

外磁场中的粲偶素

龚闯 郭星雨

Charmonia in an external magnetic field

Gong Chuang Guo Xing-Yu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 170302 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20210262

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210262>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

颗粒物质内自旋小球运动行为的数值模拟研究

Numerical simulation of a spinning sphere moving in granular matter

物理学报. 2018, 67(1): 014702 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171459>

原子核电荷半径的研究

Study of nuclear charge radius

物理学报. 2020, 69(16): 162101 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191643>

电子型FeSe基高温超导体的磁通束缚态与Majorana零能模

Vortex bound states and Majorana zero mode in electron-doped FeSe-based high-temperature superconductor

物理学报. 2021, 70(1): 017401 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201673>

拓扑超导Majorana束缚态的探索

Exploration of Majorana bound states in topological superconductors

物理学报. 2020, 69(11): 117102 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20190959>

多带超导体中的自发磁场和奇频配对态

Spontaneous magnetic field and odd-frequency pairing state in multiband superconductors

物理学报. 2019, 68(16): 167401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190445>

坐标空间中构造的Breit夸克势与介子和夸克偶素的质量劈裂

Construction of Breit quark potential in coordinate space and mass splits of meson and quarkonium

物理学报. 2018, 67(9): 091201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172155>

外磁场中的粲偶素*

龚 闯¹⁾²⁾ 郭 星 雨^{1)2)†}

1) (华南师范大学量子物质研究院, 广东省核物质科学与技术重点实验室, 广州 510006)

2) (华南师范大学南方核科学计算中心, 粤港量子物质联合实验室, 广州 510006)

(2021 年 2 月 4 日收到; 2021 年 4 月 13 日收到修改稿)

在相对论重离子碰撞早期, 会产生一个极强的磁场. 初始碰撞产生的粲偶素会受到磁场的影响, 进而携带磁场的信息. 本文利用磁场下的两体薛定谔方程研究磁场对粲偶素的影响. 利用角动量展开的方法, 数值计算了不同磁场强度下粲夸克偶素的能谱. 采取的方案是把三维波函数展开成不同轨道角动量以及自旋态的叠加, 实际计算过程中发现, 当 $n \leq 2$, $l \leq 7$ 时能很好地满足精确度. 进一步, 哈密顿量可以写成 $H = H_0 + (qB)^2 H_1 + qBP_{\text{ps}, \perp} H_2$ 形式, 其中 H_0 , H_1 , H_2 不依赖于 B 和 $P_{\text{ps}, \perp}$, 因此只要计算出 H_0 , H_1 , H_2 就能求出任意 B 和 $P_{\text{ps}, \perp}$ 下的哈密顿量. 这样的数值方法在保证计算精度的同时显著减少了计算量. 计算结果表明随着磁场和总动量的增加, 粲偶素的质量增大, 在磁场强度为 $20m_\pi^2$, 总动量为 1.8 GeV 时, 质量的增加量为 20%.

关键词: 束缚态, 自旋, 重粒子碰撞, 粲夸克**PACS:** 03.65.Ge, 21.10.Hw, 52.20.Hv, 14.65.Dw**DOI:** 10.7498/aps.70.20210262

1 引 言

夸克是目前人类认识到的最深层次, 描述夸克之间的相互作用的是量子色动力学 (QCD) 理论. QCD 解禁闭相变被认为会发生在相对论重离子碰撞系统中^[1,2]. 重离子碰撞中产生的夸克胶子等离子体 (QGP) 是研究 QCD 性质的重要媒介. 粲偶素是粲夸克和反粲夸克组成的束缚态, 当其处在“夸克禁闭”解除的 QGP 中时, 粲夸克和反粲夸克之间的相互作用会由于周围大量色荷的德拜屏蔽效应而减弱, 当 QGP 的温度足够高, 色荷德拜屏蔽半径小于粲偶素的束缚半径的时候, 该束缚态将被分解, 其产额会被压低. 因此, 粲偶素在相对论重离子碰撞中产额相对质子-质子碰撞中产额的压低被认为是 QGP 产生的重要标志^[3]. 由于重离子

都带有正电荷, 在重离子非对心碰撞过程中会产生强大的磁场. 对于 J/ψ 粒子, 其主要来源为初始硬过程产生的粲夸克偶素对. 而在碰撞初期, 也正是碰撞产生的磁场最强的时刻. 磁场应该会影响 J/ψ 粒子的产生, 由于磁场有一个特定的方向, 在该磁场影响下产生的 J/ψ 粒子也可能存在各向异性^[4]. 为了定量研究 J/ψ 粒子的演化, 了解磁场对夸克偶素的影响是必不可少的. 对于重夸克偶素这样由两个较重的粒子构成的束缚态, 利用薛定谔方程进行研究是合理的^[5]. 然而, 在有磁场的情况下, 角动量不再守恒, 数值求解的复杂度大大增加, 我们提出利用真空中的能量本征函数进行展开, 来实现计算的简化. 虽然碰撞产生的粲夸克偶素的整体动量可以很大, 但是由于粲夸克的质量较大, 在束缚态中正反粲夸克的相对运动速度并不会很大. 文献^[6]中研究了粲夸克偶素束缚态的相对论修正, 其对介

* 广东省基础与应用基础重大项目 (批准号: 2020B0301030008) 和国家自然科学基金 (批准号: 11905066) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: guoxy@m.scnu.edu.cn

子能量的修正大约在 10% 左右.

2 薛定谔方程的简化

真空中的夸克偶素的薛定谔方程可以写作 [7]:

$$\left[\frac{\mathbf{p}_a^2}{2m_q} + \frac{\mathbf{p}_b^2}{2m_q} + V \right] \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = [E - 2m_q] \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{r}), \quad (1)$$

这里的能量本征值 E 不仅包含夸克偶素的动能, 也包含夸克偶素的静止质量, 动量 $\mathbf{P}_{\text{kin}} = \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b$ 是守恒量. 考虑薛定谔方程处于稳恒磁场中的时候, 利用最小耦合有 [8]:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(\mathbf{p}_a - q_a \mathbf{A}_a)^2}{2m_q} + \frac{(\mathbf{p}_b - q_b \mathbf{A}_b)^2}{2m_q} \right. \\ & \left. + V(\mathbf{R}, \mathbf{r}) - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \right] \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \\ & = [E - 2m_q] \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2)$$

这里 $\boldsymbol{\mu} = q/m_q(\mathbf{S}_a - \mathbf{S}_b)$ 是自旋磁矩. 此时, 很明显总机械动量 $\mathbf{P}_{\text{kin}} = \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b - q_a \mathbf{A}_a - q_b \mathbf{A}_b$ 在该系统下不守恒. 考虑在真空条件下的静止质量 $m_m = E - \frac{(\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)^2}{4m_q}$, 利用动能的期望值, 重新定义该系统下的静止质量

$$m_m = E - \frac{\langle \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b - q_a \mathbf{A}_a - q_b \mathbf{A}_b \rangle^2}{4m_q}.$$

为了简化形式, 做如下坐标变换:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_a + \frac{1}{2} \mathbf{r}_b, \quad (3)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b. \quad (4)$$

相应的动量表达形式如下:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = -i\delta_R, \quad (5)$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} \mathbf{p}_a - \frac{1}{2} \mathbf{p}_b = -i\delta_r. \quad (6)$$

在相对论重离子碰撞中, 电磁场的变化是非常快速的, 但是其定量的衰减速度, 不同的模型给出的结果相差数个量级, 对应的电场强度也是如此, 根据文献 [9] 的计算结果, 电场强度相比于磁场强度仍较小; 紧夸克偶素的产生也是一个时间尺度非常短的强相互作用过程 [10]. 在本文的研究中, 假设后者的时间尺度短于前者, 因此在计算束缚态时可以将磁场近似看成是恒定磁场. 现在规定矢量势 $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}$, 两个夸克的带电量为 $q_a = -q_b = q$.

在这个情况下, 可以得出:

$$\begin{aligned} & \frac{(\mathbf{p}_a - q_a \mathbf{A}_a)^2}{2m_q} + \frac{(\mathbf{p}_b - q_b \mathbf{A}_b)^2}{2m_q} \\ & = \frac{\mathbf{P}^2 + \frac{1}{4} q^2 (\mathbf{B} \times \mathbf{r})^2 - q(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{P}}{4m_q} \\ & \quad + \frac{\mathbf{p}^2 + \frac{1}{4} q^2 (\mathbf{B} \times \mathbf{R})^2 - q(\mathbf{B} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{p}}{m_q} \\ & \equiv \frac{\mathbf{P}_{\text{kin}}^2}{4m_q} + \frac{\mathbf{p}'^2}{m_q}. \end{aligned} \quad (7)$$

此时, $\mathbf{P}_{\text{kin}} = \mathbf{P} - \frac{1}{2} q \mathbf{B} \times \mathbf{r}$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \frac{1}{2} q \mathbf{B} \times \mathbf{R}$, 因此有如下对易关系:

$$\left[\mathbf{P} + \frac{1}{2} q \mathbf{B} \times \mathbf{r}, \mathbf{p}' \right] = 0 \Rightarrow \left[\mathbf{P} + \frac{1}{2} q \mathbf{B} \times \mathbf{r}, \mathbf{H} \right] = 0. \quad (8)$$

因此, 动量 $\mathbf{P}_{\text{ps}} = \mathbf{P} + \frac{1}{2} q \mathbf{B} \times \mathbf{r} = \mathbf{P}_{\text{kin}} + q \mathbf{B} \times \mathbf{r}$ 是守恒量. 此外, 通过分离波函数中的 R 能发现:

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{P}_{\text{ps}} - \frac{1}{2} q \mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{R}} \psi(\mathbf{r}), \quad (9)$$

$$\mathbf{p}' \Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{P}_{\text{ps}} - \frac{1}{2} q \mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{R}} \mathbf{p} \psi(\mathbf{r}), \quad (10)$$

$$\mathbf{p}'^2 \Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{P}_{\text{ps}} - \frac{1}{2} q \mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{R}} \mathbf{p}^2 \psi(\mathbf{r}). \quad (11)$$

最后, 稳恒磁场中的薛定谔方程可以简化为 [11]:

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{p}^2 + m_q V - q(\mathbf{S}_a - \mathbf{S}_b) \cdot \mathbf{B} \right. \\ & \left. + \frac{-2q \mathbf{P}_{\text{ps}} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} + q^2 (\mathbf{B} \times \mathbf{r})^2}{4} \right] \psi(\mathbf{r}) \\ & = \left[m_q E - 2m_q^2 - \frac{\mathbf{P}_{\text{ps}}^2}{4} \right] \psi(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (12)$$

此时能量 E 对应哈密顿算符的本征态, m_q 包含两体相互作用能和磁场中的塞曼能, 以及其他磁场的贡献. 磁场的影响包括以下三项: 第一项是 $-\frac{q}{m_q}(\mathbf{S}_a - \mathbf{S}_b) \cdot \mathbf{B}$, 它是由夸克的自旋和磁场的相互作用引起的, 因此称为自旋磁场相互作用项; 第二项是 $-\frac{q}{2m_q} \mathbf{P}_{\text{ps}} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} = \frac{qB P_{\text{ps},\perp}}{2m_q} r \sin \theta \sin \varphi$, 它是由 Lorentz 力引起的, 因此称为 Lorentz 项; 第三项是 $\frac{q^2}{4m_q} (\mathbf{B} \times \mathbf{r})^2$, 该项在垂直于磁场方向附加了一个额外的势的约束, 称为约束项. 这里, $P_{\text{ps},\perp}$ 表示 \mathbf{P}_{ps} 的投影垂直于磁场 \mathbf{B} , 即 x - y 平面. 为了简化, 选取 $P_{\text{ps},\perp}$ 的方向作为 x 轴, 有 $\langle \mathbf{P}_{\text{kin}} \rangle = \mathbf{P}_{\text{ps}} +$

$qB \langle y \rangle e_x$ ^[12]. 这样定义了一个新的守恒动量 \mathbf{P}_{ps} , 化简后的两体薛定谔方程只与两个粒子的相对坐标 \mathbf{r} 有关, 而与它们的整体运动无关.

3 将波函数在角动量本征态上展开

将波函数在轨道角动量和自旋角动量的共同本征态上展开, 一方面能将三维的数值计算进行简化, 另一方面能使不同轨道角动量的波函数的物理意义更加清晰. 将中心势与自旋-自旋相互作用势一起考虑^[13,14]:

$$Vr = V_c(r) + V_s(r)\mathbf{S}_a \cdot \mathbf{S}_b. \quad (13)$$

自旋-自旋相互作用使得三重态和自旋三重态相互分离; 三重态中 T^0 和 S^0 相互耦合不再是 H 的本征态, T^+ 和 T^- 仍是 H 的本征态, 产生了不同自旋成分的混合, 例如 η_c 和 J/ψ , 定义自旋态:

$$|T^+\rangle \equiv |1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \quad (14)$$

$$|T^-\rangle \equiv |1, -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle, \quad (15)$$

$$|T^0\rangle \equiv |1, 0\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (16)$$

$$|S^0\rangle \equiv |0, 0\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (17)$$

这样就能得到如下结果:

$$\mathbf{S}_a \cdot \mathbf{S}_b |T^{\pm,0}\rangle = \frac{1}{4} |T^{\pm,0}\rangle, \quad (18)$$

$$\mathbf{S}_a \cdot \mathbf{S}_b |S^0\rangle = -\frac{3}{4} |S^0\rangle, \quad (19)$$

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{S}_a - \mathbf{S}_b) |T^{\pm}\rangle = 0, \quad (20)$$

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{S}_a - \mathbf{S}_b) |T^0\rangle = B |S^0\rangle, \quad (21)$$

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{S}_a - \mathbf{S}_b) |S^0\rangle = B |T^0\rangle. \quad (22)$$

从上面的结果可以看出, $S_z = \pm 1$ 的三重态仍然是 H 的本征态, 而 $S_z = 0$ 的三重态是自旋单态和三重态的混合态, 因此它不再是 H 的本征态. 此外, 其他两项还会打破空间的旋转对称性, 并且能量的本征态不再是轨道角动量的本征态, 可以用球谐函数 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ 来描述^[15]. 此外, 波函数 $\psi(\mathbf{r})$ 还包含了轨道角动量分量. 于是, 我们在自旋和球谐波函数的共同本征态上将波函数展开.

$$\phi^{t\pm}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{r} \psi^{t\pm}(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} a_{l,m}^{t\pm} \phi_{l,m}^{t\pm}(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \phi^{s0,t0}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{r} \psi^{s0,t0}(\mathbf{r}) &= \sum_{l,m} a_{l,m}^{s0,t0} \phi_{l,m}^{s0,t0}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \\ &+ \sum_{l,m} a_{l,m}^{s0} \phi_{l,m}^{s0}(r) Y_l^m(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (24)$$

通过应用微扰法找出磁场的势能导致的所有作用. 为了方便, 把薛定谔方程写成如下形式:

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ -\frac{1}{m_q} \frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{1}{m_q} \frac{\hat{L}^2}{r^2} + V_c + V_s \right) \right. \\ &+ \left(\frac{qB P_{ps,\perp}}{2m_q} y \right) + \left[-\frac{qB}{m_q} (S_{az} - S_{bz}) \right] \\ &\left. - \left[E - 2m_q - \frac{P_{ps}^2}{4m_q} \right] \right\} \phi(r) \\ &= \left(-\frac{1}{m_q} \frac{d^2}{dr^2} + V + V_L + V_B + V_S - E_{\text{eff}} \right) \phi(r). \end{aligned} \quad (25)$$

选择 Cornell 势和格点理论中的自旋-自旋相互作用势作为中心势^[16],

$$V_c(r) = -\frac{\alpha}{r} + \sigma r, \quad (26)$$

$$V_s(r) = \beta e^{-\gamma r} \mathbf{S}_a \cdot \mathbf{S}_b. \quad (27)$$

对于粲夸克参数, $m_c = 1.29 \text{ GeV}$, $\sigma = 0.174 \text{ GeV}^2$, $\alpha = 0.312$, $\beta = 1.982 \text{ GeV}$, $\gamma = 2.06 \text{ GeV}$.

对于不同的 l 和 m , 薛定谔方程在该表象中的矩阵元可以通过下面的方式得到. 球谐函数的表达式为:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (28)$$

利用 Legendre 多项式的正交关系和递推关系^[17,18]:

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}, \quad (29)$$

$$(2l+1)(1-x^2)^{1/2} P_l^m(x) = P_{l+1}^{m+1}(x) - P_{l-1}^{m+1}(x), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} &(2l+1)(1-x^2)^{1/2} P_l^m(x) \\ &= (l+m)(l+m-1) P_{l-1}^{m-1}(x) \\ &\quad - (l-m+2)(l-m+1) P_{l+1}^{m-1}(x), \end{aligned} \quad (31)$$

可以得到

$$\begin{aligned}
 \left\langle Y_{l'}^{m'} \left| -\frac{1}{m_q} \frac{d^2}{dr^2} \right| Y_l^m \right\rangle &= 0, \\
 \left\langle Y_{l'}^{m'} \left| \frac{1}{m_q} \frac{\hat{L}^2}{r^2} + V_s/4 + V_c \right| Y_l^m \right\rangle &= \frac{1}{r^2 m_q} l(l+1) \delta_{l'l} \delta_{m'm} + \left(\frac{-\alpha}{r} + \sigma r + \frac{1}{4} \beta e^{-\gamma r} \right) \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \\
 \left\langle Y_{l'}^{m'} \left| \frac{-qB}{m_q} (S_{az} - S_{bz}) \right| Y_l^m \right\rangle &= \pm \left(\frac{-qB}{m_q} \right) \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \\
 \left\langle Y_{l'}^{m'} \left| \frac{qBP_{ps,\perp}}{2m_q} y \right| Y_l^m \right\rangle &= \frac{qBP_{ps,\perp}}{2m_q} r \left\{ \sqrt{\frac{(l+m+2)(l+m+1)}{(2l+3)(2l+1)}} \delta_{l'+1,l} - \sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)(2l+1)}} \delta_{l'-1,l} \right\} \frac{i}{2} \delta_{m,m'+1}, \\
 \left\langle Y_{l'}^{m'} \left| \frac{q^2 B^2}{4m_q} (x^2 + y^2) \right| Y_l^m \right\rangle &= \frac{q^2 B^2 r^2}{4m_q} (A' - B' - C') \delta_{m,m'+1}, \\
 A' &= \left[\frac{(l+m+2)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)} + \frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l+1)(2l-1)} \right] \delta_{l'l}, \\
 B' &= \frac{1}{2l-1} \sqrt{\frac{1}{(2l-3)(2l+1)}} (l+m)(l+m-1)(l-m)(l-m-1) \delta_{l'+1,l-1}, \\
 C' &= \frac{1}{2l+3} \sqrt{\frac{1}{(2l+5)(2l+1)}} (l+m+2)(l+m+1)(l-m+2)(l-m+1) \delta_{l'-1,l+1}.
 \end{aligned}$$

这里只给出矩阵 l, m 的非对角项, 对角项 $l = l', m = m'$ 可以通过上式非常容易得到. 最终, 薛定谔方程可以化简为如下形式:

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + m_q V_c + \frac{1}{4} m_q V_s + \frac{1}{r^2} U + \frac{q^2 B^2}{4} r^2 V + \frac{qBP_{ps,\perp}}{2} rW - \lambda \right] \phi^\pm(r) = 0, \quad (32)$$

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + m_q V_c + \frac{1}{4} m_q V_s + \frac{1}{r^2} U + \frac{q^2 B^2}{4} r^2 V + \frac{qBP_{ps,\perp}}{2} rW - \lambda \right] \phi^{t0}(r) - qB\phi^{s0}(r) = 0, \quad (33)$$

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + m_q V_c - \frac{3}{4} m_q V_s + \frac{1}{r^2} U + \frac{q^2 B^2}{4} r^2 V + \frac{qBP_{ps,\perp}}{2} rW - \lambda \right] \phi^{s0}(r) - qB\phi^{t0}(r) = 0, \quad (34)$$

这里, 矩阵 U, V, W 分别被定义为:

$$\lambda = m_q E - 2m_q^2 - P_{ps}^2/4, \quad (35)$$

$$U_{(l'^2+l'+m'+1, l^2+l+m+1)} = l(l+1) \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}, \quad (36)$$

$$V_{(l'^2+l'+m'+1, l^2+l+m+1)} = u_{l,m} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} - v_{l,m} \delta_{l+2,l'} \delta_{m,m'} - v_{l-2,m} \delta_{l-2,l'} \delta_{m,m'}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
 W_{(l'^2+l'+m'+1, l^2+l+m+1)} &= \omega_{l-1, -m-1} \delta_{l-1,l'} \delta_{m+1,m'} - \omega_{l,m} \delta_{l+1,l'} \delta_{m+1,m'} \\
 &+ \omega_{l-1, -m-1} \delta_{l-1,l'} \delta_{m-1,m'} - \omega_{l,-m} \delta_{l+1,l'} \delta_{m-1,m'}, \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{参 数 } \lambda &= m_q E - 2m_q^2 - P_{ps}^2/4, \quad u_{l,m} = \frac{2(l^2 + l - l_m^2)}{(2l-1)(2l+3)}, \quad v_{l,m} = \frac{1}{2l+3} \frac{\sqrt{((l+1)^2 - m^2)((l+2)^2 - m^2)}}{\sqrt{(2l+1)(2l+5)}}, \\
 \omega_{l,m} &= \frac{\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)}}{2i\sqrt{(2l+1)(2l+3)}}.
 \end{aligned}$$

这样, 就将一个三维薛定谔方程转化为一维的薛定谔方程, 能够求解它的本征函数和本征值. 在计算过程中要注意轨道角量子数 l 的截断, l 要选取得足够大, 以至于 $a_{l,m}$ 的影响能够忽略^[19,20]. 此

时的问题已经可以直接数值求解, 然而为了较为精确地求解径向微分方程, 离散化之后的格点数需要在 $10^3 - 10^4$ 之间, 由于我们需要计算不同磁场强度以及 P_{ps} 下的方程, 这样的计算仍显得较为繁琐.

为了进一步简化, 我们将径向波函数用无磁场的能量本征函数进行展开,

$$\phi_{l,m}^s(r) = \sum_n c_{n,l,m}^s \phi_{n,l}^s(r), \quad (39)$$

此处 s 指代自旋指标. 注意到在无磁场时, 哈密顿量对 m 量子数是简并的, 因此径向本征函数不依赖于 m . 由此, 最终可以将哈密顿量化为如下矩阵形式:

$$H_{nn',ll',mm'}^{+ss'} = \langle \phi_{n',l'}^{s'} Y_{l'}^{m'} | H | \phi_{n,l}^s Y_l^m \rangle. \quad (40)$$

此时哈密顿矩阵的维度视求解的自旋态不同, 为 $n(l+1)^2$ 或 $2n(l+1)^2$. 在实际计算中发现, 取 $n \leq 2$, $l \leq 7$ 已经能够很好地满足计算精度. 因此矩阵维度在 10^2 量级. 进一步, 注意到

$$H = H_0 + (qB)^2 H_1 + qBP_{\text{ps},\perp} H_2, \quad (41)$$

其中 H_0 , H_1 , H_2 均不依赖于 B 和 $P_{\text{ps},\perp}$. 因此, 只要计算出 H_0 , H_1 和 H_2 就可以得到任意 B 和 $P_{\text{ps},\perp}$ 下的哈密顿量.

4 数值方法

最终的数值计算流程可以总结如下:

- 1) 在无磁场的情况下使用有限差分方法计算能量本征值 $E_{n,l}$ 和本征函数 $\phi_{n,l}$ [21];
- 2) 利用 $E_{n,l}$ 和 $\phi_{n,l}$, 计算 H_0 , H_1 和 H_2 的矩阵表示;
- 3) 选定不同的 B 和 $P_{\text{ps},\perp}$, 利用 (6) 式给出完整哈密顿量的矩阵形式, 并数值求解本征值和本征函数.

因此, 具体的数值任务就是求解矩阵的本征值问题, 由于我们只关注最低的几个本征能量和本征态, 利用逆幂方法可以很好地实现这个目标, 对于任意一个非简并的本征态有

$$\hat{H}\psi_k = \lambda_k \psi_k, \quad (42)$$

这里 ψ_k 构成一组正交归一完备集, λ_k 则是每一个波函数对应的本征值. 在等式两边分别减去一个特征值 $\tilde{\lambda}$, 并对其取逆次幂, 则有

$$(\hat{H} - \tilde{\lambda})^{-n} \psi_k = (\lambda_k - \tilde{\lambda})^{-n} \psi_k. \quad (43)$$

对于任意一个波函数 ψ , 均可以在 ψ_k 的完备集上将其展开:

$$\psi = \sum_k c_k \psi_k. \quad (44)$$

代入 (43) 式有

$$(\hat{H} - \tilde{\lambda})^{-n} \psi = \sum_k (\lambda_k - \tilde{\lambda})^{-n} c_k \psi_k. \quad (45)$$

如果满足 $|\tilde{\lambda} - \lambda_i| < |\tilde{\lambda} - \lambda_{j \neq i}|$ 和 $c_i \neq 0$, 即当本征态 ψ_i 对应的本征值比其他所有的本征态对应的本征值更接近 $\tilde{\lambda}$ 时, 并且展开系数 $c_i \neq 0$ 时, 在 n 趋近无穷的时候有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\hat{H} - \tilde{\lambda})^{-n} \psi}{\|(\hat{H} - \tilde{\lambda})^{-n} \psi\|} = \psi_i. \quad (46)$$

通过这个方法不仅可以得到 H 的基态波函数, 也可以通过改变 $\tilde{\lambda}$ 的值, 得到其不同激发态的波函数, 以及不同态对应的本征值. 对于薛定谔方程 (34) 式—(36) 式, 在离散坐标空间中, 微分 $\frac{d^2}{dr^2} \psi$ 能够写成 $\frac{\psi(r+h) + \psi(r-h) - 2\psi(r)}{h^2}$ 的形式, 其他的项也可以写成矩阵的形式. 因此哈密顿算符 \hat{H} 能够写成矩阵的形式, 它的逆矩阵也很好得出, 可以使用逆幂算法.

5 结果

本文首先验证了对于角量子数的阶段是否合理, 选取了 $l \leq 7$, 图 1 分别给出了 $qB = 10m_\pi^2$, $P_{\text{kin}} = 1 \text{ GeV}$, 在 $l = 7$ 和 $l = 6$ 两种情况下求解基态本征波函数. 图中红色曲线是 $l = 6$ 的波函数, 蓝色是 $l = 7$ 的波函数, 可以看出, 两种情况下的本征态基本重合在一起, 即波函数 (25) 式和 (26) 式中的展开系数 $a_{l,m}$ 在 $l = 7$ 的时候趋近于零, 所以在计算过程中选取 l 截断到 7 是完全合理的. 由于图 1 中的两条曲线完全重合, 因此定义参数 $A = \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_{l=6} - \psi_{l=7})^2 r^2 dr$, 计算 $A = 8.79481052 \times 10^{-13}$, 其他的物理量的变化与图 1 中的变化相似.

图 2 给出了磁场基态波函数对质量和极化动量的依赖性. 对于粲偶素而言, 随着介子动量的不断增加, 洛伦兹力也不断增大, 将夸克拉扯得更大. 同时介子的质量 m_q 也会随着总动量的增加而不断变大, 这个增加的效应会在磁场越大的时候愈发明显. 当磁场强度 $eB = 20m_\pi^2$, $P_{\text{kin}} = 1.8 \text{ GeV}$ 时, 介子的质量增加了 $1/5$. 而对于磁场较弱或者 P_{kin} 较小的情况, 质量的增加量则有所减小. 这样一个非平庸的色散关系将会有一些非常有趣的物理后果. 例如, 一些在一般情况下由于能动量守恒而被禁戒

的衰变模式, 如 $J/\psi \rightarrow J/\psi\gamma\gamma$, 在磁场中就有可能发生, 如果能够用类似的方法进一步研究 D 介子的能谱, 也可以探讨 $J/\psi \rightarrow D\bar{D}$ 的可能性.

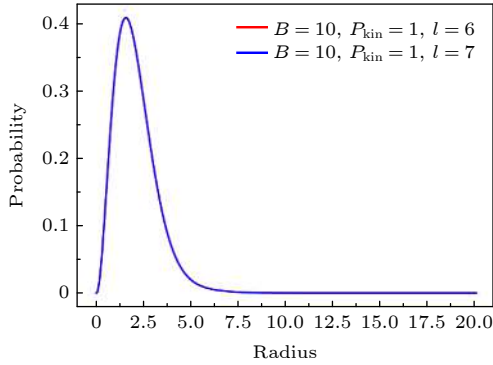


图 1 $qB = 10m_\pi^2$, $P_{\text{kin}} = 1 \text{ GeV}$ 时 $l = 7$ 和 $l = 6$ 的本征态
Fig. 1. The eigenstates of $l = 7$ and $l = 6$ at $qB = 10m_\pi^2$ and $P_{\text{kin}} = 1 \text{ GeV}$.

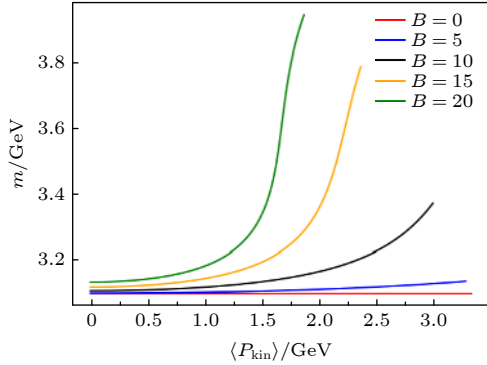


图 2 $qB = 0m_\pi^2$ (红色), $qB = 5m_\pi^2$ (蓝色), $qB = 10m_\pi^2$ (黑色), $qB = 15m_\pi^2$ (橙色), $qB = 20m_\pi^2$ (绿色) 下, J/ψ 粒子的质量随 $\langle P_{\text{kin},\perp} \rangle$ 的变化图像

Fig. 2. The momentum $\langle P_{\text{kin},\perp} \rangle$ dependence of mass m and electric dipole moment $q\langle y \rangle$ for J/ψ^\pm in magnet field with $qB = 0$ (dashed black), 5(red), 10 (blue), 15 (violet) and 20 (orange) m_π^2 .

6 总 结

利用薛定谔方程研究磁场中的粲偶素本征态. 通过将波函数及哈密顿量在无磁场的能量本征态

上展开, 能在大大减少计算量的同时保证结论的有效性. 通过逆幂算法能够求解薛定谔方程, 得到不同磁场和不同总动量情况下的本征态与本征值, 计算结果表明随着磁场和总动量的增加, 粲偶素的质量增大, 逐渐增大的 Lorentz 力会使得粲偶素的体积增加. 当外磁场强度为零时, 增加总动量 P_{kin} 不会改变粲偶素的质量, 而在外磁场强度越大的情况下, 随着总动量 P_{kin} 增加, 粲偶素质量的增加量会成指数级增大. 在 $B = 20m_\pi^2$, $P_{\text{kin}} = 1.8 \text{ GeV}$ 时, 质量增加了约 20%.

感谢马治民在编程方面给予的帮助.

参考文献

- [1] Collins J C, Perry M 1975 *Phys. Rev. Lett.* **34** 1353
- [2] Shuryak E V 1980 *Phys. Rep.* **61** 71
- [3] Matsui T, Satz H 1986 *Phys. Lett. B* **178** 416
- [4] Guo X Y, Shi S Z, Xu N, Xu Z, Zhuang P F 2015 *Phys. Lett. B* **751** 215
- [5] Crater H W 1994 *J. Comput. Phys.* **115** 470
- [6] Li G S, Zhou K, Chen B Y 2012 *Phys. Rev. C* **85** 044907
- [7] Guo X Y, Shi S Z, Zhuang P F 2012 *Phys. Lett. B* **718** 143
- [8] Asakawa M, Majumder A, Muller B 2010 *Phys. Rev. C* **81** 064912
- [9] Fingberg J 1998 *Phys. Lett. B* **424** 343
- [10] Peskina U, Steinberg M 1998 *J. Chem. Phys.* **109** 704
- [11] Shi S Z 2015 *M. S. Thesis* (Beijing: Tsinghua University) (in Chinese) [施舒哲 2015 硕士学位论文 (北京: 清华大学物理系)]
- [12] Alford J, Strickland M 2013 *Phys. Rev. D* **88** 105017
- [13] Rafelski J, Muller B 1976 *Phys. Rev. Lett.* **36** 517
- [14] He H 2016 *Ph.D. Dissertation* (Beijing: Tsinghua University) (in Chinese) [何航 2016 博士学位论文 (北京: 清华大学物理系)]
- [15] Kharzeev D E, McLerran L D, Warringa H J 2008 *Nucl. Phys. A* **803** 227
- [16] Kharzeev D E 2010 *Annals Phys.* **325** 205
- [17] Gusynin V P, Miransky V A, Shovkovy I A 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 3499
- [18] Teller E 1937 *J. Phys. Chem.* **41** 109
- [19] Vogt R 2002 *Nucl. Phys. A* **700** 539
- [20] Olver F W, Daniel L W, Ronald F B, Charles W C 2010 *NIST Handbook of Mathematical Functions* (Cambridge: Cambridge University Press) pp351–382
- [21] Kawanai T, Sasaki S 2012 *Phys. Rev. D* **85** 091503

Charmonia in an external magnetic field*

Gong Chuang¹⁾²⁾ Guo Xing-Yu^{1)2)†}

1) (*Provincial Key Laboratory of Nuclear Material Science and Technology of Guangdong, Institute of Quantum Matter, South China Normal University, GuangZhou 510006, China*)

2) (*Guangdong-Hong Kong Quantum Matter Joint Laboratory, Southern Nuclear Science Computing Center, South China Normal University, GuangZhou 510006, China*)

(Received 4 February 2021; revised manuscript received 13 April 2021)

Abstract

Heavy ion collisions are an important method to study the quantum chromodynamics. In the early stage of relativistic heavy ion collisions, an extremely strong magnetic field is generated. The magnetic field will induce novel phenomena such as the chiral magnetic effect. However, the magnetic field will decrease rapidly, so it is difficult to measure its effect on the system. Charmonium states which are created by the initial scattering will be affected by the magnetic field and carry the information about it. We use the two-body Schrodinger equation with magnetic field to study the influence of the magnetic field on the charmonium state. The magnetic field is introduced via minimal coupling and its effect breaks the conservation of momentum and the conservation of angular momentum as well. The energy of the charmonium state depends not only on the magnetic field, but also on the momentum of the charmonium, thereby leading the final charmonium yield to be anisotropic. For a constant and homogeneous magnetic field, using the method of angular momentum expansion, we numerically calculate the energy spectra of the charm quark bound states with different magnetic field strengths and total momentum. The method is used to expand the three-dimensional wave function on the basis of different orbital angular momentum and spin states whose wave functions are numerically calculated first. In the actual calculation process, it is found that a good accuracy is achieved when taking $n \leq 2$, $l \leq 7$. Furthermore, the dependence of the Hamiltonian on the magnetic field and total momentum is analytically determined to be $H = H_0 + (qB)^2 H_1 + qBP_{ps,\perp} H_2$. Therefore, only the coefficient matrices H_1 and H_2 need to be numerically calculated once and the Hamiltonian with arbitrary magnetic field and momentum can be determined. The inverse power method is then used to find the lowest eigenvalue in the angular momentum space. Such a numerical method significantly reduces the amount of calculation and still ensures the accuracy of the calculation as well. The calculation results show that as the magnetic field and the total momentum increase, the mass of the charm element increases. The increase of the mass can be as large as 20%, when we take $eB = 20m_\pi^2$ and $P_{ps} = 1.8 \text{ GeV}$, which can be easily achieved in RHIC collisions. Therefore there should exist significant magnetic effect on the J/ψ production in heavy ion collisions.

Keywords: bound state, spin, heavy particle collision, charm quark

PACS: 03.65.Ge, 21.10.Hw, 52.20.Hv, 14.65.Dw

DOI: 10.7498/aps.70.20210262

* Project supported by the Major Projects of Basic and Applied Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 2020B0301030008) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11905066).

† Corresponding author. E-mail: guoxy@m.scnu.edu.cn