中心位置定位精度很差. 而  $F$  数较大时, 精度极限曲面波动较小, 指标相对于前者来说比较折中. 另外, 在估计  $x_0$  时  $y$  方向位置影响较小.

进一步地, 由 (1) 式和 (17) 式可知, 对于此艾里斑模型, 光学系统  $F$  数与波长  $\lambda$  对像斑能量集中

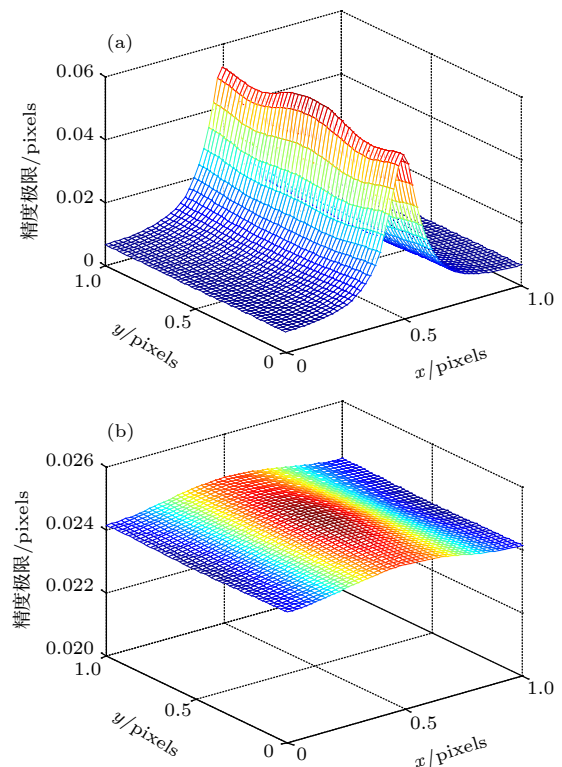


图 4 精度极限-像素相位曲面 (a)  $F$  数为 2; (b)  $F$  数为 8  
Fig. 4. Relationship of the precision limit to the  $x$  and  $y$  pixel phase: (a) The  $F$  of the optical system is 2; (b) the  $F$  of the optical system is 8.

度有同样的影响规律, 如果能量集中度指像面上像斑的大小 (以像素为单位), 则像素尺寸越大, 能量集中度越高. 因此定义  $F$  数和  $\lambda$  乘积与像素尺寸  $h$  的比值为参数  $R_F$

$$R_F = F\lambda/h. \quad (19)$$

$R_F$  反映了像斑的能量集中度情况,  $R_F$  越小, 像斑能量集中度越高, 在像面上覆盖的像素数越少. 即使  $F$  数、 $\lambda$ 、 $h$  发生改变, 只要  $R_F$  不变, 则像斑集中程度不变, 精度极限 (以像素为单位) 不变. 在艾里斑能量总值不变的条件下, 改变  $R_F$ ,  $y$  像素相位为 0.5 时,  $x$  方向精度曲线和  $x$  像素相位的关系如图 5 所示. 可以看出,  $R_F$  越小, 在像素边缘位置定位精度越高, 但牺牲了像素中心位置的精度. 而如果追求较好的总体精度指标  $\sigma_{\text{all}}$ , 应该将  $R_F$  调到一个适当小的数值, 在此例中  $R_F$  为 1 左右,  $\sigma_{\text{all}}$  较好.

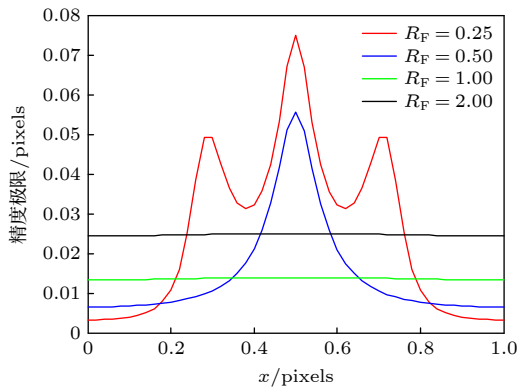


图 5  $y$  像素相位为 0.5 时的精度极限- $x$  像素相位曲线

Fig. 5. Relationship of the precision limit and the  $x$  pixel phase when the  $y$  pixel phase is 0.5.

对不同  $R_F$  条件下的精度极限曲面的  $\sigma_{\text{all}}$  和  $\Delta_{\text{std}}$  及像斑中心位于不同像素相位的最优精度和最劣精度进行进一步研究. 同时  $R_F$  与衍射极限  $\Delta h$  (单位: 像素) 有关,

$$\Delta h \approx 1.22\lambda f/Dh = 1.22R_F, \quad (20)$$

表 2 不同能量集中度条件下精度极限结果

Table 2. Results of the precision limit under different levels of spot energy concentration.

	$R_F = 0.25$	$R_F = 0.50$	$R_F = 1.00$	$R_F = 2.00$
$\sigma_{\text{all}}/\text{pixels}$	0.0335	0.0192	0.0136	0.0247
$\Delta_{\text{std}}/\text{pixels}$	0.0211	0.0122	0.0003	0.0002
最优精度/pixels	0.0033 (边缘)	0.0065 (边缘)	0.0130 (边缘)	0.0244 (边缘)
最差精度/pixels	0.0803 (中心)	0.0566 (中心)	0.0139 (中心)	0.0250 (中心)
衍射极限/pixels	0.3050	0.6100	1.2200	2.4400

将对像斑中心的定位精度与衍射极限进行比较, 结果如表 2 所列. 可以看出,  $R_F$  越小, 虽然总体精度指标较差, 但当像斑中心位于像素边缘, 可以取到更高定位精度, 在此例信噪比的情况下, 最高定位精度可以达到衍射极限的约 100 倍. 因此若追求最高定位精度, 在像素尺寸固定的情况下, 尽量减小  $F$  数和波长的乘积, 并使像斑中心位于像素边缘. 另外, 表 2 的结果单位都为像素, 若保持  $F$  数和波长的乘积不变, 仅增大像素尺寸, 虽然  $R_F$  变小, 但在像面上以微米为单位的定位精度并不会变好. 可以通过计算发现, 仅增大像素尺寸, 在像素边缘处的定位精度 (单位:  $\mu\text{m}$ ) 保持同等水平, 其他位置的定位精度 (单位:  $\mu\text{m}$ ) 一般会变差.

总结来说, 衍射极限虽然不直接影响定位精度极限, 但以限制能量集中度的形式, 制约着像斑中心定位的精度极限. 适当的能量集中度 (本例中  $R_F$  为 1 左右) 会使得定位总体精度极限最高, 继续提高能量集中度会牺牲全量程的总体精度, 而在像素边缘处获得更高的局部精度极限. 如当  $F$  数为 2, 像素尺寸为  $2 \mu\text{m}$ , 波长为  $500 \text{ nm}$ , 中心强度为  $400 \text{ 光子数}/\mu\text{m}^2$ , 暗电流噪声方差为 25, 估计  $x_0$  的总体精度极限为 0.019 像素 (38 nm), 像素中心取得最差精度 0.057 像素 (114 nm), 像素边缘有最优精度 0.007 像素 (14 nm). 将  $F$  数变为 1, 则总体精度极限变为 0.034 像素 (68 nm), 最差精度变为 0.080 像素 (160 nm), 最优精度变为 0.003 像素 (6 nm).

### 3.3 计算窗口和计算方式

由 (3) 式, 局部区域  $A$  的选择也会对定位精度造成影响. 取  $R_F = 2$ , 此时中央亮斑半径为 2.44 像素, 其他仿真条件与 3.2 节中相同, 分析不同大小的计算窗口对精度极限的影响. 在 3.1 和 3.2 节中计算窗口均能包含中央亮斑全部能量, 如图 4(b) 窗口设为  $11 \times 11$  像素, 此时分别设置窗



口大小为  $3 \times 3$  和  $5 \times 5$ , 结果如图 6 所示. 当窗口太小涵盖不到中央亮斑的全部能量时, 精度极限较差. 而窗口为  $5 \times 5$  和图 4(b) 中  $11 \times 11$  精度结果差别不大.

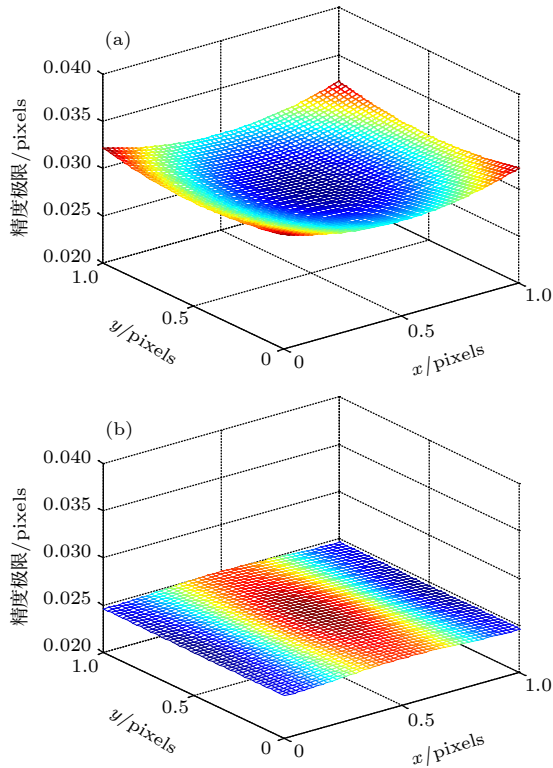


图 6 精度极限-像素相位曲面 (a) 计算窗口为  $3 \times 3$ ; (b) 计算窗口为  $5 \times 5$   
Fig. 6. Relationship of the precision limit to the  $x$  and  $y$  pixel phase: (a) The size of the window used for localization is  $3 \times 3$ ; (b) the size of the window is  $5 \times 5$ .

另外, 在对像斑进行成像或定位过程中, 有时会用到相邻像素合并 (binning) 的图像读出模式和多次测量定位的平均滤波方法. 对于 binning 模式, 相当于在  $F$  数和波长固定的情况下, 增大像素尺寸, 对精度的影响关系可见 3.2 节. 对于  $n$  次测量定位的平均滤波方法, 由于其能将随机噪声降低到原来的  $1/\sqrt{n}$ , 故能将定位精度提高  $\sqrt{n}$  倍. 对于 3.2 节结论中的  $F$  数为 1 的示例, 若采取 100 次重复测量滤波, 在像素边缘处可获得 0.0003 像素 (0.6 nm) 的精度极限.

#### 4 实验像斑的精度极限

在实验室中进行了点目标成像实验. 点目标光源发出的光经过平行光管进入光学系统, 在探测器上成像. 光学系统被固定在转台上, 通过转台小角

度转动, 采集像斑在不同像素相位的灰度值, 以获得  $g_{ij}(x_0, y_0)$ , 实验平台如图 7 所示. 其中光学敏感器为清华大学皮型星敏感器, 焦距为 25 mm,  $F$  数为 2, 主要敏感波长为 400—800 nm, 探测器尺寸为  $5.3 \mu\text{m}$ . 利用 2.1 节中的任意强度分布像斑精度极限估计方法, 在  $y$  像素相位固定的情况下, 对定位精度极限和  $x$  像素相位的关系进行计算, 如图 8(a) 所示, 右上角为采样得到的灰度响应, 此时能量较为集中, 故在像素边缘有较好的精度极限. 调节平型光管端光源的距离, 减少像斑能量集中度, 如图 8(b) 所示, 可从右上角的灰度响应看出

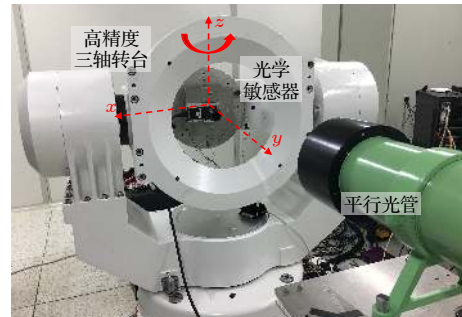


图 7 实验平台

Fig. 7. Experiment platform.

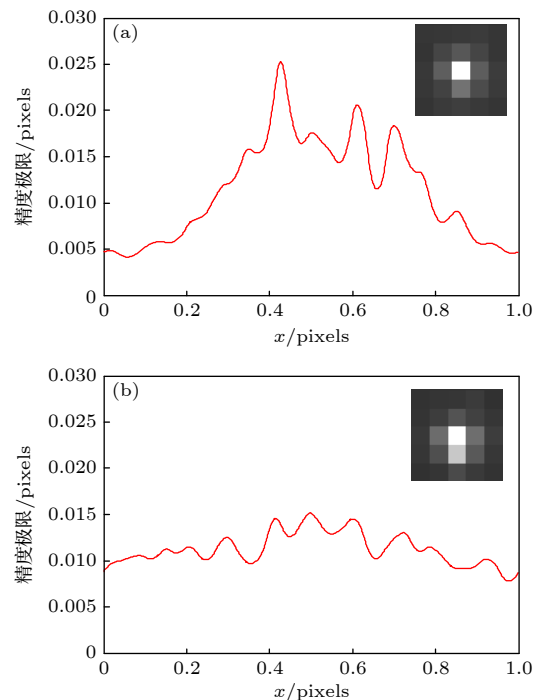


图 8 实验室像斑的精度极限- $x$  像素相位曲线 (a) 能量较集中强度分布; (b) 能量较发散强度分布

Fig. 8. Relationship of the precision limit and the  $x$  pixel phase for laboratory obtained image spots: (a) The precision limit for a energy concentrated spot; (b) the precision limit for a spot with lower energy concentration.



像斑的能量变得发散了, 此时精度极限曲线变得平缓, 相对于图 8(a) 有折中的表现. 经过分析其能量分布不是标准的艾里斑, 但其精度表现仍符合前文对艾里斑分析的定性结论. 即为得到最优定位精度极限, 应该尽可能提高能量集中度, 并将像斑位于像素边缘, 或者在测量中更相信边缘的测量结果.

## 5 结 论

本文基于 CRLB 理论发展了针对任意强度分布像斑的光学测量精度极限计算方法, 并以典型光斑模型艾里斑为例, 分析了成像过程中反映信噪比、能量集中度、计算方式的参数对定位精度的影响规律, 并得出结论: 当暗电流噪声相对较大, 或者像斑能量较集中时, 可使像斑中心移动到像素边缘进行测量 (或更相信像素边缘处的测量结果), 以获得更好的精度极限; 衍射极限以限制能量集中度的形式制约着像斑中心定位的精度极限, 适当的能量集中度会使得总体定位精度极限最高, 继续提高能量集中度则会牺牲全量程的总体精度, 提升像素边缘处的测量精度, 其可以远超衍射极限; 可使用多次测量的方式减少随机误差, 使精度极限达到纳米级甚至更高精度. 通过实验验证了所得结论对类似艾里斑的像斑同样有效. 对于成像强度分布与艾里斑有较大差异的, 依然可使用本文所述方法进行精度极限分析, 来为原子及近原子尺度制造中光学测量的应用和优化提供理论指导.

## 参考文献

- [1] Fang F Z, Zhang N, Guo D M, Kornel E, Benny C, Liu K, Kazuya Y 2019 *Int. J. Extrem. Manuf.* **1** 012001
- [2] Fang F Z 2020 *China Mech. Eng.* **537** 5 (in Chinese) [房丰洲 2020 *中国机械工程* **537** 5]
- [3] Betzig E, Patterson G H, Sougrat R, Lindwasser O W, Olenych S, Bonifacio J S, Davidson M W, Lippincott-Schwartz J, Hess H F 2006 *Science* **313** 1642
- [4] Manley S, Gillette J M, Patterson G H, Shroff H, Hess H F, Betzig E, Lippincott-Schwartz J 2008 *Nat. Methods* **5** 155
- [5] Patterson G, Davidson M, Manley S, Lippincott-Schwartz J 2010 *Annu. Rev. Phys. Chem.* **61** 345
- [6] Bates M, Huang B, Dempsey G T, Zhuang X 2007 *Science* **317** 1749
- [7] Schmidt R, Wurm C A, Punge A, Egner A, Jakobs S, Hell S W 2009 *Nano Lett.* **9** 2508
- [8] Fölling J, Bossi M, Bock H, Medda R, Wurm C A, Hein B, Jakobs S, Eggeling C, Hell S W 2008 *Nat. Methods* **5** 943
- [9] Hess S T, Gould T J, Gudheti M V, Maas S A, Mills K D, Zimmerberg J 2007 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **104** 17370
- [10] Shroff H, Galbraith C G, Galbraith J A, Betzig E 2008 *Nat. Methods* **5** 417
- [11] Yildiz A, Forkey J N, McKinney S A, Ha T, Goldman Y E, Selvin P R 2003 *Science* **300** 2061
- [12] Hidaka Y, Ishikawa M 2012 *US Patent* 8 223 345
- [13] Shalkan S, Sharman M C, Pravdo S H 1995 *Appl. Opt.* **34** 6672
- [14] Shao M, Nemati B, Zhai R, Goullioud R, Malbet F, Leger A 2011 *Proc. SPIE* **8151** 81510V
- [15] Malbet F, Crouzier A, Leger A, Shao M, Goullioud R, Lagage P, Delpech M 2013 *Proc. SPIE* **8864** 88641D
- [16] Joonhyung K, Jeawan H, Yong-Seok K, Dong-Youn L, Kyumin L, Sang-min L, Sang-il P 2003 *Rev. Sci. Instrum.* **74** 4378
- [17] Wang Y L, Wang H M, Bi S S 2014 *AIP Adv.* **4** 057130
- [18] EMVA [https://www.emva.org/wp-content/uploads/EMVA\\_1288-3.1\\_a.pdf](https://www.emva.org/wp-content/uploads/EMVA_1288-3.1_a.pdf) [2020-11-15]
- [19] Winick K A, 1986 *J. Opt. Soc. Am. A* **3** 1809
- [20] Wang Y L, Li X L, Bi S S, Zhu X F, Liu J H 2017 *Meas. Sci. Technol.* **28** 015402
- [21] Fisher R A 1922 *Philos. Trans. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci.* **222** 309
- [22] Rao C R 1992 *Breakthroughs in Statistics* (New York: Springer) p235
- [23] Rao C R 1947 *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **43** 280
- [24] Janesick J, Klaasen K, Elliott T 1985 *Proc. SPIE* **570** 7

SPECIAL TOPIC—Toward making functional devices at an atomic scale:  
Fundamentals and frontiers

## Analysis of optical measurement precision limit for close-to-atomic scale manufacturing<sup>\*</sup>

Zhan Hai-Yang    Xing Fei<sup>†</sup>    Zhang Li

(*Department of Precision Instrument, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

( Received 16 November 2020; revised manuscript received 21 December 2020 )

### Abstract

Measurement technology with nanometer scale or higher level precision is the basis and guarantee for developing atomic and close-to-atomic scale manufacturing. Optical measurement has the advantages of high precision, wide range and real-time measurement. The precision of localizing a single imaging spot's center is not limited by the diffraction limit and could reach nanometer scale. However, the shot noise of light and the dark current noise of the detector bring about a precision limit for optical measurement. Based on the Cramer-Rao lower bound theory, a precision limit estimation method for general imaging profiles is developed in this paper. Taking the typical Airy spot for example, the influences of the parameters such as signal-to-noise ratio, energy concentration and processing method on the positioning precision limit are analyzed, and suggestions and conclusions for improving the measurement precision are given. The precision limit of a laboratory imaging spot is calculated, which verifies that the conclusions are also suitable for the imaging profiles similar to the Airy spot. The research provides the analytical method and theoretical guidance for the application and optimization of optical measurement in atomic and close-to-atomic scale manufacturing.

**Keywords:** atomic and close-to-atomic scale manufacturing, optical measurement, precision limit

**PACS:** 07.60.-j, 06.20.DK, 02.50.-r

**DOI:** 10.7498/aps.70.20201924

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Key Research and Development Program of China (Grant No. 2016YFB0501201) and the National Project for Research and Development of Major Scientific Instruments (Grant No. 51827806).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [xingfei@mail.tsinghua.edu.cn](mailto:xingfei@mail.tsinghua.edu.cn)