

磁偶极子阵列模型的适用性研究与优化分析

刘芙妍 颜冰

Applicability and optimization analysis of magnetic dipole array model

Liu Fu-Yan Yan Bing

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 124101 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20212223

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212223>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

多目标优化的舰船磁场建模方法

Multi-objective optimization of ship magnetic field modeling method

物理学报. 2021, 70(16): 164101 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210334>

磁记忆检测的力磁耦合型磁偶极子理论及解析解

Analytical solution of magneto-mechanical magnetic dipole model for metal magnetic memory method

物理学报. 2021, 70(3): 034101 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20200937>

全偏振大气偏振模式成像系统的设计与优化分析

Design and optimization analysis of imaging system of polarized skylight pattern of full polarization

物理学报. 2021, 70(10): 104201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210104>

舰船磁场磁单极子阵列法建模技术

Magnetic monopole array model for modeling ship magnetic signatures

物理学报. 2019, 68(11): 114101 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190201>

基于范阿伦卫星观测的槽区嘶声波冷等离子体色散关系的适用性评估

Assessment of applicability of cold plasma dispersion relation of slot region hiss based on Van Allen Probes observations

物理学报. 2022, 71(5): 051101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211671>

基于宽波束磁电偶极子天线的宽角扫描线性相控阵列

Wide-angle scanning linear phased arrays based on wide-beam magneto electric dipole antenna

物理学报. 2021, 70(1): 014101 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201104>

磁偶极子阵列模型的适用性研究与优化分析*

刘芙妍¹⁾²⁾ 颜冰^{2)†}

1) (湖南大学数学学院, 长沙 410082)

2) (国防科技大学气象海洋学院, 长沙 410073)

(2021 年 12 月 1 日收到; 2022 年 2 月 22 日收到修改稿)

随着我国水下探测、通信技术的发展, 传统的磁性测量模型已无法满足高精度、高效率建模的需要. 本文从舰船磁场积分模型出发, 综合分析模型离散化为磁偶极子阵列模型产生的复化中矩形, 以及 Gauss-Legendre 积分余项分析过程引起的离散误差、算法误差, 模型简化产生的拟合误差、模型误差等, 对模型适用性条件进行分析; 同时, 以建模精度和计算复杂度为目标构造多目标优化函数, 通过 NSGA-II 算法对多目标函数进行求解, 得到使精度、复杂度较为均衡的最优解集, 提出了不同精度、复杂度需求下的选择规则. 为了保证结果的有效性, 在舰船磁场混合模型的基础上利用数值实验对模型进行验证, 充分考虑模型拟合误差, 通过对磁性均匀、磁性不均匀潜艇的仿真分析得到模型达到适用范围时距离与磁偶极子数目的相关关系; 在保证模型适用的条件下, 基于 NSGA-II 算法的多目标优化过程所得结果运算效率、精度高, 具有很好的工程应用价值.

关键词: 磁偶极子积分模型, 复化中矩形法余项, 多目标优化, NSGA-II 算法**PACS:** 41.20.Gz, 02.60.Jh, 02.30.Rz**DOI:** 10.7498/aps.71.20212223

1 引言

随着潜艇静音技术的飞速发展, 传统的声呐探测已无法满足我国水下探测、反潜的需要, 为了提高潜艇水下探测能力, 磁异常探测已成为水下目标探测的重要手段^[1,2]. 磁异常探测轻便易行、效率高、隐蔽性能好、抗干扰强, 具有极高的军事意义和民用价值. 为了提高水下探测、反潜能力, 建立高精度的磁场模型, 提高模型计算效率是重中之重^[3].

目前, 主要的舰船磁场建模方法主要有两类: 一类是由理论推导得到的, 如大平面法、边界元法、有限元法等, 这类方法计算精度高, 但测量要求高, 无法满足实际工程需要; 另一类是磁体模拟法, 将舰船等效为磁偶极子阵列模型, 利用其模拟舰船的局部磁场. 其中, 磁体模拟法可以在少量的

磁场测量数据下完成精度较高的舰船磁场建模^[4], 应用广泛. 如生成海洋军事武器物理磁场模型, 全面监控水下移动电磁目标^[5]; 水下移动电子装置的识别、追踪拦截^[6]; 地磁勘探和探测、确定未爆炸物^[7,8]; 建立水雷全型号电磁分布模型^[9,10]; 探测几百米外远处的潜艇^[11]等. 海洋探测、通信等技术的发展, 对磁性测量的精确度提出了更高的要求, 但磁偶极子阵列模型中磁偶极子数目、分布以及适应性条件等对磁体磁场分布等效效果的影响尚无较为系统的研究和成熟的理论^[12,13].

对于磁偶极子模型的高精度高效率计算问题, Lutkenhoner^[14]通过数值实验验证了单磁偶极子转化为两个磁偶极子的可行性, 探索了成功分离两个偶极子的最低要求; 吴旭东等^[15]最早讨论了磁偶极子标量模型的推导以及理想磁偶极子成立条件; 牛龙飞等^[16]提出 3 个磁偶极子对舰船磁场进

* 国防基础科研计划 (批准号: JCKY2020550C011)、国家自然科学基金 (批准号: 42176197) 和水声对抗技术国防科技重点实验室基金 (批准号: 6412214200403) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yanbing19@nudt.edu.cn

行建模,在不显著增加复杂度的情况下增加了真精度; Lucas 和 Richards^[17] 以及 Nilsson^[18] 提出磁偶极子阵列可以被视为船舶产生的磁场源,提出船舶磁化范围的各种模型. 戴忠华等^[19] 在阵列模型计算磁场分布的情况下,利用单磁偶极子反演推算得到磁矩收敛性,得出在 2.5 倍距离外将水下目标等效为单磁偶极子模型时具有较高精度的结论,这一结论的提出为舰船单偶极子模型的应用提供了依据,但仅适用于单磁偶极子,证明过程依赖阵列模型的准确性;金煌煌等^[13] 研究了利用多磁偶极子模型等效模拟磁异常目标空间磁场分布时,在不同空间尺度条件下的多磁偶极子磁矩、空间分布对等效效果的影响即多磁偶极子等效规律. 但利用混合模型进行适用性研究的过程大都利用单磁偶极子与阵列模型之间的等价性,忽视了模型建立过程产生的误差;而磁偶极子个数的选取过程中较少对计算复杂度进行考虑,往往会造成磁偶极子数过少模型精度较差、数目多计算复杂度高问题,使模型的适用性较差.

本文从舰船磁场混合模型的相关理论出发,提出了基于复化中矩形、Gauss-Legendre 法余项的阵列模型的适用性研究,通过对积分模型离散化为阵列模型产生的积分余项及余项估计过程产生的离散误差及磁体模拟法产生的拟合误差、算法误差、磁偶极子距离数目差异引起的模型误差进行综合分析,讨论模型的精度,提出了磁偶极子模型的适用性条件;同时,基于模型误差与参数的相关性,以建模精度和计算复杂度为目标构建多目标问题,通过对多目标函数的求解得到使精度、计算量较为均衡的磁偶极子数,实现了模型的高精度、高效率计算. 所提出的方法以国外某潜艇进行仿真验证,

从计算精度、效率、模型适用性等方面对模型进行分析,结果表明该模型可以显著提高磁场精度和计算效率,具有重要的理论意义和实用价值. 本文第 2 节探究了磁场积分模型离散化为磁偶极子模型的过程;第 3 节基于复化中矩形、Gauss-Legendre 数值积分法综合考虑离散误差、模型误差、算法误差对磁偶极子模型的适用性条件,进行了对比分析;第 4 节通过磁性分布均匀、磁性分布不均舰艇的仿真计算及模型拟合误差得到了磁偶极子模型的适用性条件;第 5 节利用多目标函数优化算法对多目标问题进行求解,提出一种高精度、低复杂度的舰船磁场建模方法. 最后对实验结论进行了总结分析.

2 磁偶极子积分模型离散化

积分方程法、微分方程法是电磁场数值计算的重要方法. 目前国内外有关电磁场数值计算的著作大多偏重于微分方法求解二维磁场问题,而在许多实际场问题的计算中,尤其是在计算三维场时,需要采用积分方法或者积分-微分混合方法,才能达到较高精度^[20]. 电磁场可以用麦克斯韦方程组描述,对麦克斯韦方程组积分得电磁场积分形式的解,以这些解为基础可形成电磁场的积分方程^[21]:

$$\mathbf{h} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{3(\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}')[\mathbf{M} \cdot (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}')] - |\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|^2 \mathbf{M}}{|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|^5} dV, \quad (1)$$

其中 \mathbf{h} 为磁场强度; $\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_k m_k$ 为磁化强度,其大小反映了物质在外场作用下原子电流和电子磁矩的取向能力; m_k 为体积 ΔV 内第 k 个区域的磁偶极矩; $\tilde{\mathbf{r}}$ 为场点坐标, \mathbf{r}' 为源点坐标. 当源点坐标为 (x_i, y_i, z_i) , 场点坐标为 (x, y, z) 时得

$$\begin{aligned} h_{x\text{true}} &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\{[3(x-x_i)^2 - r^2]m_x + [3(x-x_i)(y-y_i)]m_y + [3(x-x_i)(z-z_i)]m_z\}}{r_i^5} dV, \\ h_{y\text{true}} &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\{[3(y-y_i)(x-x_i)]m_x + [3(y-y_i)^2 - r^2]m_y + [3(y-y_i)(z-z_i)]m_z\}}{r_i^5} dV, \\ h_{z\text{true}} &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\{[3(z-z_i)(x-x_i)]m_x + [3(z-z_i)(y-y_i)]m_y + [3(z-z_i)^2 - r^2]m_z\}}{r_i^5} dV, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$ 是源点与场点之间的距离; $h_{x\text{true}}, h_{y\text{true}}, h_{z\text{true}}$ 为 x, y, z 方

向的实际磁场强度; m_x, m_y, m_z 为磁源沿 x, y, z 方向的磁矩; $dV = dx dy dz$ 为单位体积.

利用积分、微分方程对磁场求解的过程, 除非场域极其简单否则无法得到解析表达式, 但应用数值计算却可以计算大量的数值问题. 数值计算的关键在于把求解对象所在区域进行离散化, 即通过互不重叠顶点边界相连的有限个单元的总和来对连续场域进行等价 [22]. 由于分子尺度在连续介质理论中相对于连续介质微元总可以认定为充分小量, 假定将磁源分割为 n 个小磁体, 小磁体中心点坐标分别为 $(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, \dots, n$, 观测点坐标为 (x, y, z) 处的数值磁场强度 $(hx_{\text{sim}}, hy_{\text{sim}}, hz_{\text{sim}})$, 则可得磁场强度离散化模型, 即磁偶极子阵列模型 [19]:

$$\begin{aligned} hx_{\text{sim}}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n (F_{xi}m_{xi} + F_{yi}m_{yi} + F_{zi}m_{zi}), \\ hy_{\text{sim}}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n (G_{xi}m_{xi} + G_{yi}m_{yi} + G_{zi}m_{zi}), \\ hz_{\text{sim}}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n (E_{xi}m_{xi} + E_{yi}m_{yi} + E_{zi}m_{zi}), \\ F_{xi} &= \frac{3(x-x_i)^2 - r_i^2}{r_i^5}, \\ F_{yi} &= \frac{3(x-x_i)(y-y_i)}{r_i^5}, \\ F_{zi} &= \frac{3(x-x_i)(z-z_i)}{r_i^5}. \end{aligned} \quad (3)$$

对积分模型 (2)、磁偶极子模型 (3) 进行简化, 假设磁源为磁性均匀各向同性的立方体, 可得 $m_x dV = m_y dV = m_z dV = m dV$, m 为常数, 取观测点坐标为 $(0, 0, 0)$, 磁偶极子中心点坐标 (x, y, z) , 得磁偶极子 x 轴方向的磁场强度简化积分模型为

$$hx_{\text{true}} = \frac{m}{4\pi} \int \frac{3x^2 - r^2 + 3xy + 3xz}{r^5} dV. \quad (4)$$

(4) 式的被积函数为

$$f(x, y, z) = \frac{2x^2 - y^2 - z^2 + 3xy + 3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (5)$$

简化后 x 轴方向磁偶极子模型为

$$\begin{aligned} hx_{\text{sim}}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \left(\frac{3x_i^2 - r_i^2}{r_i^5} m_i + \frac{3x_i y_i}{r_i^5} m_i + \frac{3x_i z_i}{r_i^5} m_i \right), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 m_i 表示第 i 个小磁体的磁矩.

积分模型 (4) 式可以得到的磁源在观测点磁场强度较为精确, 但利用微积分基本定理求解存在无法找到原函数、原函数复杂、被积函数没有有限的积分表达式等问题, 因此在实际应用中常常采用数值积分方法对多重积分进行估计. 磁偶极子模型是积分模型离散化的结果, 一般情况下磁偶极子数量越多, 对测量点上磁场的拟合精度越高, 此外, 拟合的精度高低还与磁偶极子的分布有关. 因此研究模型适用性需要具体分析误差包括: 模型在离散化过程中产生的误差, 即积分余项无法精确计算得到, 此时该误差可归入离散误差; 磁测物体磁场较为复杂, 无法用一个简单的解析式计算, 因此采用已知磁场分布的磁性物体来等效实际潜艇带来的模型拟合误差; 在计算过程中由于数值分析方法选择的差异产生算法误差; 模型在离散化过程中的分布、数目上的差异产生的模型误差; 理论分析部分对模型进行一些简化及算法运行过程中产生的舍入误差相对其他误差影响较少, 不做过多的分析.

3 磁偶极子模型适用性

通过理论分析积分余项来研究模型适用性的过程, 综合考虑了复化中矩形算法、Gauss-Legendre 算法的对比分析及磁偶极子数目位置的差异等引起的算法误差、离散误差及模型误差等.

3.1 复化中矩形法余项

多重积分的求解是工程研究中常见的问题, 多重积分的复化中矩形法, 就是将多重积分转换成多次的定积分, 在每重积分计算时用复化中矩形公式对积分进行估计, 最后得到多重积分近似值的方法 [22]. 磁偶极子模型为立体空间中的三维模型, 因此首先利用复化中矩形公式三重积分余项估计对 (4) 式的截断误差进行分析, 设 $f(x)$ 在区间 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ 上连续、可微, 得到如下三重积分问题:

$$I_3 = \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (7)$$

利用复化中矩形法对多重积分 (7) 式进行数值计算得 I_3 :

$$\begin{aligned}
 I_3 = & h_1 h_2 h_3 \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} f(x_{1i_1}, x_{2i_2}, x_{3i_3}) + h_3 \frac{(b_1 - a_1)^3 (b_2 - a_2)^3}{24^2 n_1^2 n_2^2} \sum_{i_3=1}^{n_3} \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(\eta_1, \eta_2, x_{3i_3}) \\
 & + h_2 \frac{(b_1 - a_1)^3 (b_3 - a_3)^3}{24^2 n_1^2 n_3^2} \sum_{i_2=1}^{n_2} \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_3^2}(\eta_1, x_{2i_2}, \eta_3) + h_1 \frac{(b_2 - a_2)^3 (b_3 - a_3)^3}{24^2 n_2^2 n_3^2} \sum_{i_1=1}^{n_1} \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2 \partial x_3^2}(x_{1i_1}, \eta_2, \eta_3) \\
 & + h_1 h_2 \frac{(b_3 - a_3)^3}{24 n_3^2} \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \eta_3) + h_1 h_3 \frac{(b_2 - a_2)^3}{24 n_2^2} \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_3=1}^{n_3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_{1i_1}, \eta_2, x_{3i_3}) \\
 & + h_2 h_3 \frac{(b_1 - a_1)^3}{24 n_1^2} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\eta_1, x_{2i_2}, x_{3i_3}) + \frac{(b_1 - a_1)^3 (b_2 - a_2)^3 (b_3 - a_3)^3}{24^3 n_1^2 n_2^2 n_3^2} \frac{\partial^6 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial x_3^2}(\eta_1, \eta_2, \eta_3), \quad (8)
 \end{aligned}$$

其中, h_l 为将 $[a_l, b_l]$ 分成 n_l 等份时的小区间宽度; $[a_l, b_l]$ 上的求积节点分别为 $a_l = x_{li_1}, x_{li_2}, \dots, x_{li_{n_l}} = b_l$, $l \in (1, 2, 3)$; $h_1 h_2 h_3 \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} f(x_{1i_1}, x_{2i_2}, x_{3i_3})$ 为磁偶极子模型; $I_3 - h_1 h_2 h_3 \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} f(x_{1i_1}, x_{2i_2}, x_{3i_3})$ 为积分余项, 即截断误差. 通过上述方法对 (4) 式进行分析得数值计算解析式.

3.2 Gauss-Legendre 余项

复化中矩形法是常用的一种有效算法, 它突出的优点是计算过程简单, 可以很好地在工程中推广应用. 与复化中矩形法相比, Gauss-Legendre 法在节点数一定的情况下具有更高的代数精度和收敛性. 为了更好地对磁偶极子积分模型离散化误差进行分析, 利用 Gauss-Legendre 余项估计对多重积分 (7) 式进行数值计算得 I'_3 :

$$\begin{aligned}
 I'_3 = & \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} f(x_{1i_1}, x_{2i_2}, x_{3i_3}) + C_{n_1} C_{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} A_{i_1} \frac{\partial^{2(n_1+n_2)+4} f}{\partial x_1^{2n_1+2} \partial x_2^{2n_2+2}}(\eta_1, \eta_2, x_{3i_3}) \\
 & + C_{n_1} C_{n_3} \sum_{i_2=1}^{n_2} A_{i_2} \frac{\partial^{2(n_1+n_3)+4} f}{\partial x_1^{2n_1+2} \partial x_3^{2n_3+2}}(\eta_1, x_{2i_2}, \eta_3) + C_{n_2} C_{n_3} \sum_{i_1=1}^{n_1} A_{i_1} \frac{\partial^{2(n_2+n_3)+4} f}{\partial x_2^{2n_2+2} \partial x_3^{2n_3+2}}(x_{1i_1}, \eta_2, \eta_3) \\
 & + C_{n_3} \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} A_{i_1} A_{i_2} \frac{\partial^{2n_3+2} f}{\partial x_3^{2n_3+2}}(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \eta_3) + C_{n_2} \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_3=1}^{n_3} A_{i_1} A_{i_3} \frac{\partial^{2n_2+2} f}{\partial x_2^{2n_2+2}}(x_{1i_1}, \eta_2, x_{3i_3}) \\
 & + C_{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} A_{i_2} A_{i_3} \frac{\partial^{2n_2+2} f}{\partial x_1^{2n_2+2}}(\eta_1, x_{2i_2}, x_{3i_3}) + C_{n_1} C_{n_2} C_{n_3} \frac{\partial^{2(n_1+n_2+n_3)+6} f}{\partial x_1^{2n_1+2} \partial x_2^{2n_2+2} \partial x_3^{2n_3+2}}(\eta_1, \eta_2, \eta_3), \quad (9)
 \end{aligned}$$

其中, 求积系数 $A_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P'_{n+1}(x_i)]^2}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) 与求积节点使 (9) 式达到 $n+1$ 次代数精度, $P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^{n+1}$ 为 $n+1$ 阶 Legendre 多项式, $C_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} P'_{n+1}(x_i)$.

3.3 磁偶极子模型误差

通过积分余项可以对模型误差进行有效估计, 得到磁偶极子模型误差的解析解. 利用 (8) 式得 (4) 式磁偶极子积分公式的积分余项. 考虑到 η 的

精确求解较为复杂, 为提高计算精度, 降低复杂度, 分别对单磁偶极子条件下 η 趋近于均值、最大值、最小值、中值及最大最小值与中间值内部, 即 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i, y, z) = f(\eta, y, z)$, $\sum_{i=1}^n f(\max(x_i), y, z) = f(\eta, y, z)$, $\sum_{i=1}^n f(\min(x_i), y, z) = f(\eta, y, z)$ 等的取值情况进行讨论, 得到不同条件下模型实际误差与余项不同取值情况下产生的取值误差之间的相对误差, 结果如图 1 所示. 可以看出, 当 η 取均值时其产生的舍入误差相对较小且最稳定, 因此选择 η 取均值情况下的取值误差及截断误差带来的离散误差对模型进行接下来的讨论.

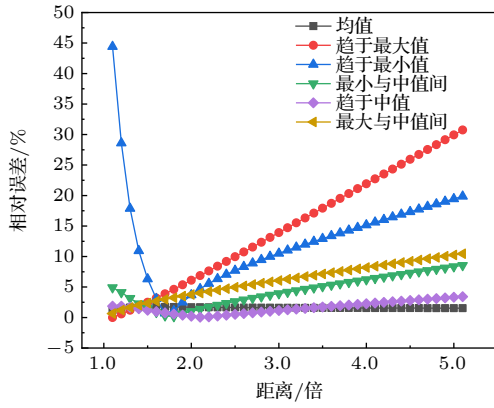
图 1 单磁偶极子条件下相对误差随 η 的变化

Fig. 1. Relative error as a function of η for a magnetic dipole.

接下来对 (8) 式积分余项进行简化, 取 $\frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n f(x_i, y, z) = f(\eta, y, z)$, $f(\eta, y, z)$ 为均值, 得复化中矩形下的模型相对误差 E :

$$E = \frac{F_1 + F_2 + F_3}{h^3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k)} \times 100\%, \quad (10)$$

其中

$$F_1 = h^2 \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [f_{xx}(x_i, y_j, z_k) + f_{yy}(x_i, y_j, z_k) + f_{zz}(x_i, y_j, z_k)],$$

$$F_2 = h \frac{(b-a)^6}{24^2 n^6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [f_{xxyy}(x_i, y_j, z_k) + f_{xxzz}(x_i, y_j, z_k) + f_{yyzz}(x_i, y_j, z_k)],$$

$$F_3 = \frac{(b-a)^9}{24^3 n^9} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{xyyzz}(x_i, y_j, z_k),$$

$$f_{xx}(x_i, y_j, z_k) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_i, y_j, z_k).$$

当 $E \leq 6\%$ 时磁偶极子模型能够有效对磁源进行建模, 当 $E \leq 3\%$ 时磁偶极子模型的建模精度较高, 能够有效地在相关工程中应用 [4].

(10) 式给出了求磁偶极子相对误差的具体方法, 接下来对距离、磁偶极子数目的差异产生的模型误差进行分析. 当磁源为立方体时, 分别对磁偶极子数目 1—4, 磁源与观测点距离为 1—3 倍立方体边长的情况进行分析, 得到基于磁偶极子阵列模型

的不同距离及磁偶极子数目的磁场相对误差, 结果如图 2 所示. 可以看出: 随着距离的增大, 模型相对误差趋于收敛, 单磁偶极子在 1.8 倍距离处趋于稳定, 相对误差为 5.9%, 达到了有效建模距离; 随着磁偶极子数目的增多, 模型的相对误差逐渐减小, 在 2 个磁偶极子时模型在 1.3 倍距离处就达到了 2% 的相对误差, 达到了较高的模型精度.

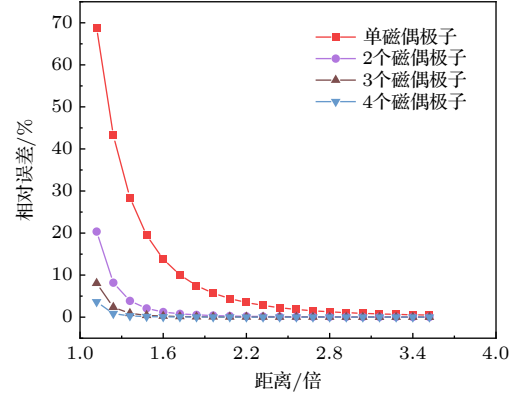


图 2 基于复化中矩形法模型误差随距离及磁偶极子数目的变化规律

Fig. 2. Variation of model error with distance and the number of magnetic dipoles based on composite middle rectangular method.

同理得基于 Gauss-Legendre 法的磁偶极子阵列模型的不同距离及磁偶极子数目的磁场相对误差, 结果如图 3 所示. 可以看出, 在 Gauss-Legendre 法下单磁偶极子在 1.5 倍距离处趋于稳定, 相对误差为 5.05%, 达到了有效建模距离. 与复化中矩形法对比可得, Gauss-Legendre 法对磁偶极子积分模型离散化的过程更易达到有效建模距离, 该方法得到的磁偶极子阵列模型对磁偶极子分布的位置

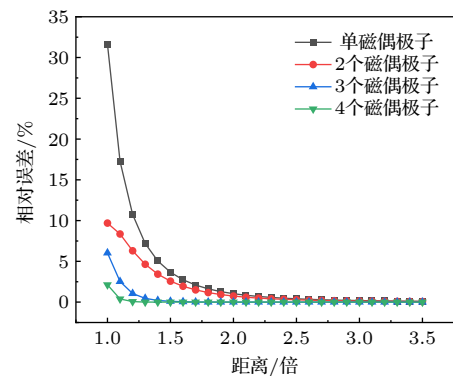


图 3 基于 Gauss-Legendre 法模型误差随距离及磁偶极子数目的变化规律

Fig. 3. Variation of model error with distance and the number of magnetic dipoles based on Gauss-Legendre method.

与磁偶极子所占的比例进行了规划, 较复杂中矩形法更为合理. 由于理论分析过程存在较多简化, 如将磁体假设为磁性均匀各向同性的立方体、积分余项简化取均值等, 与实际情况存在一定差距, 接下来利用数值例子对上述方法进行检验.

4 数值仿真实验

本数值实验在第 3 节的基础上对日本“苍龙”级潜艇进行研究, 潜艇艇长 80 m, 半径 5 m, 尾部半径 2 m, 尾部长度 15 m. 实际应用中, 往往需要将空间磁场的分布规律抽象出来, 形成一个可快速预测的模型, 从而便于利用测量信号进行目标参数识别. 因此, 基于潜艇的外形特点, 有学者提出了等效旋转椭球体模型 [23], 为了方便计算将其等价长为 80 m, 最长半径为 5 m 的旋转椭球体, 如图 4 所示. 上述混合椭球体模型采用磁体模拟法, 与实际水中磁性目标存在些许差距, 但实验表明离开磁性目标的距离在其两倍宽度以上时, 旋转椭球体磁场对目标磁场的拟合精度超过 85%, 为了保证研究的准确性, 将该误差作为模型拟合误差代入后续分析过程 [24,25]. 同时根据潜艇的磁性分布将其分为均匀、不均匀两种情况进行仿真分析.

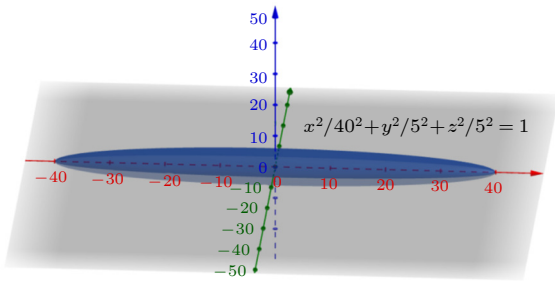


图 4 潜艇模型

Fig. 4. Submarine model.

4.1 观测点选取

实验时为避免取点不均、取点较少没有代表性带来的偶然误差, 利用极坐标求得以 (0, 0, 0) 为圆心, 以 r 为半径的球面上均匀分布的 $N = 60$ 个点作为观测点, 坐标 (x, y, z) 分别为

$$x = r \cos \theta \sin \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \phi, \quad (11)$$

其中 $\theta = \sqrt{N \cdot \pi} \cdot \phi$; $\phi = \arccos[-1 + (2i-1)/N]$, $i = 1, 2, \dots, N$; $r = 44 + 10j$, $j = 1, 2, \dots, 18$. 图 5 为 $r = 224$ 时随机选取的 N 个采样点示意图.

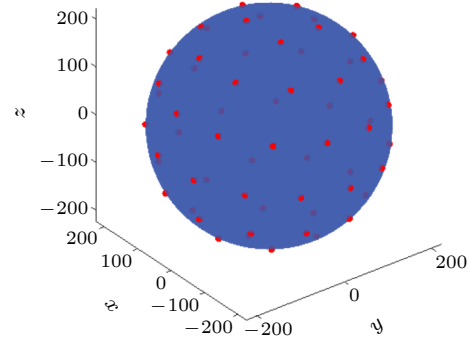


图 5 $r = 224$ 时选取的均匀采样点

Fig. 5. Uniform sampling points selected when $r = 224$.

4.2 磁性均匀情况

假设潜艇所用材料的磁性是均匀的, 即为均匀旋转椭球体. 旋转椭球体在均匀磁化时的磁矩等于电流 I 与最大横截面积 S 的乘积 [26]. 考虑到旋转椭球体在各个坐标平面上的投影存在差异, 根据

$$dm_x = a dV, \quad dm_y = b dV, \quad dm_z = c dV, \quad (12)$$

其中 a, b, c 为常数, V 为椭球体积. 常数关系式为 $b = a$, $c = a / [(x_2 - x_1) / (z_2 - z_1)]$. $x_1 = -40$, $x_2 = 40$, $y_1 = -5$, $y_2 = 5$, $z_1 = -5$, $z_2 = 5$. 利用 (3) 式及椭球微分 $dV = \pi \left\{ 1 - \left[\frac{x}{(x_2 - x_1)/2} \right]^2 \right\} dx dy dz$ 得积分模型

$$\begin{cases} h_{x_{\text{true}}} = \frac{a\mu_0}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{3(x-x_0)^2 - r^2}{r^5} \right] v dx dy dz + \frac{b\mu_0}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{3(x-x_0)(y-y_0)}{r^5} \right] v dx dy dz \\ \quad + \frac{c\mu_0}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{3(x-x_0)(z-z_0)}{r^5} \right] v dx dy dz, \\ h_{y_{\text{true}}} = \frac{a\mu_0}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{3(y-y_0)(x-x_0)}{r^5} \right] v dx dy dz + \frac{b\mu_0}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{3(y-y_0)^2 - r^2}{r^5} \right] v dx dy dz \\ \quad + \frac{c\mu_0}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{3(y-y_0)(z-z_0)}{r^5} \right] v dx dy dz, \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_{z_{\text{true}}} = \frac{a\mu_0}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{3(z-z_0)(x-x_0)}{r^5} \right] v dx dy dz + \frac{b\mu_0}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{3(z-z_0)(y-y_0)}{r^5} \right] v dx dy dz \\ \quad + \frac{c\mu_0}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{3(z-z_0)^2 - r^2}{r^5} \right] v dx dy dz, \\ v = \pi \left\{ 1 - \left[\frac{x}{(x_2 - x_1)/2} \right]^2 \right\} / 4. \end{cases} \quad (13)$$

其中 (h_x, h_y, h_z) 为积分模型下目标磁场在各坐标轴上实际磁场强度的投影分量. 在磁源取椭球体割块的中心, 观测点 (x, y, z) 均匀选取的情况下, 由 (3) 式和 (13) 式得磁偶极子模型的相对误差:

$$E_j = (h_{x_{\text{true}}} - h_{x_{\text{sim}}}) / h_{x_{\text{true}}},$$

$$E = \sum_{j=1}^{\text{num}} (E_j / \text{num}), \quad (14)$$

其中 E_j 为第 j 个观测点的相对误差. 由 (14) 式得到模型相对误差随距离及磁偶极子数目的分布情况, 如图 6 所示, 其中不同颜色代表相对误差取值. 图 6(a) 中 x, y, z 轴对应测量距离、磁偶极子数目、模型相对误差, 图 6(b) 中横纵坐标分别对应测量距离及磁偶极子数目, 坐标轴为共用轴. 图 6(b) 中标记线为控制距离或磁偶极子数目, 其中一个变量恒定, 模型相对误差随另一个变量的变化规律.

1) 磁偶极子数目一定时, 随着测量点与磁源距离的增大, 相对误差逐渐减小并收敛至稳定值,

此后增加距离模型相对误差不会产生较大改变, 且磁偶极子数目越少相对误差对距离的敏感度越高, 如图 6(b) 中 3 个磁偶极子与 9 个磁偶极子相比误差随距离的变化更显著.

2) 距离一定时, 随着磁偶极子数目的增多, 相对误差逐渐减少. 由图 6(a) 柱状图的颜色分布可知, 在少于 5 个磁偶极子时, 模型相对误差对距离的敏感性较大, 并逐渐达到稳定值; 在测量点与磁源距离较近时对磁源进行分割可有效提高磁偶极子模型的适用性, 如图 6(b) 中 $r = 64$ 比 $r = 204$ 时误差随磁偶极子数目的变化更显著, 磁源的分割次数与模型的复杂度成正比, 增加模型的复杂度在分割次数达到一定程度时并没有显著变化.

假设磁偶极子模型建模有效距离为相对误差 $\leq 6\%$, 根据不同距离与磁偶极子数目产生的相对误差, 对模型适用性进行分析, 计算结果如表 1 所列. 可以看出: 单磁偶极子在 $r = 184$ (2.3 倍) 时

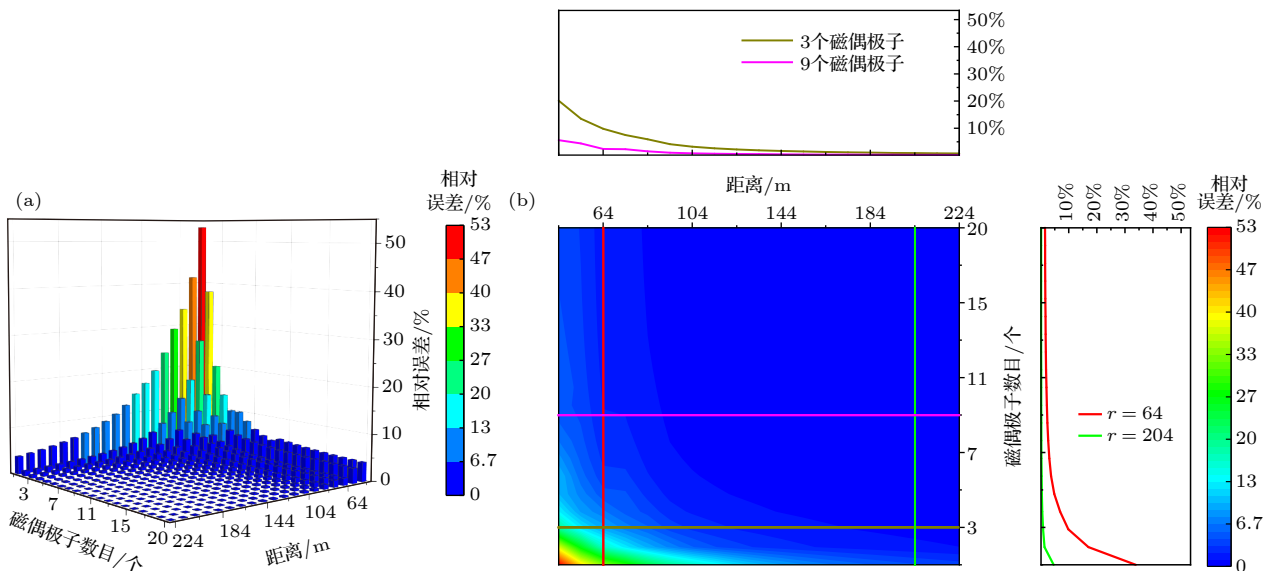


图 6 磁性均匀时模型相对误差变化趋势 (a) 磁偶极子数目、距离对模型误差影响的三维柱状图; (b) 磁偶极子数目、距离对模型误差影响的等高线剖面图

Fig. 6. Trend of relative error of the model when the magnetic is uniform: (a) Three dimensional histogram of effects of number and distance of magnetic dipoles on model error; (b) contour of effects of number and distance of magnetic dipoles on model error.

表 1 磁性均匀情况下, 达到建模有效范围的磁偶极子数目及距离

Table 1. Number and distance of magnetic dipoles reaching the modeling effective range when the magnetic is uniform.

距离/m	倍数	磁偶极子数目	距离/m	倍数	磁偶极子数目
$r = 84$	1.050	3	$r = 144$	1.800	2
$r = 94$	1.175	3	$r = 154$	1.925	2
$r = 104$	1.300	2	$r = 164$	2.050	2
$r = 114$	1.425	2	$r = 174$	2.175	2
$r = 124$	1.550	2	$r = 184$	2.300	1
$r = 134$	1.675	2	$r = 194$	2.425	1

相对误差达到 6% 的建模有效范围; 两个磁偶极子在 $r = 104$ (1.3 倍) 时相对误差达到有效范围, 且两个磁偶极子模型的适用范围相对较大; 在距离较

近时需要对磁源进行大量的分割, 如在 1.05 倍距离处需要 3 个磁偶极子保证模型的适用性.

4.3 磁性不均匀

假设潜艇材料的磁性是不均匀的, 就水平分量而言, 通常舰船磁场峰值出现的位置与其所处的纬度区域无关^[27], 一般分别在舰首附近、舰船中部、舰尾附近出现峰值, 舰船中部可能出现磁场值为 0 的情况. 为了保证能够充分展现磁偶极子分布不均匀对模型造成的影响, 本仿真对潜艇首尾至中部的磁性差异呈线性下降的形式进行了分析^[28]:

$$a_1 = a/5^s, s = 1, 2, 3, \quad (15)$$

其中 $a = 1 \times 10^6$ 为潜艇首尾两端的常数, a_1 为潜艇中间常数值. 可得磁偶极子积分模型在 x 轴方向磁场强度为

$$\begin{aligned}
 h_{x_{\text{true}}} = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{(x_2+x_1)/2} \left[\frac{2(a_1-a)(x-x_1)}{(x_2-x_1)} + a \right] \frac{\pi v 3(x-x_0)^2 - r^2}{r^5} dx dy dz \\
 & + \frac{\mu_0(y_2-y_1)}{4\pi(z_2-z_1)} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{(x_2+x_1)/2} \left[\frac{2(a_1-a)(x-x_1)}{(x_2-x_1)} + a \right] \frac{\pi v 3(x-x_0)(y-y_0)}{r^5} dx dy dz \\
 & + \frac{\mu_0(z_2-z_1)}{4\pi(x_2-x_1)} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{(x_2+x_1)/2} \left[\frac{2(a_1-a)(x-x_1)}{(x_2-x_1)} + a \right] \frac{\pi v 3(x-x_0)(z-z_0)}{r^5} dx dy dz \\
 & + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{(x_2+x_1)/2}^{x_2} \left[\frac{2(a-a_1)(x-x_2)}{(x_2-x_1)} + a \right] \frac{\pi v 3(x-x_0)^2 - r^2}{r^5} dx dy dz \\
 & + \frac{\mu_0(y_2-y_1)}{4\pi(z_2-z_1)} \int_{z_2}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{(x_2+x_1)/2}^{x_2} \left[\frac{2(a-a_1)(x-x_2)}{(x_2-x_1)} + a \right] \frac{\pi v 3(x-x_0)(y-y_0)}{r^5} dx dy dz \\
 & + \frac{\mu_0(z_2-z_1)}{4\pi(x_2-x_1)} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{(x_2+x_1)/2}^{x_2} \left[\frac{2(a-a_1)(x-x_2)}{(x_2-x_1)} + a \right] \frac{\pi v 3(x-x_0)(z-z_0)}{r^5} dx dy dz, \\
 v = & 1 - \left[\frac{x}{(x_2-x_1)/2} \right]^2. \quad (16)
 \end{aligned}$$

利用本文第 3 节理论得到的磁偶极子模型 x 方向的磁场强度 $h_{x_{\text{sim}}}$, 由 (10) 式得相对误差. 首先对距离为 224 (>2.5 倍) 时模型的相对误差进行分析, 当两端的磁矩常数 $a = 1 \times 10^6$, 中部磁矩常数 a_1 分别为 200000, 40000, 8000, 即由两端向中心呈线性下降时, 相对误差变化趋势如图 7 所示. 其中图 7(a) 中不同颜色代表测量距离为 224 m 时舰艇磁性的差异, 图 7(b) 中不同颜色代表模型在距离与磁矩存在差异时的相对误差, 随着磁偶极子数目的增多、磁性差异的减少, 模型相对误差逐渐减

少, 且相对误差呈现出波动下降的规律.

接下来对 $a_1 = 4 \times 10^4$ 时的模型相对误差进行分析, 结果如图 8 所示, 其中不同的颜色代表相对误差的差异, 图 8(b) 为图 8(a) 的投影. 图 8(b) 中的曲线图为距离 112 和 187, 磁偶极子数目为 2, 6 和 12 时, 固定一个变量模型相对误差随另一变量的变化趋势.

1) 当 $a_1 = 4 \times 10^4$, 磁偶极子数目一定时, 随着测量点与磁源距离变化, 相对误差对距离的敏感性较低, 如图 8(b), 距离变化不会造成相对误差较

大的波动.

2) 当 $a_1 = 4 \times 10^4$, 距离一定时, 随着磁偶极子数目的增多, 相对误差逐渐减少, 当少于 4 个磁偶极子时模型相对误差对磁偶极子的敏感性较大, 并以波动下降的形式逐渐达到稳定值; 随着磁偶极子数目的增多, 距离的增大波动逐渐平稳.

对磁性不均匀磁源的磁偶极子模型进行适用性分析, 计算结果如表 2 所列. 可以看出, 磁性分布不均时在重心取点的情况下单磁偶极子的相对误差很难达到 6% 的建模有效范围, 且距离增加对

模型相对误差的影响较小, 更适合通过磁偶极子数量的变化控制其相对误差.

综合上述仿真可以得到舰艇单磁偶极子模型的适用范围在 2.3 倍的潜艇长度, 再次验证了 2.5 倍距离以外将水下目标等效为单磁偶极子模型具有较高精度的结论. 当模型为两个磁偶极子时可以将距离范围缩小为 1.3 倍, 即距离较近时可以通过增加磁偶极子数目来保证模型的适用性. 当磁场不均匀时距离变化对相对误差的影响较磁偶极子数目变化对相对误差的改变要小. 因此在磁性不均

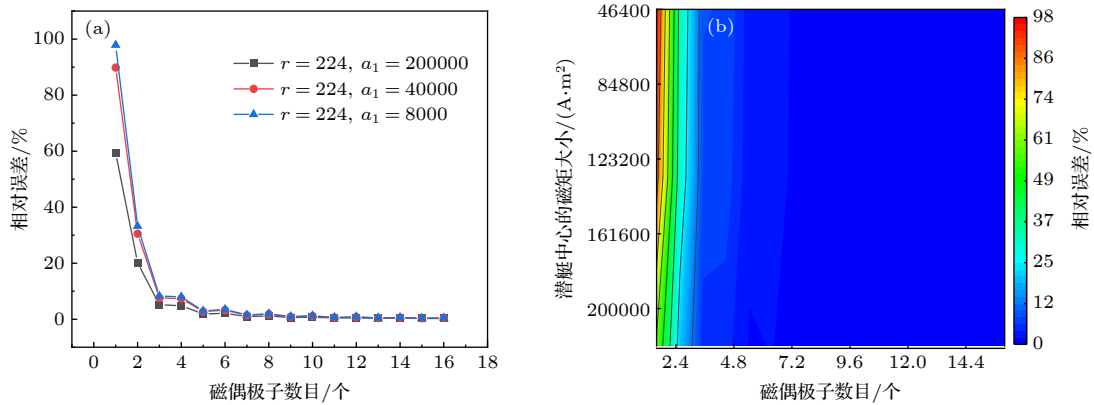


图 7 距离为 224 时模型相对误差随潜艇磁性差异的变化趋势 (a) 潜艇磁性差异对模型相对误差影响的折线图; (b) 潜艇磁性差异对模型相对误差影响的等高线图

Fig. 7. Variation trend of model relative error with submarine magnetic difference when $r = 224$: (a) Line graph of the effect of submarine magnetic differences on the relative error of the model; (b) Contour plot of the effect of submarine magnetic differences on the relative error of the model.

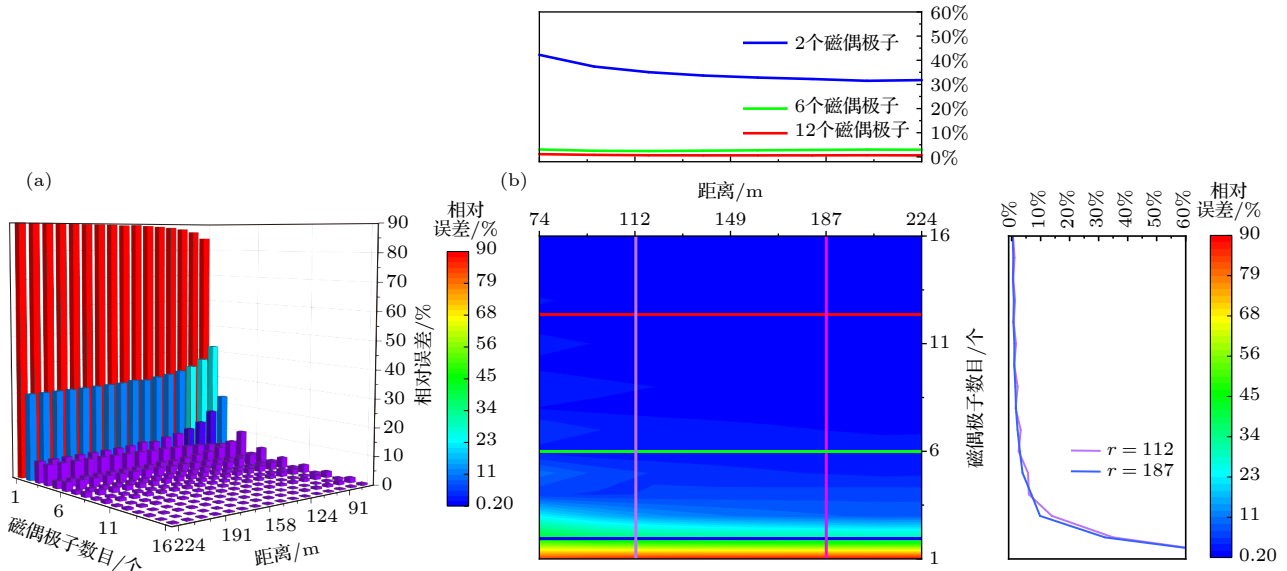


图 8 $a_1 = 40000$ 时模型相对误差的变化趋势 (a) 磁偶极子数目、距离对模型误差影响的三维柱状图; (b) 磁偶极子数目、距离对模型误差的影响等高线剖面图

Fig. 8. Tendency of the relative error of the model when $a_1 = 40000$: (a) Three dimensional histogram of the effect of the number and distance of magnetic dipoles on the model error; (b) contour map of effects of the number and distance of magnetic dipoles on model errors.

匀时, Gauss-Legendre 数值积分法离散得到的磁偶极子模型具有更高的稳定性与精确度.

表 2 磁性不均匀情况下, 达到建模有效范围的磁偶极子数目及距离

Table 2. Number and distance of magnetic dipoles reaching modeling effective range when the magnetic is nonuniform.

距离/m	倍数	磁偶极子数目	距离/m	倍数	磁偶极子数目
$r = 84$	1.050	6	$r = 164$	2.050	5
$r = 94$	1.175	5	$r = 174$	2.175	5
$r = 104$	1.300	5	$r = 184$	2.300	5
$r = 114$	1.425	5	$r = 194$	2.425	5
$r = 124$	1.550	5	$r = 204$	2.550	5
$r = 134$	1.675	5	$r = 214$	2.675	5
$r = 144$	1.800	5	$r = 224$	2.800	5
$r = 154$	1.925	5	$r = 234$	2.925	5

5 潜艇磁场模型的多目标优化

在计算过程中不难发现, 随着潜艇分割次数的增加, 磁偶极子模型越来越精确, 此时模型的计算量也随之增大. 因此模型误差及计算量在给定区域内是相互冲突的, 不存在唯一最优解, 只能通过多目标优化方法进行求解.

传统多目标优化算法是将各目标函数取加权和, 将多目标优化问题转化为单目标优化问题, 由前文可知, 目标函数为建模相对误差及为模型计算量, 各目标函数不具备可比性, 加权系数难于选择^[29]. 多目标问题中, 各目标之间往往是相互冲突的, 通常通过决策变量来协调权衡和折中处理, 使各子目标函数尽可能达到最优. 多目标优化问题不存在单个最优解, 而是 Pareto 最优解集, 它为决策者提供了一个最佳的选择空间, 空间内所有解不受 Pareto 前沿之外的解支配. 如何求得与真实 Pareto 前沿一致的 Pareto 最优解集是多目标函数优化问题的关键^[4].

建立变量连续的多目标规划问题

$$\begin{cases} \min_{x \in X^{(0)}} f(x) = (f_1(x), f_2(x) \cdots f_m(x))' \\ \text{s.t. } g_i(x) \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, p) \\ h_j(x) = 0 (j = 1, 2, \cdots, q) \end{cases} \quad (17)$$

其中 x 为决策变量, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))'$ 为目标向量, $g_i(x), h_j(x)$ 为约束条件^[30]. 首先利用

$r = 234, 124$ 时的数据进行求解, 模型的约束条件为模型相对误差 $< 6\%$, 得 $r = 234, 124$ 时决策变量范围分别为 $X^{(1)} = \{1, 2, 3, \cdots, 16\}$, $X^{(2)} = \{3, 4, 5, \cdots, 16\}$. 利用 4.2 节计算数据对拟合得到磁偶极子数目与误差的函数, 拟合公式为

$$\begin{aligned} g_{\text{err1}}(x) &= 0.03434x^{-1.771} + 0.0009591, \\ g_{\text{err2}}(x) &= 0.1197x^{-1.735} + 0.002865. \end{aligned} \quad (18)$$

本实验实际运行时间与磁偶极子数目的拟合结果为

$$\begin{aligned} g_{\text{tim1}}(x) &= 0.01652x^2 + 0.003841x + 0.1334, \\ g_{\text{tim2}}(x) &= 0.01347x^2 + 0.04679x + 0.06903. \end{aligned} \quad (19)$$

即磁偶极子数目越大模型运行的时间复杂度越大.

建立如下多目标方程组

$$\begin{cases} \min g_{\text{err1}}(x) = 0.03434x^{-1.771} + 0.0009591, \\ \min g_{\text{tim1}}(x) = 0.01652x^2 + 0.003841x + 0.1334, \\ X^{(1)} = 1, 2, 3, \cdots, 16, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \min g_{\text{err2}}(x) = 0.1197x^{-1.735} + 0.002865, \\ \min g_{\text{tim2}}(x) = 0.01347x^2 + 0.04679x + 0.06903, \\ X^{(2)} = 3, 4, 5, \cdots, 16. \end{cases} \quad (21)$$

(20) 式和 (21) 式为关于潜艇分割规律的多目标最优化问题, 接下来研究该问题的求解算法^[31]. 目前基于帕累托最优概念的遗传算法包括: 非支配排序遗传算法 (NSGA)、带精英策略的非支配排序的遗传算法 (NSGA-II)^[32,33] 等. NSGA 计算复杂度较高、算法的执行速度也较慢; NSGA-II 在 NSGA 的基础上通过快速非支配排序法, 降低了算法的计算复杂度、提出了拥挤度和拥挤度比较算子, 代替了需要指定共享半径的适应度共享策略, 引入精英策略, 扩大采样空间具有很好的适用性, NSGA-II 具体步骤^[34] 包括:

1) 对运行参数, 交叉率、变异率、交叉分布指数、变异分布指数进行初始化, 在解空间内随机生成个体数为 N 的初始种群 P_t , $t = 0$, 并将其作为父代种群;

2) 父代种群 P_t 进行二元竞赛选择、模拟二进制交叉、多项式变异操作, 产生种群 Q_t , 并将 Q_t 作为子代种群;

3) 将 P_t 和 Q_t 融合在一起, 作为规模为 $2N$ 的

临时种群 R_t , 对其进行快速非支配排序和拥挤度计算, 根据个体的非支配排序分层序号和个体的拥挤距离选择出最优的 N 个个体作为下一代进化操作中的父代种群 P_t , $t = t+1$;

4) 判断迭代次数是否等于预设上限值, 如果等于则结束运行, 否则跳转到第 2) 步.

已知 $X^{(1)} = \{1, 2, 3, \dots, 16\}$, $X^{(2)} = \{3, 4, 5, \dots, 16\}$, 参数选择如下: 最优前端个体系数为 0.3, 种群大小为 100, 最大遗传代数为 200, 停止代数为 200, 适应度函数偏差为 1×10^{-100} , 得 Pareto 前沿.

按照实验参数, 利用 $r = 234, 124$ 距离处的拟合方程, 得到图 9 所示的帕累托最优解集, 横纵坐标分别为对模型相对误差和运算时间. 从图 9 可以看出, 随着磁偶极子数目的增多, 对应的 Pareto 最优集的建模拟合相对误差整体减少, 计算量整体增大, 取误差与计算量的折中数据, 即运行时间在 $t_1 \in [0.3, 1]$, $t_2 \in [1, 2.7]$ 范围内, 磁偶极子数为 $N_1 \in [3, 6]$, $N_2 \in [7, 12]$, 相对误差为 $E_1 = [0.25\%, 0.5\%]$, $E_2 = [0.4\%, 0.8\%]$, 若要尽可能小地减少相对误差,

可选择 Pareto 前沿中刚处于平衡处的点, 可以保证误差较小的同时尽量减少运行时间. 接下来对不同距离处的时间与模型相对误差的最优解进行分析, 结果如表 3 所列. 可以看出, 当 $r = 124$ 时磁偶极子数目为 8, 模型相对误差为 0.60%; 当 $r = 300$ 时磁偶极子数目为 5, 模型相对误差为 0.30%. 可以得到当距离较近时模型不易达到稳定点, 随着测量距离的逐渐增大, 模型时间复杂度与模型误差达到稳定的数值逐渐减少, 且相对磁偶极子数目逐渐稳定. 在距离较远、对误差要求较高时, 如需考虑时间复杂度, 可将磁偶极子数目控制在 5 个以内, 可以达到二者的相对最优解.

该模型能够有效地维护群体多样性, 当不同的实验要求对目标偏重有所不同时, 此方法可求解得到多个关于显著差别的精度与效率的最终解, 提供了多个具有较大差异的选择方案; 模型具有较好的收敛性, 最终解可以较好地接近帕累托前沿, 保证了所求解的真实性.

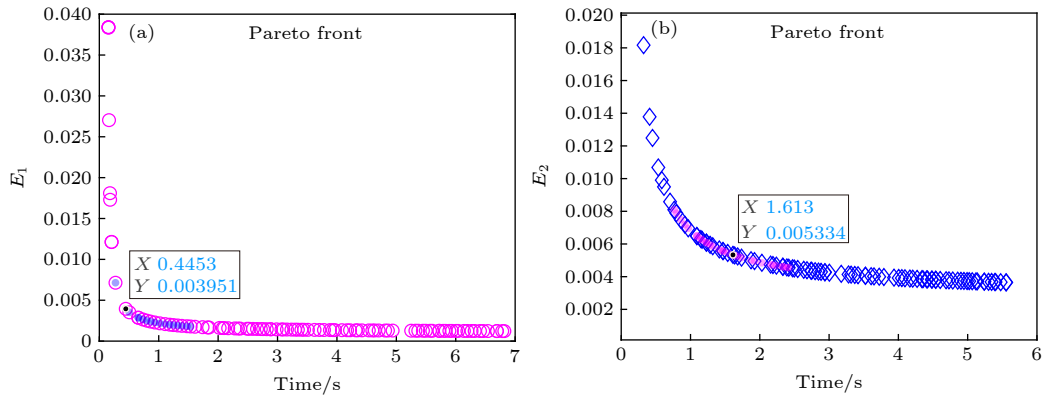


图 9 (a) $r = 234$ 和 (b) $r = 124$ 时 Pareto 前沿
Fig. 9. Pareto front for (a) $r = 234$ and (b) $r = 124$.

表 3 平衡点附近磁偶极子数目及相对误差值

Table 3. Number of magnetic dipoles near equilibrium point and relative error.

距离	倍数	偶极子数目	相对误差	距离	倍数	偶极子数目	相对误差
$r = 94$	1.175	10	0.90%	$r = 184$	2.300	6	0.39%
$r = 104$	1.300	9	0.77%	$r = 194$	2.425	6	0.32%
$r = 114$	1.425	8	0.71%	$r = 204$	2.550	6	0.32%
$r = 124$	1.550	8	0.60%	$r = 214$	2.675	6	0.30%
$r = 134$	1.675	8	0.52%	$r = 224$	2.800	6	0.27%
$r = 144$	1.800	7	0.52%	$r = 234$	2.925	5	0.30%
$r = 154$	1.925	7	0.46%	$r = 300$	3.750	5	0.18%
$r = 164$	2.050	7	0.41%	$r = 400$	5.000	5	0.11%
$r = 174$	2.175	7	0.36%	$r = 500$	6.250	5	0.085%

6 结 论

本文围绕磁偶极子阵列模型的适用性、实现潜艇磁场高精度高效率建模的目的进行研究. 在对磁偶极子阵列模型的研究中, 通过连续模型离散化产生的余项公式对阵列模型误差及磁体模拟法产生的拟合误差、算法误差、磁偶极子距离数目差异引起的模型误差进行分析, 来研究模型的适用性条件. 首先利用复化中矩形公式法、Gauss-Legendre 法对磁偶极子阵列模型余项进行推导, 并通过余项估算及模型求解过程中产生的一系列误差对磁偶极子模型的适用进行分析, 积分余项即为数值积分产生的截断误差, 可归结为离散误差. 通过与复化中矩形法对比得到 Gauss-Legendre 法在对磁偶极子积分模型离散化的过程更易达到有效建模距离, 该方法得到的磁偶极子阵列模型对磁偶极子分布的位置与磁偶极子所占的比例进行了规划, 较复化中矩形法更为合理.

同时对模型误差进行分析, 根据磁偶极子阵列模型、积分模型, 得到不同距离、不同磁偶极子数目的磁偶极子阵列模型的相对误差及其收敛性. 得到磁偶极子模型的适用范围, 其中在 >2.3 倍潜艇距离外将磁性均匀潜艇等价单磁偶极子模型具有较高的精度, 当距离较近时需对模型进行分割从而达到模型的适用范围. 在求解过程中此方法表现出了很强的简便性与适用性.

考虑到潜艇磁性中部与尾部存在较大差异, 为充分展现磁偶极子分布不均匀对模型造成的影响, 对潜艇首尾至中部的磁性差异呈线性下降的形式进行了分析, 发现不均匀潜艇求解过程中增加磁偶极子数目可以有效提高模型精度, 且重心的选取尤为重要.

为实现潜艇磁场高精度高效率建模, 在充分考虑建模的相对误差与磁偶极子数目基础上构造多目标函数优化模型, 通过 NSGA-II 算法提出了建模相对误差小于 6% 的精度与运算效率的相对最优解, 仿真分析结果表明该方法能较快地对实验数据进行分析, 得到符合人们需求的最佳磁偶极子数目, 能够有效地在实际工程中应用.

参考文献

[1] Jin H H, Guo J, Wang H B, Zhuang Z H, Qin J, Wang T L

- 2020 *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* **58** 5944
- [2] Cameron D, Luca M, Ferruccio R 2018 *Appl. Opt.* **57** 2346
- [3] Jin H H, Zhuang Z H, Wang H B 2018 *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.* **15** 1294
- [4] Dai Z H, Zhou S H, Zhang X B 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 164101 (in Chinese) [戴忠华, 周穗华, 张晓兵 2021 物理学报 **70** 164101]
- [5] Caruso M J, Smith C H, Bratland T, Schneider R 1998 *Sensors* **15** 1
- [6] Nelson J B, Richards T C <https://cradpdf.drdc-rddc.gc.ca/PDFS/unc80/p530746.pdf> [2021-12-22]
- [7] Zhang C D 2006 *Chin. J. Eng. Geophys.* **3** 354 (in Chinese) [张昌达 2006 工程地球物理学报 **3** 354]
- [8] Wu Z C, Liu T Y 2008 *Geol. Sci. Technol. Inf.* **27** 107 (in Chinese) [吴招才, 刘天佑 2008 地质科技情况报 **27** 107]
- [9] Hu C X 2005 *M. S. Thesis* (Changsha: National University of Defense Technology) (in Chinese) [胡祥超 2005 硕士学位论文 (长沙: 中国人民解放军国防科技大学)]
- [10] Huang Y 2011 *Ph. D. Dissertation* (Harbin: Harbin Engineering University) (in Chinese) [黄玉 2011 博士学位论文 (哈尔滨: 哈尔滨工程大学)]
- [11] Yoshii T 1982 *US Patent* 6 083 641
- [12] Liu S L, Yang X D, Wu L, Chen K 2011 *Mech. Dgn. Mfr.* **6** 1 (in Chinese) [刘少丽, 杨向东, 吴聊, 陈恩 2011 机械设计与制造 **6** 1]
- [13] Jin H H, Zhang Z H, Fu M Y, Guo J, Wang H B 2021 *J. Syst. Eng. Electron.* **43** 2066 (in Chinese) [金煌煌, 庄志洪, 付梦印, 郭健, 王宏波 2021 系统工程与电子技术 **43** 2066]
- [14] Lutkenhoner B 1998 *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **45** 572
- [15] Wu X D, Hou W S, Zheng X L, Peng C L 2008 *Chin. J. Sci. Inst.* **29** 326 (in Chinese) [吴旭东, 侯文生, 郑小林, 彭承琳 2008 仪器仪表学报 **29** 326]
- [16] Niu L F, Lin B, Zhang J 2009 *Comput. Sim.* **26** 12 (in Chinese) [牛龙飞, 李斌, 张静 2009 计算机仿真 **26** 12]
- [17] Lucas C E, Richards T C 2015 *A Novel Technique for Modelling Ship Magnetic Signatures* Philadelphia, Pennsylvania, USA, July 18, 2015 p1
- [18] Nilsson M 2016 *Modelling of Civilian Ships' Ferromagnetic Signatures* (Norwegian: FFI-rapport) pp13-19
- [19] Dai Z H, Zhou S H, Dan S 2017 *Mine Warfare and Ship Self-Defence* **25** 10 (in Chinese) [戴忠华, 周穗华, 单珊 2017 水雷战与舰船防护 **25** 10]
- [20] Fan M W, Yan W L 1988 *Magnetic Field Integral Equation* (Beijing: Press of Machinery Industry) p65 (in Chinese) [樊明武, 颜威利 1988 电磁场积分方程法 (北京: 机械工业出版社) 第 65 页]
- [21] Sheng J N 1991 *Numerical Analysis of Engineering Electromagnetic Field* (Xi'an: Press of Xi'an Jiaotong University) p8 (in Chinese) [盛剑霓 1991 工程电磁场数值分析 (西安: 西安交通大学出版社) 第 8 页]
- [22] Maset S J 2021 *Numer. Math.* **29** 119
- [23] Zhou Y Z, Zhang G Y 2004 *Analysis and Calculation of Ship Magnetic Field* (Beijing: National Defense Industry Press) pp65-89 (in Chinese) [周耀忠, 张国友 2004 舰船磁场分析计算 (北京: 国防工业出版社) 第 65-89 页]
- [24] Lin C S, Xiang Q, Gong S G 2005 *Acta Armamentarii* **26** 192 (in Chinese) [林春生, 向前, 龚沈光 2005 兵工学报 **26** 192]
- [25] Lin C S 1996 *Mine Warfare and Ship Self-Defence* **4** 54 (in Chinese) [林春生 1996 水雷战与舰船防护 **4** 54]
- [26] Qiu Y Z 1980 *J. Shanghai Jiaotong Univ.* **18** 53 (in Chinese) [裘益钟 1980 上海交通大学学报 **18** 53]
- [27] John J H 2007 *Modeling a Ship's Ferromagnetic Signatures* (USA: Morgan & Claypool) pp17-43

- [28] Hua C C, Huang C, Zuo Y, Wang W Z, Yang J X 2020 *6th Global Electromagnetic Compatibility Conference Xi' an, China*, October 20–23, 2020 p1
- [29] Shi L, Chen Y M 2017 *International Conference on Information Science & Control Engineering Changsha, China*, July 21–23, 2017 p55
- [30] Qin M F 2009 *International Conference on Intelligent Computation Technology & Automation Changsha, China*, October 10–11, 2009 p198
- [31] Tao W H, Liu H T 2016 *Comput. Eng.* **42** 219 (in Chinese)
- [32] Chen Z W, Chen L, Bai X, Yang Q, Zhao F L 2015 *Contral. Decis.* **30** 865 (in Chinese) [陈志旺, 陈林, 白铎, 杨七, 赵方亮 2015 *控制与决策* **30** 865]
- [33] Deb K, Pratap A, Agarwal S, Meyarivan T 2002 *IEEE Trans. Evol. Comput.* **6** 182
- [34] Bandyopadhyay S, Bhattacharya R 2012 *NSGA-II Based Multi-objective Evolutionary Algorithm for a Multi-objective Supply Chain Problem Nagapattinam, India*, March 30–31, 2012 p126

Applicability and optimization analysis of magnetic dipole array model^{*}

Liu Fu-Yan¹⁾²⁾ Yan Bing^{2)†}

1) (*School of Mathematics, Hunan University, Changsha 410082, China*)

2) (*College of Meteorology and Oceanography, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China*)

(Received 1 December 2021; revised manuscript received 22 February 2022)

Abstract

With the development of underwater detection and communication technology, the traditional magnetic measurement model cannot meet the requirements for high precision and high efficiency modeling. In order to solve this problem, according to the integral model of ship magnetic field, we comprehensively analyze the discretization error caused by the composite middle rectangular and Gauss-Legendre integral remainders generated by discretizing the integral model into the magnetic dipole array model, the algorithm error, the fitting error caused by the model simplification, the model error, etc. and we also use these research results to analyze the model applicability conditions. Then based on the correlation between model error and parameters as well as accuracy and computational complexity, the multi-objective optimization problem is constructed. The NSGA-II algorithm is used to solve the multi-objective function, and the optimal solution set with balanced accuracy and complexity is obtained. The selection rules under the different requirements for accuracy and complexity are proposed. In order to ensure the effectiveness of the results, the model is simulated by using the actual submarine data on the basis of the hybrid model of ship magnetic field. The relationship between the distance to reach the applicable range of the model and the number of magnetic dipoles is obtained through the simulation analysis of the submarines with uniform and nonuniform magnetic field, and the simulation results are compared with the existing research results to ensure the effectiveness of the simulation results. At the same time, under the condition of ensuring the applicability of the model, the results obtained in the multi-objective optimization process based on NSGA-II algorithm are of high computational efficiency and accuracy. Therefore, this method has good engineering application value.

Keywords: magnetic dipole integral model, composite middle rectangular method remainder, multi-objective optimization, NSGA-II algorithm

PACS: 41.20.Gz, 02.60.Jh, 02.30.Rz

DOI: 10.7498/aps.71.20212223

^{*} Project supported by the National Defense Basic Research Program of China (Grant No. JCKY2020550C011), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 42176197), and the Foundation of Key Laboratory of National Defense Technology for Underwater Acoustic Countermeasure Technology, China (Grant No. 6412214200403).

[†] Corresponding author. E-mail: yanbing19@nudt.edu.cn