

# 含有 Kappa 分布电子的多组分等离子体中的 $(3 + 1)$ 维非线性离子声波

林麦麦<sup>†</sup> 蒋蕾 宋秋影 付颖捷 王明月 文慧珊 于腾萱

(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2021 年 12 月 6 日收到; 2022 年 5 月 8 日收到修改稿)

应用约化摄动法推导得到用来描述含有 Kappa 分布电子的多组分复杂等离子体中非线性离子声孤波的 Zakharov-Kuznetsov (ZK) 方程. 进而获得了非线性离子声孤波的非线性强度随系统参数的变化规律. 同时, 利用 Sagdeev 势方法求得 Sagdeev 势函数, 明确了系统参数对含有 Kappa 分布电子的多组分复杂等离子体相图、Sagdeev 势函数及非线性离子声孤波的振幅与宽度等传播特征的重要影响.

**关键词:** 多组分复杂等离子体,  $(3 + 1)$  维非线性离子声波, 约化摄动法

**PACS:** 52.35.Mw, 05.45.Yv, 47.20.Ky

**DOI:** 10.7498/aps.71.20212255

## 1 引言

近年来, 多组分等离子体的理论研究在物理学各个领域皆有广泛应用, 而复杂等离子体中非线性波的研究也是等离子体物理学的热门课题之一<sup>[1-6]</sup>. 例如, El-Taibany 等<sup>[7]</sup>利用分岔原理研究了孤立波的非线性特性, 并首次探讨了双流体复杂等离子体的引力和极化力对尘埃声波结构的影响; Moinuddin 等<sup>[8]</sup>研究了碰撞产生的非线性波和孤立波的冲击特性; Prasad 等<sup>[9]</sup>首次探讨了电子-离子磁化太阳风等离子体中离子声波解的分岔问题, 揭示了离子声波的周期解、超周期解、扭结解、反扭结解、压缩孤立波解和稀疏孤立波解的存在性; Hameed 等<sup>[10]</sup>研究了非均匀无碰撞、呈 Kappa 分布电子且带有尘埃电荷涨落的离子-电子对等离子体中的尘埃声波. 与此同时, 关于 Kappa 电子分布对等离子体非线性波的影响, 也受到众多科技工作者的关注<sup>[11-13]</sup>. 1992 年, Summers 等<sup>[14]</sup>在空间等离子体中观测到粒子分布具有非麦克斯韦高能量, 可以利用 Kappa

分布进行建模; Alam 等<sup>[15]</sup>研究了尘埃声波在含有 Kappa 分布电子的复杂等离子体中的斜碰撞效应; Abbasi 等<sup>[16]</sup>探讨了热黏性流体离子和不同温度的 Kappa 分布电子组成的磁旋转等离子体中离子声孤波的非线性特征.

本文研究了含有 Kappa 电子分布的多组分复杂等离子体中的  $(3 + 1)$  维非线性离子声波. 首先, 利用约化摄动法推导得到用来描述  $(3 + 1)$  维非线性离子声波的 Zakharov-Kuznetsov (ZK) 方程. 并通过数值方法讨论 Kappa 电子分布及平衡状态下, 多种粒子的数密度对 ZK 方程非线性系数的影响. 然后, 利用 Sagdeev 势方法得到二维自治系统及 Sagdeev 势函数, 并借助数值模拟获得系统相图, Sagdeev 势及孤立波的振幅、宽度和波型随 Kappa 电子分布和其他系统参数的基本变化规律.

## 2 基本方程

为了研究含有 Kappa 电子分布的多组分复杂等离子体中  $(3 + 1)$  维非线性离子声波的传播特

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: [linmaimai1514@126.com](mailto:linmaimai1514@126.com)

征. 假设复杂等离子体由正离子、负离子、离子束和含有 Kappa 分布的电子组成, 依据大量的空间观测和实验室等离子体检测, 在多组分等离子体中由于多种物理过程的出现, 导致等离子体中存在着诸如正离子、负离子、离子束和偏离麦克斯韦分布而呈现 Kappa 分布的电子, 这些粒子对多组分等离子体中非线性波的运动特征存在显著的影响<sup>[17]</sup>. 正离子、负离子、离子束遵循麦克斯韦分布<sup>[18–21]</sup>, 本文重点分析电子的 Kappa 分布对复杂等离子体中离子声波传播的影响. 流体力学是离子声波理论研究的方法之一. 忽略粒子间的相互碰撞作用, 依据磁流体理论, 假设多组分的等离子体流体随 3 个空间坐标  $x, y, z$  和 1 个时间坐标  $t$  演化, 从而给出非线性离子声波的无量纲化演化方程<sup>[17]</sup>:

$$\frac{\partial n_{i+}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{i+} u_{i+}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_{i+}}{\partial t} + (u_{i+} \cdot \nabla) u_{i+} = -\nabla \phi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial n_{i-}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{i-} u_{i-}) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_{i-}}{\partial t} + (u_{i-} \cdot \nabla) u_{i-} = \alpha \cdot \nabla \phi, \quad (4)$$

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} + \nabla \cdot (n_b u_b) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} + (u_b \cdot \nabla) u_b = -\beta \cdot \nabla \phi, \quad (6)$$

$$\nabla^2 \phi = n_e + \mu_b + \mu_{i-} n_{i-} - \mu_b n_b - \mu_{i+} n_{i+}, \quad (7)$$

其中  $n_{i+}$ ,  $n_{i-}$ ,  $n_b$ ,  $n_e$  为无量纲化的正、负离子和离子束数、电子数密度, 分别由  $n_{i+0}$ ,  $n_{i-0}$ ,  $n_{b0}$ ,  $n_{e0}$  无量纲化, 它们分别表示平衡状态时的正、负离子和离子束数、电子数密度.  $u_{i+} = u_{i+} \mathbf{i} + v_{i+} \mathbf{j} + w_{i+} \mathbf{k}$ ,  $u_{i-} = u_{i-} \mathbf{i} + v_{i-} \mathbf{j} + w_{i-} \mathbf{k}$ ,  $u_b = u_b \mathbf{i} + v_b \mathbf{j} + w_b \mathbf{k}$  分别为正、负离子和离子束的无量纲化速度, 它们由  $C_s = \left( \frac{k_B T_e}{m_{i+}} \right)$  无量纲化. 电势  $\phi$  由  $\frac{k_B T_e}{e}$  无量纲化, 其中  $T_e$  是电子温度,  $k_B$  为玻尔兹曼常数,  $e$  是电荷数. 其他系统参数  $\mu_{i+} = \frac{n_{i+0}}{n_{e0}}$ ,  $\mu_{i-} = \frac{n_{i-0}}{n_{e0}}$ ,  $\mu_b = \frac{n_{b0}}{n_{e0}}$ ,  $\alpha = \frac{m_{i+}}{m_{i-}}$ ,  $\beta = \frac{m_{i+}}{m_b}$ ,  $m_{i+}$ ,  $m_{i-}$ ,  $m_b$  分别为正、负离子和离子束质量. 利用平衡密度分布得到 Kappa 电子分布的数密度为<sup>[17]</sup>

$$n_e = \left( 1 - \frac{\phi}{\kappa - 3/2} \right)^{-\kappa + \frac{1}{2}}, \quad (8)$$

其中  $\kappa$  表示 Kappa 分布系数.

基于线性化方法和平面波解法, 假设

$$n_{i+,i-,b} = 1 + \varepsilon \cdot n_{i+,i-,b}^{(1)} \cdot e^{i(kx+my+lz-\omega t)},$$

$$u_{i+,i-,b} = \varepsilon \cdot u_{i+,i-,b}^{(1)} \cdot e^{i(kx+my+lz-\omega t)},$$

$$v_{i+,i-,b} = \varepsilon \cdot v_{i+,i-,b}^{(1)} \cdot e^{i(kx+my+lz-\omega t)},$$

$$w_{i+,i-,b} = \varepsilon \cdot w_{i+,i-,b}^{(1)} \cdot e^{i(kx+my+lz-\omega t)},$$

$$\phi = \varepsilon \cdot \phi_1 \cdot e^{i(kx+my+lz-\omega t)},$$

可求得线性波的色散关系为

$$\omega^2 = \frac{(k^2 + m^2 + l^2) (\alpha \mu_{i-} + \mu_{i+} + \beta \mu_b)}{(k^2 + m^2 + l^2) + \frac{2\kappa - 1}{2\kappa - 3}}.$$

### 3 约化摄动法求解 ZK 方程

利用约化摄动法研究含有 Kappa 电子的多组分复杂等离子体中 (3 + 1) 维非线性离子声波的传播特征. 首先, 对 (1) 式—(6) 式中的自变量进行坐标伸展变换:  $\xi = \varepsilon \cdot x$ ,  $\eta = \varepsilon \cdot y$ ,  $\tau = \varepsilon^3 \cdot t$ ,  $\varsigma = \varepsilon \cdot (z - v_0 \cdot t)$ , 其中  $\varepsilon$  为表征非线性强度的小参数,  $v_0$  为相速度. 原始方程组为无量纲化方程组, 约化摄动法中引入  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ), 可依据无量纲化的具体过程完成多个量的量级确定. 由于大于四阶的小量对系统影响较小, 为方便计算, 将方程中各未知量进行摄动展开:

$$n_{i+,i-,b} = 1 + \varepsilon^2 \cdot n_{i+,i-,b}^{(1)} + \varepsilon^4 \cdot n_{i+,i-,b}^{(2)} + \dots, \quad (9)$$

$$u_{i+,i-,b} = \varepsilon^3 \cdot u_{i+,i-,b}^{(1)} + \varepsilon^4 \cdot u_{i+,i-,b}^{(2)} + \dots, \quad (10)$$

$$v_{i+,i-,b} = \varepsilon^3 \cdot v_{i+,i-,b}^{(1)} + \varepsilon^4 \cdot v_{i+,i-,b}^{(2)} + \dots, \quad (11)$$

$$w_{i+,i-,b} = \varepsilon^2 \cdot w_{i+,i-,b}^{(1)} + \varepsilon^4 \cdot w_{i+,i-,b}^{(2)} + \dots, \quad (12)$$

$$\phi = \varepsilon^2 \cdot \phi_1 + \varepsilon^4 \cdot \phi_2 + \dots. \quad (13)$$

将 (9) 式—(13) 式代入 (1) 式—(6) 式, 在  $\varepsilon$  的最低次幂下有

$$n_{i+}^{(1)} = \frac{1}{v_0^2} \phi_1, \quad n_{i-}^{(1)} = -\frac{\alpha}{v_0^2} \phi_1, \quad n_b^{(1)} = \frac{\beta}{v_0^2} \phi_1$$

$$w_{i+}^{(1)} = \frac{1}{v_0} \phi_1, \quad w_{i-}^{(1)} = \frac{\alpha}{v_0} \phi_1, \quad w_b^{(1)} = \frac{\beta}{v_0} \phi_1$$

$$v_0^2 = (\alpha \mu_{i-} + \beta \mu_b + \mu_{i+}) \cdot \frac{(2\kappa - 3)}{(2\kappa - 1)}.$$

在  $\varepsilon$  的较高次幂下, 有

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \varsigma} n_{i+}^{(2)} &= \frac{2}{v_0^3} \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_1 + \frac{3}{v_0^4} \phi_1 \frac{\partial}{\partial \varsigma} \phi_1 + \frac{1}{v_0} \frac{\partial}{\partial \xi} u_{i+}^{(2)} \\
 &\quad + \frac{1}{v_0} \frac{\partial}{\partial \eta} v_{i+}^{(2)} + \frac{1}{v_0} \frac{\partial}{\partial \varsigma} \phi_2, \\
 \frac{\partial}{\partial \varsigma} n_{i-}^{(2)} &= -\frac{2\alpha}{v_0^3} \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_1 + \frac{3\alpha^2}{v_0^4} \phi_1 \frac{\partial}{\partial \varsigma} \phi_1 + \frac{1}{v_0} \frac{\partial}{\partial \xi} u_{i-}^{(2)} \\
 &\quad + \frac{1}{v_0} \frac{\partial}{\partial \eta} u_{i-}^{(2)} - \frac{\alpha}{v_0} \frac{\partial}{\partial \varsigma} \phi_2, \\
 \frac{\partial}{\partial \varsigma} n_b^{(2)} &= \frac{2\beta}{v_0^3} \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_1 + \frac{3\beta^2}{v_0^4} \phi_1 \frac{\partial}{\partial \varsigma} \phi_1 + \frac{1}{v_0} \frac{\partial}{\partial \xi} u_b^{(2)} \\
 &\quad + \frac{1}{v_0} \frac{\partial}{\partial \eta} u_b^{(2)} + \frac{\beta}{v_0} \frac{\partial}{\partial \varsigma} \phi_2; \\
 \frac{\partial u_{i+}^{(1)}}{\partial \xi} &= -\frac{\partial v_{i+}^{(1)}}{\partial \eta}; \\
 \frac{\partial}{\partial \xi} \phi_2 - v_0 \frac{\partial}{\partial \varsigma} u_{i+}^{(2)} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \phi_2 - \frac{1}{v_0} \frac{\partial}{\partial \varsigma} v_{i+}^{(2)} = 0, \\
 \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} \phi_2 + v_0 \frac{\partial}{\partial \varsigma} u_{i-}^{(2)} &= 0, \quad \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \phi_2 + v_0 \frac{\partial}{\partial \varsigma} v_{i-}^{(2)} = 0; \\
 \beta \frac{\partial}{\partial \xi} \phi_2 + \frac{\partial}{\partial \varsigma} u_b^{(2)} &= 0, \quad \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \phi_2 + \frac{\partial}{\partial \varsigma} u_b^{(2)} = 0.
 \end{aligned}$$

在  $\varepsilon$  的最高次幂下, 获得用来描述含有 Kappa 分布电子的复杂等离子体中  $(3+1)$  维非线性离子声波的 ZK 方程:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_1 + A \phi_1 \frac{\partial}{\partial \varsigma} \phi_1 + B \frac{\partial^3}{\partial \varsigma^3} \phi_1 \\
 &\quad + C \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{(4\kappa^2 - 1) v_0^3}{2(-3 + 2\kappa)^2 (\alpha\mu_{i-} + \mu_{i+} + \beta\mu_b)} \\
 &\quad - \frac{3(\alpha^2\mu_{i-} - \mu_{i+} - \beta^2\mu_b)}{2v_0(\alpha\mu_{i-} + \mu_{i+} + \beta\mu_b)}, \\
 B &= \frac{v_0^3}{2(\alpha\mu_{i-} + \beta\mu_b + \mu_{i+})}, \\
 C &= \frac{v_0^3}{2(\alpha\mu_{i-} + \beta\mu_b + \mu_{i+})}.
 \end{aligned}$$

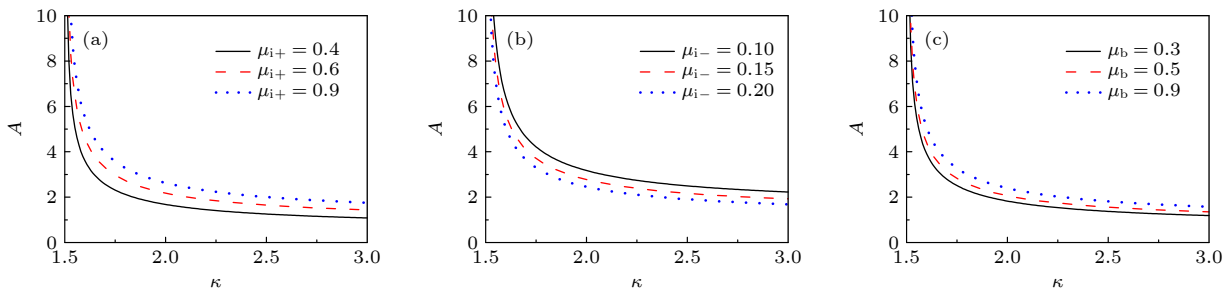


图 1 非线性系数  $A$  随 Kappa 分布电子数  $\kappa$  的变化规律

Fig. 1. Nonlinear coefficient  $A$  with respect to the Kappa distributed electron  $\kappa$ .

接下来, 利用数值方法讨论 Kappa 电子分布及平衡状态下多种粒子的数密度对 ZK 方程的非线性系数  $A$  的影响. 图 1 给出了系统参数  $\mu_{i+}$ ,  $\mu_{i-}$ ,  $\mu_b$  取不同值时, 非线性系数  $A$  随电子的 Kappa 分布系数  $\kappa$  的变化规律. 如图 1 所示,  $A$  随着  $\kappa$  增大而减小, 而其他参数的取值对  $A$  的影响则各不相同. 从图 1(a) 和图 1(c) 可以看出, 非线性系数  $A$  随着  $\mu_{i+}$ ,  $\mu_b$  的增大而增大. 由  $\mu_{i+} = \frac{n_{i+0}}{n_{e0}}$ ,  $\mu_b = \frac{n_{b0}}{n_{e0}}$  可知, 当平衡状态下的正离子数密度、离子束密度增多而电子数密度降低时, 离子声波的非线性强度  $A$  将逐步增强; 图 1(b) 表明非线性系数  $A$  随着  $\mu_{i-}$  的增大而减小, 考虑到  $\mu_{i-} = \frac{n_{i-0}}{n_{e0}}$ , 当平衡状态下负离子数密度增大时, 非线性系数  $A$  将减小. 综上所述, 图 1 表明在含有 Kappa 电子的多组分复杂等离子体中, 平衡状态下的正、负离子和离子束的数密度和 Kappa 电子分布数均对  $(3+1)$  维非线性离子声波的非线性系数存在不可忽视的重要影响.

#### 4 Sagdeev 势函数及孤立波解

假设 ZK 方程有孤立波解  $\phi_1 = \phi_1(\theta)$ ,  $\theta = l\xi + m\eta + p\varsigma - u_0\tau$ , 其中  $l$ ,  $m$ ,  $p$  分别为  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\varsigma$  三个方向的波数,  $u_0$  为非线性波的速度, 则 ZK 方程变形为

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \phi_1}{d\theta^2} &= \frac{u_0}{(Bp^3 + Cpl^2 + Cpm^2)} \phi_1 \\
 &\quad - \frac{Ap}{(Bp^3 + Cpl^2 + Cpm^2)} \phi_1^2.
 \end{aligned} \quad (14)$$

(14) 式可简化为二维自治系统:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{d\theta} = \psi, \\ \frac{d\psi}{d\theta} = A_1\varphi_1 + A_2\varphi_1^2, \end{cases} \quad (15)$$

其中,

$$A_1 = \frac{u_0}{Bp^3 + Cpl^2 + Cpm^2}, A_2 = -\frac{Ap}{Bp^3 + Cpl^2 + Cpm^2}.$$

图 2 为二维自治系统 (15) 式的相图随着 Kappa 电子分布系数  $\kappa$  的变化图, 其中其他系统参数取值分别为  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.7$ ,  $p = m = l = 0.4$ ,  $u_0 = 0.2$ . 由于  $p, l, m$  对孤波振幅均有影响, 所以取适当值使得振幅处于恰当范围更有益于数据分析, 模拟实验中可以得到  $p = m = l = 0.4$  时图形最优 [17–20]. 由图 2(a) 可以看出, 在含有 Kappa 电子分布的多组分复杂等离子体系统中同时存在线性波解、非线性波解和孤立波解 3 类轨道. 通过对图 2(a)–(c) 进行比对, 系统相图表明当系统参数取值不同时, 线性波解和非线性波解会出现在含有 Kappa 分布电子的多组分等离子体系统中波动过程的两个不同时间段, 并表现出线性波、非线性波和孤立波 3 种不同的波动行为特征. 复杂等离子体系统中所含的 Kappa 电子分布数的改变, 只会影响系统相图中不同类型离子声波解的存在范围, 而不会改变系统相图中不同类型离子声波解存在的基本属性.

图 3—图 5 描绘了系统相图随系统参数  $\mu_{i+}$ ,  $\mu_{i-}$  和  $\mu_b$  的基本变化, 其结论与图 2 基本类似. 考虑到  $\mu_{i+} = \frac{n_{i+0}}{n_{e0}}$ ,  $\mu_{i-} = \frac{n_{i-0}}{n_{e0}}$ ,  $\mu_b = \frac{n_{b0}}{n_{e0}}$ , 这意味着

对于含有 Kappa 电子分布的多组分复杂等离子体而言, 系统平衡状态时的正、负离子和离子束数密度, 以及电子数密度的不同, 只会使系统相图中不同类型离子声波解的存在范围发生改变, 而不会导致系统相图中离子声波的线性波解、非线性波解和孤立波解这 3 种不同类型的波解结构发生改变.

将 (14) 式等式两边同乘以  $\frac{d\phi_1}{d\theta}$ , 并对  $\theta$  积分一次可得到 Sagdeev 势方程:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi_1}{d\theta} \right)^2 + V(\phi_1) = 0, \quad (16)$$

其中, Sagdeev 势函数形式为

$$V(\phi_1) = -\frac{1}{2}A_1\phi^2 - \frac{1}{3}A_2\phi^3. \quad (17)$$

图 6 给出了 Sagdeev 势函数随不同参数的变化规律. 图 6(a)—图 6(d) 中 Sagdeev 势曲线与横轴均存在交点  $\phi_m$ , 且  $\phi_m > 0$ , 这表明该系统仅存在压缩型孤立波. 表 1 为 Sagdeev 势  $V(\phi) = 0$ ,  $\mu_{i+}$ ,  $\mu_{i-}$ ,  $\mu_b$ ,  $\kappa$  取不同值时, 对应振幅的大小.

孤波振幅随着  $\mu_{i+}$ ,  $\mu_b$  的增大及  $\mu_{i-}$ ,  $\kappa$  的减小而减小. 根据数据分析可知, 随着  $\mu_{i+}$  的增大振幅减小幅度越来越小, 随着  $\mu_{i-}$  增大, 振幅变大的幅度比较均匀, 随着  $\mu_b$  的增加, 振幅减小的幅度较为均匀, 而随着  $\kappa$  的增加, 振幅减小的幅度越来越小.

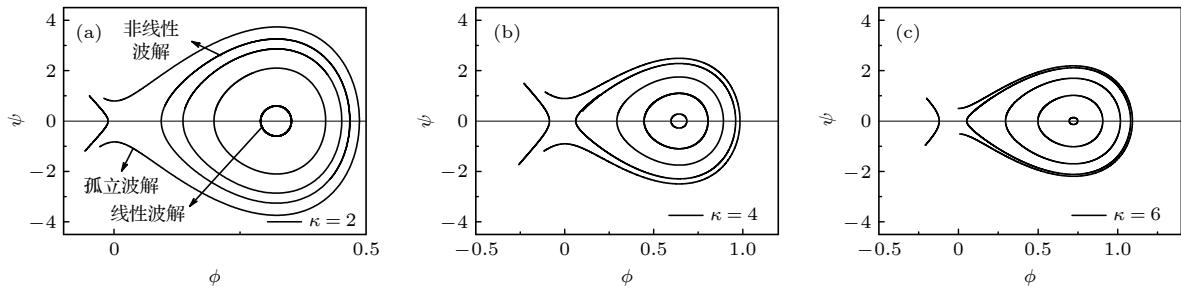


图 2 系统相图随 Kappa 电子分布数  $\kappa$  的变化

Fig. 2. The variations of system phase diagram with Kappa electron distribution number  $\kappa$ .

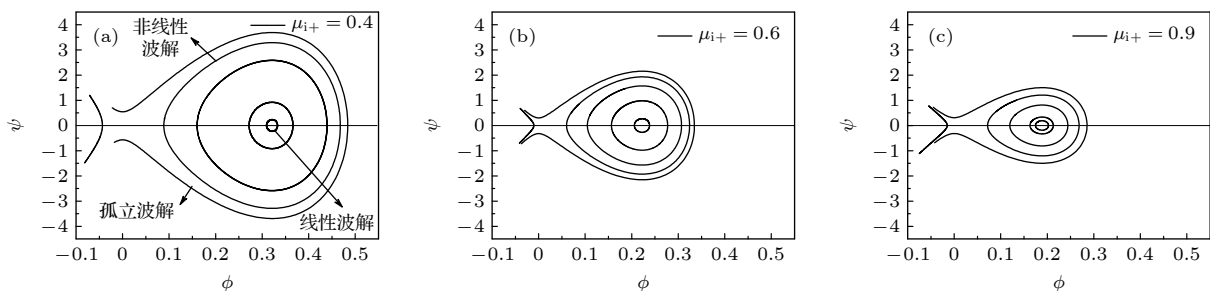


图 3 系统相图随  $\mu_{i+}$  的变化

Fig. 3. The variations of system phase diagram with  $\mu_{i+}$ .

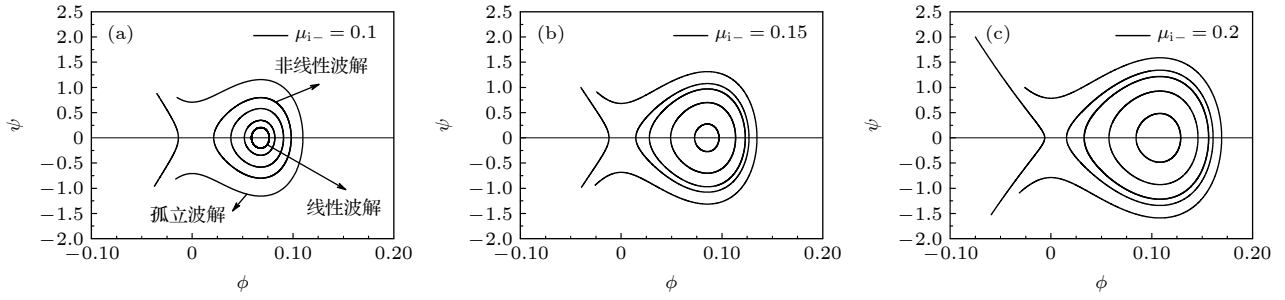

 图 4 系统相图随  $\mu_{i-}$  的变化

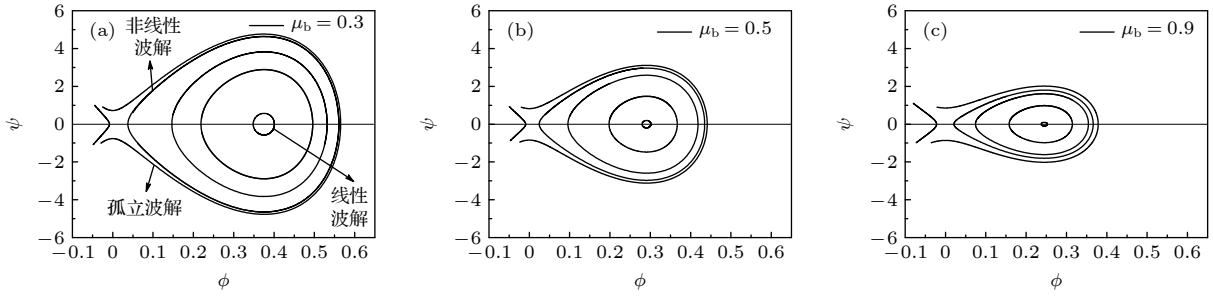
 Fig. 4. The variations of system phase diagram with  $\mu_{i-}$ .

 图 5 系统相图随  $\mu_b$  的变化

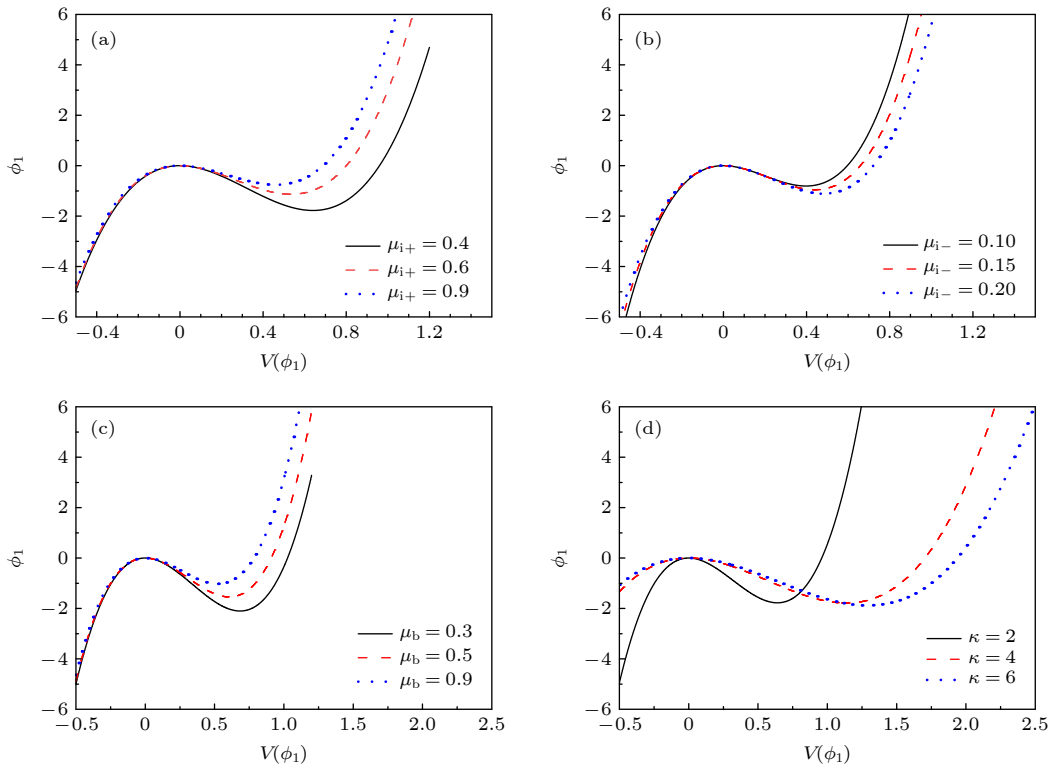
 Fig. 5. The variations of system phase diagram with  $\mu_b$ .

 图 6 Sagdeev 势函数  $V(\phi_1)$  的变化规律

 Fig. 6. The variations of Sagdeev potential function  $V(\phi_1)$ .

由于多组分复杂等离子体系统中  $\mu_{i+} = \frac{n_{i+0}}{n_{e0}}$ ,  $\mu_{i-} = \frac{n_{i-0}}{n_{e0}}$ ,  $\mu_b = \frac{n_{b0}}{n_{e0}}$ . 这说明: 当多组分复杂等离子体系

统中所含的 Kappa 电子分布数、负离子数密度的增大时, 系统中的压缩型孤立波的振幅将减小; 随着



正离子数密度、离子束数密度的增大振幅减小, 随着  $\kappa$  的增加, 振幅减小的幅度越来越大. 另外, 若平衡状态下的正离子和离子束数密度降低, 而负离子束密度和 Kappa 电子分布数增加, 则导致孤立波的振幅增大, 与此同时, 孤立波振幅的改变与正离子、负离子和离子束数密度的改变紧密相关. 以上结论表明: 复杂等离子体系统中的多种因素均对 Sagdeev 势函数及孤立波的波形特征存在重要影响.

表 1 Sagdeev 势  $V(\phi) = 0$ ,  $\mu_{i+}$ ,  $\mu_{i-}$ ,  $\mu_b$ ,  $\kappa$  取不同值时, 对应振幅的大小

Table 1. Amplitude of solitary waves with respect to  $\mu_{i+}$ ,  $\mu_{i-}$ ,  $\mu_b$ ,  $\kappa$  at Sagdeev potential  $V(\phi) = 0$ .

$\mu_{i+}$	振幅	$\mu_{i-}$	振幅	$\mu_b$	振幅	$\kappa$	振幅
0.4	0.96	0.10	0.59	0.3	1.02	2	0.96
0.6	0.80	0.15	0.65	0.5	0.91	4	1.70
0.9	0.68	0.20	0.72	0.9	0.78	6	1.93

对 Sagdeev 势方程 (16) 式进行求解, 可得到的孤立波解形式为

$$\phi_1 = \phi_m \text{sech}^2(\theta/\omega),$$

其中

$$\phi_m = \frac{3u_0}{A}, \quad \omega = 2\sqrt{\frac{Bp^3 + Cpl^2 + Cpm^2}{u_0}}$$

分别为孤立波的振幅与宽度.

非线性离子声孤波的振幅  $\phi_m$  随 Kappa 电子分布系数  $\kappa$  的变化规律如图 7 所示. 可以看到, 孤波振幅  $\phi_m$  随着  $\kappa$  增大而增大. 从图 7(a) 可以看出, 孤立波振幅  $\phi_m$  随着参数  $\mu_{i+}$  的增加而减小, 由  $\mu_{i+} = \frac{n_{i+0}}{n_{e0}}$  可知: 在平衡状态下正离子数密度增加或电子数密度减小, 将使孤立波振幅变小. 通过图 7(b) 可知, 孤立波振幅  $\phi_m$  随着  $\mu_{i-}$  的增加而增加,  $\mu_{i-} = \frac{n_{i-0}}{n_{e0}}$  意味着平衡状态时的负离子数密度增加孤立波振幅变大; 通过图 7(c) 可以看出, 当  $1.5 \leq \kappa \leq 3$  时, 孤立波振幅  $\phi_m$  随着参数  $\mu_b$  的增大而减小, 由  $\mu_b = \frac{n_{b0}}{n_{e0}}$  可得, 平衡时离子束数密度增加孤立波振幅变小. 综上所述, 图 7 表明含有 Kappa 电子的复杂等离子体中, 平衡状态下的多种粒子数密度等因素对该系统中的 (3 + 1) 维非线性离子声孤波的振幅存在不同的影响.

图 8 给出了非线性方程离子声孤波的宽度  $\omega$  随系统参数  $\mu_b$  的变化规律. 图 8 显示孤立波宽度  $\omega$  随着参数  $\mu_{i+}$ ,  $\mu_{i-}$  和  $\mu_b$  的增大而增大. 根据  $\mu_b = \frac{n_{b0}}{n_{e0}}$

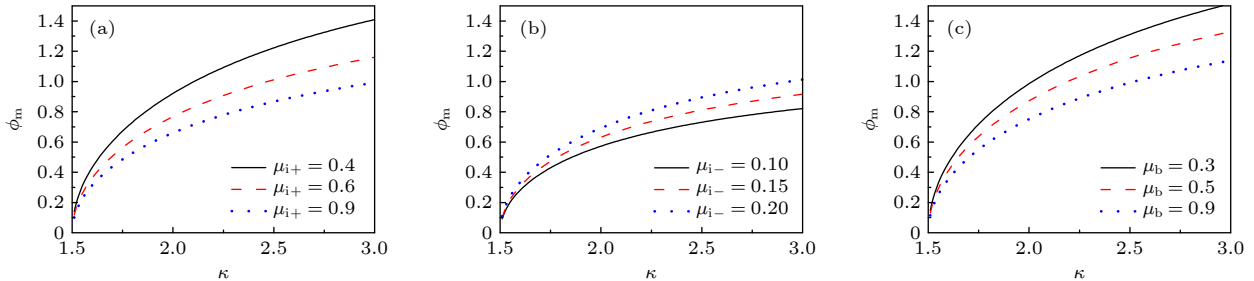


图 7 孤波振幅  $\phi_m$  随 Kappa 分布电子数  $\kappa$  的变化规律

Fig. 7. The amplitude of solitary waves  $\phi_m$  with respect to the Kappa distributed electron number  $\kappa$ .

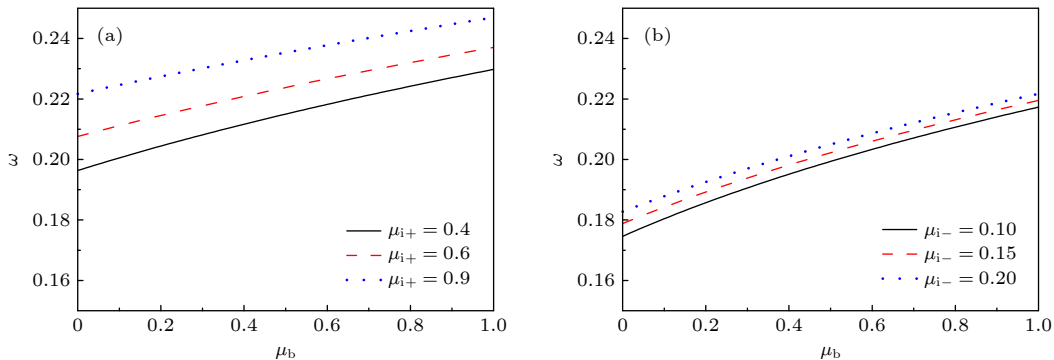


图 8 孤波宽度  $\omega$  随系统参数  $\mu_b$  的变化规律

Fig. 8. The variations of the solitary wave's width  $\omega$  with respect to the parameter  $\mu_b$ .

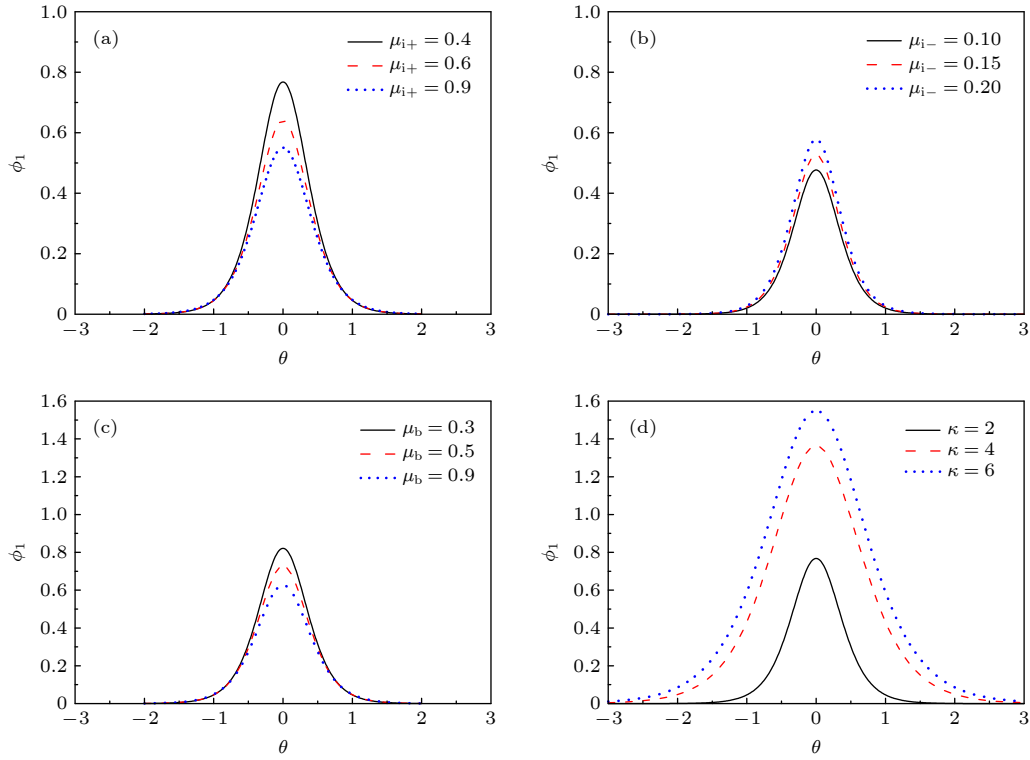

 图 9 孤立波  $\phi_1$  的波形变化规律

 Fig. 9. Waveform variation law of the solitary waves  $\phi_1$ .

可得,平衡状态下离子束数密度的增加将促使孤立波的宽度 $\omega$ 变大.与此同时,从图 8(a)可以看出孤立波宽度 $\omega$ 随着参数 $\mu_{i+}$ 的增加而增大,由于 $\mu_{i+} = \frac{n_{i+0}}{n_{e0}}$ ,所以在平衡状态下的正离子数密度增加,会使得孤立波宽度 $\omega$ 增大.通过图 8(b)可知,孤立波宽度 $\omega$ 随着 $\mu_{i-}$ 的增加而增大,由于 $\mu_{i-} = \frac{n_{i-0}}{n_{e0}}$ ,所以平衡状态时负离子数密度的增加,将促使孤立波宽度扩大.综上所述,图 8 表明含有 Kappa 电子的复杂等离子体中,平衡状态下正离子、负离子和离子束的数密度等因素对该系统中的 (3 + 1) 维非线性离子声孤波的宽度 $\omega$ 存在影响.

图 9 给出了孤立波的波形随系统参数的变化趋势,其他参数取值分别为 $p = l = m = 0.4$ ,  $u_0 = 0.5$ .图 9 显示当系统参数 $\mu_{i+}$ ,  $\mu_{i-}$ ,  $\mu_b$ 和 $\kappa$ 取值各不相同,该系统中仅存在振幅大于 0 的压缩型孤立波.该结论与 Sagdeev 势函数的分析结果一致.由图 9(a), (c)可以看出,当系统参数 $\mu_{i+}$ 和 $\mu_b$ 增加时,孤立波振幅减小且宽度增大;而 $\mu_{i-}$ 和 Kappa 电子分布数 $\kappa$ 增加时,孤立波振幅增大且宽度减小.以上结果与图 6—图 8 中的结论一致.综上所述,含有 Kappa 电子分布的多组分复杂等离子体系统

中仅存在压缩型孤立波,且系统中正、负离子和离子束的数密度以及电子 Kappa 分布情况均对非线性离子声孤波的振幅,宽度及波形存在不可忽略的重要影响.

## 5 结 论

本文研究了含有 Kappa 电子分布的多组分复杂等离子体中离子声孤波.利用约化摄动法求得用来描述非线性离子声波的 ZK 方程,通过分析讨论从理论上研究了不同参数对非线性系数的影响.结果表明,非线性强度随着正离子、离子束数密度的增大而增大,随负离子数密度和 Kappa 电子分布数 $\kappa$ 增大而减小;平衡状态时,孤立波振幅随着正离子、离子束数密度的增大而减小,随负离子数密度和 Kappa 电子分布数 $\kappa$ 增大而增大;孤立波宽度随正离子、离子束数密度的增大而增大,随负离子数密度和 Kappa 电子分布数 $\kappa$ 增大而减小.与此同时,还利用 Sagdeev 势方法求解得到二维自治系统和 Sagdeev 势函数,通过数值模拟给出的相图显示:多组分复杂等离子体系统中存在非线性波解、线性波解和孤立波解,且孤立波具有振幅大于 0

的压缩型特征, 与此对应的 Sagdeev 势函数的变化规律与相图结果一致. 通过进一步深入讨论, 不难发现: 多组分复杂等离子体系统中的多种系统参数, 包括平衡状态下的正、负离子和离子束数密度以及 Kappa 电子分布数等, 均对非线性离子声孤波的振幅、宽度和波形存在不可忽视的重要影响. 本文利用约化摄动法所获得的非线性离子声孤波的演化特征随 Kappa 分布系数的变化规律, 与其他方法所得的非线性系数孤立波随 Kappa 分布系数的变化规律保持一致<sup>[22]</sup>.

## 参考文献

- [1] Guio P, Pécseli H I 2020 *Phys. Rev. E* **101** 043210
- [2] Saleem H, Shan S A 2021 *CASS*. **366** 41
- [3] Hui X X, You B X 2012 *J. Sichuan Ordnance Engineering* **33** 127 (in Chinese) [惠小霞, 尤斌兴 2012 *四川兵工学报* **33** 127]
- [4] Cheng X W, Zhang Z G, Yang H W 2020 *Chin. Phys. B*. **29** 124501
- [5] Araghi F, Miraboutalebi S, Dorrnian D 2020 *Indian J. Phys.* **94** 547
- [6] Angumal S K, Habumugisha I, Nazziwa L, Jurua E, Noreen N 2017 *J. Mod. Phys.* **8** 892
- [7] EI-Taibany W F, EI-Labany S K, Bebery E E, Abdelghany A M 2019 *EUR Phys. J. Plus*. **134** 457
- [8] Moinuddin A S M, Alam M S, Talukder M R 2020 *Contrib. Plasma Phys.* **60** e201900124
- [9] Prasad P K, Saha A 2021 *Adv. Space Res.* **68** 4155
- [10] Hameed G, Zakir U, Haque Q, Rehan M, Hadi F 2021 *Chinese J. Phys.* **71** 466
- [11] Kocharovsky V V, Kocharovsky V V, Nechaev A A 2021 *Dokl. Phys.* **66** 9
- [12] Eyelade A V, Stepanova M, Espinoza C M, Moya P S 2021 *The Astrophys. J. Suppl. Ser.* **253** 34
- [13] Gravanis E, Akyias E, Livad, Iotis G 2021 *J. Stat. Mech.* **2021** 053201
- [14] Summers D, Thorne R M 1992 *J. Geophys.* **97** 16827
- [15] Alam M S, Talukder M R 2020 *Chin. Phys. B*. **29** 065202
- [16] Abbasi M M, Masood W, M Khan, Ahmad A 2020 *Contrib. Plasma Phys.* **60** e202000050
- [17] Guo S M, Mei L Q, Shi W J 2013 *Mod. Phys. Lett.* **337** 2118
- [18] Lin M M, Gong X, Duan W S, Du H S 2019 *J. Northwest Normal University (Natural Science)* **55** 44 (in Chinese) [林麦麦, 龚雪, 段文山, 杜海粟 2019 *西北师范大学学报 (自然科学版)* **55** 44]
- [19] Tolba R E, Moslem W M, El-Bedwehy N A, El-Labany S K 2015 *Phys. Plasmas*. **22** 043707
- [20] Lin M M, Wen H S, Yu T X, Song Q Y 2019 *J. Northwest Normal University (Natural Science)* **55** 33 (in Chinese) [林麦麦, 文惠珊, 于腾萱, 宋秋影 2019 *西北师范大学 (自然科学版)* **55** 33]
- [21] Wang L 2018 *M. S. Thesis* (Tianjin: Tianjin University) (in Chinese) [王兰 2018 硕士学位论文 (天津: 天津大学)]
- [22] Chen H 2014 *Ph. D. Dissertation* (Jiangxi: Nanchang University) (in Chinese) [陈辉 2014 博士学位论文 (江西: 南昌大学)]



# **(3 + 1) dimensional nonlinear ion acoustic waves in multicomponent plasma containing Kappa distributed electrons**

Lin Mai-Mai<sup>†</sup>   Jiang Lei   Song Qiu-Ying   Fu Ying-Jie  
Wang Ming-Yue   Wen Hui-Shan   Yu Teng-Xuan

(*College of Physical and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

( Received 6 December 2021; revised manuscript received 8 May 2022 )

## **Abstract**

The (3 + 1) dimensional nonlinear ion acoustic waves in multicomponent complex plasma with Kappa electron distribution are studied in this work. The Zakharov-Kuznetsov (ZK) equation for ion acoustic wave is investigated by the reductive perturbation method. The variation of nonlinear ion acoustic wave with system parameter is obtained. Meanwhile, the Sagdeev potential function is obtained by using the Sagdeev potential method. And the phase diagram in a two-dimensional autonomous system of the multicomponent complex plasma with Kappa electron distribution is studied. Finally, the important influence of system parameter on the phase diagram, the Sagdeev potential function and the propagating characteristics of (3 + 1) dimensional nonlinear acoustic solitary waves are discussed in detail.

**Keywords:** multicomponent complex plasma, (3 + 1) dimensional nonlinear ion acoustic wave, reductive perturbation method

**PACS:** 52.35.Mw, 05.45.Yv, 47.20.Ky

**DOI:** [10.7498/aps.71.20212255](https://doi.org/10.7498/aps.71.20212255)

---

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [linmaimai1514@126.com](mailto:linmaimai1514@126.com)

含有Kappa分布电子的多组分等离子体中的  $(3 + 1)$  维非线性离子声波

林麦麦 蒋蕾 宋秋影 付颖捷 王明月 文慧珊 于腾萱

**$(3 + 1)$  dimensional nonlinear ion acoustic waves in multicomponent plasma containing Kappa distributed electrons**

Lin Mai-Mai Jiang Lei Song Qiu-Ying Fu Ying-Jie Wang Ming-Yue Wen Hui-Shan Yu Teng-Xuan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 175201 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20212255

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212255>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

热尘埃等离子体中  $(2 + 1)$  维尘埃声孤波的传播特征

Propagation characteristics of  $(2 + 1)$  dimensional dust acoustic solitary waves in hot dusty plasma

物理学报. 2022, 71(9): 095203 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20210902>

弹性管中的怪波

Rogue waves in fluid-filled elastic tube

物理学报. 2020, 69(1): 014701 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191308>

激光诱导铝等离子体中原子和离子组分膨胀特性

Expansion characteristics of atom and ion component in laser-induced aluminum plasma

物理学报. 2018, 67(18): 185201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180595>

具有非广延分布电子的碰撞等离子体磁鞘的结构

Structure of collisional magnetized plasma sheath with non-extensive distribution of electrons

物理学报. 2021, 70(1): 015201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20200794>

非均匀等离子体中  $1/4$  临界密度附近受激散射的非线性演化

Nonlinear evolution of stimulated scattering near  $1/4$  critical density

物理学报. 2019, 68(19): 195202 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190883>

Korteweg-de Vries 方程的准孤立子解及其在离子声波中的应用

Quasi-soliton solution of Korteweg-de Vries equation and its application in ion acoustic waves

物理学报. 2018, 67(11): 110201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180094>