

非均匀波导中的最大声能流透射及鲁棒性分析

郭威 杨德森

Maximal transmission of acoustic energy flux in inhomogeneous waveguides and robustness analyses

Guo Wei Yang De-Sen

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 174302 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20210495

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210495>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非均匀波导中的声聚焦

Sound focusing in inhomogeneous waveguides

物理学报. 2020, 69(7): 074301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191854>

热粘弹波在变温非均匀合金熔体中的传播

Propagation of thermoviscoelastic wave in inhomogeneous alloy melt with varying temperature

物理学报. 2019, 68(4): 048101 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181923>

分层有耗手征介质中斜入射电磁波的传播矩阵

Propagation matrix of plane wave incident obliquely on stratified lossy chiral medium

物理学报. 2017, 66(6): 064101 <https://doi.org/10.7498/aps.66.064101>

高温等离子体中太赫兹波的传输特性

Transmission characteristics of terahertz wave in high temperature plasma

物理学报. 2018, 67(17): 174101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180647>

时空非均匀等离子体鞘套中太赫兹波的传播特性

Propagation characteristics of terahertz waves in temporally and spatially inhomogeneous plasma sheath

物理学报. 2017, 66(8): 084102 <https://doi.org/10.7498/aps.66.084102>

声子晶体中的表面声波赝自旋模式和拓扑保护声传输

Pseudospin modes of surface acoustic wave and topologically protected sound transmission in phononic crystal

物理学报. 2019, 68(22): 227805 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191363>

非均匀波导中的最大声能流透射及鲁棒性分析

郭威³⁾ 杨德森^{1)2)3)†}

1) (哈尔滨工程大学, 水声技术国防重点实验室, 哈尔滨 150001)

2) (哈尔滨工程大学, 海洋信息获取与安全工业和信息化部重点实验室, 哈尔滨 150001)

3) (哈尔滨工程大学水声工程学院, 哈尔滨 150001)

(2021 年 3 月 14 日收到; 2021 年 4 月 14 日收到修改稿)

以变截面含可穿透散射体波导为模型, 理论研究声波在非均匀波导中的最大透射问题. 通过耦合简正波理论构建模态域内透射矩阵和水平波数矩阵, 推导透射波能流的具体表达式, 分析任意入射波的能流透射率随频率的变化, 进而讨论任意给定频率下能够产生最大能流透射率的最佳入射波, 并给出数组全透射声场算例. 最佳入射波仅由可传播模态决定, 与衰减模态无关. 利用衰减模态不携带能流的特性, 讨论衰减模态对产生能流最大透射声场的影响, 并分析最大能流透射的鲁棒性. 在频率满足一定条件时, 全透射声场可能表现出完美鲁棒性. 文中所述方法可延伸至多种非均匀波导以分析其中的能流最大透射问题.

关键词: 非均匀波导, 能流最大透射, 全透射, 最佳入射波**PACS:** 43.20.Mv, 43.20.Fn, 43.20.+g**DOI:** 10.7498/aps.70.20210495

1 引言

波在非均匀介质中传播时会受到多重散射的作用, 影响以波为载体的信息或能量传递. 研究如何使波克服反向散射作用或提高能量的透射率是波动物理学的研究热点之一. Dorokhov^[1,2]在介观物理学的研究中率先发现电子波能够在无序介质内实现全透射. 能量(流)的最大透射率为透射矩阵最大奇异值的平方, 全透射时该值为 1, 产生最大透射的入射波为最大奇异值对应的右奇异矢量^[3,4]. 当介质内无吸收时, 非均匀介质内部波场对应的解空间仅由全透射波场(open channels)和全反射波场(closed channels)张成, 该现象被称为双峰分布(bimodal distribution)^[5,6]. 电子波的全透射决定了介观尺度上金属电导率的扰动上界(maximal conductance fluctuations), 并且该上界与金属样品的尺寸和无序程度无关^[7]. 然而, 由于

在介观尺度上测量透射矩阵及构建任意电子波包均存在较大难度, 故难以观测到电子波的全透射现象. 在宏观物理学领域, 随着空间光调制器和相位控制技术的发展, 人为改变入射波以控制透射波或反射波的相关研究取得了较大的进展. 在光学领域的相关研究包括强化光波^[8–14]或光激弹性波^[15]的透射或反射、强化或克服介质吸收^[16–18]、构建无反向散射拓扑态^[19,20]以及构造无反射超构材料^[21]或超构表面^[22,23]等; 而在声学中, 对于相关问题的探讨主要集中于强化波导内的声波透射研究. 例如单一模态在特定频率下的全透射传播, 也称为入射波与波导结构的“共振”^[24–27], 利用时间反转不变性实现声波在穿过非均匀介质后形成空间聚焦^[28–30]或时空同时聚焦^[31], 或设计声超构材料以实现声隐身^[32]、声聚焦^[33]或全吸收^[34,35]等. 上述的强化声透射手段中, 单一模态的全透射限制了入射波的波形、聚焦的机理主要基于透射矩阵测量和相位共轭处理、而超构材料的原理在于改变传播媒

† 通信作者. E-mail: dshyang@hrbeu.edu.cn

介以匹配入射声场. 尽管在声学领域对非均匀波导强化声透射问题的相关研究已经取得诸多进展, 但是依然存在问题需要解决. 以大气或浅海波导为例, 作为典型的天然非均匀介质, 其内部物理参数较难人为改变, 只能通过改变声源以实现高质量声通信或强化声透射. 而对于任意给定波导, 如何确定内部声透射能力的上限和对应的入射波条件仍有待研究. 另外, 若考虑工程实现声波的强化透射作用, 最大透射声场是否具备抗干扰性能也值得讨论. 这些问题在声超构材料结构和参数设计以及复杂介质高效声通信等领域具有指导意义.

本文主要解决两个问题: 一是分析任意入射波发生最大声透射时所需的激发频率; 二是分析任意频率下产生最大能流透射时所需的入射波形条件. 本文以变截面含可穿透散射体波导为模型, 基于透射矩阵提出一个系统地研究波导内最大声透射问题的方法, 其中透射矩阵通过耦合简正波理论^[36,37]构建. 对于本文选取的波导结构, 文献^[36, 37]均无法独立求解内部的声传播问题, 也难以直接构建透射矩阵. 但是, 经研究发现, 文献^[37]在处理单层介质参数连续变化波导内声传播问题的过程中, 提出了一种普适的化简方法, 可将 Helmholtz 方程简化为忽略边界矩阵的耦合偏微分方程. 本文结合该化简方法以及不变截面含散射体波导模型中耦合矩阵的形式^[36], 推导出一阶耦合偏微分方程 (文中 (6) 式) 并构建出透射矩阵. 利用透射矩阵给出模态域内任意入射波的能流透射率随频率变化关系以及任意频率下实现能流最大透射的入射波表达式, 并在低频 (仅存在 1—2 阶可传播模态) 条件下对全透射声场及其鲁棒性进行分析. 上述方法在任意频段, 对任意形状散射体、任意形状边界或其他类型边界条件均适用, 亦可对 2.5 维或 3 维波导中的能流最大透射问题提供理论借鉴.

2 任意入射波的最大声透射

本节分析任意给定入射波的最大声透射问题. 首先利用耦合简正波理论构建模态域透射矩阵, 接着通过透射矩阵给出能流透射率在模态域内的表达式. 在固定入射波条件下, 能流透射率仅为频率的函数. 分析透射率随频率的变化可发现能流最

大透射时的频率, 亦可求取对应声场. 本节以平面波即第零阶本地简正波为例分析固定入射波的最大声透射问题, 文中方法适用于任意入射波的能流最大透射问题, 例如平面波、高阶简正波、点声源等.

2.1 理论

对于非均匀波导, 声波穿过非均匀区域产生的输出 (透射波) 或能流透射率由入射波、频率以及波导结构共同决定. 固定波导结构, 仅考虑入射波和频率对能流最大透射的影响. 波导选取为变截面含散射体波导, 结构见图 1. 波导所在区域为 $(x, y) \in (-\infty, +\infty) \times [0, h(x)]$, 可化分为两个子区域. 子区域 1: $x \in [0, L]$ 为散射区域, 声波在该区域内可发生声散射. 在子区域 1 内波导上、下边界的表达式分别为 $y = h(x)$, $y = 0$; 散射体呈圆形. 波导与散射体的密度和声速分别为 ρ_0, c_0 和 ρ_1, c_1 , 均为实数. 子区域 2: $x \in (L, +\infty)$ 和 $x \in (-\infty, 0)$, 分别为透射区域和反射区域. 在子区域 2 内介质参数和边界水平不变, 声波在该区域内不会产生背向散射, 即子区域 2 内的透射波和反射波不会影响子区域 1 中的声场结果. 上、下边界皆为刚硬边界. 任意简谐入射波 p_i 从 $x = 0$ 处输入, 与散射区域作用后分别在子区域 2 中产生反射波 p_r 和透射波 p_t , 入射与散射场叠加后的总声场满足如下 Helmholtz 方程 (省略时间因子 $\exp(-i\omega t)$):

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p = 0, \quad (1)$$

其中 p 为声压; ω 为角频率. 在本问题中, 方程可改写为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} p = 0, & \text{散射体外,} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} p = 0, & \text{散射体内.} \end{cases} \quad (2)$$

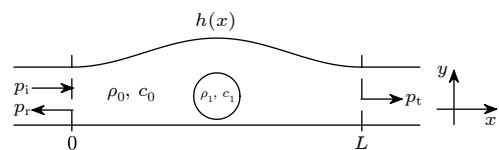


图 1 变截面含散射体非均匀波导示意图

Fig. 1. Configuration of the inhomogeneous waveguide with varying cross-sections and one scatterer.

声压满足的边界条件和连续性条件分别为

$$\begin{cases} \partial_y p(y=0) = 0, \quad \partial_n p(y=h(x)) = 0, \\ p_{\partial\Omega^+} = p_{\partial\Omega^-}, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega^+} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega^-}, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\partial\Omega$ 表示散射体边界; \mathbf{n} 代表法线方向, $\partial/\partial n = [1 + (\partial_x h)^2]^{-0.5} (\partial/\partial y - \partial_x h \partial/\partial x)$.

分析任意入射波的能量透射率需要获得任意入射波产生的透射波形式, 并分别计算二者的能流表达式, 其中入射波与透射波间的关系可利用透射矩阵表征. 本节使用耦合简正波理论化简 (2) 式并构建透射矩阵. 选取均匀刚硬波导中的本征函数 $\psi_n(y; x)$ 作为局部基函数, 其表达式为:

$$\psi_n(y; x) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{n0}}{h(x)}} \cos\left(\frac{n\pi y}{h(x)}\right). \quad (4)$$

利用基函数对声压进行展开得到:

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} p_n(x) \psi_n(y; x), \quad (5)$$

其中 p_n 为声压在基函数上的展开系数, N 为模式的截断数. 要求截断数一般略大于波导中的可传播模式数. 对 (2) 式在基函数上作投影, 即 $\int_0^{h(x)} \psi_m^* \cdot dy$, 利用文献 [37] 中的化简方法结合文献 [36] 中耦合矩阵的表达式, 可获得关于展开系数 $p_n(x)$ 和附加量 $s_n(x)$ 的一阶耦合偏微分方程:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{D} - \mathbf{C} & \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中向量 \mathbf{p} 和 \mathbf{s} 中元素分别为 $p_n(x)$ 和 $s_n(x)$, 附加量 $s_n(x)$ 与 $p_n(x)$ 满足关系:

$$s_m = \sum_{n=0}^{N-1} A_{mn} p'_n + B_{mn} p_n, \quad (7)$$

(7) 式中 A_{mn} 与 B_{mn} 分别为矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 中的元素, 假设散射体的上、下边界参数分别为 $[y = \beta(x), y = \alpha(x)]$, A_{mn} 与 B_{mn} 的表达式为 [36]

$$\begin{aligned} A_{mn}(x) &= \delta_{mn} + \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right) \int_{\alpha}^{\beta} \psi_m^* \psi_n dy, \\ B_{mn}(x) &= \int_0^h \psi_m^* \partial_x \psi_n dy + \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right) \int_{\alpha}^{\beta} \psi_m^* \partial_x \psi_n dy. \end{aligned} \quad (8)$$

(6) 式中矩阵 \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 的元素分别为 C_{mn} 和 D_{mn} , 其表达式为

$$\begin{aligned} C_{mn}(x) &= k^2 \left(\delta_{mn} + \left(\frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_1 c_1^2} - 1\right) \int_{\alpha}^{\beta} \psi_m^* \psi_n dy \right), \\ D_{mn}(x) &= \left(\frac{n\pi}{h(x)}\right)^2 \delta_{mn} + \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right) \int_{\alpha}^{\beta} \partial_y \psi_m^* \partial_y \psi_n dy, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $k = \omega/c_0$ 为介质波数. A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} 和 D_{mn} 均存在解析表达式.

为了构建透射矩阵, 引入导纳矩阵 $\mathbf{Y}(x)$ 和传播算子 $\mathbf{Q}(x)$ 分别满足如下关系: $\mathbf{s} = \mathbf{Y}\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{p}(L) = \mathbf{Q}(x)\mathbf{p}(x)$. 导纳矩阵满足 Riccati 方程, 初条件为模态域辐射条件 $Y_{mn}(L) = i\delta_{mn}k_n(L)$, 其中 $k_n(L) = \sqrt{k^2 - (n\pi/h(L))^2}$. 传播算子满足一阶微分方程, 初始条件为 $\mathbf{Q}(x) = \mathbf{I}$, 其中 \mathbf{I} 为单位阵. 导纳矩阵和传播算子的求解可参考文献 [38, 39], 本文不再赘述. 反射矩阵 \mathbf{R} 和透射矩阵 \mathbf{T} 的定义为: $\mathbf{p}_r(0) = \mathbf{R}\mathbf{p}_i(0)$, $\mathbf{p}_t(L) = \mathbf{T}\mathbf{p}_i(0)$, 其中 $\mathbf{p}_i(0)$, $\mathbf{p}_r(0)$ 和 $\mathbf{p}_t(L)$ 分别为入射波、反射波和透射波的模式展开系数向量. 由导纳矩阵和传播算子可推得 \mathbf{R} 和 \mathbf{T} 的表达式为 [40]

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}(0))^{-1} (\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Y}(0)), \\ \mathbf{T} &= \mathbf{Q}(0) (\mathbf{I} + \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (10)$$

式中, \mathbf{Y}_0 为 $ik_n(0)$ 组成的对角阵. 任意入射波产生的声场可写作:

$$p(x, y) = \begin{cases} \Psi^T(y; x) \mathbf{Q}^{-1}(x) \mathbf{Q}(0) (\mathbf{I} + \mathbf{R}) \mathbf{p}_i(0), & 0 \leq x < L, \\ \Psi^T(y; x) \exp(\mathbf{Y}(L)(x - L)) \mathbf{T} \mathbf{p}_i(0), & x \geq L. \end{cases} \quad (11)$$

接着给出入射波和透射波的能量模态域表达式. 入射波能流的定义为

$$E_{\text{fi}} = \frac{1}{2\omega} \text{Im} \left(\int_0^{h(0)} \rho^{-1} p_i^* \partial_x p_i dy \right). \quad (12)$$

由于在 $x = 0^- \rightarrow 0$ 时介质水平不变, 利用 (5) 式结合水平波导中的模态域辐射条件 $\partial_x \mathbf{p}_i(0) = \mathbf{Y}_0 \mathbf{p}_i(0)$, 可得

$$E_{\text{fi}} = \frac{1}{2\omega\rho_0} \text{Im} (\mathbf{p}_i^H(0) \mathbf{Y}_0 \mathbf{p}_i(0)), \quad (13)$$

其中上标“H”代表共轭转置. (13) 式可化简为

$$E_{\text{fi}} = \frac{1}{2\omega\rho_0} \mathbf{p}_i^H(0) \text{Re}(\mathbf{K}(0)) \mathbf{p}_i(0), \quad (14)$$

式中, $\mathbf{K}(0)$ 为 $k_n(0)$ 组成的对角阵. 由于 $k_n(0)$ 代

表 $x = 0^-$ 处的水平波数, 所以 $k_n(0)$ 为纯实数或纯虚数, 分别表示可传播模式或衰减模式. 因而矩阵 $\text{Re}(\mathbf{K}(0))$ 为正实数和零构成的对角阵, 其对角线上的零元素代表衰减模式不传播能量, 对入射波能流无贡献. 同理可得, 透射波能流的表达式为

$$E_{\text{ft}} = \frac{1}{2\omega\rho_0} \mathbf{p}_t^H(L) \text{Re}(\mathbf{K}(L)) \mathbf{p}_t(L). \quad (15)$$

因而能流透射率 G 可写作:

$$\begin{aligned} G(k, \mathbf{p}_i) &= \frac{E_{\text{ft}}}{E_{\text{fi}}} = \frac{\mathbf{p}_t^H \text{Re}(\mathbf{K}(L)) \mathbf{p}_t}{\mathbf{p}_i^H \text{Re}(\mathbf{K}(0)) \mathbf{p}_i} \\ &= \frac{\mathbf{p}_i^H \mathbf{T}^H \text{Re}(\mathbf{K}(L)) \mathbf{T} \mathbf{p}_i}{\mathbf{p}_i^H \text{Re}(\mathbf{K}(0)) \mathbf{p}_i}. \end{aligned} \quad (16)$$

(16) 式中的透射矩阵 \mathbf{T} 和水平波数矩阵 \mathbf{K} 受波导结构与频率 (或波数 k) 共同影响. 透射矩阵可由耦合简正波法构建、水平波数矩阵可由辐射条件推得. 当波导结构不变时, 二者仅为频率的函数. 所以当给定任意入射波时, 能流透射率 G 仅与频率有关.

2.2 数值结果

图 2 给出利用 (16) 式算得的平面波 (第零阶简正波) 能流透射率随频率的变化曲线. 波导上边界表达式为 $h(x) = 1.25 - 0.25 \cos(0.4\pi x)$; 散射区域最大距离 $L = 5$, 散射体圆心位于 $(L/2, 0.5)$, 半径为 0.4; 介质密度为 $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$, 声速为 $c_0 = 1500 \text{ m/s}$, 散射体密度为 $\rho_1 = 1500 \text{ kg/m}^3$, 声速为 $c_1 = 1700 \text{ m/s}$; 频率的取值范围为 $k \in [0.005\pi, 3\pi]$; 模式截断数 $N = 10$. 距离和频率相关参数已经由无量纲化处理. 从图 2 中可以看出, 在某些特定频率时, 平面波可以实现近乎全透射. 利用上述方法可以观察任意声波实现最大透射的频率, 从而分析任意入射波的最大透射特性. 此外, 从图 2 中也可以发现, 在某些频率下, 平面波也可以实现近乎零透射. 根据能量守恒定律可知, 当波导中不存在吸收时, $1 - G$ 表示能流反射率的变化特性. 当声波实现全透射时, 必然随之发生零反射, 反之亦然. 因而无论是考虑吸声性能最优化 (全透射) 还是隔声性能最优化 (全反射) 问题, 本方法均适用. 值得一提的是, 文献 [41] 同样可研究波导中单阶模式的优化透射特性. 与之相比, 本文中的方法基于数值上更易实现的耦合简正波理论, 可以分析任意入射波 (不局限于单阶模式) 的最大透射或反射特性, 相当于对文献 [41] 的延伸和进一步发展.

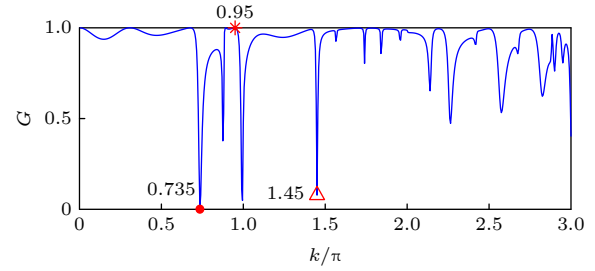


图 2 平面波能流透射率随频率变化曲线

Fig. 2. Energy flux transmittance as a function of frequency when injecting a plane wave.

图 3(a) 和图 3(b) 依次给出平面波发生能流全透射和零透射时对应的声压幅值分布, 声波频率分别为 $k = 0.95\pi$ 和 $k = 0.735\pi$, 声场由 (11) 式计算得到. 从图 3(a) 中可以看出, 当波导结构表现出空间对称的特点时, 产生全透射的声场亦会随之呈现空间对称特性, 即总声场关于 $x = L/2$ 对称. 该对称性是一种普遍性质, 即使对一个无序的对称非均匀波导, 发生全透射时的声场也将表现出相同的对称特性 [42]. 从图 3(b) 中可以看出明显的平面波全反射现象. 需要强调的是, 本文中全反射和全透射针对的对象是能流, 并非声压, 能流的全透射 (全反射) 并不代表声压的全透射 (全反射). 从图 3(a) 中可以看出明显的声反射现象 ($x = 0$ 附近声场并非平面波), 其原因在于发生全透射时的反射波仅由衰减模式决定, 而衰减模式并不传播能量, 故而声场中存在反射波与能流的全透射之间并不矛盾. 但是, 在 $x \ll 0$ 处观察时将难以发现反射波. 与图 3(a) 中结果类似, 图 3(b) 中声场虽然实现了能流的零透射, 但是在 $x \geq L$ 区域仍能观察到透射波的存在, 而且可以观察到透射波以衰减波形式进行传播, 透射波并不携带能流, 此时声波实现了能流的全反射.

为了验证图 3 中全透射和零透射的有效性, 利用有限元数值商用软件 COMSOL 重构图 3 中的声场. 平面波产生全透射时的波数 $k = 0.95\pi$ 对应频率 $f = 712.5 \text{ Hz}$, 零透射时波数 $k = 0.735\pi$ 对应频率 $f = 551.25 \text{ Hz}$. 使用相同波导结构, 在 $x \geq 6$ 区域设置完美匹配层, 对频率取整并利用 COMSOL 软件计算频率分别为 712 和 551 Hz 时平面波产生的声场, 结果分别如图 4(a) 和图 4(b) 所示. 通过与图 3 对比可以看出, COMSOL 计算获得的声场与本文提出方法所获得的声场高度一致, 证明了全透射和零透射的有效性.

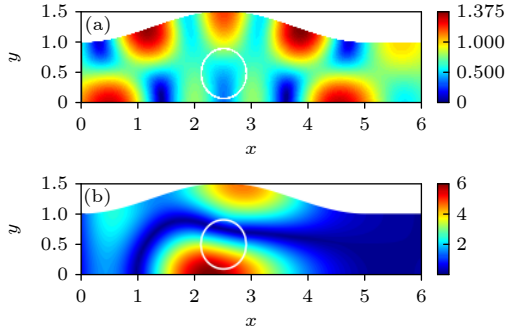


图 3 (a) 平面波能流全透射声场 ($k = 0.95\pi$); (b) 平面波能流零透射声场 ($k = 0.735\pi$)

Fig. 3. (a) Wave field with unity energy flux transmittance generated by a plane wave ($k = 0.95\pi$); (b) wave field with zero energy flux transmittance generated by a plane wave ($k = 0.735\pi$).

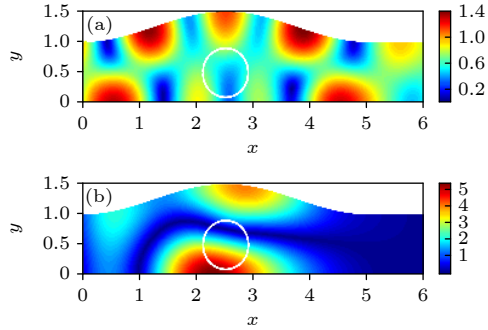


图 4 (a) Comsol 计算平面波能流全透射声场 ($f = 712$ Hz); (b) Comsol 计算平面波能流零透射声场 ($f = 551$ Hz)

Fig. 4. (a) Wave field calculated by Comsol with unity energy flux transmittance generated by a plane wave ($f = 712$ Hz); (b) wave field calculated by Comsol with zero energy flux transmittance generated by a plane wave ($f = 551$ Hz).

对于任意其他类型的入射波, 利用文中所述方法, 首先获得入射波的模态展开系数向量, 接着利用构建获得的透射矩阵和水平波数矩阵结合 (16) 式获得能流随频率的变化关系, 重复上述相同步骤即可发现该入射波产生能流最大透射的频率并给出对应的声场结果.

3 任意频率下的最大声透射

根据前述分析可知, 在波导结构不变时, 能流透射率由频率和入射波决定 (见 (16) 式). 第 2 节中已经分析了以平面波为例任意入射波能流透射率随频率的变化, 并讨论了产生最大声透射时的频率和对应声场. 本节将研究任意频率下, 产生能流最大透射的入射波表达式及对应声场.

3.1 理论

根据 (16) 式可知, 不同的入射波将产生不同的能流透射率. 但由于散射特性和能流守恒规律的限制, 能流的透射率应存在上界. 能流透射率的上界 G_{\max} 的定义为

$$G_{\max}(k) = \max_{\mathbf{p}_i} \frac{E_{\text{ft}}}{E_{\text{fi}}} = \max_{\mathbf{p}_i} \frac{\mathbf{p}_i^H \mathbf{T}^H \text{Re}(\mathbf{K}(L)) \mathbf{T} \mathbf{p}_i}{\mathbf{p}_i^H \text{Re}(\mathbf{K}(0)) \mathbf{p}_i}. \quad (17)$$

当波导结构不变时, G_{\max} 只由频率决定. 能够产生能流最大透射的入射波被称为最佳入射波, 最佳入射波的模态展开系数由符号 $\mathbf{p}_i^{\text{opt}}$ 表示. 能流最大透射率的计算以及最佳入射波的选取相当于对所有可能入射波产生的能流透射率的优化. 通过对 (17) 式进行化简, 可求取 G_{\max} 与 $\mathbf{p}_i^{\text{opt}}$ 的表达式, 具体过程如下.

由于矩阵 $\text{Re}(\mathbf{K}(L))$ 为对角阵, 且各元素均为非负实数, 因而可利用 Cholesky 分解将矩阵 $\text{Re}(\mathbf{K}(L))$ 表示成 $\text{Re}(\mathbf{K}(L)) = \mathbf{M}^H(L) \mathbf{M}(L)$, 其中 $\mathbf{M}(L)$ 为对角阵, 各元素为 $\sqrt{\text{Re}(k_n(L))}$. 同理可得, $\text{Re}(\mathbf{K}(0)) = \mathbf{M}^H(0) \mathbf{M}(0)$. 此时可将 (17) 式简化为向量 L_2 范数形式:

$$G_{\max}(k) = \max_{\mathbf{p}_i} \frac{\|\mathbf{M}(L) \mathbf{T} \mathbf{p}_i\|_2^2}{\|\mathbf{M}(0) \mathbf{p}_i\|_2^2}. \quad (18)$$

假设波导中任意位置可传播模态的数目为 $N_p(x)$, 对于非零入射波能流, 只有可传播模态起作用, 因而 $\mathbf{M}(0)$ 可降维至 $N_p(0) \times N_p(0)$ 矩阵而不改变 (18) 式的结果. 假设 \mathbf{p}_i 的前 $N_p(0)$ 个元素对应传播模态, 则 \mathbf{p}_i 中仅前 $N_p(0)$ 个元素对入射波能流有贡献. 对于 (18) 式中的分子项, $\mathbf{M}(L)$ 可同理降维至 $N_p(L) \times N_p(L)$ 矩阵. 另外, 若 \mathbf{p}_i 中只包含衰减模态分量, 透射波 $\mathbf{p}_t = \mathbf{T} \mathbf{p}_i$ 中的结果依然只包含 $x = L$ 处的衰减模态分量, 原因在于能流不可能“无中生有”, 所以透射矩阵 \mathbf{T} 可降维至 $N_p(L) \times N_p(0)$ 而不改变 (18) 式的结果. 此时 (18) 式可化简为^[43]

$$G_{\max}(k) = \max_{\mathbf{M}(0) \mathbf{p}_i} \frac{\|(\mathbf{M}(L) \mathbf{T} \mathbf{M}^{-1}(0)) \mathbf{M}(0) \mathbf{p}_i\|_2^2}{\|\mathbf{M}(0) \mathbf{p}_i\|_2^2} = \max [\sigma(\mathbf{M}(L) \mathbf{T} \mathbf{M}^{-1}(0))]^2, \quad (19)$$

其中 $\sigma(\mathbf{M}(L) \mathbf{T} \mathbf{M}^{-1}(0))$ 表示矩阵 $\mathbf{M}(L) \mathbf{T} \mathbf{M}^{-1}(0)$ 的奇异值. 值得强调的是, 降维后的矩阵 $\mathbf{M}(0)$ 可

逆. 具体地说, $\mathbf{M}^{-1}(0)$ 为 $x=0$ 处可传播模式对应水平波数开根式后取倒数构成的对角阵. 在矩阵分析中, 不考虑衰减模式的作用时, 矩阵 $\mathbf{M}(0)$ 在可传播模式张成的解空间中可逆. (19) 式的推导利用了矩阵诱导 2 范数的定义, 即矩阵的诱导 2 范数等于其最大奇异值.

产生能流最大透射的最佳入射波 $\mathbf{p}_i^{\text{opt}}$ 表达式可通过对降维后的矩阵 $\mathbf{M}(L)\mathbf{T}\mathbf{M}^{-1}(0)$ 进行奇异值分解得到. 根据奇异值分解可得

$$\mathbf{M}(L)\mathbf{T}\mathbf{M}^{-1}(0) = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H, \quad (20)$$

其中 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 分别为左、右奇异向量组成的矩阵, 二者分别为 $N_p(L) \times N_p(L)$ 和 $N_p(0) \times N_p(0)$ 酉阵; $\mathbf{\Lambda}$ 为 $N_p(L) \times N_p(0)$ 对角阵, 各元素为 σ_m , m 的取值范围为 $m = 1, 2, \dots, \min(N_p(0), N_p(L))$, 且由大至小降序排列. 根据矩阵相乘的性质, 存在如下关系:

$$\mathbf{T}\mathbf{M}^{-1}(0)\mathbf{v}_m = \sigma_m\mathbf{M}^{-1}(L)\mathbf{u}_m, \quad (21)$$

其中 \mathbf{v}_m 和 \mathbf{u}_m 分别为矩阵 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 的第 m 个列向量, $\mathbf{M}^{-1}(L)$ 与 $\mathbf{M}^{-1}(0)$ 类似. 由 (21) 式可知, 实现能流最大透射的最佳入射波模式展开系数为

$$\mathbf{p}_i^{\text{opt}} = \mathbf{M}^{-1}(0)\mathbf{v}_1. \quad (22)$$

对应 $x=L$ 处的输出为 $\mathbf{p}_t = \sigma_1\mathbf{M}^{-1}(L)\mathbf{u}_1$, 将输出和输入代入 (16) 式可得能流的最大透射率为 $G_{\max} = \sigma_1^2$. 因此, 通过奇异值分解, 可以同时获得能流最大透射率和对应的最佳入射波, 能流最大透射率为矩阵 $\mathbf{M}(L)\mathbf{T}\mathbf{M}^{-1}(0)$ 最大奇异值的平方, 最佳入射波的模式展开系数由最大奇异值对应的右奇异矢量决定. 最终 $x=0$ 处声场的展开系数表达式为 $\mathbf{p}(0) = (\mathbf{I} + \mathbf{R})\mathbf{p}_i^{\text{opt}}$, 代表入射和反射的叠加场. 对于声波导, 介质内不存在可对声波能量产生增益的因素, 背向散射和吸收成为阻碍声波透射的主要因素, 因而对于矩阵 $\mathbf{M}(L)\mathbf{T}\mathbf{M}^{-1}(0)$, 其奇异值 $\sigma_m \leq 1$ 恒成立. 至此, 基于耦合简正波理论 (构建透射矩阵) 和模态域辐射条件 (构建水平波数矩阵), 可以获得非均匀波导在任意频率下可实现的能流最大透射率及对应所需的最佳入射波, 进而分析其产生的声场以及对应的传播现象.

3.2 数值结果

使用相同的波导结构, 本文选取图 2 中平面波能流透射率较小的频率 $k = 1.45\pi$, 研究能流的最大透射率、对应的最佳入射波以及对应声场. 结

果如图 5 所示. 图 5(a) 给出选定频率时, 矩阵 $\mathbf{M}(L)\mathbf{T}\mathbf{M}^{-1}(0)$ 的奇异值平方分布. 在当前频率下, $N_p(0) = N_p(L) = 2$, 只存在两阶可传播模式, 图 5(a) 表现出了典型的双峰分布 [5,6], 即奇异值平方非零即 1. 根据前述分析可知, 奇异值为 1 代表对应入射波可实现能流的全透射, 奇异值为 0 代表实现能流的零透射 (这里等价于全反射). 图 5(a) 表明, 与光学或介观物理中的高频情况条件对比, 即使对于仅有两阶可传播模式的低频条件, 波在非均匀波导中依然有存在全透射的可能性. 需要注意的是, 对于不同的波导结构, 奇异值可能表现出多种的分布特性, 不局限于双峰分布现象. 图 5(b) 画出产生能流最大透射的最佳入射波幅值分布, 图 5(c) 给出最佳入射波的模式展开系数, 其中 v_{T1n} 为 $\mathbf{M}^{-1}(0)\mathbf{v}_1$ 的前 $N_p(0)$ 个元素. 可以看出, 最佳入射波由可传播的第零阶模式 (平面波) 和第一阶模式共同决定. 图 5(d) 画出最佳入射波产生的声场, 此时声波近乎实现能流的全透射, 声场亦近似表现出关于 $x=L/2$ 的轴对称分布. 另外, 对于本文中所使用的波导结构, 当频率选取在 $k \in (0, \pi)$ 范围时, 波导内仅存在一阶可传播模式, 即平面波. 此时最大声透射问题与平面波透射问题等价, 平面波的能流透射率即为能流最大透射率, 因此 $G_{\max}(k)$ 曲线与图 2 中的 $G(k)$ 在 $k \in (0, \pi)$ 区间内完全重合.

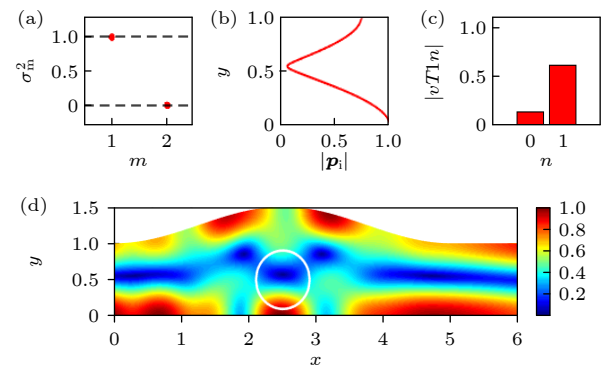


图 5 (a) 奇异值平方分布; (b) 最佳入射波幅值分布; (c) 最佳入射波的模式展开系数; (d) 产生能流最大透射的声场. 波导参数与图 2 中使用的一致, 频率 $k = 1.45\pi$

Fig. 5. (a) Distribution of squares of singular values; (b) modulus of the optimal incident wave; (c) expansion coefficients of the optimal incident wave; (d) wave field with the maximum energy flux transmittance. The geometry of the waveguide is same as that in Fig. 2, and the frequency is $k = 1.45\pi$.

4 消逝模态的影响及最大声透射的鲁棒性

根据 (14) 式可知, 消逝模态不传播能量, 所以不影响能流的大小. 但是消逝模态会影响波导中的声场结果, 尤其是水平变化区域的近场结果^[44]. 本节将考虑消逝模态对最大声透射的影响并分析最大声透射的鲁棒性. 图 6(a) 给出当图 3(a) 中入射平面波叠加消逝模态时产生的声场, 图 6(b) 给出当最佳入射波 (图 5(b)) 叠加消逝模态时产生的声场. 图 6(a) 中的入射波为

$$p_i(0, y) = \xi(\psi_0(0, y) + \psi_2(0, y)), \quad (23)$$

其中 ξ 为归一化系数, 满足 $\max_y |p_i(0, y)| = 1$. 图 6(b) 中的入射波为

$$p_i(0, y) = \xi(p_i^{\text{opt}}(0, y) + \psi_2(0, y)). \quad (24)$$

与图 3(a) 和图 5(d) 对比可知, 声场发生了明显的改变, 但是能流的透射率保持不变. 由该现象可推得两点结论: 一是在波导结构和频率参数固定的条件下, 能够产生能流全透射的声场解并不唯一. 图 6(a) 和图 6(b) 中的声场虽然与图 3(a) 和图 5(d) 相差甚远, 但两图中的能流依然为全透射. 二是波导结构对于能流最大透射具有较强的鲁棒性, 其原因在于波导结构天然地限制了垂直方向振荡快于波长的波成分传播, 因为振荡速度快于波长的波的模态成分仅对应消逝模态, 不携带能流, 无法改变能流透射率. 当入射声波存在一定的随机干扰时, 大部分干扰对能流的透射率并无影响, 因此波导结构对于能流的优化透射天然具有较强的鲁棒性.

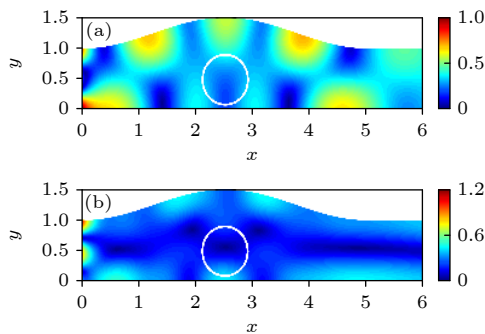


图 6 (a) 图 3(a) 情况下平面波叠加消逝模态后的声场; (b) 图 5(d) 情况下最佳入射波叠加消逝模态后的声场

Fig. 6. (a) Wave field generated by a plane wave mixed by evanescent modes in the case of Fig. 3(a); (b) wave field generated by the optimal incident wave mixed by evanescent modes in the case of Fig. 5(d).

事实上, 从图 6(a) 中可以发现具有完美鲁棒性的平面波最大声透射现象. 在图 6(a) 或图 3(a) 对应的参数条件下, 有且仅有第零阶简正波, 即平面波可以传播, 其余各阶简正波皆为消逝模态. 此时无论入射平面波上叠加何种形式干扰, 干扰后的入射波一定会被分解成可传播的平面波和其他高阶简正波成分, 其中平面波实现能流的全透射, 而高阶简正波不传播能量. 最终无论干扰后的声场形式如何改变, 在该频率下能流永远为全透射. 因此当波导中仅存在一阶可传播模态且在满足要求的频带内存在使该模态实现能流全透射的频率时, 对应的全透射现象呈现出完美鲁棒性, 无视任何干扰的影响.

图 5(d) 中的全透射声场无法表现出完美鲁棒性, 这里对其鲁棒性进行分析. 当最佳入射波存在随机干扰时, 干扰后的入射波表达式可写作:

$$p_i(0, y) = \xi p_i^{\text{opt}}(0, y) (1 + \alpha(y)) \exp(i\pi\beta(y)), \quad (25)$$

式中, $\alpha(y)$ 与 $\beta(y)$ 均为 $[-0.5, 0.5]$ 区间内均匀分布的随机函数. (25) 式相当于在最佳入射波 $p_i^{\text{opt}}(0, y)$ 上叠加了 $\pm 50\%$ 的随机幅度起伏以及 $[-\pi/2, \pi/2]$ 的随机相位起伏, 将该干扰入射波输入至波导内可由 (16) 式计算对应的能流透射率. 经过 2×10^5 次蒙特卡罗分析后, 算得能流透射率的相对标准差为 -3.01% , 能流透射率的期望为 0.974. 从统计数据上看波导中的能流最大透射呈现出了较高的鲁棒性. 图 7 中给出一组最佳入射波存在随机起伏时产生的声场, 声场结果与图 5(d) 相似, 声场亦呈现出一定的空间对称特性, 此时的能流透射率为 0.985. 声场在一定程度上可认为实现了能流的全透射.

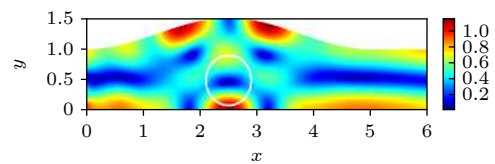


图 7 最佳入射波存在随机扰动时的声场

Fig. 7. Wave field generated by a disturbed optimal incident wave.

接着考虑高频条件下, 即可传播模态较多时, 能流最大透射的鲁棒性. 图 8 给出不同频率下, 最佳入射波存在 (25) 式形式的随机干扰时, 能流透射率的期望和相对标准差的变化曲线. 其中任意频率下的最佳入射波均按照 (20) 式—(22) 式独立求

取, 求取后对其叠加随机干扰再经过 2×10^5 次蒙特卡罗分析后求得能流透射率的期望和相对标准差. 图 8 中频率选取范围为 $k \in [1.2\pi, 9.95\pi]$. 由图 8 可以明显地看出, 在选取频率范围内, 能流透射率的期望均在 0.95 以上, 近乎为全透射; 而相对标准差的绝对值均在 5% 以内, 可认为具有较高的抗干扰能力. 因而非均匀波导中的全透射具有高鲁棒性, 能够更易于工程实现.

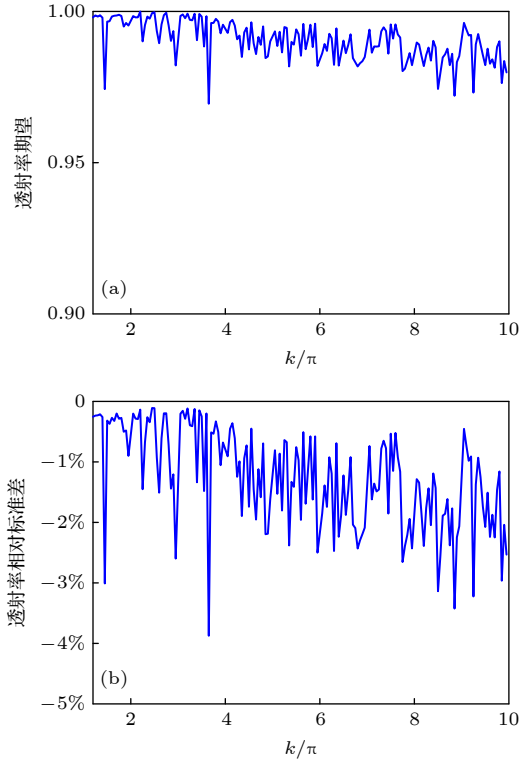


图 8 最佳入射波存在随机干扰时能流透射率的 (a) 期望和 (b) 相对标准差随频率的变化

Fig. 8. (a) Expectation and (b) relative standard deviation of the flux-transmittance when the optimal incident wave is randomly perturbed.

5 讨论

文中方法所基于的耦合简正波理论可用于求解多种非均匀波导内的声传播问题, 求取过程不含任何近似处理, 能够给出稳定准确的声场解, 适用于深入分析波导中的各种声传播问题.

1) 文中分析最大声透射的方法同样适用于含吸收散射体波导, 散射体是否含吸收并不改变透射矩阵及水平波数矩阵的构建方式, 方法仍然适用. 但透射率曲线, 最佳入射波以及对应声场会受到影响.

2) 对于含声速剖面或介质参数变化问题, 透射矩阵的构建可参考文献 [37], 水平波数矩阵的构建可参考文献 [45]. 分析最大声透射问题的步骤仍可参照 (17) 式—(22) 式. 故该方法可对部分浅海波导中的最大声传播问题提供参考.

3) 文中所使用的耦合简正波法已被证明适用于分析弹性非均匀板中的兰姆波传播问题 [46], 故结合文中分析最大声透射的方法可分析弹性声超构材料中的兰姆波最大透射特性.

4) 文中方法对分析最大声反射问题同样适用.

此外, 考虑实验构建最佳入射波时, 文献 [47] 已证明以半波长为间隔稀疏输入最佳入射波可重构原入射波的传播特性, 因此通过合理地选取各采样点处声源的源级和初相, 结合能流最大透射对最佳入射波的幅度和相位扰动具有强鲁棒性的特点, 能够构建出满足要求的入射波, 为工程实现提供一定的可行性.

6 结论

本文提出了一种分析非均匀波导中能流最大透射问题的方法, 理论推导出入射波与任意位置声场的映射关系并给出透射波能流的表达式, 进而分析发生最大声透射时声波需要满足的频率条件或波形条件. 能流表达式主要由透射矩阵、水平波数矩阵及入射波决定, 其中透射矩阵和水平波数矩阵均可利用耦合简正波法构建. 本文讨论了任意声波入射时能够实现最大声能流透射的频率及对应声场解, 以及任意频率下能够实现最大声能流透射的入射波及对应声场解. 结果表明, 即使在频率较低的情况下, 声能流也可能存在全透射现象. 值得注意的是, 声能流的零反射不代表声压的零反射, 声场中存在反射波与能流的全透射之间并不矛盾, 原因在于反射波中可以存在不传播能流的消逝模态成分. 此外, 波导中的最大能流透射具有较强的鲁棒性, 尤其是当波导中仅存在一阶可传播模态时, 该模态的能流全透射能够表现出完美鲁棒性. 本文提出的方法在复杂介质声通信或超构材料设计分析中具有一定的应用价值.

参考文献

- [1] Dorokhov O 1982 *Solid State Commun.* **44** 915
- [2] Dorokhov O 1984 *Solid State Commun.* **51** 381

- [3] Imry Y 1986 *Europhys. Lett.* **1** 249
- [4] Pendry J B, MacKinnon A, Pretre A B 1990 *Physica A* **168** 400
- [5] Mello P A, Pereyra P, Kumar N 1988 *Ann. Phys.* **181** 290
- [6] Nazarov Y V 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 134
- [7] Beenakker C W J 1997 *Rev. Mod. Phys.* **69** 731
- [8] Vellekoop I M, Lagendijk A, Mosk A P 2010 *Nat. Photonics* **4** 320
- [9] Popoff S M, Lerosey G, Carminati R, Fink M, Boccara A C, Gigan S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 100601
- [10] Vellekoop I M, Mosk A P 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 120601
- [11] Choi W, Mosk A P, Park Q H, Choi W 2011 *Phys. Rev. B* **83** 134207
- [12] Kim M, Choi Y, Yoon C, Choi W, Kim J, Park Q H, Choi W 2012 *Nat. Photonics* **6** 581
- [13] Popoff S M, Goetschy A, Liew S F, Stone A D, Cao H 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 133903
- [14] Hao X, Martin-Rouault L, Cui M 2014 *Sci. Rep.* **4** 5874
- [15] Gérardin B, Laurent J, Derode A, Prada C, Aubry A 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 173901
- [16] Liew S F, Popoff S M, Mosk A P, Vos W L, Cao H 2014 *Phys. Rev. B* **89** 224202
- [17] Liew S F, Cao H 2015 *Opt. Express* **23** 11043
- [18] Yamilov A, Petrenko S, Sarma R, Cao H 2016 *Phys. Rev. B* **93** 100201
- [19] Wang Z, Chong Y D, Joannopoulos J D, Soljačić M 2009 *Nature* **461** 772
- [20] Lu L, Joannopoulos J D, Soljačić M 2014 *Nat. Photonics* **8** 821
- [21] Rahm M, Cummer S A, Schurig D, Pendry J B, Smith D R 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 063903
- [22] Yu N F, Capasso F 2013 *Nat. Mater.* **13** 139
- [23] Asadchy V S, Faniayeu I A, Ra'di Y, Khakhomov S A, Semchenko I V, Tretyakov S A 2015 *Phys. Rev. X* **5** 031005
- [24] Bonnet-Ben Dhia A S, Nazarov S A 2013 *Acoust. Phys.* **59** 633
- [25] Bonnet-Ben Dhia A S, Chesnel L, Nazarov S A 2015 *Inverse Prob.* **31** 045006
- [26] Bonnet-Ben Dhia A S, Lunéville E, Mbentcha Y, Nazarov S A 2017 *Math. Methods Appl. Sci.* **40** 335
- [27] Bonnet-Ben Dhia A S, Chesnel L, Nazarov S A 2018 *J. Math. Pures Appl.* **111** 79
- [28] Derode A, Roux P, Fink M 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 4206
- [29] Fink M, Cassereau D, Derode A, Prada C, Roux P, Tanter M, Thomas J L, Wu F 2000 *Rep. Prog. Phys.* **63** 1933
- [30] Lerosey G, Rosny J, Tourin A, Fink M 2007 *Science* **315** 1120
- [31] Mosk A P, Lagendijk A, Lerosey G, Fink M 2012 *Nat. Photonics* **6** 283
- [32] Ma F Y, Huang M, Xu Y C, Wu J H 2018 *Sci. Rep.* **8** 5906
- [33] Chen J, Xiao J, Lisevych D, Shakouri A, Fan Z 2018 *Nat. Commun.* **9** 4920
- [34] Li Y, Assouar B M 2016 *Appl. Phys. Lett.* **108** 063502
- [35] Shen C, Cummer S A 2018 *Phys. Rev. Appl.* **9** 054009
- [36] Maurel A, Mercier J F, Félix S 2014 *J. Acoust. Soc. Am.* **135** 165
- [37] Liu J, Li Q 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 064301 (in Chinese) [刘娟, 李琪 2021 物理学报 **70** 064301]
- [38] Lu Y Y, McLaughlin J R 1996 *J. Acoust. Soc. Am.* **100** 1432
- [39] Lu Y Y 2005 *J. Comput. Appl. Math.* **173** 247
- [40] Pagneux V 2010 *J. Comput. Appl. Math.* **234** 1834
- [41] Bonnet-Ben Dhia A S, Chesnel L, Pagneux V 2018 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **474** 20180050
- [42] Chéron É, Félix S, Pagneux V 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 125501
- [43] Guo W, Liu J, Bi W P, Aurégan Y, Pagneux V 2020 arXiv 2010.03646
- [44] Pagneux V, Maurel A 2002 *P. Roc. Soc. A-Math. Phys.* **458** 1913
- [45] Li Q, Liu J, Guo W 2019 *Chin. Phys. B* **29** 014303
- [46] Pagneux V, Maurel A 2006 *Proc. R. Soc. A- Math. Phys.* **462** 1315
- [47] Guo W, Yang D S 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 074301 (in Chinese) [郭威, 杨德森 2020 物理学报 **69** 074301]

Maximal transmission of acoustic energy flux in inhomogeneous waveguides and robustness analyses

Guo Wei³⁾ Yang De-Sen^{1)2)3)†}

1) (*National Defense Key Laboratory of Underwater Acoustic Technology, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

2) (*Key Laboratory of Marine Information Acquisition and Security Ministry of Industry and Information, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

3) (*College of Underwater Acoustic Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

(Received 14 March 2021; revised manuscript received 14 April 2021)

Abstract

Inhomogeneity in a medium will cause wave scattering, influencing the transfer of energy or information. However, it is possible to prepare a prescribed wavefront which propagates through an inhomogeneous medium with unity flux-transmittance. This phenomenon is first predicted in the context of mesoscopic electron transport. Another remarkable phenomenon is the bimodal distribution of the transmission singular values, which implies that in a lossless medium the full solution space in the scattering region can be spanned only by open channels, which are completely transmitted, and closed channels, which are completely reflected. In mesoscopic physics, random-matrix theory is usually utilized to deal with the statistical properties of matrices with randomly distributed entries since the medium is assumed to be randomly fluctuating. In this paper, we propose a method of systematically studying the maximal flux transmission through an inhomogeneous acoustic waveguide. The model is chosen to be a waveguide with varying cross-sections and a penetrable scatterer, and the method is based on the coupled mode theory. This method can be used to analyze the frequency of nearly complete transmission for an arbitrary incident wave, and to analyze the incident wave that is able to generate the maximal flux-transmittance for any given frequency. We construct the transmission matrix and the horizontal wavenumber matrix by using orthonormal basis functions, and give the expression of flux-transmittance. Then the optimal incident wave which brings the maximal transmittance through the scattering region is derived based on singular value decomposition. The optimal incident waves are independent of the evanescent modes since evanescent modes do not transfer any energy. But the evanescent modes can give rise to the multivaluedness of wave solutions with complete flux transmission. Considering the fact that acoustic waveguides can naturally resist the influence of highly oscillating perturbations since most of them correspond to evanescent modes), the maximal flux transmission in waveguide is thus found to be highly robust. Especially at a specific frequency, the complete wave transmission has perfect robustness. This proposed method can be generalized to any other frequency, to other types of scatterers, or to other kinds of boundary conditions, and can provide guidance in designing acoustic metamaterials and in highly efficient communication.

Keywords: inhomogeneous waveguides, maximal flux transmission, complete wave transmission, optimal incident wave

PACS: 43.20.Mv, 43.20.Fn, 43.20.+g

DOI: 10.7498/aps.70.20210495

† Corresponding author. E-mail: dshyang@hrbeu.edu.cn