



介观电路中量子纠缠的经典对应

范洪义 吴泽

Classical correspondence of quantum entanglement in mesoscopic circuit

Fan Hong-Yi Wu Ze

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 71, 010302 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20210992

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20210992>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

介观电路中量子纠缠的经典对应*

范洪义^{1)†} 吴泽²⁾

1) (中国科学技术大学材料科学与工程系, 合肥 230026)

2) (中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026)

(2021 年 5 月 26 日收到; 2021 年 9 月 22 日收到修改稿)

从量子力学诞生日起, 它的经典对应(或类比)一直是物理学家关心的话题. 本文以介观电路量子化的框架中, 带有互感的两个介观电容-电感(LC)电路为例, 首次讨论了量子纠缠的经典类比(或对应)问题. 先用有序算符内的积分理论证明其互感是产生量子纠缠的源头; 再推导出求解特征频率的公式, 就发现它与一个经典系统的小振动频率的表达式有相似之处, 该经典系统组成如下: 两个墙壁各连一个相同的弹簧, 两个弹簧之间接着一个滑动小车可以在光滑的桌面上运动, 小车挂有一根单摆. 用分析力学求此系统的小振动频率, 发现与上述介观电路的特征频率形式类似, 单摆的摆动会造成小车来回振动, 摆、小车和弹簧的互相牵制效应反映了小车和摆的“纠缠”.

关键词: 量子退纠缠算符, 量子噪声, 本征频率, IWOP 方法

PACS: 03.65.-w, 03.65.Sq, 73.23.-b

DOI: 10.7498/aps.71.20210992

1 引言

觉察物理相似性是前进的因素. 麦克斯韦善于从类比中悟出共性, 他写道: “为了不通过一种物理理论而获得物理思想, 我们就应当熟悉现存的物理相似性. 所谓物理相似性, 我认为是在一种科学定律和一些能够相互阐明的定律之间存在着的局部相似.” 从量子力学诞生日起, 它的经典对应(或类比)一直是物理学家关心的话题. 量子力学中的很多概念都有经典对应或类比, 如平移、转动和宇称等. 狄拉克认为量子么正变换是经典正则变换的对应, 但也有不存在经典对应的例子, 如自旋. 如麦克斯韦所说, 物理类比是发展物理学的一个途径, 那么量子纠缠有没有经典对应(或类比)呢?

本文将要指出: 在介观电路量子化的框架中, 带有互感的两个介观电容-电感(LC)回路, 其互感是产生量子纠缠的源头, 用量子力学方法可以求出其特征频率的公式, 该公式与如下描述的经典

系统的小振动频率的表达式有相似之处, 可见两者有可比拟之处. 该经典系统如图 1 所示, 两个墙壁之间各连一个相同的弹簧, 弹簧系数是 k , 两个弹簧之间接着一个可以在光滑的桌面上运动的

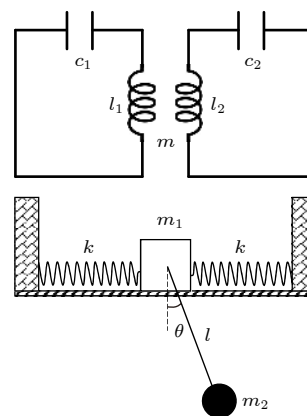


图 1 带有互感的两个介观电容-电感(LC)回路及经典系统的小振动模型

Fig. 1. Two mesoscopic capacitance-inductor (LC) circuits with mutual inductance and Small vibration model of classical system.

* 国家自然科学基金(批准号: 11775208)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: fhym@ustc.edu.cn

滑动小车 m_1 , 小车挂有一根长为 l 的单摆, 摆球质量是 m_2 . 单摆的摆动会造成小车来回振动, 摆、小车和弹簧的互相牵制, 晃动效应反映了小车和摆的“纠缠”.

在固态物理中, 当输运尺度与电荷非弹性相干长度可以比拟时, 电路中的量子效应必须被计入, 这种情形下的电路便称为介观电路. 集成电路向原子尺度的趋小化刺激了电路理论的研究进入量子领域^[1,2]. 历史上, 一个单电容-电感 (LC) 回路的状态, 作为一个电路的“元胞”, 被 Louisell^[3] 在 1973 年量子化, 他认电荷 q 为正则坐标, 取电流 $I = dq/dt$ 乘上电感 L 为正则动量, $p = Ldq/dt$, 进一步将 (q, p) 加上量子化条件 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$, 则 LC 电路被视为一个量子谐振子. 从那以后, 很多有关介观电路量子化的研究论文陆续发表^[4-6].

本文的内容安排如下: 先指出量子纠缠存在于带有互感 m 的两个介观电容-电感 (LC) 回路中, 如图 1 所示. 给出这个系统的量子化形式. 然后得到系统哈密顿量的退纠缠算符并得到介观电路的量子纠缠态及其本征频率. 之后我们引入弹簧约束滑动小车-单摆系统的微振动系统并同时给出其振动频率, 最终得到两种体系相似点的类比.

2 带有互感的两个介观电容-电感 (LC) 回路的量子化

在分析力学中, 带有互感 (系数 m) 的两个介观电容-电感 (LC) 回路的经典拉格朗日量为^[7-9]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (l_1 I_1^2 + l_2 I_2^2) + m I_1 I_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2}{c_1} + \frac{q_2^2}{c_2} \right), \quad (1)$$

这里 $m I_1 I_2$ 代表两个单回路中的电流相互作用; l_1 和 l_2 是两个单回路的电感, 在无漏磁情形下, $0 < m < \sqrt{l_1 l_2}$. 取 q_1, q_2 为正则坐标, 他们的共轭量为

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = l_1 I_1 + m I_2, \quad (2)$$

$$p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = l_2 I_2 + m I_1. \quad (3)$$

相应的哈密顿量是

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} (l_1 I_1^2 + l_2 I_2^2) + m I_1 I_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2}{c_1} + \frac{q_2^2}{c_2} \right) \\ &= \frac{1}{2A} \left(\frac{p_1^2}{l_1} + \frac{p_2^2}{l_2} \right) - \frac{m}{Al_1 l_2} p_1 p_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2}{c_1} + \frac{q_2^2}{c_2} \right), \quad (4) \end{aligned}$$

其中定义了

$$A = 1 - \frac{m^2}{l_1 l_2}, \quad m^2 < l_1 l_2. \quad (5)$$

将 q_i, p_i 作为共轭对进行正则量子化为算符 \hat{q}_i, \hat{p}_i , 加上量子化条件 $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{i,j}$, $\mathcal{H} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}$ 是哈密顿算符. $\frac{m}{Al_1 l_2} \hat{p}_1 \hat{p}_2$ 是引起量子纠缠的项. 为什么如此说呢? 因为根据文献可知^[10,11], 此项会导致双模压缩态的产生, 非简并参量放大器输出的双模压缩态的信号模和闲置模是纠缠在一起的.

3 哈密顿量 \mathcal{H} 的退纠缠算符 U

为了在理论上化去 $\hat{\mathcal{H}}$ 含的耦合项, 本文试图找到一个么正算符 U , 将 $\hat{\mathcal{H}}$ 对角化^[12,13]. 采用坐标表象 $|q_i\rangle$, 记 U 为

$$U = \iint_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \left| \mathbf{u} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right|, \quad \det \mathbf{u} = 1, \quad (6)$$

这里 $\left| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \equiv |q_1, q_2\rangle$ 是双模坐标本征态,

$$\hat{q}_i \left| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle = q_i \left| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中, \mathbf{u} 是一个待定的 2×2 矩阵, 由对角化的要求决定. 方程 (7) 明显地体现了经典矩阵 \mathbf{u} 映射为 Hilbert 空间中的量子么正算符 U . 用 (6) 式和 (7) 式得到 \hat{q}_i 的变换性质

$$U \begin{pmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{pmatrix} U^\dagger = \mathbf{u}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

转到动量表象, 用其完备性^[14-16]

$$\iint_{-\infty}^{\infty} dp_1 dp_2 \left| \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right| = 1, \quad (9)$$

和

$$\left\langle \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right| \mathbf{u} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \exp \left[-i (\mathbf{u}^T \mathbf{p})_j q_j \right] \quad (10)$$

(这里重复指标暗示求和) 得到 U 的动量表示:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dp_1 dp_2 \iint_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \\ &\times \left| \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right| \exp \left[-i (\mathbf{u}^T \mathbf{p})_j q_j \right] \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} dp_1 dp_2 \left| \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right|, \quad (11) \end{aligned}$$

于是就得到

$$U \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{pmatrix} U^\dagger = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

假设 \mathbf{u} 的形式是

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & E \\ G & H \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{u} = H - EG = 1, \quad (13)$$

这里 H, E, G 是待定的, 则

$$(\mathbf{u}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} H & -G \\ -E & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

在 U^\dagger 变换下,

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 &\rightarrow U^\dagger \hat{q}_1 U = \hat{q}_1 + E \hat{q}_2, \\ \hat{q}_2 &\rightarrow U^\dagger \hat{q}_2 U = G \hat{q}_1 + H \hat{q}_2, \\ \hat{p}_1 &\rightarrow U^\dagger \hat{p}_1 U = H \hat{p}_1 - G \hat{p}_2, \\ \hat{p}_2 &\rightarrow U^\dagger \hat{p}_2 U = -E \hat{p}_1 + \hat{p}_2, \end{aligned} \quad (15)$$

故而 $\hat{\mathcal{H}}$ 在 U^\dagger 变换下变成

$$\begin{aligned} U^\dagger \hat{\mathcal{H}} U &= \frac{1}{2A} \left[\frac{(Hp_1 - Gp_2)^2}{l_1} + \frac{(-Ep_1 + p_2)^2}{l_2} \right] \\ &\quad - \frac{m}{Al_1 l_2} (Hp_1 - Gp_2)(-Ep_1 + p_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{(q_1 + Eq_2)^2}{c_1} + \frac{(Gq_1 + Hq_2)^2}{c_2} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

对角化要求 (16) 式中含有 $\hat{p}_1 \hat{p}_2$ 和 $\hat{q}_1 \hat{q}_2$ 的项消失, 即要求

$$l_2 HG + l_1 E + m(GE + H) = 0, \quad (17)$$

$$c_2 E + c_1 GH = 0. \quad (18)$$

这意味着退纠缠, 联立 $H - EG = 1$ 可知

$$H = c_2 / (c_2 + c_1 G^2), \quad (19)$$

于是

$$E = -Gc_1 / (c_2 + c_1 G^2), \quad (20)$$

接着有

$$HG = \frac{c_2 G}{c_2 + c_1 G^2} = -\frac{c_2}{c_1} E. \quad (21)$$

将 (21) 式代入 (17) 式可以导出

$$-l_2 \frac{c_2}{c_1} E + l_1 E + m(2EG + 1) = 0, \quad (22)$$

(21) 式和 (22) 式联立给出

$$mc_1 G^2 + G(l_1 c_1 - l_2 c_2) - mc_2 = 0. \quad (23)$$

此方程的通解是

$$G = \frac{l_2 c_2 - l_1 c_1 \pm \sqrt{(l_1 c_1 - l_2 c_2)^2 + 4m^2 c_1 c_2}}{2mc_1}. \quad (24)$$

不失一般性, (24) 式中取负号, 并令

$$(c_2 l_2 - c_1 l_1)^2 + 4m^2 c_2 c_1 = \Delta, \quad (25)$$

可得

$$\begin{aligned} G &= \frac{c_2 l_2 - c_1 l_1 - \sqrt{\Delta}}{2mc_1} = \frac{-2mc_2}{\sqrt{\Delta} + c_2 l_2 - c_1 l_1}, \\ E &= \frac{c_1 m}{\sqrt{\Delta}}, \quad H = \frac{\sqrt{\Delta} - (c_1 l_1 - c_2 l_2)}{2\sqrt{\Delta}}, \end{aligned} \quad (26)$$

于是相应的退纠缠算符为

$$U = \iint_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \left| \begin{pmatrix} 1 & E \\ G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right|. \quad (27)$$

4 介观电路的量子纠缠态

用有序算符内的积分理论及双模坐标本征态的 Fock 表象^[17–19]

$$\begin{aligned} \langle q_1, q_2 | &= \sqrt{\frac{1}{\pi}} \langle 00 | \exp \left\{ -\frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} (q_1 a_1 + q_2 a_2) - \frac{1}{2} a_1^2 - \frac{1}{2} a_2^2 \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{i,j}$, 以及真空投影算符的正规乘积表示^[20–22]

$$|00\rangle\langle 00| =: \exp(-a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2): \quad (29)$$

对 U 的表达式积分得到

$$\begin{aligned} U &= \iint_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \left| \begin{pmatrix} 1 & E \\ G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 : \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(q_1 + Eq_2)^2 + (Gq_1 + Hq_2)^2] \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2} (q_1 + Eq_2) a_1^\dagger + \sqrt{2} (Gq_1 + Hq_2) a_2^\dagger - \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) + \sqrt{2} (q_1 a_1 + q_2 a_2) - \frac{1}{2} (a_1 + a_1^\dagger)^2 - \frac{1}{2} (a_2 + a_2^\dagger)^2 \right\} : \\ &= \frac{2}{\sqrt{L}} \exp \left\{ \frac{1}{2L} [(1 + E^2 - G^2 - H^2) (a_1^{\dagger 2} - a_2^{\dagger 2}) + 4(G + EG) a_1^\dagger a_2^\dagger] \right\} : \exp \left\{ (a_1^\dagger a_2^\dagger) (g - \mathbf{1}) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\} : \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{1}{2L} [(E^2 + H^2 - 1 - G^2) (a_1^2 - a_2^2) + 4(G + EH) a_1 a_2] \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

其中

$$L = E^2 + G^2 + H^2 + 3,$$

$$g = \frac{2}{L} \begin{pmatrix} \mathbf{1} + H & E - G \\ G - E & \mathbf{1} + H \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

可见 $U|00\rangle$ 是一个双模压缩态

$$U|00\rangle = \frac{2}{\sqrt{L}} \exp \left\{ \frac{1}{2L} \left[(1 + E^2 - G^2 - H^2) \right. \right. \\ \left. \left. \times (a_1^{\dagger 2} - a_2^{\dagger 2}) + 4(G + EH)a_1^{\dagger}a_2^{\dagger} \right] \right\} |00\rangle, \quad (32)$$

同时它也是一个纠缠态. 可见互感的存在导致量子纠缠. 该结果表示的是两个介观回路处于纠缠态, 注意到当前是在双模坐标表象下表示出来, 而此处的广义坐标 q_1, q_2 对应两个介观回路的电容各自携带的电量. 这就意味着测量其中一个回路电容上的电量后, 另外一个回路的电容电量也会塌缩到某个特定值上. 当然如果换成动量表象 (对应两个回路中各自的电流), 也依然有纠缠的特性.

5 带互感的两个介观电容-电感 (LC) 电路的特征频率

去除含有 $\hat{p}_1\hat{p}_2$ 和 $\hat{q}_1\hat{q}_2$ 的项后, 方程 (18) 变成

$$U^{\dagger}\hat{H}U = \frac{p_1^2}{2Al_1l_2} (l_2H^2 + l_1E^2 + 2mHE) \\ + \frac{p_2^2}{2Al_1l_2} (l_2G^2 + l_1 + 2mG) \\ + \frac{q_1^2}{2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{G^2}{c_2} \right) + \frac{q_2^2}{2} \left(\frac{E^2}{c_1} + \frac{H^2}{c_2} \right). \quad (33)$$

用 (33) 式算出

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{c_2l_2 + c_1l_1 \pm \sqrt{(c_2l_2 + c_1l_1)^2 + 4c_2c_1(m^2 - l_2l_1)}}{2c_2c_1(l_1l_2 - m^2)} \\ = \frac{c_2l_2 + c_1l_1}{2c_2c_1(l_1l_2 - m^2)} pm \sqrt{\left[\frac{(c_2l_2 + c_1l_1)}{2c_2c_1(l_1l_2 - m^2)} \right]^2 - \frac{1}{c_2c_1(l_1l_2 - m^2)}}, \quad (41)$$

这是可以用实验验证的.

6 弹簧约束滑动小车-单摆系统的微振动频率

本节讨论自由滑动小车-单摆系统的微振动频率. 从分析力学观点出发, 可以根据摆线偏离竖直

$$l_2H^2 + l_1E^2 + 2mHE = \frac{m^2c_1G - mc_2l_2}{G\sqrt{\Delta}}, \quad (34)$$

$$l_2G^2 + l_1 + 2mG = -\frac{(l_2G + m)\sqrt{\Delta}}{mc_1}, \quad (35)$$

$$\frac{1}{c_1} + \frac{G^2}{c_2} = \frac{c_2 + c_1G^2}{c_1c_2} = -\frac{G}{Ec_2}, \quad (36)$$

$$\frac{E^2}{c_1} + \frac{H^2}{c_2} = -\frac{m}{G\sqrt{\Delta}}, \quad (37)$$

于是 (33) 式变成

$$U^{\dagger}\hat{H}U = \frac{(m^2c_1G - mc_2l_2)}{2Al_1l_2G\sqrt{\Delta}} p_1^2 - \frac{G}{2Ec_2} q_1^2 \\ - \frac{(l_2G + m)\sqrt{\Delta}}{2Al_1l_2mc_1} p_2^2 - \frac{m}{2G\sqrt{\Delta}} q_2^2.$$

与谐振子哈密顿量的标准形式 $\frac{p^2}{2M} + \frac{M\omega^2 q^2}{2}$ 比较, 可得两个特征频率为

$$-\frac{G}{Ec_2} \frac{m^2c_1G - mc_2l_2}{Al_1l_2G\sqrt{\Delta}} = \frac{c_2l_2 + c_1l_1 + \sqrt{\Delta}}{2Al_1l_2c_1c_2} \equiv \omega_+^2 \quad (38)$$

以及

$$\frac{\frac{m}{G\sqrt{\Delta}}}{Al_1l_2 \frac{mc_1}{(l_2G + m)\sqrt{\Delta}}} = \frac{c_2l_2 + c_1l_1 - \sqrt{\Delta}}{2Al_1l_2c_2c_1} \equiv \omega_-^2. \quad (39)$$

再用 $A = 1 - m^2/(l_1l_2)$, 可见

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{c_2l_2 + c_1l_1 \pm \sqrt{(c_2l_2 - c_1l_1)^2 + 4m^2c_2c_1}}{2c_2c_1(l_1l_2 - m^2)}, \quad (40)$$

或

线的角度 θ 以及对滑块的坐标 x 写出系统的动能与势能. 其中动能为

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}[(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta], \quad (42)$$

其中第一项是滑动小车动能, 第二项是摆球动能, 反映了摆球同时参与滑动和摆动的速度合成规则, 即三角形余弦定理,

$$(\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta. \quad (43)$$

势能是

$$V = -m_2 gl \cos \theta + 2 \times \frac{1}{2} kx^2, \quad (44)$$

从 $L = T - V$ 以及

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (45)$$

导出动力学方程

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta + 2kx = 0, \quad (46)$$

$$l \ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta + g \sin \theta = 0. \quad (47)$$

在小振动时, $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$, 故 (46) 式和 (47) 式分别约化为

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\theta} + 2kx = 0, \quad (48)$$

$$l \ddot{\theta} + \ddot{x} + g\theta = 0, \quad (49)$$

即

$$m_1 \ddot{x} = m_2 g \theta - 2kx, \quad (50)$$

$$m_1 l \ddot{\theta} = 2kx - g(m_1 + m_2) \theta. \quad (51)$$

晃动过程中, 小车与摆有相同的频率, 故可令

$$x = Y \sin(\omega t), \quad (52)$$

$$\theta = Z \sin(\omega t), \quad (53)$$

代入 (50) 式和 (51) 式得到

$$(\omega^2 m_1 - 2k) Y + m_2 g Z = 0, \quad (54)$$

$$2kY + [m_1 l \omega^2 - g(m_1 + m_2)] Z = 0, \quad (55)$$

其系数行列式为零才有非平庸解, 即

$$\begin{vmatrix} \omega^2 m_1 - 2k & m_2 g \\ 2k & -g(m_1 + m_2) + m_1 l \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (56)$$

也就是

$$m_1^2 l \omega^4 - m_1 [2kl + g(m_1 + m_2)] \omega^2 + 2kgm_1 = 0. \quad (57)$$

由此解出

$$\omega^2 = \frac{1}{2lm_1^2} \left\{ m_1 [g(m_1 + m_2) + 2kl] \pm \sqrt{[g(m_1 + m_2) + 2kl]^2 m_1^2 - 4lm_1^2 2kgm_1 g} \right\}. \quad (58)$$

所以弹簧约束滑动小车-单摆系统的微振动频率是

$$\omega^2 = \frac{(m_1 + m_2)g + 2kl}{2m_1 l} \pm \sqrt{\left[\frac{(m_1 + m_2)g + 2kl}{2m_1 l} \right]^2 - \frac{2kg}{m_1 l}}, \quad (59)$$

这里的两个根都是正定的, 都是物理解, $\frac{2kg}{m_1 l} = \frac{2k}{m_1} \times \frac{g}{l}$ 代表弹簧振子带动小车运动 (以 $\frac{2k}{m_1}$ 表征) 与单摆运动 (以 $\frac{g}{l}$ 表征) 之间的耦合, 是量子纠缠的经典类比.

7 量子纠缠的经典类比

将介观电路的本征频率 (41) 式改写为

$$\begin{aligned} \omega_{\pm}^2 &= \frac{c_2 l_2 + c_1 l_1 \pm \sqrt{(c_2 l_2 + c_1 l_1)^2 + 4c_2 c_1 (m^2 - l_2 l_1)}}{2c_2 c_1 (l_1 l_2 - m^2)} \\ &= \frac{c_2 l_2 + c_1 l_1}{2c_2 c_1 (l_1 l_2 - m^2)} \\ &\quad \pm \sqrt{\left[\frac{(c_2 l_2 + c_1 l_1)}{2c_2 c_1 (l_1 l_2 - m^2)} \right]^2 - \frac{1}{c_2 c_1 (l_1 l_2 - m^2)}}, \end{aligned} \quad (60)$$

再和上述力学系统的频率 (59) 式作比较, 就可得到如下的对应:

$$\frac{(m_1 + m_2)g + 2kl}{2m_1 l} \rightarrow \frac{c_1 l_1 + c_2 l_2}{2c_1 c_2 (l_1 l_2 - m^2)}, \quad (61)$$

$$\frac{2kg}{m_1 l} = \frac{2k}{m_1} \times \frac{g}{l} \rightarrow \frac{1}{c_1 c_2 (l_1 l_2 - m^2)}. \quad (62)$$

于是找到了一个鲜明的例子, 即量子纠缠可以有经典力学模拟或对应. 我们期望有更多的例子出现.

8 结 论

本文首次讨论了量子纠缠有没有经典类比 (或对应) 的问题, 指出在介观电路量子化的框架中, 带有互感的两个介观电容-电感 (LC) 电路与两个弹簧之间夹一个小滑车在光滑的地面上附带一个单摆的运动可比拟. 先用有序算符内的积分理论证明第一个系统的互感是产生量子纠缠的源头, 再推导出其特征频率的公式, 就发现它与第二个系统的小振动频率公式类似. 第二个系统中单摆的摆动会造成小车来回振动, 摆、小车和弹簧的互相牵制效应反映了小车和摆的“纠缠”. 从两个系统的振动频率对比中发现有类似, 这是严格数学推导的结果, 而不是哲学观点的逻辑推理. 时至今日, 我们还能武断有量子纠缠的系统就不存在可以类比

的经典力学系统, 真理是在探索讨论中渐渐显露的, 希望本文严密正确的推导能起抛砖引玉的作用.

参考文献

- [1] Srivastava Y, Widom A 1987 *Phys. Rep.* **148** 1
- [2] Buot F A 1993 *Phys. Rep.* **234** 73
- [3] Louisell W H 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: John Wiley)
- [4] Fan H Y, Liang X T 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 174
- [5] Fan H Y, Da C 2019 *Optik* **179** 413
- [6] Wang J S, Fan H Y, Meng X G 2010 *Chin. Phys. B* **19** 034206
- [7] Fan H Y, Klauder J R 1994 *Phys. Rev. A* **49** 704
- [8] Fan H Y, Lu H L, Fan Y 2006 *Ann. Phys.* **321** 480
- [9] Fan H Y, Xu Z H 1994 *Phys. Rev. A* **50** 2921
- [10] Meng X G, Wang J S, Zhang X Y, Liang B L 2011 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **44** 165506
- [11] Zhang R, Meng X G, Du C X, Wang J S 2018 *J. Phys. Soc. Jpn.* **87** 024001
- [12] Loudon R, Knight P L 1987 *J. Mod. Opt.* **34** 709
- [13] Fan H Y 1992 *Eur. Phys. Lett.* **19** 443
- [14] Meng X G, Wang Z, Wang J S, Fan H Y 2012 *J. Opt. Soc. Am. B* **29** 1835
- [15] Zhao M J, Ma T, Ma Y Q 2018 *Sci. China-Phys. Mech. Astron.* **61** 020311
- [16] Meng X G, Wang Z, Fan H Y, Wang J S, Yang Z S 2012 *J. Opt. Soc. Am. B* **29** 1844
- [17] Meng X G, Wang J S, Liang B L, Du C X 2018 *J. Exp. Theor. Phys.* **154** NN8
- [18] Meng X G, Xu Y J 2014 *Int. J. Theor. Phys.* **53** 1239
- [19] Meng X G, Wang J S, Liang B L 2009 *Solid State Commun.* **149** 2027
- [20] Wang J S, Meng X G, Fan H Y 2017 *J. Mod. Opt.* **64** 1398
- [21] Fan H Y, Zhou J 2012 *Sci. China-Phys. Mech. Astron.* **55** 605
- [22] Fan H Y 2012 *Sci. China-Phys. Mech. Astron.* **55** 762

Classical correspondence of quantum entanglement in mesoscopic circuit*

Fan Hong-Yi^{1)†} Wu Ze²⁾

1) (Department of Materials Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

2) (Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

(Received 26 May 2021; revised manuscript received 22 September 2021)

Abstract

Since the birth of quantum mechanics, its classical correspondence (or analogy) has been a hot topic for physicists. In this paper, we first discuss whether there is a classical correspondence of quantum entanglement. We give a positive answer through the following examples: in the framework of quantization of mesoscopic circuits, two mesoscopic capacitance inductance (LC) circuits with mutual inductance are proved to be the source of quantum entanglement by using the integration within an ordered product, and then the formula of their characteristic frequency is obtained. It is found that it is similar to the expression of the small oscillating frequency of a classical system described below. The classical system is shown in Fig. 1. Two walls are connected with the same spring. And between the two springs a sliding trolley can move on a smooth table. The trolley is hung with a simple pendulum. The small oscillating frequency of the system is calculated by analytical mechanics. It is found that the swing of the simple pendulum will cause the trolley to oscillate back and forth. The mutual restraint effect of the pendulum, the trolley and the spring reflects the “entanglement” between them.

Keywords: quantum disentangling operator, quantum noise, characteristic frequency, the IWOP method

PACS: 03.65.-w, 03.65.Sq, 73.23.-b

DOI: 10.7498/aps.71.20210992

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11775208).

† Corresponding author. E-mail: fhym@ustc.edu.cn