

完备Buck-Sukumar模型的光子阻塞效应

刘雪莹 成书杰 高先龙

**The photon blockade effect of a complete Buck-Sukumar model**

Liu Xue-Ying Cheng Shu-Jie Gao Xian-Long

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 134203 (2022) DOI: 10.7498/aps.70.20220238

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220238>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

Fabry-Perot腔与光学参量放大复合系统中实现可调谐的非常规光子阻塞

Tunable unconventional phonon blockade in Fabry-Perot cavity and optical parametric amplifier composite system

物理学报. 2019, 68(12): 124203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190154>

基于自发参量下转换源二阶激发过程产生四光子超纠缠态

Generation of four-photon hyperentangled state using spontaneous parametric down-conversion source with the second-order term

物理学报. 2018, 67(6): 060302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172230>

多模光力系统中的非传统声子阻塞

Unconventional phonon blockade in multimode optomechanical system

物理学报. 2018, 67(4): 044203 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171599>

光场高阶光子关联的分析与测量

Analysis and measurement of high-order photon correlations of light fields

物理学报. 2020, 69(17): 174204 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200325>

纳米机械谐振器耦合量子比特非厄米哈密顿量诱导的声子阻塞

Phonon blockade induced by a non-Hermitian Hamiltonian in a nanomechanical resonator coupled with a qubit

物理学报. 2019, 68(11): 114203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182263>

单光子激光测距的漂移误差理论模型及补偿方法

Theoretical model and correction method of range walk error for single-photon laser ranging

物理学报. 2018, 67(6): 064205 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172228>

## 完备 Buck-Sukumar 模型的光子阻塞效应\*

刘雪莹 成书杰 高先龙†

(浙江师范大学物理系, 金华 321004)

(2022 年 2 月 7 日收到; 2022 年 3 月 18 日收到修改稿)

Buck-Sukumar (BS) 模型在一定的耦合强度处会出现能级塌缩现象. 通过引入一个非线性光子项, 定义了一个完备的 BS 模型, 消除了能级塌缩. 进一步通过计算二阶关联函数等物理量理解了非线性光子项与失谐量对该模型的影响. 结果表明, 在共振情况下, 非线性光子项破坏了 BS 模型的能谱简谐性, 可以在更大的耦合强度范围内产生单光子投影态, 形成光子阻塞; 而在非共振情况下, 非线性光子项使非简谐的能谱在整个耦合区间都有定义, 且正失谐促进光子阻塞, 负失谐抑制光子阻塞.

**关键词:** Buck-Sukumar 模型, 二阶关联函数, 光子阻塞

**PACS:** 42.50.-p, 42.50.Ct

**DOI:** 10.7498/aps.70.20220238

## 1 引言

在量子光学中, Jaynes-Cummings (JC) 模型是一个描述单模光场与二能级原子相互作用的简单模型<sup>[1]</sup>. 当场和原子弱耦合时, 它可以用于理解实验中的一些现象, 如真空劈裂、量子 Rabi 振荡等<sup>[2–5]</sup>. 但随着实验上超强甚至深强耦合区的实现, 反旋波项的影响不可忽略, 由此得到 Rabi 模型<sup>[6,7]</sup>. 虽然 Rabi 模型因反旋波项的引入  $U(1)$  对称性破缺, 导致激发数不再守恒, 但它仍然可以在 Bargmann 空间解析求解<sup>[8,9]</sup>. 若场与原子间的相互作用是非线性的, 则 JC 模型被推广为 Buck-Sukumar (BS) 模型. 此时, 更复杂的 BS 模型反而能够解析地理解 JC 模型中出现的原子翻转的周期自发塌缩恢复现象<sup>[10]</sup>. Ng 等人<sup>[11]</sup>进一步研究了具有反旋波项的 BS 模型, 发现该模型可以通过引入 Casimir 算符, 利用么正变换解耦玻色模和场模来解析求解. 此后, 在 BS 模型的基础上, 逐渐发展出了形式更为复杂的非线性耦合模型<sup>[12–14]</sup>, 其能谱的特征极度依赖于非线性耦合的形式. 作为一种

描述非线性耦合的基本模型, BS 模型只有在耦合强度小于一个确定的临界值时才有定义, 且在该临界值处能量发生塌缩现象. 而在这个临界值之外, 随着激发数增加, 基态能量不断减小, 系统不再稳定<sup>[11–15]</sup>. 而非旋波项不会改变这种性质, 只是减小了这个临界值<sup>[16]</sup>. 这种只有在小于临界耦合强度才能有定义的 BS 模型, 被称为不完备的 BS 模型. 文献<sup>[15]</sup>发现, 如果在 BS 模型中引入一个微小的激发数平方项不仅可以消除这种不稳定性, 还能够扩大有定义的耦合区间, 并把这样的模型称为完备的 BS 模型.

另一方面, 可以用超导量子电路实现的双光子 Rabi 模型也是一种非线性耦合的例子<sup>[17]</sup>, 它也会在一个临界耦合强度处发生能谱塌缩现象<sup>[18,19]</sup>, 而引入非线性光子项可以消除这种能谱塌缩<sup>[20]</sup>. 基于上述 BS 模型和双光子 Rabi 模型都属于非线性耦合的例子, 且都具有能谱塌缩现象, 本文将重点研究非线性光子项对 BS 模型能谱的影响. 研究表明, 非线性光子项也可以消除 BS 模型能谱塌缩现象, 从而形成一种新的完备的 BS 模型. 我们引入的非线性光子项能使 BS 模型在整个耦合区间

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12174346, 11835011) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: gaoxl@zjnu.edu.cn

内都有定义. 在原子与场共振情况下, 非线性光子项破坏了 BS 模型的能谱简谐性, 通过计算二阶关联函数, 发现非线性光子项促进光子阻塞, 而在原子与场失谐的情况下, BS 模型的能谱在有定义的耦合区间内非简谐. 非线性光子项使这种非简谐的能谱扩展到整个耦合区间, 而且当非线性光子耦合强度确定时, 原子与场的正失谐更有利于光子阻塞.

## 2 模型

1981 年, Buck 和 Sukumar<sup>[10]</sup> 提出将 JC 相互作用转化为一种强度依赖的形式, 从而使原子翻转数能够有封闭的解析形式, 这就是初始的 BS 模型. 作为一种理论模型, BS 模型在实验上是很难实现的, 因为它需要一个能把大量场模叠加起来的囚禁离子设备<sup>[21]</sup>. 但在 2016 年, Valverde 等人<sup>[22]</sup> 考虑用库珀对箱与纳米机械共振器间的相互作用来构建 BS 模型, 为 BS 模型的实验实现提供了一条可能途径. 本文考虑引入了非线性光子项的 BS 模型, 其哈密顿量形式 ( $\hbar = 1$ ) 为

$$\hat{H} = \omega_f \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + g_r (\sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{\sigma}_- + \hat{a} \sqrt{\hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{\sigma}_+) + U (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2, \quad (1)$$

其中  $\omega_f$ ,  $\omega_0$  分别是光场和二能级原子的本征频率;  $g_r$  是描述光场与二能级原子的非线性耦合强度;  $U$  是非线性光子耦合强度;  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{a}$  分别是光场的产生、湮灭算符;  $\hat{\sigma}_i$  ( $i = z, +, -$ ) 是泡利矩阵. 该系统具有  $Z_2$  对称性, 总激发数  $\hat{N}_e = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hat{\sigma}_z}{2} + \frac{1}{2}$  和宇称  $\hat{H} = e^{i\pi \hat{N}_e}$  都守恒. 系统可以在  $|e\rangle \otimes |n\rangle$  和  $|g\rangle \otimes |n+1\rangle$  的子空间进行展开, 即定态波函数  $|\psi_n\rangle$  可以写成

$$|\psi_n\rangle = a_n |e\rangle \otimes |n\rangle + b_n |g\rangle \otimes |n+1\rangle, \quad (2)$$

其中,  $|g\rangle$ ,  $|e\rangle$  分别是二能级原子基态与激发态;  $|n\rangle$  为光子数态,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $a_n$ ,  $b_n$  分别是二能级原子占据激发态、基态的概率幅. 将 (1) 式和 (2) 式代入定态薛定谔方程  $\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle$ , 可以得到展开系数  $a_n$ ,  $b_n$  间的关系为

$$\begin{aligned} \left( \omega_f n + \frac{\omega_0}{2} + U n^2 \right) a_n + g_r (n+1) b_n &= E a_n, \\ \left[ \omega_f (n+1) - \frac{\omega_0}{2} + U (n+1)^2 \right] b_n \\ + g_r (n+1) a_n &= E b_n. \end{aligned} \quad (3)$$

解方程 (3), 得到本征能谱  $E_n$ ,

$$E_n^{(\pm)} = \omega_f \left( n + \frac{1}{2} \right) + U \left( n^2 + n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{[\Delta + U(2n+1)]^2 + 4g_r^2 (n+1)^2}. \quad (4)$$

重新整理 (3) 式, 得到

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{g_r (n+1)}{\theta_n}, \quad (5)$$

其中,  $\theta_n = E_n - n\omega_f - \frac{\omega_0}{2} - U n^2$ ,  $\Delta = \omega_f - \omega_0$  是光场与二能级原子的失谐量. 将 (4) 式代入到 (5) 式, 得到本征态  $|\psi_n^{(\pm)}\rangle$  的展开系数为

$$\begin{aligned} a_n^{(\pm)} &= \frac{g_r (n+1)}{\sqrt{g_r^2 (n+1)^2 + \theta_n^{(\pm)2}}}, \\ b_n^{(\pm)} &= \frac{\theta_n^{(\pm)}}{\sqrt{g_r^2 (n+1)^2 + \theta_n^{(\pm)2}}}, \end{aligned} \quad (6)$$

这里的  $\pm$  和能谱 (方程 (4)) 中的  $\pm$  对应.  $|g, 0\rangle$  也是系统本征态, 称为暗态  $|\psi_d\rangle$ . 则有对应的暗态能量为  $E_d = -\omega_0/2$ . 考虑系统的宇称守恒, 即  $[\hat{H}, \hat{H}] = 0$ , 如果此处定义  $\hat{H}|\psi_n\rangle = \kappa |\psi_n\rangle$ , 那么  $\kappa = \pm 1$  分别对应偶、奇宇称态. 又因为  $\hat{N}_e |\psi_n\rangle = (n+1) |\psi_n\rangle$ , 所以当  $n$  为偶数时,  $|\psi_n\rangle$  为奇宇称态; 当  $n$  为奇数时,  $|\psi_n\rangle$  为偶宇称态. 暗态  $|\psi_d\rangle$  是一个偶宇称态.

为了判断系统的基态, 这里对最近邻的两条能级作差:

$$\delta E_d = E_0^{(-)} - E_d = \omega_f + \frac{1}{2} U - \frac{1}{2} F_0(U), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \delta E_n &= E_{n+1}^{(-)} - E_n^{(-)} \\ &= \omega_f + 2(n+1)U - \frac{1}{2} [F_{n+1}(U) - F_n(U)], \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

这里  $F_n(U) = \sqrt{U^2 (2n+1)^2 + 4g_r^2 (n+1)^2}$ , 而且为了方便计算, 已经考虑了原子与光场共振  $\Delta = 0$ .

当  $U = 0$  时, 系统回到 BS 模型. 此时, 系统只有在  $g_r < \omega_f$  时才有好的定义<sup>[16]</sup>. 正如图 1(a) 所示, 随着  $g_r$  增加,  $E_n^{(-)}$  在临界值  $\omega_f$  处塌缩成一点. 且根据 (7) 式和 (8) 式, 当  $g_r$  超过  $\omega_f$  时, BS 模型的基态由  $|\psi_d\rangle$  变为  $|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|e\rangle \otimes |n\rangle - |g\rangle \otimes |n+1\rangle]$ ,  $n \rightarrow \infty$ , 激发数也由零变为无穷. 文献 [15] 已经指出, 这种当耦合强度大于某个临界值后, 随着基态激发数增加, 基态能量不断减小的 BS 模型称为不完备的 BS 模型. 文献 [15] 引入了激发数平方项  $\epsilon (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \sigma_z/2)^2$  来消除 BS 模型的不完备性. 随着  $\epsilon$

的增大, 临界的耦合强度增大, 相应地, BS 模型有定义的耦合区间也扩大. 本文考虑非线性光子项  $U(\hat{a}^\dagger \hat{a})^2$ , 可以产生类似的效果并可以使不完备的 BS 模型在整个耦合区间都有定义, 从而构建了一个完备的 BS 模型. 相较于文献 [15], 我们引入的非线性光子项更简单.

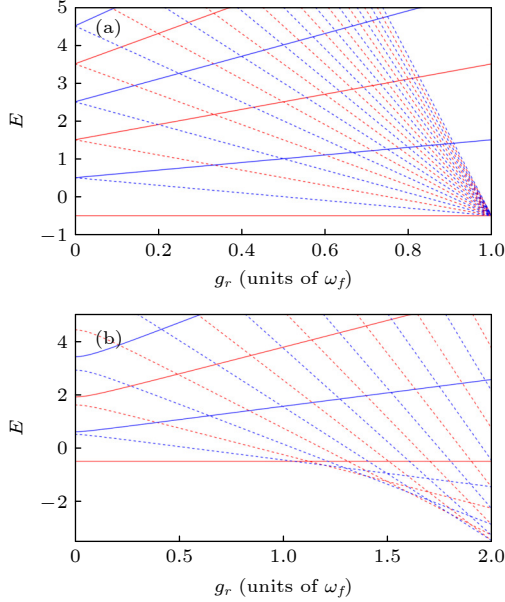


图 1 共振时  $\Delta = 0$ , 非线性光子耦合项对旋波近似下的 BS 模型能谱的影响, 其中 (a)  $U = 0$ , (b)  $U = 0.1$ , 红色代表偶宇称态, 蓝色代表奇宇称态, 实线代表  $E_n^{(+)}$  支, 虚线代表  $E_n^{(-)}$  支

Fig. 1. Influence of the nonlinear photon term on the BS model with the rotating wave approximation at resonance  $\Delta = 0$ , where (a)  $U = 0$ , (b)  $U = 0.1$ , the red (blue) line represents the energy level with even (odd) parity while the solid (dashed) line represents the energy level of  $E_n^{(+)}$  ( $E_n^{(-)}$ ).

接下来讨论非线性光子项 ( $U \neq 0$ ) 对 BS 模型的影响. 当  $U \neq 0$  时, 根据 (7) 式, 由  $\delta E_d > 0$  可得

$$g_r < \sqrt{\omega_f^2 + \omega_f U}. \quad (9)$$

于是, 当  $g_r < \sqrt{\omega_f^2 + \omega_f U}$  时, 基态能量为  $E_d$ , 基态为暗态  $|\psi_d\rangle$ . 而当  $g_r > \sqrt{\omega_f^2 + \omega_f U}$  时, 对于  $\delta E_n > 0$ , 即  $F_{n+1}(U) - F_n(U) - 4(n+1)U < 2\omega_f$ , 基态能量为  $E_n^{(-)}$ , 基态为  $|\psi_n^{(-)}\rangle$ . 显然, 能谱塌缩被消除. 通过计算基态激发数  $\langle \hat{N}_e \rangle$ , 可以发现, 随着耦合强度增大, 超过  $g_c = \sqrt{\omega_f^2 + \omega_f U}$  这个临界点, 激发数从 0 变为 1 (如图 2 所示), 这也间接表明了能谱塌缩的消失. 因此, 在 BS 模型中加入一个非线

性光子项可以消除能谱塌缩, 从而产生一个新的完备的 BS 模型. 进一步地, 非线性光子项  $U$  的加入, 可以使激发数出现台阶状. 随着  $U$  的增大, 激发数保持不变的平台也变宽 (见图 2). 这表明, 大的非线性光子项会使能级间的光子跃迁更难.

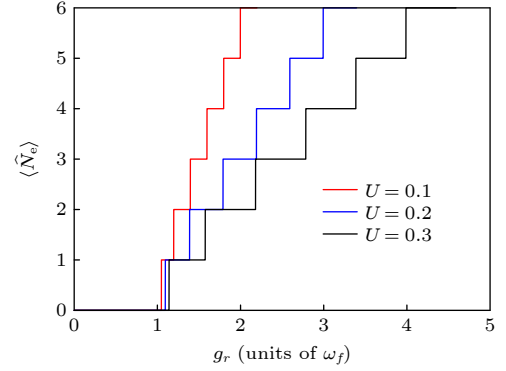


图 2 共振时  $\Delta = 0$ , 非线性光子项对旋波近似下 BS 模型激发数  $\langle \hat{N}_e \rangle$  的影响

Fig. 2. For the BS model with the rotating wave approximation at resonance  $\Delta = 0$ , the influence of the nonlinear photon term on the excited number  $\langle \hat{N}_e \rangle$ .

### 3 讨论

对于确定的频率  $\omega_f$  和耦合强度  $g_r$ , 当  $U = 0$  时, 能级差  $\delta E_n = \omega_f - g_r$  是一个确定的值, 能谱简谐, 也就是说, 对于确定的光场频率  $\omega_f$  和耦合强度  $g_r$ , BS 模型相邻两条能级的差完全一样, 如图 3(a) 所示. 此时, 系统吸收一个光子的能量  $\omega_f$  可以从  $n$  光子态跃迁到  $n+1$  光子态. 而当  $U \neq 0$  时, 能级差  $\delta E_n$  不再是一个定值, 即等差的能级被  $U$  所破坏 (见图 3(b)). 除此之外, 图 3(b) 也给出了  $U = 0.5$  (黑色实线) 和  $U = 1$  (红色虚线) 时,  $\delta E_n$  随耦合强度  $g_r$  的变化. 显然, 越大的  $U$  项使相邻两条能级间隔更大. 此时, 系统吸收一个光子的能量  $\omega_f$  从零光子态到单光子态之后, 需要克服能量  $\delta E_0 - \delta E_d$  才能再吸收一个光子变成两光子态, 即一个光子排斥另一个光子. 这种光子间的排斥效应称为光子阻塞效应. 可见, 能谱的非简谐性暗示着光子阻塞效应的存在 [23].

为了进一步讨论该模型的光子阻塞, 引入二阶关联函数. 当场是单模的, 二阶关联函数  $G_2(0)$

$$G_2(0) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2} \quad (10)$$



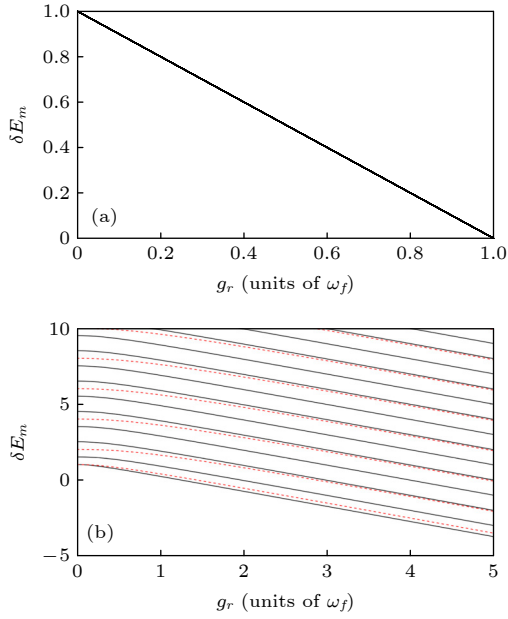


图 3 共振时  $\Delta = 0$ , 非线性光子项对旋波近似下的 BS 模型能级差  $\delta E_m$ ,  $m = d, 0, 1, \dots$  的影响 (a)  $U = 0$ ; (b)  $U \neq 0$ , 图中红色线表示  $U = 1$ , 黑色线表示  $U = 0.5$

Fig. 3. For the BS model with the rotating wave approximation at resonance  $\Delta = 0$ , the influence of the nonlinear photon term on the nearest neighbor energy level difference  $\delta E_m$ ,  $m = d, 0, 1, \dots$ , where (a)  $U = 0$ , (b)  $U \neq 0$  and the red (black) line represents  $U = 1(0.5)$  in panel (b).

可以写成产生、湮灭算符的形式来简化计算<sup>[23,24]</sup>. 对于一个经典场,  $G_2(0) > 1$ , 而  $G_2(0) < 1$  可以作为一个量子化光场的证据<sup>[23]</sup>. 此外,  $G_2(0)$  也可以用来衡量同时吸收两个光子的概率. 对于一个 Fock 态  $|n\rangle$ ,  $G_2(0) = 1 - 1/n$ . 因此, 对于单光子态  $|1\rangle$ ,  $G_2(0) = 0$ , 表明在该态下, 只存在一个光子, 且不能同时被两个探测器观测到, 这就是众所周知的光子阻塞效应. 对于  $G_2(0) < 1$ , 同时观测到两个光子的概率比较小, 称之为光子反聚束效应. 相似地, 当  $G_2(0) > 1$  时, 光子更趋向于一起被探测器观测到, 所以称为光子聚束效应. 对于相干态,  $G_2(0) = 1$ . 考虑真空态  $|0\rangle$  是特殊的相干态, 真空态下的二阶关联函数为 1, 即  $G_2(0) = 1$ <sup>[24]</sup>.

通常, 光子反聚束就意味着光子阻塞<sup>[23–26]</sup>. 但是, 在半导体实验中, 只有当  $G_2(0) < 1/2$ , 光源才会发射出单光子<sup>[27]</sup>. 理论上也已经证实, 在  $G_2(0) < 1/2$  的态上存在一个非零的单光子投影态<sup>[24]</sup>, 因此,  $G_2(0) < 1/2$  可以代表光子阻塞的发生.

对于含有非线性光子项 BS 模型的基态, 当  $g_r < \sqrt{\omega_f^2 + \omega_f U}$ , 基态是暗态,  $G_2(0) = 1$ . 而当  $g_r > \sqrt{\omega_f^2 + \omega_f U}$ , 基态为  $|\psi_n^{(-)}\rangle$ , 二阶关联函数为

$$G_2(0) = \frac{n^2 + n \left[ \left( b_n^{(-)} \right)^2 - \left( a_n^{(-)} \right)^2 \right]}{\left[ n + \left( b_n^{(-)} \right)^2 \right]^2}. \quad (11)$$

已经知道, 当  $F_{n+1}(U) - F_n(U) < 4(n+1)U + 2\omega_f$ , 基态为  $|\psi_n^{(-)}\rangle$ . 也就是说, 耦合强度  $g_r$  超过  $\sqrt{\omega_f^2 + \omega_f U}$ , 在  $F_1(U) - F_0(U) < 4U + 2\omega_f$  的参数区间内, 二阶关联函数为  $G_2(0) = 0$ , 此时基态为  $|\psi_0^{(-)}\rangle = a_0^{(-)}|e\rangle \otimes |0\rangle + b_0^{(-)}|g\rangle \otimes |1\rangle$ . 在  $F_1(U) - F_0(U) > 4U + 2\omega_f$  且  $F_2(U) - F_1(U) < 8U + 2\omega_f$  的参数区间内, 此时的基态为  $|\psi_1^{(-)}\rangle = a_1^{(-)}|e\rangle \otimes |1\rangle + b_1^{(-)}|g\rangle \otimes |2\rangle$ , 在单光子态上有投影, 故其二阶关联函数应该满足  $G_2(0) < 1/2$ . 而在其他参数区间, 基态在单光子态上都没有投影, 二阶关联函数大于  $1/2$ . 因此, 对于有非线性光子项的 BS 模型的基态, 在共振情况下, 其光子阻塞只发生在有限参数区间内. 图 4 通过计算非线性光子项对二阶关联函数的影响, 验证了这一事实. 图 4(a) 给出二阶关联函数随  $U$  和  $g_r$  的变化, 其中颜色代表  $\log(G_2(0))$  的值. 图中蓝色区域是发生光子阻塞 ( $G_2(0) = 0$ ) 的区域. 显然, 随着  $U$  的增大, 蓝色区域越来越大, 开始发生阻塞的临界耦合  $\sqrt{\omega_f^2 + \omega_f U}$  也越来越大. 这个蓝色区域也对应着  $G_2(0)$  随  $g_r$  变化的图 4(b) 中  $G_2(0) = 0$  的那个平台. 从图 4(b) 可以看出,  $U$  越大,  $G_2(0) = 0$  的平台越宽, 这表明非线性光子项有利于光子阻塞. 除此之外, 图 4(b) 中也显示了越过  $G_2(0) = 0$  的平台的一个  $G_2(0) < 1/2$  的平台, 这对应着有单光子投影的态  $|\psi_1^{(-)}\rangle$ . 这个平台也是随着  $U$  的增大处于更大的耦合强度  $g_r$  范围内, 这进一步证实了非线性光子项有利于光子阻塞效应.

当失谐量  $\Delta \neq 0$  时,  $\delta E_d = \omega_f - \frac{\Delta}{2} + \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta + U)^2 + 4g_r^2}$ , 而  $\delta E_n$  的形式还是如 (6) 式所示, 只是  $F_n(U)$  的形式变为  $F_n(U, \Delta) = \sqrt{[\Delta + U(2n+1)]^2 + 4g_r^2(n+1)^2}$ . 对于不完备的 BS 模型  $U = 0$ , 非零的失谐量使能谱具有非简谐性. 如果将  $\delta E_n$  按  $\Delta$  展开到二阶

$$\delta E_n = \omega_f - g_r - \frac{\Delta^2}{8g_r(n+2)(n+1)}, \quad (12)$$

可以发现, 对于较小的失谐量  $\Delta$ ,  $n$  很大的高能级来说, (10) 式中  $\Delta^2$  项可以忽略. 那么, 高能级

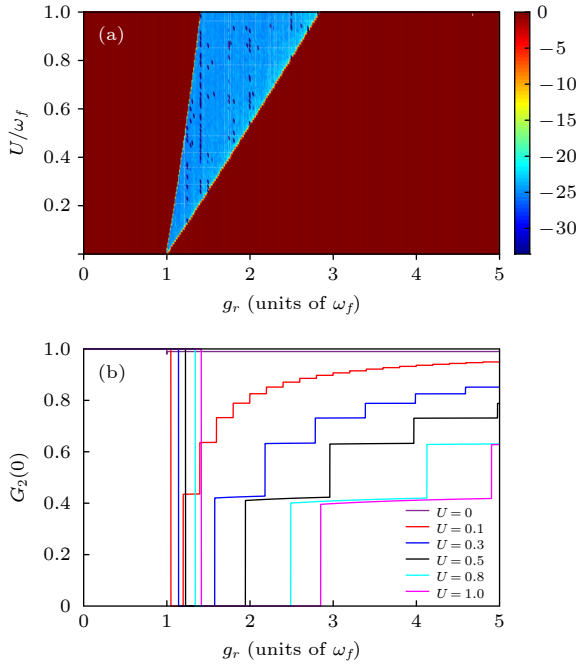


图4 共振时  $\Delta = 0$ , 非线性光子项对旋波近似下 BS 模型的基态二阶关联函数  $G_2(0)$  的影响 (a)  $G_2(0)$  随非线性光子  $U$  和耦合强度  $g_r$  的变化, 颜色代表对  $G_2(0)$  取对数后  $\log(G_2(0))$  的值; (b) 不同非线性光子耦合强度  $U$  下  $G_2(0)$  随耦合强度  $g_r$  的变化

Fig. 4. For the BS model with the rotating wave approximation at resonance  $\Delta = 0$ , the influence of the nonlinear photon term on the second-order correlation function  $G_2(0)$ : (a) Variation of  $G_2(0)$  as a function of the nonlinear photon term  $U$  and the coupling strength  $g_r$ , where the color represents the value of  $\log(G_2(0))$ ; (b) variation of  $G_2(0)$  as a function of the coupling strength  $g_r$  for different nonlinear photon terms  $U$ .

可以近似看成简谐的, 且在耦合强度  $g_r$  超过临界值 (约等于  $\omega_f$ ) 后, 激发数趋于无穷大, 系统还是不稳定. 加入非线性光子项 ( $U \neq 0$ ) 后, 当  $g_r < \sqrt{\omega_f^2 + \omega_f U - \Delta(\omega_f + U)}$  时, 基态是暗态, 对应着基态激发数为零, 超过这个耦合强度  $\sqrt{\omega_f^2 + \omega_f U - \Delta(\omega_f + U)}$ , 激发数变为有限值, 且出现阶梯状的平台, 如图 5(a) 所示. 这表明, 失谐情况下, 非线性光子项使 BS 模型在整个耦合区间内有定义. 而且, 对于负失谐  $\Delta < 0$ , 随着  $\Delta$  的增加, 基态激发数在更小的  $g_r$  处变为非零. 值得注意的是, 图 5(a) 显示出, 在正失谐情况下, 即使耦合强度  $g_r$  很小, 基态也是非零激发的. 这是因为对于同一能级, 同样的失谐量, 正失谐要比负失谐的能量更低, 即  $\delta E_d(\Delta > 0) < \delta E_d(\Delta < 0)$  (见图 5(b)). 因此, 对于某一耦合强度  $g_r$ , 当正失谐  $\frac{\Delta}{\omega_f} < 1 - \frac{(g_r/\omega_f)^2}{1 + U/\omega_f}$

时, 才能保证基态激发数为零. 显然, 存在一个临界失谐量  $\Delta_c = \omega_f$ , 当  $\Delta \geq \Delta_c$ , 即使  $g_r \rightarrow 0$ , 基态也是  $|\psi_0^{(-)}\rangle$ , 对应的基态激发数为 1. 图 5(a) 中的紫粉色线显示了正失谐下没有零激发出现的情况. 对于同一能级, 正失谐的能量比负失谐的要更低, 吸收一个光子需要克服的能量要更多. 故正失谐有利于光子阻塞. 失谐量对二阶关联函数的影响可以反映出这一现象 (见图 5(c)). 图 5(c) 显示了二阶关联函数在  $U = 0.1$  时随耦合强度  $g_r$  的变化. 显然, 正失谐会使  $G_2(0) = 0$  的耦合区间变大. 而负失谐情况下,  $G_2(0) = 0$  的区间减少甚至消失. 在  $\Delta = -1$

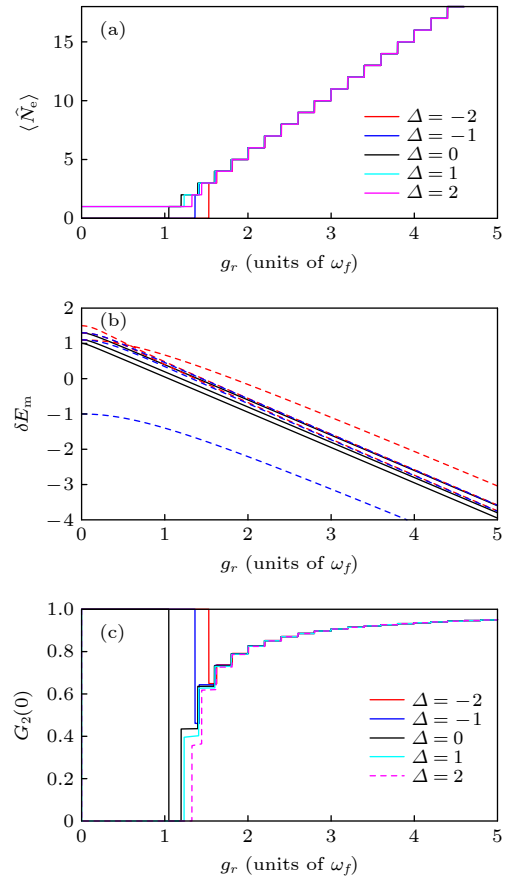


图5 非线性光子项为  $U = 0.1$  时, 失谐量  $\Delta \neq 0$  对旋波近似下 BS 模型的 (a) 基态激发数  $\hat{N}_e$ , (b) 能级差  $\delta E_m$ ,  $m = d, 0, 1$ , (c) 基态二阶关联函数  $G_2(0)$  的影响. 图 (b) 中红色线代表  $\Delta = -2$ , 黑色线代表  $\Delta = 0$ , 蓝色线代表  $\Delta = 2$

Fig. 5. For the BS model with the rotating wave approximation with the nonlinear photon term  $U = 0.1$ , influence of the detuning  $\Delta \neq 0$  on the (a) excited number  $\hat{N}_e$  in the ground state, (b) nearest neighbor energy level difference  $\delta E_m$ ,  $m = d, 0, 1$ , and (c) second-order correlation function  $G_2(0)$  in the ground state. The red, black and blue line represent  $\Delta = -2$ ,  $\Delta = 0$  and  $\Delta = 2$  respectively in panel (b).

时只存在一个  $G_2(0) < 1/2$  的小平台 (图 5(c) 蓝色线), 这对应的激发数为 2 (图 5(a) 蓝色线) 的小平台, 此时基态为  $|\psi_1^{(-)}\rangle$ . 这进一步表明, 负失谐会使基态拥有更高的激发数; 对于失谐量  $|\Delta|$  较大的负失谐, 超过临界耦合  $\sqrt{\omega_f^2 + \omega_f U - \Delta(\omega_f + U)}$ , 基态直接从激发数为零的态变为拥有更多激发数的态, 且这个态在单光子态上没有投影 (图 5(a) 和图 5(c) 紫粉色线). 这表明负失谐抑制光子阻塞.

## 4 结 论

本文在 BS 模型的基础上引入非线性光子项, 在旋波近似下, 该项不会破坏激发数与宇称守恒, 可以在  $|e\rangle \otimes |n\rangle$  和  $|g\rangle \otimes |n+1\rangle$  的子空间进行展开来求解定态薛定谔方程, 从而得到本征能谱和本征态, 进一步通过计算激发数及二阶关联函数研究非线性光子项对 BS 模型能谱性质及光子阻塞效应的影响.

研究表明, 非线性光子项可以消除 BS 模型的能谱塌缩, 使其变成一个完备的 BS 模型. 当原子与场共振时, 非线性光子项破坏了 BS 模型的能谱简谐性, 使它的基态激发数出现了类似 JC 模型中的阶梯状的平台. 非线性光子项可以在更大的耦合区间内产生单光子投影态, 这是因为大的非线性光子项使光子更难向高能级跃迁. 相应地, 非线性光子项扩大了为零的二阶关联函数所在的耦合区间, 更有利于光子阻塞. 此外, 讨论了失谐量对这个完备的 BS 模型的影响. 原子与场失谐时, 非线性光子项的加入, 可以使原来能谱非简谐的区域扩大到整个耦合区间. 在确定的非线性光子耦合强度下, 拥有同样失谐量的 BS 模型, 对于同一能级来说, 正失谐要比负失谐的能量低, 系统再吸收一个光子需要克服更多的能量. 因此, 正失谐促进光子阻塞. 而对于负失谐, 系统更容易吸收光子向更高的能级跃迁; 对于失谐量较大的负失谐, 系统基态在单光子态上不再有投影, 故负失谐抑制光子阻塞.

对拥有非线性光子项的 BS 模型的研究, 一方面其完备性为全参数空间模拟 BS 模型的实验实现提供了一种新思路; 另一方面, 其中出现的光子阻塞效应也为实现单光子源提供了新的路径. 最后, 加了非线性光子项的 BS 模型存在与 JC 模型

类似的能谱非简谐性<sup>[28,29]</sup>, 当把多个腔通过光子跃迁联系起来时, 这种非简谐性带来的光子阻塞会与光子跃迁项形成竞争, 从而为 BS-Hubbard 模型的构建提供了可能.

## 参考文献

- [1] Jaynes E T, Cummings F W 1963 *Proc. IEEE* **51** 89
- [2] Thompson R J, Rempe G, Kimble H J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 1132
- [3] Brune M, Schmidt-Kaler F, Maali A, Dreyer J, Hagley E, Raimond J M, Haroche S 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1800
- [4] Leibfried D, Blatt R, Monroe C, Wineland D 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 281
- [5] Englund D, Faraon A, Fushman I, Stoltz N, Petroff P, Vučković J 2007 *Nat. Lett.* **450** 857
- [6] Frisk-Kokum A, Miranowicz A, De Liberato S, Savasta S, Nori F 2019 *Nat. Rev. Phys.* **1** 19
- [7] Rossatto D Z, Villas-Bôas C J, Sanz M, Solano E 2017 *Phys. Rev. A* **96** 013849
- [8] Braak D 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 100401
- [9] Chen Q, Wang C, He S, Wang K 2012 *Phys. Rev. A* **86** 023822
- [10] Buck B, Sukumar C V 1981 *Phys. Lett. A* **81** 132
- [11] Ng K M, Lo C F, Liu K L 2000 *Phys. A: Stat. Mech. Appl.* **275** 463
- [12] Rodríguez-Lara B M, Soto-Eguibar F, Cárdenas A Z, Moya-Cessa H M 2013 *Opt. Express* **21** 12888
- [13] Rodríguez-Lara B M 2014 *J. Opt. Soc. Am. B* **31** 1719
- [14] Penna V, Raffa F A 2014 *Int. J. Quantum Inf.* **12** 1560010
- [15] Cordeiro F, Providência C, da Providência J, Nishiyama S 2007 *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** 12153
- [16] Liu X Y, Ren X Z, Wang C, Gao X L, Wang K L 2020 *Commun. Theor. Phys.* **72** 065502
- [17] Felicetti S, Rossatto D Z, Rico E, Solano E, Forn-Díaz P 2018 *Phys. Rev. A* **97** 013851
- [18] Duan L, Xie Y F, Braak D, Chen Q H 2016 *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** 464002
- [19] Lo C F 2020 *Sci. Rep.* **10** 18761
- [20] Cui S, Grémaud B, Guo W, Batrouni G G 2020 *Phys. Rev. A* **102** 033334
- [21] Moya-Cessa H, Soto-Eguibar F, Vargas-Martínez J M, Juárez-Amaro R, Zúñiga-Segundo A 2012 *Phys. Rep.* **513** 229
- [22] Valverde C, Gonçalves V G, Baseia B 2016 *Phys. A: Stat. Mech. Appl.* **446** 171
- [23] Pritchard J D 2012 *Ph. D. Dissertation* (Durham: Durham University)
- [24] Grünwald P 2019 *New J. Phys.* **21** 093003
- [25] Li M C, Chen A X 2019 *Atom. Appl. Sci.* **9** 980
- [26] Birnbaum K M, Boca A, Miller R, Boozer A D, Northup T E, Kimble H J 2005 *Nature* **436** 87
- [27] Michler P, Kiraz A, Becher C, Schoenfeld W V, Petroff P M, Zhang L, Hu E, Imamoglu A 2005 *Science* **290** 2282
- [28] Greentree A D, Tahan C, Cole J H, Hollenberg L C 2006 *Nat. Phys.* **2** 856
- [29] Koch J, Hur K L 2009 *Phys. Rev. A* **80** 023811

# The photon blockade effect of a complete Buck-Sukumar model\*

Liu Xue-Ying    Cheng Shu-Jie    Gao Xian-Long<sup>†</sup>

(*Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China*)

( Received 7 February 2022; revised manuscript received 18 March 2022 )

## Abstract

The Buck-Sukumar (BS) model, with a nonlinear coupling between the atom and the light field, is well defined only when its coupling strength is lower than a critical coupling. Its energy collapses at a critical coupling and is unbounded beyond that value. In other words, the BS model is incomplete. We introduce a simple and complete BS model by adding a nonlinear photon term into the initial BS model. Considering the rotating wave approximation, this complete BS model conserves the excited number and the parity. By expanding it in the subspace of the product state between the atom and the field, we solve the time-independent Schrödinger equation to obtain the eigenenergy and eigenstate. Furthermore, we explore the influence of the nonlinear photon term on the energy spectrum and the photon blockade effect for the complete BS model by calculating the excited number and second-order correlation function.

Our study shows that, the nonlinear photon term not only eliminates the energy spectral collapse but also makes it well-defined and complete in all the coupling regime. When at the resonance between the atomic and the field frequency, the nonlinear photon term breaks the harmonicity of the energy spectrum and produces a ladder of the excited number in the ground state. Because the larger nonlinear photon term inhibits the photon transition from an energy level to the higher one, it produces the single-photon projection state in the larger coupling region. Accordingly, we find that the nonlinear photon term promotes photon blockade by calculating the second-order correlation function. When at the non-resonant region, the nonlinear photon term enlarges the originally anharmonic energy ladder. For a complete BS model with the fixed nonlinear photon coupling strength and the fixed detuning, the energy level for the positive detuning is lower than that with the negative detuning, and more energy is required to overcome the absorption of a photon. Therefore, the positive detuning promotes the photon blockade. For the negative detuning, the system is more likely to absorb a photon and jump to a higher energy level, and therefore, suppresses the photon blockade.

**Keywords:** Buck-Sukumar model, second-order correlation function, photon blockade

**PACS:** 42.50.-p, 42.50.Ct

**DOI:** 10.7498/aps.70.20220238

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12174346, 11835011).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [gaoxl@zjnu.edu.cn](mailto:gaoxl@zjnu.edu.cn)