

## 光学腔中一维玻色-哈伯德模型的奇异超固相

周晓凡 樊景涛 陈刚 贾锁堂

### Exotic supersolid phase of one-dimensional Bose-Hubbard model inside an optical cavity

Zhou Xiao-Fan Fan Jing-Tao Chen Gang Jia Suo-Tang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 193701 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20210778

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210778>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

带三体相互作用的 $S=1$ 自旋链中的保真率和纠缠熵

Fidelity susceptibility and entanglement entropy in  $S=1$  quantum spin chain with three-site interactions

物理学报. 2018, 67(2): 020302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172087>

光腔中两组分玻色-爱因斯坦凝聚体的受激辐射特性和量子相变

Stimulated radiation characteristics and quantum phase transition for two-component Bose-Einstein condensate in optical cavity

物理学报. 2018, 67(18): 183701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180971>

一维扩展量子罗盘模型的拓扑序和量子相变

Topological orders and quantum phase transitions in a one-dimensional extended quantum compass model

物理学报. 2018, 67(19): 190301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180855>

横场中具有周期性各向异性的一维XY模型的量子相变

Quantum phase transitions of one-dimensional period-two anisotropic XY models in a transverse field

物理学报. 2017, 66(18): 180302 <https://doi.org/10.7498/aps.66.180302>

Jaynes-Cummings晶格模型和Rabi晶格模型的量子相变

The quantum phase transition in the Jaynes-Cummings lattice model and the Rabi lattice model

物理学报. 2021, 70(10): 100201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202066>

含有Dzyaloshinskii-Moriya相互作用的自旋1键交替海森堡模型的量子相变和拓扑序标度

Quantum phase transition and topological order scaling in spin-1 bond-alternating Heisenberg model with Dzyaloshinskii-Moriya interaction

物理学报. 2020, 69(9): 090302 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191773>

## 光学腔中一维玻色-哈伯德模型的奇异超固相\*

周晓凡<sup>1)2)</sup> 樊景涛<sup>1)2)†</sup> 陈刚<sup>1)2)3)</sup> 贾锁堂<sup>1)2)</sup>

1) (山西大学, 激光光谱研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 太原 030006)

2) (山西大学, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

3) (山东师范大学, 光场调控及应用协同创新中心, 济南 250358)

(2021 年 4 月 22 日收到; 2021 年 5 月 17 日收到修改稿)

利用密度矩阵重整化群计算了光学腔中一维无自旋玻色-哈伯德模型的基态. 通过研究超流序、局域密度分布、二阶和三阶关联函数, 发现该系统出现了超越平均场理论的两个奇异超固相. 这两个超固相同时具备对角和非对角长程序, 其中一个展现出包络形式的密度调制振荡, 另一个展现出均匀的密度分布. 另外, 结合光场的超辐射序参量和腔内的平均光子数, 发现奇异超固相与腔光场的涨落存在密切关系. 该工作给出了光学腔内玻色哈伯德模型的超越平均场理论的新物理, 并提供了探索光学腔内光与物质集体物态的完整计算方法.

**关键词:** 量子相变, 密度矩阵重整化群, 光学腔**PACS:** 37.10.Jk, 37.30.+i, 42.50.Pq, 64.70.Tg**DOI:** 10.7498/aps.70.20210778

## 1 引言

超冷量子气体为多体相互作用系统的量子模拟提供了独特的环境<sup>[1]</sup>. 将超冷量子气体俘获在光学晶格中可以模拟强关联晶格模型, 其中最典型的模型是玻色-哈伯德模型. 这一模型中存在超流相和莫特绝缘体之间的量子相变<sup>[2-4]</sup>. 在超冷原子实验中, 原子间具有天然的有限长程相互作用, 它可以通过 Feshbach 共振技术进行调节<sup>[3,4]</sup>. 而凝聚态系统中还存在大量由无限长程相互作用驱动的多体现象, 这为基于超冷原子的量子模拟提出了新的挑战. 幸运的是, 光学腔中的光子可以充当原子间沟通的中继站, 进而诱导出有效的无限长程相互作用<sup>[5-8]</sup>. 在晶格系统中, 该无限长程相互作用会与原子动能和在位相互作用能竞争, 进而衍生出周期

是晶格周期两倍的密度关联, 并驱动奇偶格点分布差异的原子密度波<sup>[9]</sup>. 以上特征使得光学腔内的玻色-哈伯德模型具备更加丰富的基态属性<sup>[10-20]</sup>.

超固相是一种反直觉的物质状态, 它同时具有超流体的无摩擦流与固体的周期性密度结晶<sup>[21]</sup>. 它也是一个对角序和非对角序 (相位相干和空间序) 共存的热力学稳态<sup>[22-27]</sup>. 在平均场理论下, 光学腔中玻色原子的超固相通常出现在光场的超辐射区间, 且晶格的密度分布呈现奇偶振荡<sup>[12-18]</sup>. 然而, 由于该理论在原理上忽略了物理量的高阶涨落, 故不足以完整描述量子场的密度关联. 特别是当腔光场未发生超辐射时, 腔场涨落可能剧烈增强, 此时平均场理论变得更加不可靠<sup>[19,20]</sup>. 因此, 为了更加精确地理解光学腔中玻色原子的超固相, 有必要超越传统的平均场理论, 系统计算原子的局域密度分布、二阶和三阶关联函数.

\* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2017YFA0304203)、国家自然科学基金 (批准号: 11674200, 12074232, 12004230, 11804204)、山西省“1331 工程”重点学科建设和山西省回国留学人员科研资助项目 (批准号: HGKY2019003) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: fanjt@sxu.edu.cn

本文考虑装载在光学腔内的一维超冷玻色原子, 通过对腔光场做绝热近似, 得到一种拓展的玻色-哈伯德模型. 这一模型的典型特征是其中包含在位相互作用和无限长程相互作用. 利用密度矩阵重整化群方法<sup>[28,29]</sup>(DMRG) 数值计算系统基态的单体超流序、局域密度分布、二阶和三阶关联函数, 探究系统的非对角和对角序. 发现了超越平均场理论的两个奇异超固相, 其中一个展现出包络形式的密度调制振荡, 另一个展现出均匀的密度分布. 另外, 结合光场的超辐射序参量和腔内的平均光子数, 发现奇异超固相与腔光场的涨落存在密切关系.

## 2 模型和序参量

基于最近实现的光学腔实验平台<sup>[10]</sup>, 本文考虑的系统是装载在准一维 (1D) 背景光晶格中的超冷玻色气与光学腔的耦合, 如图 1 所示. 其中光晶格的晶格深度为  $V_0$ , 腔的频率为  $\omega_c$ . 所有共振频率为  $\omega$  的二能级原子不仅与  $\hat{x}$  方向的腔场耦合, 还被  $\hat{z}$  方向的泵浦光所驱动. 泵浦光驱动频率和振幅分别为  $\omega_p$  和  $\Omega$ . 为了有效地降低原子发热, 这里只考虑红失谐腔, 即  $\Delta_c = \omega_c - \omega_p < 0$ . 在大失谐极限时, 激发态可以被绝热消除. 考虑紧束缚近似后的有效哈密顿量为<sup>[30]</sup>

$$H = -t \sum_i (\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+1} + \text{H.c.}) + \frac{U_s}{2} \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) - \hbar(\Delta_c - \delta) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \eta M_0 (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \left( \sum_e \hat{n}_e - \sum_o \hat{n}_o \right), \quad (1)$$

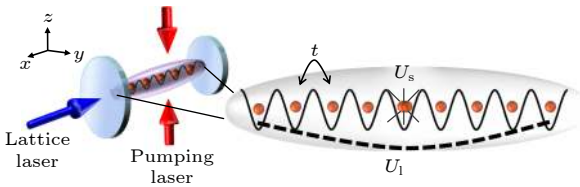


图 1 左图: 玻色原子沿着腔轴方向  $\hat{x}$  被俘获在准一维 (1D) 背景光学晶格中, 费米气被两束圆偏振的横向 (沿着  $\hat{z}$  方向) 抽运激光驱动. 右图: 隧穿系数  $t$ , 接触型相互作用  $U_s$  和无限长程相互作用  $U_l$

Fig. 1. Left: Proposed experimental setup that the bosonic atoms trapped in a quasi-1D optical lattice interact with an optical cavity. Right: Illustration of the competing terms among the hopping  $t$ , the contact interaction  $U_s$  and the global-range interaction  $U_l$ .

式中,  $\hat{b}_i^\dagger$  和  $\hat{b}_i$  为基态能级的玻色子产生和湮灭算符, 粒子数算符  $\hat{n}_i = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$ .  $\hat{a}^\dagger$  和  $\hat{a}$  是量子化腔场的产生和湮灭算符.  $o$  和  $e$  分别是奇偶格点指标.  $t$  为跃迁系数,  $U_s$  是玻色子排斥相互作用强度.  $\delta = M_1 N$  是腔的色散偏移, 其中  $M_0 = \int dx W_i^*(x) \cos(k_0 x) W_i(x)$ ,  $M_1 = (g^2/\Delta) \int dx W_i^*(x) \cos^2(k_0 x) W_i(x)$ ,  $N$  是原子总数,  $W_i(x)$  是局域在格点的瓦尼儿函数,  $k_0$  为腔场波矢,  $g$  为腔内单光子耦合常数,  $\eta = g\Omega/\Delta$  是有效的光与原子耦合强度.

根据方程 (1) 可以写出光场消灭算符所满足的量子郎之万方程:

$$\partial_t \hat{a}(t) = i(\Delta_c - \delta) \hat{a}(t) - i\eta M_0 \left( \sum_e \hat{n}_e - \sum_o \hat{n}_o \right) - \kappa \hat{a}(t) - \sqrt{2\kappa} \hat{F}(t), \quad (2)$$

方程最后一项为库环境引起的量子噪声. 考虑腔场的耗散  $\kappa$  远大于原子反冲能, 此时可作绝热近似, 即忽略噪声项, 认为光场始终弛豫在稳态<sup>[30]</sup>. 从方程 (2) 出发得到光场的稳态形式为<sup>[10]</sup>

$$\hat{a} = \frac{\eta M_0}{\Delta_c - \delta + i\kappa} \left( \sum_e \hat{n}_e - \sum_o \hat{n}_o \right). \quad (3)$$

将方程 (3) 引入 (1) 式的哈密顿量, 可以得到有效哈密顿量为

$$H = -t \sum_i (\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+1} + \text{H.c.}) + \frac{U_s}{2} \sum_i \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1) - \frac{U_l}{L} \left( \sum_e \hat{n}_e - \sum_o \hat{n}_o \right)^2, \quad (4)$$

其中,  $U_l = -L\hbar|\eta M_0|^2(\Delta_c - \delta)/[(\Delta_c - \delta)^2 + \kappa^2]$ <sup>[10]</sup>,  $L$  是晶格的尺寸. 哈密顿量 (4) 中的  $U_l$  项清楚地展示了光学腔中以光子为媒介诱导的原子原子之间无限长程相互作用, 它可以通过改变泵浦激光的大小来独立调整. 至此就得到了一个隧穿、在位相互作用和无限长程相互作用共存且竞争的有趣模型, 如图 1 所示.

为了探究超固相的属性, 应该考虑非对角序和对角序的实验可观测量序参量: 超流序 (非对角序)

$$G(r) = \frac{1}{L} \sum_i \langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_{i+r} \rangle. \quad (5)$$

它描述的是相位相干. 傅里叶形式为  $n(k) = \frac{1}{L} \sum_r e^{ikr} G(r)$ .  $n(k=0)$  是凝聚系数, 表示占据超流态的

玻色子的密度. 如果  $G(r)$  具有长程序, 则  $n(k=0) > 0$ , 此时系统表现出相位相干. 局域密度分布为

$$D^1(j) = \langle \hat{n}_j \rangle. \quad (6)$$

它的傅里叶变换为  $\nu(k) = \frac{1}{L} \sum_j e^{ikj} \langle \hat{n}_j \rangle$ .  $\nu(k)$  的尖峰位置所对应的动量值  $\nu_{\text{peak}}$  描述的是密度分布的振荡周期. 如果密度分布  $\langle \hat{n}_j \rangle$  呈现的是奇偶晶格振荡, 则  $\nu_{\text{peak}} = \pi$ ; 如果密度分布  $\langle \hat{n}_j \rangle$  呈现的是均匀分布, 则  $\nu_{\text{peak}} = 0$ ; 如果密度分布  $\langle \hat{n}_j \rangle$  呈现的是包络型的非公度振荡分布, 则  $\nu(k)$  会出现两个尖峰, 且每个尖峰都满足  $0 < \nu_{\text{peak}} < \pi$ . 二阶关联函数(对角序)必须去除掉局域密度分布  $\langle \hat{n}_j \rangle$  的贡献, 即

$$D^2(l, j) = \langle \hat{n}_l \hat{n}_j \rangle - \langle \hat{n}_l \rangle \langle \hat{n}_j \rangle. \quad (7)$$

它的傅里叶变换为  $S(k) = \frac{1}{L} \sum_{l,j} e^{ik(l-j)} \langle \hat{n}_l \hat{n}_j \rangle$ . 当  $\langle \hat{n}_l \hat{n}_j \rangle$  表现为奇偶振荡, 则  $S(k=\pi) > 0$ , 此时系统存在对角序. 三阶关联函数必须减去来自二阶关联  $D^2(l, j)$  和局域密度分布  $\langle \hat{n}_j \rangle$  的贡献, 它的定义为<sup>[31–35]</sup>

$$D^3(i, l, j) = \langle \hat{n}_i \hat{n}_l \hat{n}_j \rangle - D^2(l, j) \langle \hat{n}_i \rangle - D^2(i, j) \langle \hat{n}_l \rangle - D^2(i, l) \langle \hat{n}_j \rangle - \langle \hat{n}_i \rangle \langle \hat{n}_l \rangle \langle \hat{n}_j \rangle. \quad (8)$$

目前关于光学腔中玻色子的研究大多只关注原子的量子效应, 而较少探究光子的性质<sup>[19,20]</sup>. 事实上, 光学腔中的光子是原子之间的耦合媒介, 它在系统的集体动力学中往往发挥着重要作用. 这里重点考察两个与光子相关的物理量, 第一个是基于平均场理论的超辐射序参量:

$$|\langle \hat{a} \rangle|^2 = \frac{U_l}{L} \left| \left\langle \sum_e \hat{n}_e - \sum_o \hat{n}_o \right\rangle \right|^2. \quad (9)$$

另一个是腔中光子数:

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = U_l L S(k=\pi). \quad (10)$$

在平均场理论中, 超辐射序参量和腔中的光子数相等, 即  $|\langle \hat{a} \rangle|^2 = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ <sup>[36]</sup>. 在超辐射区间,  $|\langle \hat{a} \rangle|^2 > 0$ , 腔场涨落较小, 平均场理论一般能较好描述系统的动力学性质. 而对于非超辐射区间, 超辐射序参量为零, 即  $|\langle \hat{a} \rangle|^2 = 0$ , 此时腔场涨落可能会对系统状态有较大影响<sup>[36]</sup>.

本文用 DMRG 有限尺寸算法计算系统开边界情况下的多体基态. 选取的格点长度  $L$  最大为 96, DMRG 最大态数为 200, 扫描次数为 30, 此时的截断误差最大为  $10^{-8}$ . 令  $t = 1$  作为能量单位.

### 3 量子多体相

首先, 将一个较大的无限长程相互作用(例如  $U_l = 6$ ) 引入到  $U_s = 10$  的玻色-哈伯德模型中. DMRG 数值结果显示, 超流序  $G(r)$  随着格点间隔  $r$  的增大呈现幂次衰减(幂率值为 0.7) 且奇偶振荡, 此时  $n(k=0) > 0$ , 如图 2(a1) 所示. 这说明此时体系存在相位相干, 即存在非对角长程序. 密度分布  $\langle \hat{n}_i \rangle$  呈现奇偶振荡, 此时  $\nu_{\text{peak}} = \pi$ , 如图 2(a2) 所示. 消除了密度分布  $\langle \hat{n}_i \rangle$  的贡献, 二阶关联  $D^2(l, j)$  接近 0, 如图 2(a3) 所示. 二阶关联的贡献全部来自奇偶振荡的密度分布  $\langle \hat{n}_i \rangle$ . 这一参数下系统对应的基态与平均场近似理论的结果一致. 我们又计算了这一参数下的三阶关联函数  $D^3(i, l, j)$ . 消除了密度分布  $\langle \hat{n}_i \rangle$  和二阶关联  $D^2(l, j)$  的贡献, 三阶关联  $D^3(i, l, j)$  接近 0, 如图 2(a4) 所示. 本文将这一传统的超固相称为超固 0 相.

当  $U_s = 10$  的玻色-哈伯德模型中引入一个大小适中的无限长程相互作用(以  $U_l = 4.4$  为例). DMRG 数值结果显示, 超流序  $G(r)$  随着格点间隔  $r$  的增大幂率衰减(幂率值为 0.56), 且此时  $n(k=0) > 0$ , 如图 2(b1) 所示. 密度分布  $\langle \hat{n}_i \rangle$  呈现包络型振荡, 此时  $0 < \nu_{\text{peak}} < \pi$ , 如图 2(b2) 所示. 二阶关联  $D^2(l, j)$  呈现奇偶振荡且不随格点间距增大而衰减, 如图 2(b3) 所示. 二阶关联的贡献全部来自关联效应, 这一数值结果完全超越了平均场理论. 三阶关联函数  $D^3(i, l, j)$  呈现奇偶振荡且不随格点间距增大而衰减, 如图 2(b4) 所示. 这一包络型分布的奇偶格点原子总数相等, 即  $\langle \sum_e \hat{n}_e - \sum_o \hat{n}_o \rangle = 0$ . 然而, 无限长程相互作用能  $\langle (\sum_e \hat{n}_e - \sum_o \hat{n}_o)^2 \rangle > 0$ . 这两个值之间的差异主要源自于量子涨落. 本文中, 具有  $0 < \nu_{\text{peak}} < \pi$  特征的超固相被称为超固 1 相.

降低在位相互作用大小(以  $U_s = 2$  为例), 但无限长程相互作用不变, 仍为  $U_l = 4.4$ .  $G(r)$  随着格点间隔  $r$  的增大幂率衰减(幂率值为 0.24), 且此时  $n(k=0) > 0$ , 如图 2(c1) 所示. 此时体系存在相位相干, 即存在非对角长程序. 这一参数对应的基态同样为超固相, 但是这一超固相不同于超固 0 相和超固 1 相. 密度分布  $\langle \hat{n}_i \rangle$  是均匀的, 此时  $\nu_{\text{peak}} = 0$ , 如图 2(c2) 所示. 二阶关联  $D^2(l, j)$  和三阶关联  $D^3(i, l, j)$  呈现奇偶振荡且不随格点间距增大而



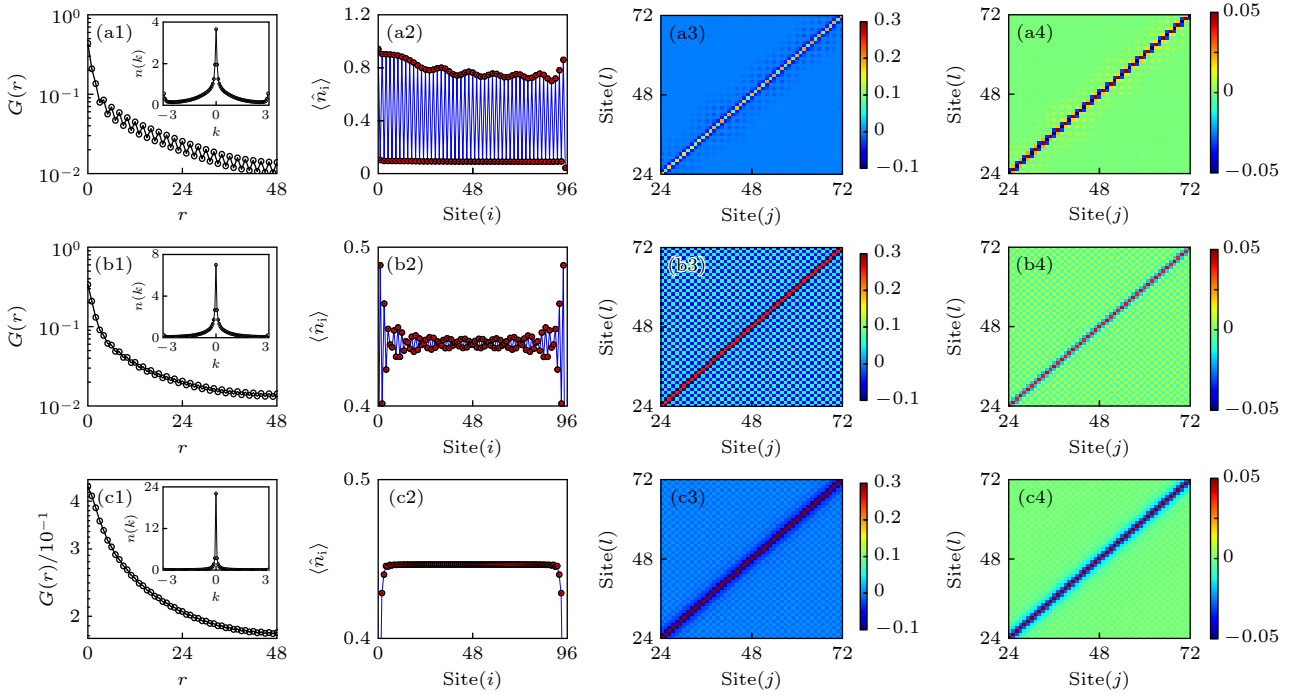


图 2 (a1), (b1), (c1) 超流序  $G(r)$  和插图  $n(k)$ ; (a2), (b2), (c2) 密度分布  $\langle \hat{n}_j \rangle$ ; (a3), (b3), (c3) 二阶关联  $D^2(l, j)$ ; (a4), (b4), (c4) 三阶关联  $D^3(i, l, j)$ . (a1)—(a3) 超固 0 相, 相互作用参数  $U_s = 10$  和  $U_l = 6$ ; (b1)—(b3) 超固 1 相, 相互作用参数  $U_s = 10$  和  $U_l = 4.4$ ; (c1)—(c3) 超固 2 相, 相互作用参数  $U_s = 2$  和  $U_l = 4.4$ . 所有图中, 共有参数  $L = 96$ ,  $\rho = 0.4375$

Fig. 2. (a1), (b1), (c1) Superfluid order  $G(r)$  and  $n(k)$ ; (a2), (b2), (c2) density profile  $\langle \hat{n}_j \rangle$ ; (a3), (b3), (c3) two order correlation  $D^2(l, j)$ ; (a4), (b4), (c4) three order correlation  $D^3(i, l, j)$  for  $i = j$  of (a1)—(a3) supersolid 0 phase with  $U_s = 10$  and  $U_l = 6$ , (b1)—(b3) supersolid 1 phase with  $U_s = 10$  and  $U_l = 4.4$ , and (c1)—(c3) supersolid 2 phase with  $U_s = 2$  and  $U_l = 4.4$ . In all subfigure, we have  $L = 96$  and  $\rho = 0.4375$ .

衰减, 如图 2(b3) 和图 2(b4) 所示. 本文中, 特征为  $\nu_{\text{peak}} = 0$  的超固相被称超固 2 相.

为了更好地展示超流序  $G(r)$  的存在, 计算了多个尺寸的数据, 并做了有限尺寸分析, 如图 3 所示. 在有限尺寸下, 超固 1 相和超固 2 相的超流序  $G(r)$  随着距离呈幂率衰减, 将幂率做有限尺寸分析发现, 在热力学极限下 ( $L \rightarrow \infty$ ) 幂率在 (0, 1) 区间, 如图 3(a1) 和图 3(b1) 所示. 对  $n(k=0)/L$  做有限尺寸分析可以发现, 在热力学极限下 ( $L \rightarrow \infty$ ) 超固 1 相和超固 2 相的  $n(k=0)/L > 0$ , 如图 3(a2) 和图 3(b2) 所示. 综上可得, 超固 1 相和超固 2 相的超流序是固然存在的, 不因尺寸变化而消失.

超固 1 相和超固 2 相源自于在位相互作用和无限长程相互作用的共存和竞争. 超固 1 相在不同尺寸情况下都会出现相同周期的包络型的密度分布, 如图 4(a1)—(a3) 所示. 且不同尺寸的  $\nu_{\text{peak}}$  相同, 通过有限尺寸分析可以发现, 热力学极限下 ( $L \rightarrow \infty$ ) 的  $\nu_{\text{peak}}$  与有限尺寸的  $\nu_{\text{peak}}$  相等, 如图 4(a4) 所示. 超固 2 相在不同尺寸时的密度分布  $\langle \hat{n}_j \rangle$  都是均匀的, 如图 4(b1)—(b3) 所示. 不同尺寸包括热力学

学极限下 ( $L \rightarrow \infty$ ) 的  $\nu_{\text{peak}} \equiv 0$ , 如图 4(b4) 所示.

本文利用  $n(k=0)$  和  $S(k=\pi)$  的值, 即可辨别超流、莫特绝缘体、电荷密度波和超固相. 但是, 需要使用  $\nu_{\text{peak}}$  来区分超固 0 相、超固 1 相和超固 2 相, 如表 1 所列.

为了清楚地探究上述超固相之间的相变, 固定在位相互作用为  $U_s = 10$  和填充因子  $\rho = 0.4375$ , 将无限长程相互作用强度  $U_l$  从 0 不断增大. 这一过程中  $n(k=0) > 0$ . 当  $0 < U_l < 3.3$  时,  $S(k=\pi) = 0$  和  $\nu_{\text{peak}} = 0$ , 对应的量子相为超流; 当  $3.3 < U_l < 4.6$  时,  $S(k=\pi) > 0$  和  $\nu_{\text{peak}} \in (0, \pi)$ , 对应的量子相为超固 1 相; 当  $U_l > 4.6$  时,  $S(k=\pi) > 0$  和  $\nu_{\text{peak}} = \pi$  对应的量子相为超固 0 相, 如图 5(a) 所示. 基态从超流相变为超固 1 相, 最终又相变为超固 0 相, 临界点为  $U_l^c = 3.3$  和 4.6. 超辐射相变同样发生在无限长程相互作用  $U_l$  较大时, 如图 5(b) 所示. 超固 0 相是超辐射驱动的, 在此区域中 DMRG 的结果显示  $|\langle \hat{a} \rangle|^2 = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle > 0$ . 然而, 超固 1 相不是超辐射驱动, 是腔光场涨落驱动的. 此时  $|\langle \hat{a} \rangle|^2 = 0$  且  $|\langle \hat{a} \rangle|^2 \neq \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ , 如图 5(b) 所示.

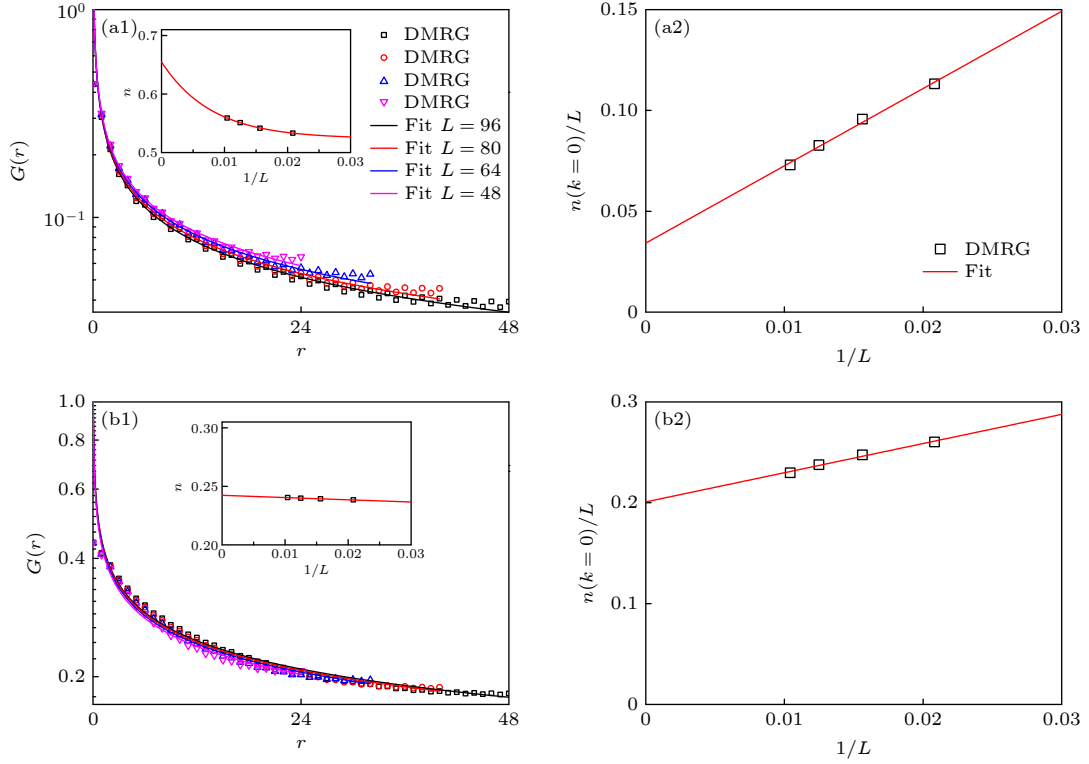


图 3 (a1), (b1) 不同尺寸下的超流序  $G(r)$ , 插图为衰率的有限尺寸分析; (a2), (b2)  $n(k=0)/L$  的有限尺寸分析. (a1), (a2) 超固 1 相, 参数  $U_s = 10$  和  $U_l = 4.4$ ; (b1), (b2) 超固 2 相, 参数  $U_s = 2$  和  $U_l = 4.4$ . 所有图中, 共有参数  $\rho = 0.4375$

Fig. 3. (a1), (b1) Superfluid order  $G(r)$  of several lattice length. The inset is the finite-size scaling of the decay rate. (a2), (b2) Finite-size scaling of  $n(k=0)/L$ . (a1), (a2) Supersolid 1 phase with  $U_s = 10$  and  $U_l = 4.4$ . (b1), (b2) Supersolid 2 phase with  $U_s = 2$  and  $U_l = 4.4$ . In all subfigure, we have  $\rho = 0.4375$ .

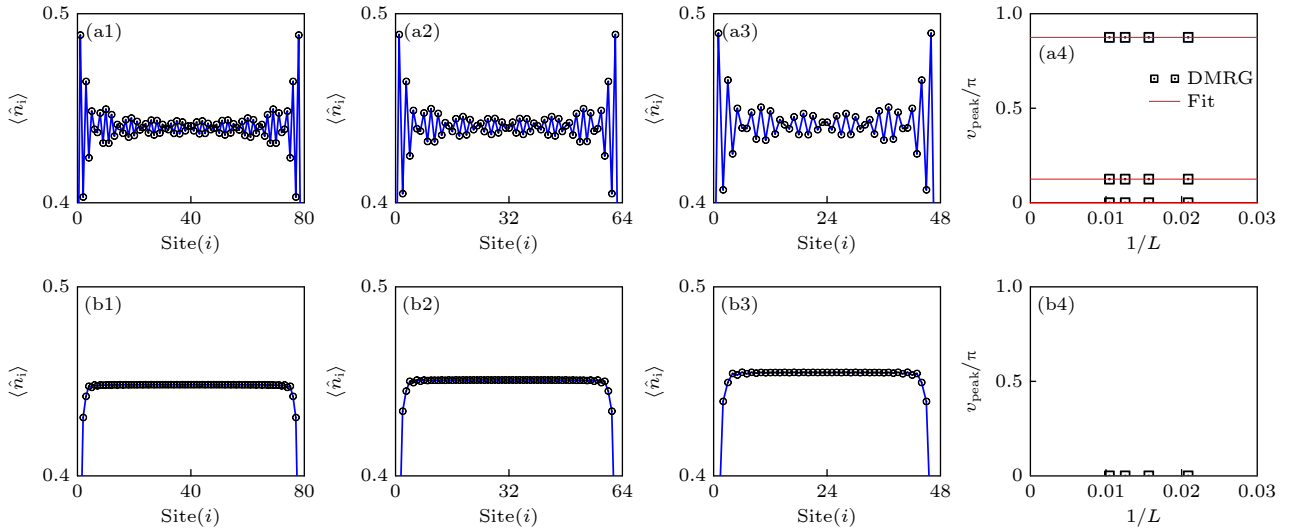


图 4 (a1)–(a3) 和 (b1)–(b3) 密度分布  $\langle \hat{n}_j \rangle$ ; (a4), (b4)  $\nu_{\text{peak}}$  的有限尺寸分析. (a1)–(a4) 超固 1 相, 参数  $U_s = 10$  和  $U_l = 4.4$ ; (b) 超固 2 相, 参数  $U_s = 2$  和  $U_l = 4.4$ . (a1), (b1)  $L = 80$ ; (a2), (b2)  $L = 64$ ; (a3), (b3)  $L = 48$ . 所有图中, 共有参数  $\rho = 0.4375$

Fig. 4. (a1)–(a3) and (b1)–(b3) the density profile  $\langle \hat{n}_j \rangle$ ; (a4), (b4) the finite-size scaling of the  $\nu_{\text{peak}}$ . (a1)–(a4) Supersolid 1 phase with  $U_s = 10$  and  $U_l = 4.4$ ; (b1)–(b4) supersolid 2 phase with  $U_s = 2$  and  $U_l = 4.4$ . (a1), (b1)  $L = 80$ ; (a2), (b2)  $L = 64$ ; (a3), (b3)  $L = 48$ . In all subfigure, we have  $\rho = 0.4375$ .

当固定无限长程相互作用强度  $U_l = 4.4$  和填充因子  $\rho = 0.4375$ , 将在位相互作用强度  $U_s$  从 0 不断增大. 这一过程中  $n(k=0) > 0$  和  $S(k=\pi) > 0$ . 当

$0 < U_s < 5.5$  时  $\nu_{\text{peak}} = 0$ , 对应的量子相为超固 2 相; 当  $5.5 < U_s < 11.5$  时  $\nu_{\text{peak}} \in (0, \pi)$ , 对应的量子相为超固 1 相; 当  $U_s > 11.5$  时  $\nu_{\text{peak}} = \pi$ , 对应的量子相

表 1 量子相对应的序参量  
 Table 1. Corresponding orders of the phases.

| 序/相简写               | 超流SF | 莫特绝缘体MI | 电荷密度波CDW | 超固0相SS <sub>0</sub> | 超固1相SS <sub>1</sub> | 超固2相SS <sub>2</sub> |
|---------------------|------|---------|----------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $n(k=0)$            | $>0$ | 0       | 0        | $>0$                | $>0$                | $>0$                |
| $S(k=\pi)$          | 0    | 0       | $>0$     | $>0$                | $>0$                | $>0$                |
| $\nu_{\text{peak}}$ | 0    | 0       | $\pi$    | $\pi$               | $(0, \pi)$          | 0                   |

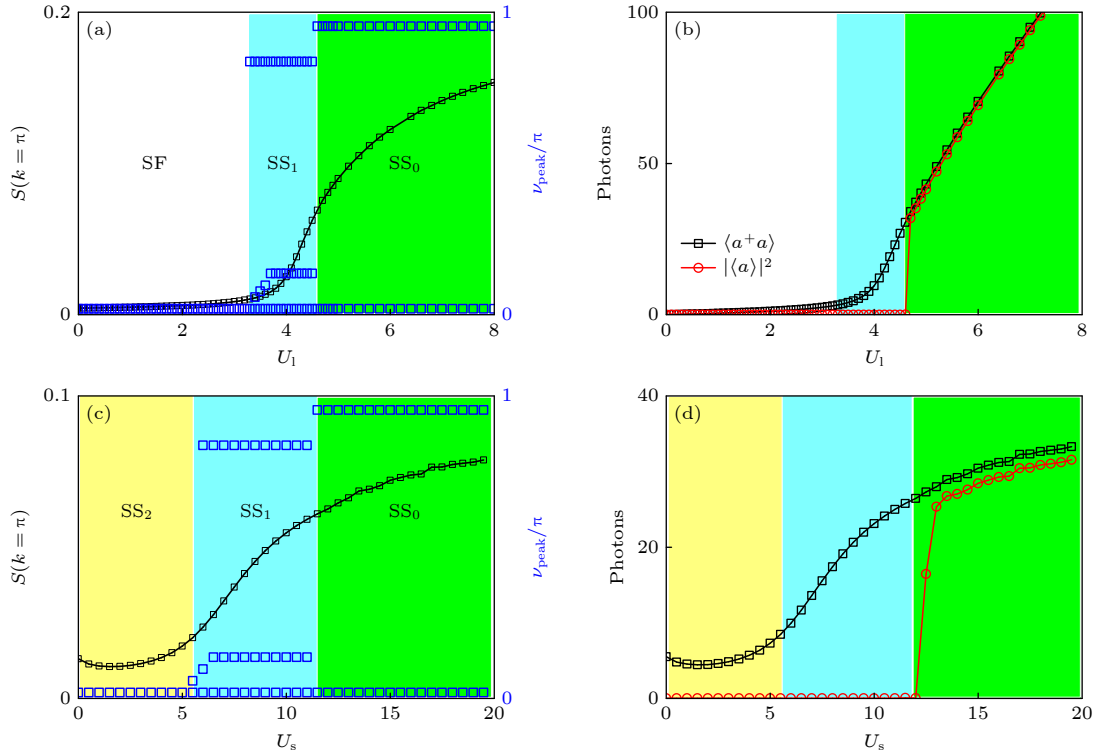


图 5  $S(k=\pi)$  (黑色实线) 和  $\nu_{\text{peak}}$  (蓝色方块) (a) 关于  $U_1$  的变化, 固定  $U_s = 10$ ; (c) 关于  $U_s$  的变化, 固定  $U_1 = 4.4$ . 平均光子数  $|\langle \hat{a} \rangle|^2$  和腔中的光子数  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$  关于 (b) 关于  $U_1$  的变化, 固定  $U_s = 10$ ; (d) 关于  $U_s$  的变化, 固定  $U_1 = 4.4$ . 所有图中, 共有参数  $L = 96$  和  $\rho = 0.4375$ . SF 表示超流, MI 表示莫特绝缘体, CDW 表示电荷密度波, SS<sub>0</sub> 表示超固 0 相, SS<sub>1</sub> 表示超固 1 相, SS<sub>2</sub> 表示超固 2 相

Fig. 5. The  $S(k=\pi)$  (black solid line) and  $\nu_{\text{peak}}$  (blue square) as function of (a)  $U_1$  with  $U_s = 10$ , and (c)  $U_s$  with  $U_1 = 4.4$ . The number of cavity photons  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$  and mean cavity-field  $|\langle \hat{a} \rangle|^2$  as a function of (b)  $U_1$  with  $U_s = 10$ , (d)  $U_s$  with  $U_1 = 4.4$ . In all subfigure, we have  $L = 96$  and  $\rho = 0.4375$ . SF denotes superfluid, MI denotes Mott insulator, CDW denotes charge density wave, SS<sub>0</sub> denotes supersolid 0, SS<sub>1</sub> denotes supersolid 1, SS<sub>2</sub> denotes supersolid 2.

为超固 0 相, 如图 5(c) 所示. 我们同样计算了这一过程的超辐射序参量和光子数, 发现超固 1 相和超固 2 相这两个相的  $|\langle \hat{a} \rangle|^2 = 0$  且  $|\langle \hat{a} \rangle|^2 \neq \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ , 如图 5(d) 所示. 综上, 可以得出结论, 超固 1 相和超固 2 相是腔光场涨落驱动的.

基于上述描述的相变, 勾勒了哈密顿量 (3) 的相图, 如图 6 所示. 图 6(a)–(c) 给出了  $U_1$ - $\rho$  平面的相图, 其中 (a)  $U_s = 0$ , (b)  $U_s = 5$  和 (c)  $U_s = 10$ . 当无在位相互作用和无限长程相互作用时, 体系基态在任何填充率  $\rho$  下都是超流. 当引入无限长程相互作用  $U_1$  后体系变为超固 2 相, 继续增强  $U_1$  体系变为超固 0 相, 如图 6(a) 所示. 当  $U_s = 5$  时, 无限

长程相互作用  $U_1$  驱动体系产生超固 0 相、超固 1 相和超固 2 相. 只有  $\rho = 0.5$  和 1 时, 体系会出现莫特绝缘体和电荷密度波, 如图 6(b) 所示. 当  $U_s = 10$  时, 超固 2 相被压缩而消失, 相图中仍然有超流、莫特绝缘体、电荷密度波、超固 0 相和超固 1 相, 如图 6(c) 所示. 为了更直观地展示在位相互作用和无限长程相互作用的竞争, 给出了  $U_1$ - $U_s$  平面的相图, 如图 6(d) 所示. 无限长程相互作用  $U_1$  驱动产生超固相,  $U_1$  很大时体系为超固 0 相. 当无限长程相互作用  $U_1 = 4$  左右时, 在位相互作用  $U_s$  驱动超固 2 相变为超固 1 相.

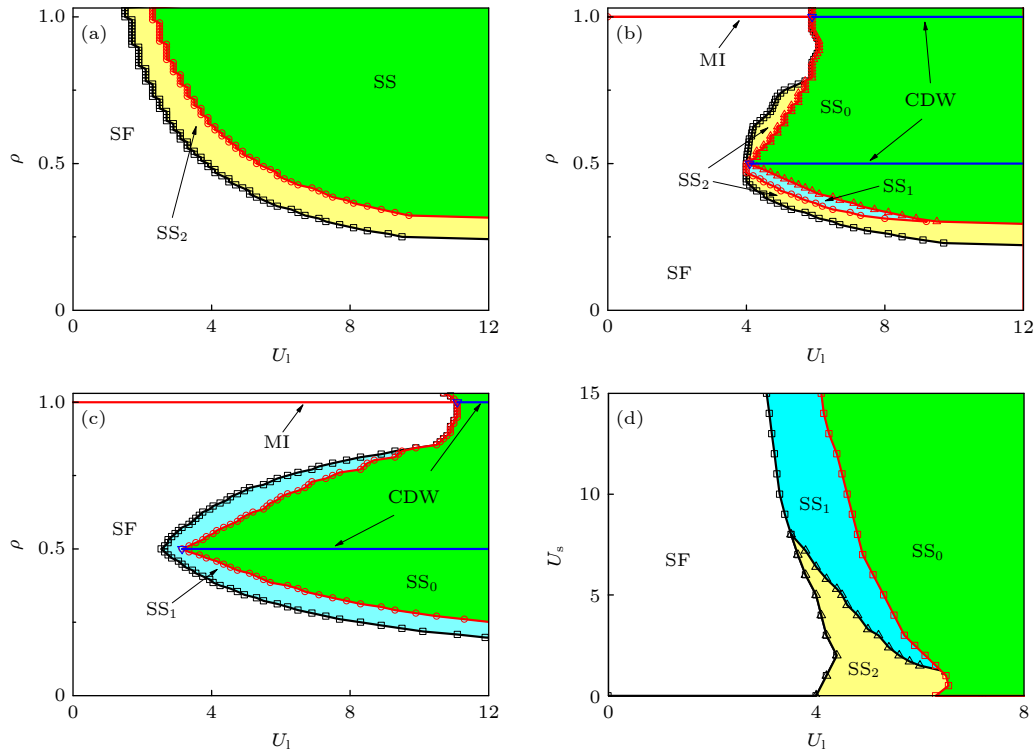


图6 (a)–(c)  $U_1$ - $\rho$  平面的相图 (a)  $U_s = 0$ ; (b)  $U_s = 5$ ; (c)  $U_s = 10$ . (d)  $U_1$ - $U_s$  平面的相图, 参数  $\rho = 0.4375$ . 所有图中, 共有参数  $L = 96$ . SF 表示超流, MI 表示莫特绝缘体, CDW 表示电荷密度波,  $SS_0$  表示超固 0 相,  $SS_1$  表示超固 1 相,  $SS_2$  表示超固 2 相

Fig. 6. (a)–(c) Phase-diagram between  $U_1$  and  $\rho$  with (a)  $U_s = 0$ , (b)  $U_s = 5$  and (c)  $U_s = 10$ . (d) Phase-diagram between  $U_1$  and  $U_s$ , with filling  $\rho = 0.4375$ . In all subfigure, we have  $L = 96$ . SF denotes superfluid, MI denotes Mott insulator, CDW denotes charge density wave,  $SS_0$  denotes supersolid 0,  $SS_1$  denotes supersolid 1,  $SS_2$  denotes supersolid 2.

## 4 总 结

上述量子相在目前的实验平台上都是可以观测的, 动量分布可以通过时间飞行探测, 结构因子可以通过布拉格散射探测<sup>[37,38]</sup>, 密度分布可以通过单格点分辨进行探测<sup>[39]</sup>.

本文研究了光学腔中一维无自旋玻色-哈伯德模型. 利用密度矩阵重整化群方法, 计算了基态的单体超流序、局域密度分布、二阶和三阶关联函数. 发现系统出现了存在对角和非对角的长程序并超越平均场理论的两个奇异超固相. 这两个超固相分别展现出包络型的密度调制振荡和均匀的密度分布. 通过计算光子数和腔场平均, 发现奇异超固相主要由腔场涨落诱导. 相互作用能够驱动奇异超固相之间的相变. 本文的工作给出了光学腔内玻色-哈伯德模型的超越平均场理论的新物理, 并提供了充分探索光学腔的完整计算方法.

## 参考文献

- [1] Bloch I, Dalibard J, Nascimbene S 2012 *Nat. Phys.* **8** 267
- [2] Fisher M P A, Weichman P B, Grinstein G, Fisher D S 1989 *Phys. Rev. B* **40** 546
- [3] Jaksch D, Zoller P 2005 *Ann. Phys.* **315** 52
- [4] Bloch I, Dalibard J, Zwerger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885
- [5] Gross C, Bloch I 2017 *Science* **357** 995
- [6] Baumann K, Guerlin C, Brennecke F, Esslinger T 2010 *Nature* **464** 1301
- [7] Nagy D, Konya G, Szirmai G, Domokos P 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 130401
- [8] Ritsch H, Domokos P, Brennecke F, Esslinger T 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 553
- [9] Mottl R, Brennecke F, Baumann K, Landig R, Donner T, Esslinger T 2012 *Science* **336** 1570
- [10] Landig R, Hruby L, Dogra N, Landini M, Mottl R, Donner T, Esslinger T 2016 *Nature* **532** 476
- [11] Lang J, Piazza F, Zwerger W 2017 *New J. Phys.* **19** 123027
- [12] Caballero-Benitez S F, Mekhov I B 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 243604
- [13] Bakhtiari M R, Hemmerich A, Ritsch H, Thorwart M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 123601
- [14] Dogra N, Brennecke F, Huber S D, Donner T 2016 *Phys. Rev. A* **94** 023632
- [15] Niederle A E, Morigi G, Rieger H 2016 *Phys. Rev. A* **94** 033607
- [16] Sundar B, Mueller E J 2016 *Phys. Rev. A* **94** 033631
- [17] Chen Y, Yu Z, Zhai H 2016 *Phys. Rev. A* **93** 041601(R)
- [18] Panas J, Kauch A, Byczuk K 2017 *Phys. Rev. B* **95** 115105
- [19] Flottat T, de Forges de Parny L, Hebert F, Rousseau V G, Batrouni G G 2017 *Phys. Rev. B* **95** 144501
- [20] Bogner B, Danilo C D, Rieger H 2019 *Eur. Phys. J. B* **92** 111



- [21] Boninsegni M, Prokofev N V 2012 *Rev. Mod. Phys.* **84** 759
- [22] Leggett A J 1970 *Phys. Rev. Lett.* **25** 1543
- [23] Otterlo A V, Wagenblast K H 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3598
- [24] Batrouni G G, Scalettar R T, Zimanyi G T, Kampf A P 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 2527
- [25] Scalettar R T, Batrouni G G, Kampf A P, Zimanyi G T 1995 *Phys. Rev. B* **51** 8467
- [26] Otterlo A V, Wagenblast K H, Baltin R, Bruder C, Fazio R, Schon G 1995 *Phys. Rev. B* **52** 16176
- [27] Rossini D, Fazio R 2011 *New J. Phys.* **14** 065012
- [28] White S R 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2863
- [29] Schollwöck U 2005 *Rev. Mod. Phys.* **77** 259
- [30] Maschler C, Mekhov I B, Ritsch H 2008 *Eur. Phys. J. D* **46** 545
- [31] Hodgman S S, Dall R G, Manning A G, Baldwin K G H, Truscott A G 2011 *Science* **331** 1046
- [32] Liu H C 2016 *Phys. Rev. A* **94** 023827
- [33] Schweigler T, Kasper V, Erne S, Mazets I, Rauer B, Cataldini F, Langen T, Gasenzer T, Berges J, Schmiedmayer J 2017 *Nature* **545** 323
- [34] Hodgman S S, Khakimov R I, Truscott A G, Kheruntsyan K V 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 240402
- [35] Rispoli M, Lukin A, Schittko R, Kim S, Tai M E, Leonard J, Greiner M 2019 *Nature* **573** 385
- [36] Fan J, Zhou X, Zheng W, Yi W, Chen G, Jia S 2018 *Phys. Rev. A* **98** 043613
- [37] Stenger J, Inoué S, Chikkatur A P, Stamper-Kurn D M, Pritchard D E, Ketterle W 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4569
- [38] Steinhauer J, Ozeri R, Katz N, Davidson N 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 120407
- [39] Greif D, Parsons M F, Mazurenko A, Chiu C S, Blatt S, Huber F, Ji G, Greiner M 2016 *Science* **351** 953

# Exotic supersolid phase of one-dimensional Bose-Hubbard model inside an optical cavity\*

Zhou Xiao-Fan<sup>1)2)</sup> Fan Jing-Tao<sup>1)2)†</sup> Chen Gang<sup>1)2)3)</sup> Jia Suo-Tang<sup>1)2)</sup>

1) (State Key Laboratory of Quantum Optics, Quantum Optics Devices, Institute of Laser Spectroscopy, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

2) (Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

3) (Shandong Provincial Engineering, Technical Center of Light Manipulations, Shandong Normal University, Jinan 250358, China)

( Received 22 April 2021; revised manuscript received 17 May 2021 )

## Abstract

Using a state-of-the-art numerical method density-matrix renormalization-group, we study the ground states of one-dimensional spinless Bose-Hubbard model inside a red-detuned cavity. By calculating the superfluid order, density distribution, second and third-order correlation functions, we find that there exist two novel supersolid phases with diagonal, off-diagonal orders beyond mean-field theory. One has package type density modulation along the lattice axis, another exhibits uniform density distribution. Moreover, by calculating the superradiant order parameter and the number of photon inside the cavity, we find that the novel supersolid phases are highly related to cavity-field fluctuation. Our work gives the physics beyond the mean-field theory of the Bose-Hubbard model inside an optical cavity, and provides the complete approach to fully explore the collective state of light and matter inside an optical cavity.

**Keywords:** quantum phase transition, density-matrix renormalization-group, optical cavity

**PACS:** 37.10.Jk, 37.30.+i, 42.50.Pq, 64.70.Tg

**DOI:** 10.7498/aps.70.20210778

\* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2017YFA0304203), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11674200, 12074232, 12004230, 11804204), the Fund for Shanxi “1331 Project” Key Subjects Construction, and the Research Project Supported by Shanxi Scholarship Council of China (Grant No. HGKY2019003).

† Corresponding author. E-mail: fanjt@sxu.edu.cn