

## 基于纠缠相干态的量子照明雷达

陶志炜 任益充 艾则孜姑丽·阿不都克热木 刘世韦 饶瑞中

## Quantum illumination radar with entangled coherent states

Tao Zhi-Wei Ren Yi-Chong Abdukirim Azezigul Liu Shi-Wei Rao Rui-Zhong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 170601 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20210462

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210462>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

大气闪烁对纠缠相干态量子干涉雷达影响机理

Influence of atmospheric scintillation on entangled coherent states quantum interferometric radar

物理学报. 2018, 67(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172401>

纠缠相干光场对量子态最大演化速率的操控

Control of maximum evolution speed of quantum states by two-mode entangled light field

物理学报. 2019, 68(15): 150301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190385>

基于相干反馈操控的纠缠源的分析

Analysis of entanglement source based on coherent feedback control

物理学报. 2019, 68(23): 234203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191168>

级联四波混频相干反馈控制系统量子纠缠特性

Quantum entanglement in coherent feedback system based on the cascaded four wave mixing processes

物理学报. 2020, 69(13): 130301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200042>

电子自旋辅助实现光子偏振态的量子纠缠浓缩

Quantum entanglement concentration for photonic polarization state assisted by electron spin

物理学报. 2017, 66(24): 240301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.240301>

超冷原子系综的非高斯纠缠态与精密测量

Non-Gaussian entangled states and quantum metrology with ultracold atomic ensemble

物理学报. 2019, 68(4): 040306 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190147>

# 基于纠缠相干态的量子照明雷达\*

陶志炜<sup>1)2)</sup> 任益充<sup>2)†</sup> 艾则孜姑丽·阿不都克热木<sup>2)</sup>刘世伟<sup>1)2)</sup> 饶瑞中<sup>2)</sup>

1) (中国科学技术大学环境科学与光电技术学院, 合肥 230026)

2) (中国科学院合肥物质科学研究院安徽光学精密机械研究所, 大气光学重点实验室, 合肥 230031)

(2021 年 3 月 10 日收到; 2021 年 4 月 2 日收到修改稿)

量子照明雷达旨在利用量子光场探测热噪声环境下低反射率目标是否存在. 发射光源的纠缠特性使其较经典雷达具有独到的探测优势. 纠缠相干态 (entangled coherent state, ECS) 作为一类在噪声环境下纠缠鲁棒性较强的量子态, 近年来在量子科学的多个领域得到广泛的应用. 本文研究了基于三类不同 ECS 态的量子照明雷达的目标探测性能, 并以双模压缩态 (two-mode squeezed vacuum state, TMSV) 和相干态作为基准对比和分析了三类 ECS 态纠缠度大小与其探测性能之间的关系. 研究发现: 在目标为低反射率且发射光子数远小于背景噪声的情形下, 三类 ECS 态的探测性能优于相干态, 劣于 TMSV 态; 此外, 三类 ECS 态的探测性能可由其纠缠度的大小来决定. 在其他照明条件下, 使用量子照明雷达进行目标探测较相干态雷达并无明显的优势, 三类 ECS 态的探测性能与 TMSV 态和相干态方案并无明显联系.

**关键词:** 量子照明, 纠缠相干态, 纠缠度**PACS:** 06.20.Dk; 42.50.Lc; 03.65.Aa**DOI:** 10.7498/aps.70.20210462

## 1 引言

雷达从第二次世界大战开始兴起, 历经几十年的发展, 在航空、工业、气象以及国防等领域发挥着重要的作用. 传统经典雷达受限于电磁理论的桎梏, 在灵敏度、分辨率、抗电磁干扰和隐身目标探测等方面均遇到难以突破的瓶颈, 已无法满足日益苛刻的应用需求<sup>[1]</sup>. 近年来, 空间量子信息技术的迅速发展为突破经典雷达的性能瓶颈开拓了新的思路. 研究人员基于量子力学、信息技术和空间遥感, 提出量子雷达的概念, 并进一步提出干涉式量子雷达、接收端增强量子雷达和量子照明雷达等多种方案和尝试<sup>[2]</sup>, 以求突破经典极限, 全面提升雷

达性能.

由 Lloyd<sup>[3]</sup> 提出的量子照明方案是采用量子光场的纠缠特性来增强低反射率目标物体的探测性能, 其原理是利用纠缠光源产生的信号光来审查目标物体, 并将回波信号与本地参考光进行联合测量, 从而达到量子增强的效果. 在这种工作机理下, 由于回波信号与本地参考光子之间存在纠缠, 使得掺杂了背景噪声的回波信号更容易被检测出来. 除此之外, 相关理论研究表明<sup>[4]</sup>, 量子照明还可以指数级别地增强探测的灵敏度和信噪比, 并且即使在纠缠破坏环境下, 这种增强仍旧存在, 这使得其未来在军事国防、空间探测、工程测绘、空空对抗等领域有着重要应用.

量子照明雷达的发展可以简单地划分为两个

\* 安徽省自然科学基金青年项目 (批准号: 1908085QA37)、国家自然科学基金青年科学基金 (批准号: 11904369) 和脉冲功率激光技术国家重点实验室主任基金 (批准号: 2019ZR07) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [rych@aiofm.ac.cn](mailto:rych@aiofm.ac.cn)

阶段: 第一阶段主要以相干态和双模压缩态 (two-mode squeezed vacuum state, TMSV) 量子照明雷达 [5] 作为研究对象, 其研究的主要结论为: 在目标为低反射率, 环境为高背景噪声以及发射光子数十分微弱的情形下, TMSV 态在辨识目标是否存在的错误概率上最多只能获得相比于相干态方案 6 dB 的指数幂次的提升 [6]. 为了逼近上述理论极限, 相关学者也相继研究了在不同的接收机制下 [7–11], 量子照明雷达实际能获得的最优结果. 在实验方面, 美国麻省理工学院等单位 [12–15] 也相继开展了对上述理论方案的验证. 由于第一阶段的量子照明雷达主要集中在可见光波段, 其主要短板是光源穿透性差并且无法天然的保证背景总是存在 [4,16], 实验过程中往往需要额外的光源进行照射才能满足其条件. 因此, 在第二阶段, 研究人员针对这一缺点开展了微波波段的量子照明雷达实验研究 [17–19].

除此之外, 相关学者也相继研究了不同量子光场在任意照明条件下的目标探测性能. 例如, Shapiro 和 Lloyd [20] 分析了单光子量子照明雷达与相干态方案之间的差别; Devi 和 Rajagopal [21] 使用化简的量子信道辨识错误概率对 Fock 态、NOON 态以及相干态等方案进行了比较; Fan 和 Zubairy [22] 研究了增光子和减光子 TMSV 态量子照明雷达目标探测性能之间的差异. 纠缠相干态 (entangled coherent states, ECS) 作为一类在噪声环境下纠缠鲁棒性较强的量子态 [23], 近年来在量子通信 [24–27] 以及量子度量 [23,28–30] 等领域都取得了巨大的成功. 截至目前, 国内外对基于 ECS 态的量子照明方案的研究仍然较为匮乏. 本文引入三种不同类型的 ECS 态 [24,31], 详细分析它们在量子照明目标探测方面的性能表现. 为了便于比较, 本文采用 TMSV 态以及相干态作为探测性能的上限基准和下限基准.

本文结构如下: 首先讨论纠缠相干态量子照明雷达的物理模型和数值模拟方法, 介绍度量量子照明雷达探测性能的两个重要指标 Helstrom 极限 [32] 和量子 Chernoff 极限 (quantum Chernoff bound, QCB) [33]; 其次研究纠缠度 [34] 与量子照明雷达探测性能之间的关系, 详细比较和分析 ECS 态量子照明雷达探测性能随发射光子数、模间相位以及热噪声光子数的变化情况. 研究发现: 在发射光子数远小于背景噪声 (即  $N_{\text{emit}} \ll N_{\text{th}}$ ; 本文称其为“好”的照明条件) 的情况下, 三类 ECS 态的目标探测性

能整体优于相干态, 次于 TMSV 态, 然而, 但相比于 TMSV 态, 这种性能提升是微不足道的; 除此之外, 纠缠度与量子照明雷达目标探测性能呈现正相关关系, 此时纠缠度可以认为是衡量量子照明雷达探测性能好坏的一种度量方式. 在其他照明条件下, ECS 态量子照明雷达失去其独特的优势, 此时, 三类 ECS 态的目标探测性能与 TMSV 态和相干态方案之间并无明显的关系.

## 2 ECS 态量子照明

### 2.1 理论模型

量子照明雷达的主要任务是审查热噪声环境下的低反射率目标物体是否存在, 其等价模型如图 1 所示. 其中发射光源  $\rho_{AB}$  为双模纠缠的量子光场, A 模作为信号光照向探测目标并对其进行扫描, B 模则留在本地作为闲置光与反射回来的 A 模进行联合测量. 若目标不存在, 则热光场  $\rho_C$  会

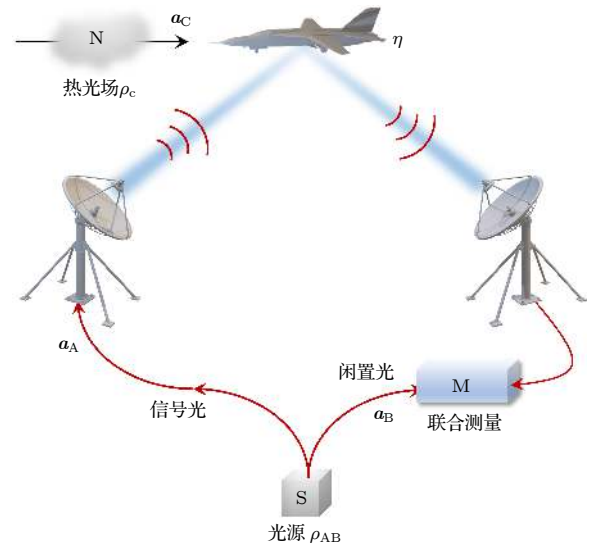


图 1 量子照明雷达的物理模型. 发射光源  $\rho_{AB}$  产生双模纠缠的量子态, A 模作为信号光用于审查目标物体 (图中用“飞机”代替) 是否存在. 若目标存在, 热光场  $\rho_C$  与 A 模在目标物体处进行混合, 随后与留在本地的闲置光 B 模进行联合测量. 若目标不存在,  $\rho_C$  则直接进入探测器与 B 模进行联合测量

Fig. 1. Physical model of quantum illumination radar. The photonic source  $\rho_{AB}$  generates two-mode entangled quantum states. Mode A is used as a signal mode to interrogate the presence of the target object (illustrated by “an airplane” in figure). If an object is present, the thermal noise  $\rho_C$  is mixed with mode A at the object and subsequently measured together with the retained-mode B. If no object is present,  $\rho_C$  will enter the final measurement device directly for joint quantum measurements with mode B.

直接进入探测器, 此时 A 模相当于耗散在环境中; 反之, 若目标存在, 则经目标反射的 A 模会与  $\rho_C$  在目标物体上进行混合, 随后被探测器接收. 由于上述两种过程会生成不同的接收光场, 因此通过量子态辨识即可判断目标物体是否存在.

不失一般性, 本文假设  $\rho_{AB}$  为文献 [24] 定义的两类 ECS 态和文献 [31] 定义的路径对称 ECS 态, 关于前两类 ECS 态, 可以由奇偶相干态与相干态两路光场信号经分束器干涉后产生 [28], 其在相空间具有对称性, 表示如下:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_1}} (|\alpha\rangle |\alpha^*\rangle + |\alpha^*\rangle |\alpha\rangle), \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_2}} (|\alpha\rangle |\alpha\rangle + |\alpha^*\rangle |\alpha^*\rangle), \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $|\alpha\rangle$  代表振幅为  $\alpha$  的相干态,  $|\alpha^*\rangle$  代表振幅与  $|\alpha\rangle$  相同, 相位与  $|\alpha\rangle$  互为共轭的相干态,  $N_1 = 2(1 + |\exp(-|\alpha|^2 + \alpha^2)|^2)$  和  $N_2 = 2\{1 + \text{Re}[\exp(-2|\alpha|^2 + 2\alpha^*2)]\}$  代表两类 ECS 态的归一化系数. 类似地, 对于路径对称纠缠相干态, 有如下表述:

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + e^{-|\alpha|^2})}} (|\alpha\rangle |0\rangle + |0\rangle |\alpha\rangle). \quad (2)$$

为了方便研究和分析低反射率目标物体是否存在, 本文将探测目标物体抽象为透射率为  $\eta$  的分束器, 这里  $\eta$  实际上代表的是探测目标物体的反射率. 因此, 上述混合过程可使用分束器的么正算符  $U_{BS} = \exp[-\arccos(\sqrt{\eta})(\hat{a}_A^\dagger \hat{a}_C - \hat{a}_A \hat{a}_C^\dagger)]$  来表示,  $\hat{a}_A$ ,  $\hat{a}_C$  分别代表信号光和热光场的湮灭算符. 根据量子照明雷达的工作原理, 等价模型会产生两个可能的输出态  $\rho_0$  和  $\rho_1$ , 通过有效的区分即可判断目标物体是否存在,

$$\text{目标不存在: } \rho_0 = \text{Tr}_A[\rho_{AB}] \otimes \rho_C,$$

$$\text{目标存在: } \rho_1 = \text{Tr}_C[U_{BS}\rho_{AB} \otimes \rho_C U_{BS}^\dagger]. \quad (3)$$

值得注意的是, 为了弥补热光场光子数在干涉过程中的损耗, 本文将目标存在时的热光场光子数  $N_{th}$  替换为  $N_{th}/(1 - \eta)$  [22]. 当目标存在时, 上述模型还可简化为

$$\text{目标不存在: } \rho_0 = \text{Tr}_A[\rho_{AB}] \otimes \rho_C,$$

$$\text{目标存在: } \rho_1 = \eta\rho_{AB} + (1 - \eta)\rho_0, \quad (4)$$

即探测设备 M 接受的光场实际上是经过反射的 A 模与经过透射的热光场的相干叠加 [35]. 至此, 判

断目标是否存在这一问题可被等效看成两个量子过程  $\rho_0$  和  $\rho_1$  辨识过程, 衡量辨识能力好坏的物理量同时也间接地反映了量子照明的探测性能表现, 通常采用辨识错误概率来进行度量, 称为 Helstrom 极限

$$P_{\text{err},M} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \|\rho_0^{\otimes M} - \rho_1^{\otimes M}\| \right), \quad (5)$$

其中  $M$  是用于量子照明探测的纠缠光源个数,  $\|\gamma\| = \text{Tr}\sqrt{\gamma^\dagger \gamma}$  代表量子态  $\gamma$  的迹范数. 由于数值仿真过程中需要对量子态的维度进行截断, 因此当量子态维度较大时, 上述错误概率极限的计算量呈指数增长. 为此, 本文同样计算了衡量区分错误概率的一个较松弛的上界, 称为 QCB 极限, 定义为  $P_{\text{err},M} \leq P_{\text{QCB}}^M = \frac{1}{2} e^{-M\varepsilon}$ , 其中  $\varepsilon = -\ln \left[ \min_{0 \leq s \leq 1} \text{Tr}[\rho_0^s \rho_1^{1-s}] \right]$ . 通过计算上述错误概率极限, 即可获知纠缠光源量子照明的探测性能.

由于纠缠光源是量子照明不可或缺的组成部分, 因此, 为了验证纠缠度与量子照明性能之间的关系, 本文采用约化密度矩阵的 von Neumann 熵来度量两模之间纠缠度的大小 [34], 由如下关系给出:

$$E(|\psi_{AB}\rangle) = -\text{Tr}[\rho_A \ln \rho_A] = -\text{Tr}[\rho_B \ln \rho_B], \quad (6)$$

这里  $\rho_A = \text{Tr}_B[|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|]$ ,  $\rho_B = \text{Tr}_A[|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|]$ .

## 2.2 数值模拟方法

2.1 节介绍了量子照明雷达的工作原理, 本节通过上述理论模型对 ECS 态的量子照明的探测性能进行数值模拟, 并简单介绍数值模拟用到的方法. 由于改变 ECS 态振幅的大小会导致平均光子数增加, 从而间接地改善量子照明性能. 一般地, 我们希望在同等光子数, 即相同发射功率的情况下, 量子信道辨识错误概率尽可能得小. 为了更好地比较同光子数情况下三类 ECS 态的探测性能, 本文计算了三类 ECS 态的光子数, 分别为:

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 &= \frac{1}{N_1} 4 \left\{ |\alpha|^2 + \left| \exp(-|\alpha|^2 + \alpha^2) \right|^2 \text{Re}[\alpha^2] \right\}, \\ \bar{n}_2 &= \frac{1}{N_2} 4 \left\{ |\alpha|^2 + \text{Re}[\alpha^{*2} \exp(-2|\alpha|^2 + 2\alpha^{*2})] \right\}, \\ \bar{n}_3 &= \frac{|\alpha|^2}{1 + e^{-|\alpha|^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

与文献 [36, 37] 不同, 本文在保证发射光子数相同情况下通过调节平移量以及压缩度的大小, 分



别计算了 TMSV 态、ECS 态和相干态在  $M = 1$  时的 Helstrom 极限. 值得注意的是, 为了保证信号端光子数与本地端光子数相同, 本文将相同发射光子数情况下的相干态信号端的能量取为总光子数的一半, 即  $|\alpha/2\rangle|\alpha/2\rangle$ . 除此之外, 本文同样计算了决定 QCB 变化趋势的衰减指数  $\varepsilon$  随发射光子数和热光场光子数的变化情况.

考虑到量子照明雷达是使用微弱的纠缠脉冲来探测高噪声环境下低反射率的目标物体, 因此本文在数值模拟过程中, 发射光子数  $N_{\text{emit}}$  的变化范围限制在 0—1 之间, 分束器的透射率  $\eta$  取为 0.01. 热噪声的强弱直接决定了探测性能的好坏, 这时会存在热光场的光子数较大的情况, 因此数值模拟过程中 B 模和 A, C 两模所选取的截断维度分别为 30, 60.

本文使用 Python 的 Numpy, Scipy 和 Qutip 数据包进行数值模拟, Matplotlib 用于绘图. 为了计算同光子数情况下的 ECS 态和 TMSV 态的平移量和压缩度的大小, 使用了 scipy.optimize 模块的 root 函数进行计算. 在 Qutip 中, 通常使用 coherent( $n_{\text{max}}$ ,  $\alpha$ ) 来生成相干态,  $n_{\text{max}}$  为最大截断维度,  $\alpha$  为平移量. (1) 式表述的前两类 ECS 态可使用相干态的张量积函数 tensor 来描述, 例如 (tensor(coherent( $n_{\text{max}}$ ,  $\alpha$ ), coherent( $n_{\text{max}}$ ,  $\alpha_{\text{conj}}$ ))+tensor(coherent( $n_{\text{max}}$ ,  $\alpha$ ), coherent( $n_{\text{max}}$ ,  $\alpha_{\text{com}}$ ))). unit(), 这里.unit() 代表归一化算符. 在计算 QCB 的衰减指数  $\varepsilon$  的过程中, 使用了 scipy.optimize 中的 fminbound 函数.

### 3 ECS 态量子照明性能分析

#### 3.1 发射光子数的影响

发射光源的纠缠特性是决定量子照明探测性能的关键. 因此, 我们尽可能的希望对于同等光子数情况下, 纠缠度越大的量子态, 进行量子照明时的探测性能也越好. 本节在前述量子照明理论模型的基础上首先给出了纠缠度随发射光子数  $N_{\text{emit}}$  的变化趋势, 随后讨论了不同热噪声情况下的量子照明探测性能随  $N_{\text{emit}}$  的变化情况, 最后分析了纠缠度与探测性能之间的关系.

图 2 给出了不同量子态的纠缠度随发射光子数  $N_{\text{emit}}$  的变化曲线, 其中第一类 ECS 态和第二类

ECS 类模间相位均取为  $\pi/2$ . 从图 2 可以看出, 当  $N_{\text{emit}}$  逐渐增加时, 量子态的纠缠度也逐渐变大; 在保证  $N_{\text{emit}}$  相同的情况下, TMSV 态的纠缠度较三类 ECS 态的纠缠度大, 路径对称 ECS 态纠缠度却不及前两类 ECS 态, 而前两类 ECS 态的纠缠度则介于 TMSV 态和相干态之间. 此外, 当  $N_{\text{emit}}$  为任意值且保持模间相位不变的情形下, 前两类 ECS 态纠缠度大小并无差别.

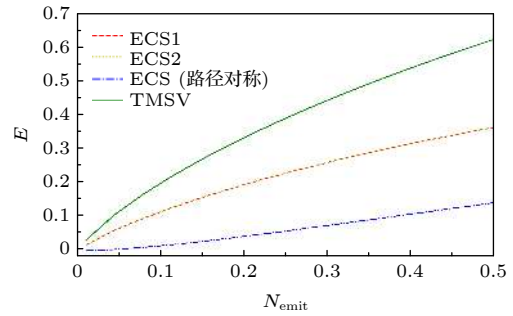


图 2 von Neumann 熵  $E$  随发射光子数  $N_{\text{emit}}$  的变化曲线  
Fig. 2. The variation curve of von Neumann entropy  $E$  with the emitted photon number  $N_{\text{emit}}$ .

图 3(a) 和图 3(c) 分别给出了当热噪声较小 ( $N_{\text{th}} = 0.1$ ) 时利用 (3) 式计算的 QCB 极限衰减系数  $\varepsilon$  和  $M = 1$  时的 Helstrom 极限随  $N_{\text{emit}}$  的变化曲线. 可以看出, 对于所有考虑的量子态而言,  $\varepsilon$  随  $N_{\text{emit}}$  的增加均逐渐增加, 此时探测光源功率与探测性能呈现正相关关系. 若保持  $N_{\text{emit}}$  相同, 使用 TMSV 态进行目标探测的效果最好. 此外, 如图 3(c) 所示, 除了 TMSV 态之外, 当  $N_{\text{emit}}$  较小时 ( $N_{\text{emit}} < 0.1$ ), 路径对称 ECS 态和相干态的 Helstrom 极限最小, 且两者数值相同, 说明此时路径对称 ECS 态和相干态较前两类 ECS 态具有较好的探测性能; 当  $N_{\text{emit}}$  逐渐增大时 ( $N_{\text{emit}} > 0.1$ ), 路径对称 ECS 态将失去其探测效果好的优势, 而相干态仍具有较好的效果, 此时前两类 ECS 态的探测性能与路径对称 ECS 态相当.

图 3(b) 和图 3(d) 为当热噪声较大 ( $N_{\text{th}} = 1$ ) 时  $\varepsilon$  和 Helstrom 极限随  $N_{\text{emit}}$  的演化曲线. 当  $N_{\text{emit}}$  较小时, 与我们的猜想类似, 保持同等光子数情况下, TMSV 态探测效果最好, 前两类 ECS 态和路径对称 ECS 态次之, 相干态性能表现最差; 然而, 随着  $N_{\text{emit}}$  的逐渐增加 (如图 3(d) 所示,  $N_{\text{emit}} > 0.5$ ), 相干态的探测性能将超过路径对称 ECS 态, 这时路径对称 ECS 态探测效果最差 (这里不采用  $\varepsilon$  来衡量是因为 QCB 极限较 Helstrom 极限更为松弛).

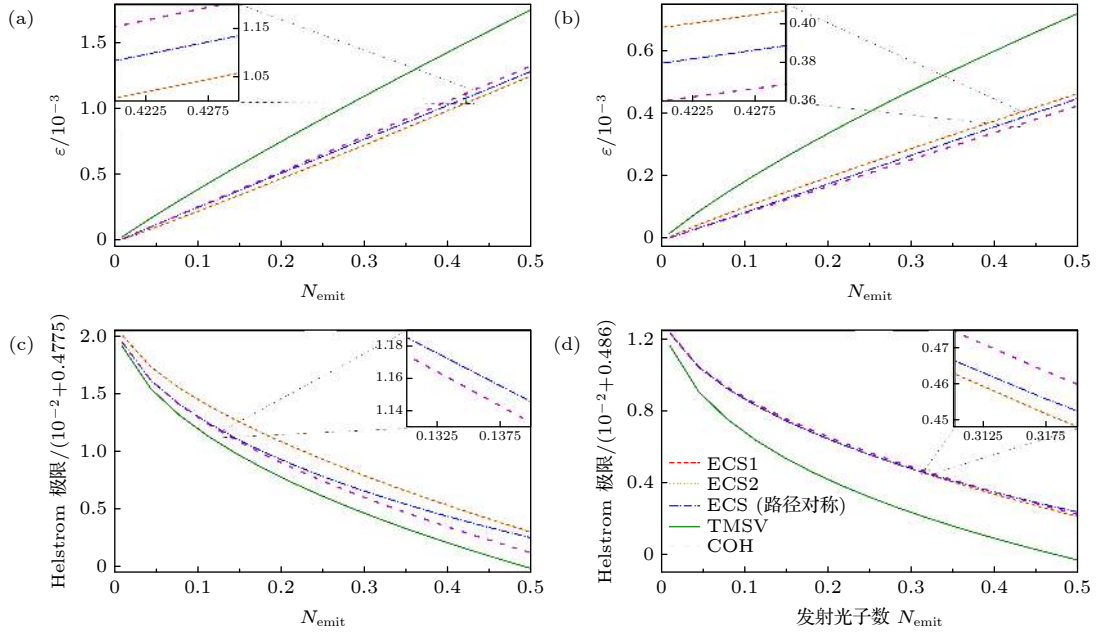


图3 不同热光场光子数下 QCB 衰减系数  $\varepsilon$  与 Helstrom 极限随发射光子数  $N_{\text{emit}}$  的变化曲线 (a), (c)  $N_{\text{th}} = 0.1$ ; (b), (d)  $N_{\text{th}} = 1$   
 Fig. 3. Variation curves of QCB attenuation coefficient  $\varepsilon$  and Helstrom limit with the emitted photon number  $N_{\text{emit}}$  for different thermal noise photon numbers: (a), (c)  $N_{\text{th}} = 0.1$ ; (b), (d)  $N_{\text{th}} = 1$ .

综上所述, 当热噪声较小时, 三类 ECS 态量子照明的探测性能与 TMSV 态和相干态之间并没有明显的关系. 当热噪声较大且发射光子数远小于热光场光子数时 (即在“好”的照明条件下), 纠缠度能在一定程度上度量量子照明的探测性能. 当发射光子数不断增加, 至与热光场光子数相等时, 上述结论不再成立. 需要指出的是, 虽然纠缠度较大的 ECS 态在一定条件下能增强量子照明的探测性能, 但是此时测量得到的错误概率要大于发射光子数较多或者热噪声较小的情况, 这也是很显然的事情.

### 3.2 相位的影响

值得注意的是, 上述对于 ECS 态量子照明探测性能的分析是在模间相位  $\varphi$  等于  $\pi/2$  的基础上进行的. 为了研究 ECS 态纠缠度与其量子照明探测性能之间的关系, 本文在保证 ECS 态平均光子数不变 ( $N_{\text{emit}} = 1$ ) 的情况下, 计算了第一类和第二类 ECS 态纠缠度随  $\varphi$  的变化情况, 如图 4(a) 所示. 可以看出, 两类 ECS 态的纠缠度随  $\varphi$  的增加而逐渐增加 (上节分析选取  $\varphi = \pi/2$ , 是因为此时前两类 ECS 态具有最大的纠缠度), 并且两者之差在  $(0, \pi/2)$  之间先增加后减小, 第二类 ECS 态纠缠度在  $5\pi/32$  左右与第一类 ECS 态差距最大. 保证  $\varphi$  不变的情况下, 第二类 ECS 态纠缠度始终大于

第一类 ECS 态.

为了研究不同热噪声情况下量子照明探测性能随  $\varphi$  的变化情况, 本文首先给出了在  $N_{\text{emit}} \ll N_{\text{th}}$  ( $N_{\text{emit}} = 1$ ,  $N_{\text{th}} = 15$ ) 情况下  $\varepsilon$  随  $\varphi$  的演化曲线, 如图 4(b) 所示. 可以看出, 当  $\varphi$  处于  $(0, \pi/2)$  之间时, 第二类 ECS 态的  $\varepsilon$  始终大于第一类 ECS 态. 若保持  $\varphi$  不变, 这时纠缠度较大的第一类 ECS 态较第二类 ECS 态而言, 确实一定程度上增强了量子照明的探测性能. 其次, 图 4(c) 为当  $N_{\text{emit}} = N_{\text{th}}$  ( $N_{\text{emit}} = 1$ ,  $N_{\text{th}} = 1$ ) 时的结果. 可以看出, 当  $\varphi$  较小时 ( $\varphi < 7\pi/32$ ), 第二类 ECS 态探测性能整体优于第一类 ECS 态. 然而, 随着  $\varphi$  的不断增大并超过某一阈值时 ( $\varphi \approx 7\pi/32$ ), 第一类 ECS 态开始表现出明显的优势, 呈现先上升后下降的趋势. 特别地, 当  $\varphi \approx 9\pi/32$  时, 与第二类 ECS 态相比, 第一类 ECS 态具有最佳的探测性能. 另一方面, 从图 4(c) 还可看出, 第二类 ECS 态  $\varphi$  超过这一阈值后, 量子照明的探测性能呈现饱和趋势, 当  $\varphi = \pi/2$  时, 两类 ECS 态具有相同的探测性能. 最后, 还给出了  $N_{\text{emit}} \gg N_{\text{th}}$  ( $N_{\text{emit}} = 1$ ,  $N_{\text{th}} = 0.1$ ) 时的结果, 如图 4(d) 所示. 有趣的是, 两类 ECS 态的量子照明探测性能在纠缠度为零的时候反倒表现得最好, 随着  $\varphi$  的不断增大,  $\varepsilon$  整体呈现较小的趋势. 另外, 图 4(d) 的演化规律如同图 4(c) 关于  $\varphi$  轴镜像的结果.

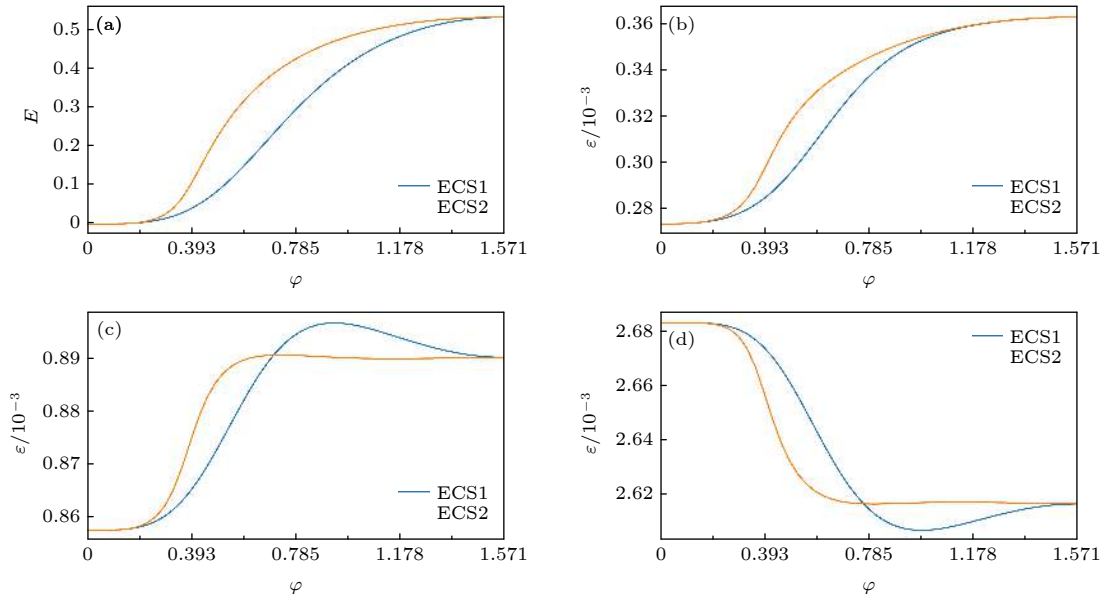


图 4  $N_{\text{emit}} = 1$  时的 von Neumann 熵  $E$  与 QCB 衰减系数  $\varepsilon$  随相位  $\varphi$  的变化曲线 (a) von Neumann 熵; (b), (c), (d) QCB 衰减系数, 其中  $N_{\text{th}}$  的值分别为 (b)  $N_{\text{th}} = 15$ , (c)  $N_{\text{th}} = 1$  以及 (d)  $N_{\text{th}} = 0.1$

Fig. 4. Variation curves of von Neumann entropy  $E$  and QCB attenuation coefficient  $\varepsilon$  with phase  $\varphi$  for  $N_{\text{emit}} = 1$ : (a) von Neumann entropy; (b), (c), (d) QCB attenuation coefficient, with (b)  $N_{\text{th}} = 15$ , (c)  $N_{\text{th}} = 1$  and (d)  $N_{\text{th}} = 0.1$ , respectively.

### 3.3 热光场光子数的影响

通过对图 3 的分析可知, 热噪声的存在从本质上影响着量子照明的探测性能. 为了研究相同发射光子数情况下 ECS 态随热光场光子数  $N_{\text{th}}$  的变化情况, 图 5 分析和计算了发射光子数恒定时 ( $N_{\text{emit}} = 0.3$ ) 所有考虑的量子态在不同热噪声情况下 QCB 衰减系数  $\varepsilon$  和 Helstrom 极限. 可以看出, 随着  $N_{\text{th}}$  不断增加,  $\varepsilon$  和 Helstrom 极限分别呈现不断减小和上升的趋势, 说明热噪声的增强使得探测性能不断变差, 保持  $N_{\text{th}}$  相同的情况下, TMSV 态较其他探针态量子照明的探测性能更佳. 其次, 如图 5(a) 所示, 在  $N_{\text{th}}$  较小 ( $N_{\text{th}} \ll 0.3$ ) 的情况下, 除 TMSV 态之外, 相干态的  $\varepsilon$  最大, 路径对称 ECS 态次之, 前两类 ECS 态  $\varepsilon$  最小. 当  $N_{\text{th}}$  逐渐变大时 ( $N_{\text{th}} \gg 0.3$ ), 前两类 ECS 态的  $\varepsilon$  超过路径对称 ECS 态, 具有最佳的探测性能.

Helstrom 极限随  $N_{\text{th}}$  的变化情况如图 5(b) 所示. 通过对比图 5(a) 可知, Helstrom 极限给出的探测性能的预测结果整体上与 QCB 极限的预测结果相同. 当  $N_{\text{th}} \ll 0.5$  时, 除 TMSV 态之外, 相干态具有最佳的探测效果, 路径对称 ECS 态次之, 此时纠缠度和量子照明性能之间并无明显的关系; 当  $N_{\text{th}} \gg 0.5$  时, 量子照明的探测性能整体与纠缠度呈现正相关关系, 这与图 5(a) 中  $N_{\text{th}} \gg 0.3$  时所得

的结论相同, 这是因为 Helstrom 极限给出了精确的量子态辨识错误概率. 当  $N_{\text{th}}$  不断增加, 至高于

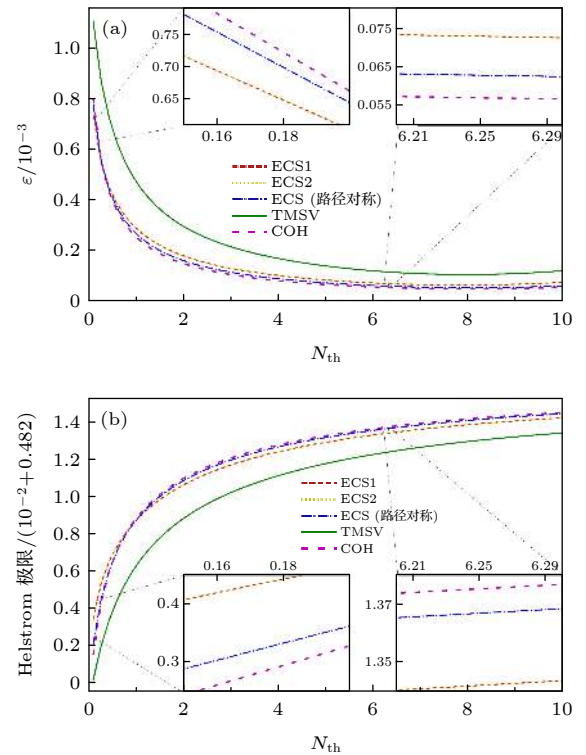


图 5  $N_{\text{emit}} = 0.3$  时的 QCB 衰减系数  $\varepsilon$  与 Helstrom 极限随热光场光子数  $N_{\text{th}}$  的变化曲线

Fig. 5. Variation curve of QCB attenuation coefficient  $\varepsilon$  and Helstrom limit with the thermal noise photon number  $N_{\text{th}}$  for  $N_{\text{emit}} = 0.3$ .



$N_{\text{emit}}$  一个数量级时, 纠缠度较大的探针态对量子照明探测性能的增强效果不断扩大, 但是由于此时发射光子数较小且热噪声较大, 量子态辨识的错误概率也在不断增加.

因此, 通过对量子照明探测性能随  $N_{\text{th}}$  变化趋势的分析可知, 只有在“好”的照明条件下, 纠缠度越大的 ECS 态才能对探测性能起到增强的作用, 一般来说, 量子态纠缠度的大小与量子照明的性能并无明显的关系, 这意味可能存在其他度量手段来更好地决定探测性能的好坏.

## 4 结 论

本文首先简单介绍了量子照明雷达的工作原理及其独特的优势, 其次以 TMSV 态和相干态的探测性能作为上限基准和下线基准, 研究了基于纠缠相干态的量子照明雷达, 计算了度量其探测性能的错误概率极限 (即 Helstrom 极限和 QCB 极限). 研究结论分为以下两个方面: 1) 在一般量子照明条件下, 与相干态雷达相比, 量子照明雷达无法体现其优势, 此时三类 ECS 类的探测性能与 TMSV 态和相干态方案并无明显的关系; 2) 在“好”的照明条件下, 三类 ECS 类的量子照明的探测性能优于相干态劣于 TMSV 态, 此时探测性能的好坏是由量子态纠缠度的大小决定的, 这意味着在“好”的照明条件下可以采用纠缠度作为度量量子照明的探测性能好坏的指标.

本文的研究为使用 ECS 态进行量子照明目标探测提供了可靠的理论指导. 值得注意的是, 上述计算是基于理想条件下的探测性能的理论上限 (例如, 本文并未考虑具体的接收机制<sup>[7-11]</sup>、目标物体的反射特性<sup>[38]</sup> 以及闲置光子的存储<sup>[17]</sup> 等等), 对于实际情况的研究将在以后的工作中具体展开. 另一方面, ECS 态的优势主要体现在“好”的照明条件下, 然而这种条件的“创造”实属不易<sup>[4,16]</sup>. 回顾量子照明雷达的发展史可以发现, 可见光波段的种种困难随着微波技术的发展得以克服 (例如, 采用约瑟夫森参数转换器可以产生微波波段的纠缠光子<sup>[17-19]</sup>; 光纤延时线<sup>[17]</sup> 的发展为闲置光子的存储提供了可能); 研究人员的新思路为量子照明的发展提供了新的可能 (例如, 量子照明的目标探测可以从其产生的相位偏移中揭示出电磁隐形目标<sup>[39]</sup>), 这些都为使用量子照明技术来进行目标探测提供了可靠的前景.

## 参考文献

- [1] Lanzagorta M 2011 *Quantum Radar* (San Rafael: Morgan & Claypool publishers) pp1-2
- [2] Pirandola S, Bardhan B R, Gehring T, Weedbrook C, Lloyd S 2018 *Nat. Photonics* **12** 724
- [3] Lloyd S 2008 *Science* **321** 1463
- [4] Shapiro J H 2020 *IEEE Aerosp. Electron. Syst. Mag.* **35** 8
- [5] Tan S H, Erkmen B I, Giovannetti V, Guha S, Lloyd S, Maccone L, Pirandola S, Shapiro J H 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 253601
- [6] Palma G D, Borregaard J 2018 *Phys. Rev. A* **98** 012101
- [7] Guha S, Erkmen B I 2009 *Phys. Rev. A* **80** 052310
- [8] Zhuang Q, Zhang Z, Shapiro J H 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 040801
- [9] Dolinar S J 1973 *M.I.T. Res. Lab. Electron. Quart. Prog. Rep.* **111** 115
- [10] Zhuang Q, Zhang Z, Shapiro J H 2017 *J. Opt. Soc. Am. B* **34** 1567
- [11] Jo Y, Lee S, Ihn Y S, Kim Z, Lee S Y 2021 *Phys. Rev. Research* **3** 013006
- [12] Zhang Z, Mouradian S, Wong F N C, Shapiro J H 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 110506
- [13] Lopaeva E D, Ruo Berchera I, Degiovanni I P, Olivares S, Bride G, Genovese M 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 153603
- [14] England D G, Balaji B, Sussman B J 2019 *Phys. Rev. A* **99** 023828
- [15] Zhang Z, Tengner M, Zhong T, Wong F N C, Shapiro J H 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 010501
- [16] Cho A <https://www.sciencemag.org/news/2020/09/short-weird-life-and-potential-afterlife-quantum-radar> [2020-9-23]
- [17] Barzanjeh S, Guha S, Weedbrook C, Vitali D, Shapiro J H, Pirandola S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 080503
- [18] Chang C W S, Vaddiraj A M, Bourassa J, Balaji B, Wilson C M 2019 *Appl. Phys. Lett.* **114** 112601
- [19] Barzanjeh S, Pirandola S, Vitali D, Fink J M 2020 *Sci. Adv.* **6** eabb0451
- [20] Shapiro J H, Lloyd S 2009 *New J. Phys.* **11** 063045
- [21] Devi A R U, Rajagopal A K 2009 *Phys. Rev. A* **79** 062320
- [22] Fan L F, Zubairy M S 2018 *Phys. Rev. A* **98** 012319
- [23] Zhang Y M, Li X W, Yang W, Jin G R 2013 *Phys. Rev. A* **88** 043832
- [24] Jeong H, Kim M S, Lee J 2001 *Phys. Rev. A* **64** 052308
- [25] Park K, Jeong H 2010 *Phys. Rev. A* **82** 062325
- [26] van Enk S J, Hirota 2001 *Phys. Rev. A* **64** 022313
- [27] Simon D S, Jaeger G, Sergienko A V 2014 *Phys. Rev. A* **89** 012315
- [28] Joo J, Munro W J, Spiller T P 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 083601
- [29] Joo J, Park K, Jeong H, Munro W J, Nemoto K, Spiller T P 2012 *Phys. Rev. A* **86** 043828
- [30] Lee S Y, Ihn Y S, Kim Z 2020 *Phys. Rev. A* **101** 012332
- [31] Liu J, Lu X M, Sun Z, Wang X 2016 *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** 115302
- [32] Helstrom C W 1967 *Int. Control* **10** 254
- [33] Audenaert K M R, Calsamiglia J, Muñoz-Tapia R, Bagan E, Masanes L, Acín A, Verstraete F 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 160501
- [34] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [35] Weedbrook C, Pirandola S, Thompson J, Vedral V, Gu M 2016 *New J. Phys.* **18** 043027
- [36] Zhang S L, Guo J S, Bao W S, Shi J H, Jin C H, Zou X B, Guo G C 2014 *Phys. Rev. A* **89** 062309



- [37] Zhang S L, Zou X B, Shi J H, Guo J S, Guo G C 2014 *Phys. Rev. A* **90** 052308
- [38] Zhuang Q, Zhang Z, Shapiro J H 2017 *Phys. Rev. A* **96**

020302(R)

- [39] Las Heras U, Di Candia R, Fedorov K G, Deppe F, Sanz M, Solano E 2017 *Sci. Rep.* **7** 9333

# Quantum illumination radar with entangled coherent states\*

Tao Zhi-Wei<sup>1)2)</sup> Ren Yi-Chong<sup>2)†</sup> Abdukirim Azezigul<sup>2)</sup>  
Liu Shi-Wei<sup>1)2)</sup> Rao Rui-Zhong<sup>2)</sup>

1) (*School of Environmental Science and Optoelectronic Technology, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

2) (*Key Laboratory of Atmospheric Optics, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China*)

( Received 10 March 2021; revised manuscript received 2 April 2021 )

## Abstract

There has been a great interest in quantum metrology (e.g., quantum interferometric radar) due to its applications in sub-Rayleigh ranging and remote sensing. Despite interferometric radar has received vast amount of attentions over the past two decades, very few researches has been conducted on another type of quantum radar: quantum illumination radar, or more precisely quantum target detection. It is, in general, used to interrogate whether the low-reflectivity target in a noisy thermal bath is existed using quantum light. The entanglement properties of its emitted light source give it a unique detection advantage over the classical radar. Entangled coherent state (ECS), as a class of quantum states with high entanglement robustness in noisy environments, has been widely used in several fields of quantum science such as quantum informatics, quantum metrology. In this paper, we investigate the target detection performance of quantum illumination radar based on three different types of ECS states. We employ the two-mode squeezed vacuum state (TMSV) and the coherent state as benchmarks to compare and analyze the relationship between the entanglement strength of the three types of ECS states and their quantum illumination detection performance. We found that the detection performance of the three ECS states is better than that of the coherent state. However, it is inferior to that of the TMSV state when the target is of low reflectivity. The emitted photon number is much smaller than the background noise (we call this as “good” illumination conditions). On the contrary, quantum illumination radar has no obvious advantage over coherent state radar for target detection under other illumination conditions; further, the detection performance of these three types of ECS states is not evidently related to that of the TMSV state and the coherent state. Finally, we reveal that the target detection performance of quantum illumination for the first two types of ECS states can be determined by their entanglement strength under “good” illumination conditions by adjusting the inter-modal phase of these two ECS states while keeping the emitted photon number constant. Under other illumination conditions, there is no evidence to demonstrate the entanglement strength of ECS states being associated with their target detection performance.

**Keywords:** quantum illumination, entangled coherent states, entanglement strength

**PACS:** 06.20.Dk; 42.50.Lc; 03.65.Aa

**DOI:** 10.7498/aps.70.20210462

\* Project supported by the Young Scientists Fund of the Natural Science Foundation of Anhui Province, China (Grant No. 1908085QA37), the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11904369), and the Open Research Fund of State Key Laboratory of Pulsed Power Laser Technology, China (Grant No. 2019ZR07).

† Corresponding author. E-mail: [rych@aiofm.ac.cn](mailto:rych@aiofm.ac.cn)