

变截面微管道中高zeta势下幂律流体的旋转电渗滑移流动

张天鸽 任美蓉 崔继峰 陈小刚 王怡丹

Rotational electroosmotic slip flow of power-law fluid at high zeta potential in variable-section microchannel

Zhang Tian-Ge Ren Mei-Rong Cui Ji-Feng Chen Xiao-Gang Wang Yi-Dan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 134701 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20212327

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212327>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

聚龙一号装置磁驱动准等熵压缩实验的一维磁流体力学模拟

One-dimensional magneto-hydrodynamic simulation of the magnetic drive isentropic compression experiments on primary test stand

物理学报. 2018, 67(3): 030702 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171920>

高超声速磁流体力学控制霍尔效应影响

Influence of Hall effect on hypersonic magnetohydrodynamic control

物理学报. 2020, 69(21): 214703 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200630>

纳米颗粒布朗扩散边界条件的分子动力学模拟

Molecular dynamics simulation of Brownian diffusion boundary condition for nanoparticles

物理学报. 2021, 70(14): 148201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202240>

FP-1装置铝套筒内爆动力学过程的一维磁流体力学模拟

One-dimensional magneto-hydrodynamics simulation of magnetically driven solid liner implosions on FP-1 facility

物理学报. 2018, 67(8): 080701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172300>

一种耦合外部电路的脉冲感应推力器磁流体力学数值仿真模型

A magnetohydrodynamic numerical model with external circuit coupled for pulsed inductive thrusters

物理学报. 2018, 67(1): 015201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171225>

微通道疏水表面滑移的耗散粒子动力学研究

Fluid slip over hydrophobic surfaces in microchannels: a dissipative particle dynamics study

物理学报. 2019, 68(10): 104701 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182002>

变截面微管道中高 zeta 势下幂律流体的 旋转电渗滑移流动*

张天鸽 任美蓉 崔继峰 陈小刚† 王怡丹

(内蒙古工业大学理学院, 呼和浩特 010051)

(2021 年 12 月 16 日收到; 2022 年 3 月 3 日收到修改稿)

本文研究高 zeta 势下具有 Navier 滑移边界条件的幂律流体, 在变截面微管道中的垂向磁场作用下的旋转电渗流动. 在不使用 Debye-Hückel 线性近似条件时, 利用有限差分法数值计算外加磁场的旋转电渗流的速度分布和电势分布. 当行为指数 $n = 1$ 时得到的流体为牛顿流体, 将本文的分析结果与 Debye-Hückel 线性近似所得解析近似解作比较, 证明本文数值方法的可行性. 除此之外, 还详细讨论行为指数 n 、哈特曼数 Ha 、旋转角速度 Ω 、电动宽度 K 及滑移参数 β 对速度分布的影响, 得到当哈特曼数 $Ha > 1$ 时, 速度随着哈特曼数 Ha 的增加而减小; 但当哈特曼数 $Ha < 1$ 时, x 方向速度 u 的大小随着 Ha 的增加而增加.

关键词: 高 zeta 势, Navier 滑移边界条件, 电磁流体力学, 有限差分法

PACS: 47.11.Bc, 47.65.-d, 47.85.Dh

DOI: 10.7498/aps.71.20212327

1 引言

微生物传感器、微机电微生物传感器系统 (MEMS) 等微流控器件广泛应用于生物医学和生化分析领域, 是研究基本物理过程的有力工具之一^[1]. 在这些过程中, 压力梯度、电场、磁场或它们的适当组合是常用的驱动机制. 与以往单一的压力驱动流动模式相比, 电渗和电磁驱动机制近年来受到越来越多的关注.

电渗流 (EOF) 是由于电场在管道中的作用以及双电层 (EDL) 在通道壁上的存在而引起的流动. 当微通道的固体表面与电解质溶液接触时, 它们之间的化学平衡导致界面获得净固定电荷, 之后, 电解质溶液中的自由离子聚集在溶液表面附近的区域, 形成双电层 (EDL). 近年来, 人们逐渐认识到非牛顿流体在各种工业和工程应用中比牛顿

流体更为迫切. 利用电渗流的微流控器件已经被证明在医学应用中是有效和实用的. 幂律流体模型是最简单、最常见的一种描述非牛顿流体的方法, 受到该领域研究者的特别关注. 例如, Patel 等^[2]研究了通过聚电解质接枝 (软) 窄通道旋转的电渗流中幂律流体的流动行为; Srinivas^[3]研究了由幂律模型控制的非牛顿流体的二维电渗流, 用于圆形和椭圆形微通道; Nekoubin^[4]对非牛顿流体在弯曲矩形微通道中的电渗流动进行了数值研究, 发现在剪切稀化流体流动中可以通过提高 zeta 电势来显著提高体积流量和混合性能; Baños 等^[5]研究了由于服从幂律的振荡电渗流而引起的流体动力学; Baños 等^[6]研究了幂律流体中 Navier 滑移条件的影响下的振荡电渗流 (OEOF), 并发现了 (OEOF) 在微流控设备 (例如微混合器) 中很有用; Jiang 和 Qi^[7]研究了具有 Navier 滑移边界微平行管道内 Eyring 流体在外加电场力和压力作用下的电渗

* 国家自然科学基金 (批准号: 12062018, 12172333)、内蒙古自治区高等学校青年科技英才支持计划资助项目 (批准号: NJYT22075) 和内蒙古自然科学基金 (批准号: 2020MS01015) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xiaogang_chen@imut.edu.cn

流动. 对于微流控器件, 旋转电渗流 (EOF) 可以提高不同液体的混合效率, 从而缩短微流体的混合时间. 旋转电渗流中涡流的产生取决于微管道的几何形状; Ajdari [8] 报道了微通道中正弦表面势电渗流中涡流的产生; Chang 和 Wang [9] 考虑了旋转的 EOF, 发现旋转降低了外加电场方向上的 EO 流速; Song 等 [10] 研究了三级流体在两平行板通道中的旋转电渗流动; Shit 等 [11] 研究了滑动速度对非均匀微通道中旋转电渗流的影响; 刘全生等 [12] 研究了平行微管道中 Jeffrey 流体的非定常电渗流动; 段娟等 [13] 研究了有限长微扩张管道内幂律流体在电渗驱动下非稳态的流动特性.

除上述电渗流外, 磁流体力学 (MHD) 流动也因其其在工程和医学领域的应用前景而备受关注 [14]. 为了实现更有效的流动控制, 电磁流体力学 (EMHD) 流动也受到了广泛的关注, 即对导电流体施加外加电场和磁场. 电场和横向磁场的相互作用可以产生洛伦兹力. 大量的理论和实验工作在文献中可用于分析 EMHD 流动的行为. Jian 和 Chang [15] 获得了非均匀磁场影响下 EMHD 速度分布的近似解析解; Xie 和 Jian [16] 研究了通过窄微通道的幂律流体的旋转电磁流体力学 (EMHD) 流, 结果可以用作开发精巧而有效的电磁设备的初步蓝图, 用于涉及流量控制或物质分离的应用; Habib 等 [17] 研究了幂律流体的非定常层流自由对流的熵产生分析, 流体流存在热辐射和磁场; Sarkar 和 Ganguly [18] 研究了在叠加磁场的存在下, 电动调制的轴向压力驱动的幂律流体通过微通道的传输; Yang 等 [19] 讨论了在平行微通道中的电磁流体力学 (EMHD) 电渗流 (EOF) 和不可压缩的三级流体的熵产生; Xie 和 Jian [20] 进行了两层通过微平行通道的磁流体动力电渗流的熵产生分析, 并发现该发明可以用于设计有效的热微设备.

对于幂律流体在高 zeta 势、滑移边界条件下对微流控器件 EOF 的影响研究已经进行了很多, 但很少有对具有旋转框架的非牛顿流体进行同样的科学研究. Wang 等 [21] 研究了高 zeta 势下幂律流体在非均匀微通道中的旋转电渗流动 (EOF) 受滑移速度的影响; Xie 和 Jian [22] 讨论了幂律流体在微通道中高 zeta 势下的旋转电渗流动, 利用非线性 Poisson-Boltzmann 模型得到了双电层电势分布的解析解.

受上述研究的启发, 本研究旨在研究高 zeta

势下具有滑移边界条件的幂律流体在壁面周期性变化的变截面微管道中外加磁场的旋转电渗流. 利用 Navier-Stokes 方程和非线性 Poisson-Boltzmann 模型, 描述电势的分布和双层结构, 并用有限差分法数值计算外加磁场的旋转电渗流的速度分布. 讨论相关物理参数对幂律流体无量纲速度的影响.

2 模型描述

如图 1 所示, 考虑不可压缩幂律流体在有限长 L 的变截面对称微管道中的非定常外加磁场的旋转电渗流. 假设变截面微管道高度 $z' = \pm h'(x')$ 呈余弦变化, 其微管道壁的表达式为

$$h = h'(x') = H + aH\cos(2\pi x'/L), \quad (1)$$

其中 a 为微管道边界高度的振幅.

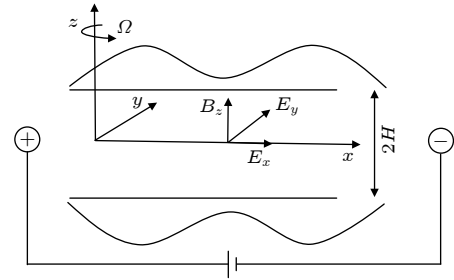


图 1 变截面微通道中流体流动示意图

Fig. 1. Schematic view of the flow in a variable cross-section microchannel.

使用以下坐标变换:

$$x = x'/L. \quad (2)$$

(1) 式转换为以下形式:

$$z = h'(x') = H + aH\cos(2\pi x), \quad (3)$$

其中 (x', y', z') 为笛卡尔坐标系; H 为管道固定高度; a 为微管道壁的振幅; L 是微管道的有限长度, 其长度远大于板间高度边界的高度.

假设微管道系统中充满了电解质溶液, 具有介电常数 ε 且微管道系统围绕 z 轴旋转的角速 $\Omega = (0, 0, \Omega)$, 假设流体在微通道中的流动绕 x' 轴对称, 并沿 x' 方向流动. 流体同时受到电场 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ 和磁场 $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ 的作用, 使微管道壁上均匀地充满了 zeta 电势 ψ_w , 根据静电学理论, 静电荷密度 ρ_f 与电势 ψ 满足 Poisson-Boltzmann 方程, 即

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = \frac{-\rho_f}{\varepsilon}, \quad (4)$$

$$\rho_f = -2n_0 z_0 e \sinh\left(\frac{z_0 e \psi}{k_B T}\right). \quad (5)$$

由方程 (4) 和方程 (5) 联立可以直接得到:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = \frac{2n_0 z_0 e \sinh\left(\frac{z_0 e \psi}{k_B T}\right)}{\varepsilon}. \quad (6)$$

相应的边界条件可以表示为

$$z = h : \psi = \psi_\omega, \quad (7)$$

$$z = 0 : \frac{d\psi}{dz} = 0. \quad (8)$$

方程 (6) 在无 Debye-Hückel 线性近似下, 根据边界条件 (7) 式和 (8) 式, 方程 (6) 的解析解如下 [21]:

$$\psi = \frac{4}{\alpha} \tanh^{-1} \left[\tanh\left(\frac{\alpha \psi_\omega}{4}\right) e^{(\kappa z - \kappa h)} \right], \quad (9)$$

其中 ψ_ω 为壁面电势; $\alpha = \frac{z_0 e}{k_B T}$, $\kappa^2 = \frac{2n_0 z_0^2 e^2}{\varepsilon k_B T}$ 且 κ 为双电层厚度的倒数. n_0 为电解质离子密度, z_0 为离子的化合价, e 为单位电荷, k_B 为 Boltzmann 常数, T 是绝对温度.

整个系统围绕 z 轴旋转, 在非惯性坐标系下水平旋转的流体层中, 所有的速度都是相对速度, 对于不可压缩流体, 给出了连续性方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (10)$$

其中 \mathbf{V} 是外加磁场的电渗流的速度且 $\mathbf{V} = (u, v, 0)$. 在具有恒定角速度的旋转系统中, 柯西动量方程表示为

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} \right) = -\nabla P + \nabla \tau + \mathbf{f}, \quad (11)$$

其中 τ 是应力张量; ρ 为幂律流体的密度; t 为时间; P 为离心力修正的压力, $P = p - \rho |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 / 2$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$; p 为压强; \mathbf{f} 为体积力, 等于电场力 $\rho_e(x)\mathbf{E}$ 和洛伦兹力 $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ 的和, 即

$$\mathbf{f} = \rho_e(x)\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (12)$$

其中电流 \mathbf{J} 满足欧姆定律:

$$\mathbf{J} = \sigma_e(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (13)$$

在典型的微通道流动中, 磁雷诺数的量级约为 10^{-5} , 因此感应磁场可以忽略不计, 这也意味着感应磁场与流速无关.

对于幂律流体 [23], 动力黏度 μ 与剪切变形速率 $\dot{\Gamma}$ 相关表达式为

$$\mu = \eta \Delta^{n-1}, \quad (14)$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(\dot{\Gamma} : \dot{\Gamma})^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

这里, η 是黏性系数, n 是幂律流体的行为指数. 根据 n 的取值, 幂律流体可分为三类: 1) 膨胀塑性流体 ($n > 1$), 其黏度随剪切速率的增大而增大; 2) 假塑性流体 ($n < 1$), 其黏度随剪切速率的增大而减小; 3) $n = 1$ 时, 得到的是牛顿流体. 由于黏性幂律流体的动态黏度和剪切变形速率, 黏性应力张量和应变张量之间的关系可以表示为

$$\tau = \mu(\Delta)[\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}'], \quad (16)$$

其中 $\nabla \mathbf{V}$ 是速度梯度的张量; $\nabla \mathbf{V}'$ 是它的转置.

利用文献中 Chang 和 Wang [9] 以及 Xie 和 Jian [22] 的方法, 可以找到 $u = u(z, t)$, $v = v(z, t)$ 形式的解. 在这种情况下, 连续性方程 (10) 将自动满足, 幂律流体的动力粘度可简化为

$$\mu(\Delta) = \eta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}. \quad (17)$$

则剪切应力可以写成:

$$\tau_{zx} = \mu(\Delta) \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (18)$$

$$\tau_{zy} = \mu(\Delta) \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (19)$$

因此, 柯西动量方程可以简化为

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega v \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu(\Delta) \frac{\partial u}{\partial z} \right] - \frac{\varepsilon \kappa^2 E_x}{\alpha} \sinh(\alpha \psi) + \sigma_e E_y B - \sigma_e u B^2, \quad (20)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega u \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu(\Delta) \frac{\partial v}{\partial z} \right] - \sigma_e v B^2. \quad (21)$$

特别地, $n = 1$ 时, 方程 (20) 和方程 (21) 中的 $\mu(\Delta)$ 表示旋转环境下电动势驱动的牛顿流体流动. 考虑了 Navier 滑移边界条件, 给出了相应的初始条件和边界条件:

$$u = v = 0 : t = 0, \quad (22)$$

$$u + b \frac{\partial u}{\partial z} = 0, v + b \frac{\partial v}{\partial z} = 0 : z = h, \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 : z = 0, \quad (24)$$

其中 b 是滑移长度参数.

为了方便计算, 引入无量纲变量:

$$\begin{aligned}\bar{\psi} &= \frac{z_0 e}{k_B T} \psi, \quad \bar{\psi}_\omega = \frac{z_0 e}{k_B T} \psi_\omega, \quad K = \kappa H, \\ \bar{u} &= \frac{u}{U_{eo}} \left(\bar{v} = \frac{v}{U_{eo}} \right), \quad \bar{z} = \frac{z}{H}, \quad \bar{h} = \frac{h}{H}, \quad \bar{b} = \frac{b}{H}, \\ \bar{t} &= \frac{t\eta}{\rho H^2}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_c} \left(\mu_c = \left(\frac{U_{eo}}{H} \right)^{n-1} \right), \\ Ha &= B_z H \sqrt{\frac{\sigma_e}{\eta}}, \quad S = \frac{E_y H}{U_{eo}} \sqrt{\frac{\sigma_e}{\eta}}.\end{aligned}\quad (25)$$

这里 $U_{eo} = -\varepsilon E_x \psi_\omega / \eta$; Ha 称为哈特曼数, 表示磁力和黏滯力的比值; S 是一个无量纲参数, 用于估计电场强度; K 为电动宽度, 被定义为微通道半高 H 与 EDL 厚度 κ^{-1} 的比值.

将方程 (25) 代入方程 (17) 中, 无量纲后幂律流体的动力黏度变为

$$\bar{\mu}(\Delta) = \eta \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}. \quad (26)$$

同样将方程 (25) 代入方程 (9) 中, 得到无量纲后的 Poisson-Boltzmann 方程为

$$\bar{\psi} = 4 \tanh^{-1} \left[\tanh(\bar{\psi}_\omega / 4) e^{(K\bar{z} - K\bar{h})} \right]. \quad (27)$$

相应的边界条件 (7) 式和 (8) 式化为

$$\bar{z} = \bar{h} : \bar{\psi} = \bar{\psi}_\omega, \quad (28)$$

$$\bar{z} = 0 : \frac{d\bar{\psi}}{d\bar{z}} = 0. \quad (29)$$

因此, 无量纲后的柯西动量方程 (20) 和方程 (21) 转化为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} - \frac{2\rho H^2 \Omega}{\eta} \bar{v} &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\bar{\mu}(\Delta) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right] + \frac{K^2}{\bar{\psi}_\omega} \bar{\psi} \\ &+ HaS - Ha^2 \bar{u},\end{aligned}\quad (30)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{2\rho H^2 \Omega}{\eta} \bar{u} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\bar{\mu}(\Delta) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right] - Ha^2 \bar{v}. \quad (31)$$

Navier 滑移边界条件及相应的初始条件和边界条件 (22) 式、(23) 式和 (24) 式可转化为

$$\bar{u} = \bar{v} = 0 : \bar{t} = 0, \quad (32)$$

$$\bar{u} + \bar{b} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \bar{v} + \bar{b} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0 : \bar{z} = \bar{h}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0 : \bar{z} = 0. \quad (34)$$

3 数值算法

利用有限差分法求解外加磁场的旋转系统中

幂律流体的旋转电渗流, 考虑域 (\bar{t}, \bar{z}) 属于 $[0, T] \times [0, h]$ 速度分量 u 和 v 在离散后的网格上的任意一点 (i, m) 上的表达式为

$$\bar{u}_i^m = \bar{u}(\bar{t}_m, \bar{z}_i), \quad (35)$$

$$\bar{v}_i^m = \bar{v}(\bar{t}_m, \bar{z}_i), \quad (36)$$

其中 $\bar{t}_m = m\Delta t$, $m = 1, 2, \dots, N_t$; $\bar{z}_i = i\Delta z$, $i = 1, 2, \dots, N$, 式中的 $\Delta t = T/(N_t - 1)$ 是 t 方向上的网格间距, $\Delta z = H/(N - 1)$ 是 z 方向上的网格间距.

对幂律流体的动力黏度 $\bar{\mu}$ 进行二阶中心差分来离散方程 (26), 则其可以写成:

$$\bar{\mu}_i^m = \eta \left[\left(\frac{\bar{u}_{i+1}^m - \bar{u}_{i-1}^m}{2\Delta z} \right)^2 + \left(\frac{\bar{v}_{i+1}^m - \bar{v}_{i-1}^m}{2\Delta z} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}. \quad (37)$$

考虑方程 (30) 和方程 (31) 是抛物型方程, 对时间的偏导数进行一阶向前差分, 其表达式为

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \frac{\bar{u}_i^{m+1} - \bar{u}_i^m}{\Delta t}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = \frac{\bar{v}_i^{m+1} - \bar{v}_i^m}{\Delta t}. \quad (39)$$

动量方程中的粘性项是对空间的二阶导数, 接下来对 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}$ 进行一阶向后差分近似, 然后对 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\cdot)$ 进行一阶向前差分近似, 即

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\bar{\mu}_{i+1}^m \left(\frac{\bar{u}_{i+1}^m - \bar{u}_i^m}{\Delta z} \right) - \bar{\mu}_i^m \left(\frac{\bar{u}_i^m - \bar{u}_{i-1}^m}{\Delta z} \right)}{\Delta z}, \quad (40)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\bar{\mu}_{i+1}^m \left(\frac{\bar{v}_{i+1}^m - \bar{v}_i^m}{\Delta z} \right) - \bar{\mu}_i^m \left(\frac{\bar{v}_i^m - \bar{v}_{i-1}^m}{\Delta z} \right)}{\Delta z}. \quad (41)$$

柯西动量方程 (30) 和方程 (31) 最后的差分格式为

$$\begin{aligned}& \frac{\bar{u}_i^{m+1} - \bar{u}_i^m}{\Delta t} \\ &= \frac{2\rho H^2 \Omega}{\eta} \bar{v}_i^m + \frac{1}{\eta} \left[\bar{\mu}_{i+1}^m \left(\frac{\bar{u}_{i+1}^m - \bar{u}_i^m}{(\Delta z)^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \bar{\mu}_i^m \left(\frac{\bar{u}_i^m - \bar{u}_{i-1}^m}{(\Delta z)^2} \right) \right] + \frac{K^2}{\bar{\psi}_\omega} \bar{\psi}_i \\ & \quad + HaS - Ha^2 \bar{u}_i^m,\end{aligned}\quad (42)$$

$$\frac{\bar{v}_i^{m+1} - \bar{v}_i^m}{\Delta t} = -\frac{2\rho H^2 \Omega}{\eta} \bar{u}_i^m + \frac{1}{\eta} \left[\bar{\mu}_{i+1}^m \left(\frac{\bar{v}_{i+1}^m - \bar{v}_i^m}{(\Delta z)^2} \right) - \bar{\mu}_i^m \left(\frac{\bar{v}_i^m - \bar{v}_{i-1}^m}{(\Delta z)^2} \right) \right] - Ha^2 \bar{v}_i^m. \quad (43)$$

离散化后, 相应的初始条件和边界条件为

$$\bar{u}_i^1 = 0, \bar{v}_i^1 = 0, \quad (44)$$

$$\bar{u}_N^n = \frac{\beta \bar{h}}{\beta \bar{h} + \Delta z} \bar{u}_{N-1}^n, \bar{v}_N^n = \frac{\beta \bar{h}}{\beta \bar{h} + \Delta z} \bar{v}_{N-1}^n, \quad (45)$$

$$\bar{u}_1^n = \bar{u}_0^n, \bar{v}_1^n = \bar{v}_0^n, \quad (46)$$

其中 $\beta = \bar{b}/\bar{h}$ 为滑移参数.

由于幂律流体的粘性取决于流体的速度梯度, 因此动量方程 (42) 和方程 (43) 是明显的非线性方程组, 其最终的差分格式方程是显式的且条件稳定的, 稳定条件为 $|\eta \Delta t / \rho \Delta z^{n+1}| \leq 0.5$, 与牛顿流体 ($n = 1$) 的情况相同. 反复利用时间迭代和空间迭代, 直到满足条件 $|(\bar{\mu}_i^{m+1} - \bar{\mu}_i^m) / \bar{\mu}_i^{m+1}| \leq 10^{-6}$ 时, 流体的运动才达到了稳定状态.

4 结果和讨论

本文研究中, 对于所有计算, 空间步长和时间步长选取分别为 $\Delta z = 10^{-2}$ 和 $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$; 在目前的计算中, 典型微通道流动的参数值如下: 电解质溶液的介电常数 $\varepsilon = 709 \times 10^{-12}$ F/m; 半高 $H = 100 \mu\text{m}$; 电解质的浓度 $n_0 = N_A c$, 其中 $c = 10^{-5}$ mol/L 为摩尔浓度, $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ /mol; $\rho = 1.0 \times 10^3$ kg/m³; 离子价态 $z_0 = 1$; $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C;

$k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K; 电场强度 $E_x = 10^4$ V/m; 绝对温度 $T = 293$ K; $\eta = 0.9 \times 10^{-3}$; σ_e 的变化范围为 $2.2 \times 10^{-4} \sim 10^6$ S/m; 磁场强度 B 的取值范围为 $0.02 \sim 1$ T; 交变电场强度 E_y 的取值范围为 $0 \sim 1$ V/m.

为了验证本研究数值方法的正确性, 当微管道高度波动变化的振幅 $a = 0$ 时, 微管道的形状为平行管道; 当 $n = 1$ 和 $\beta = 0$ 时 (即对于牛顿流体和无滑移边界条件), 和 $K = 30$, $\Omega = 100$ rad/s, $\bar{\psi}_\omega = 1$ V 的情况下, 给出了相应的速度分量 u , v 的数值结果与 Chang 和 Wang^[9] 的解析结果如图 2 所示. 结果表明, 它们之间的一致性很好. 因此, 本文所建立的数值方法是有效的, 可用于计算幂律流体在 $n \neq 1$ 时的外加磁场的旋转电渗速度分布.

如图 3 和图 4 所示为不同的幂律流体行为指数 n (0.4, 0.5, 0.8, 1, 1.2) 的无量纲外加磁场旋转电渗流速度的数值变化. 图 3 和图 4 分别呈现了滑移参数 $\beta = 0$ 和 $\beta \neq 0$ (即, 无滑移边界条件和存在滑移边界条件) 时幂律流体行为指数 n 对 x 方向和 y 方向的速度剖面的影响. 从图 3(a) 和图 4(a) 可以看出, 对于假塑性流体 ($n < 1$), 它们的形状更接近于插头状的外加磁场电渗流速速度剖面, 对于膨胀塑性流体 ($n > 1$), 它们更接近于抛物线形的速度剖面. 除墙体上的滑移距离外, 这与 Wang 等^[21] 与 Xie 和 Jian^[22] 的研究结果一致. 图 3(a) 和图 4(a) 中还可以看出, x 方向的速度大小随着幂律行为指数 n 的减小而增大, 其原因在于幂律行为指数的增加导致流体的粘度较大, 这使得在微通道中流动

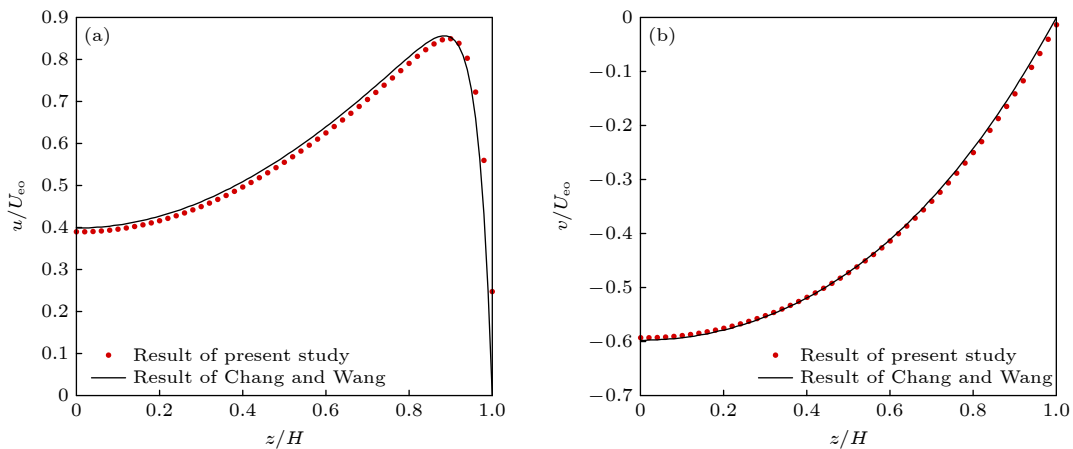


图 2 目前数值解与 Chang 和 Wang^[9] 解析解的比较, 其中 $\beta = 0$, $K = 30$, $\Omega = 100$ rad/s, $\bar{\psi}_\omega = 1$ V, $a = 0$, $Ha = 0$, $S = 0$
Fig. 2. Comparison of the current numerical solution with the analytical solution of Chang and Wang^[9], $\beta = 0$, $K = 30$, $\Omega = 100$ rad/s, $\bar{\psi}_\omega = 1$ V, $a = 0$, $Ha = 0$, $S = 0$.

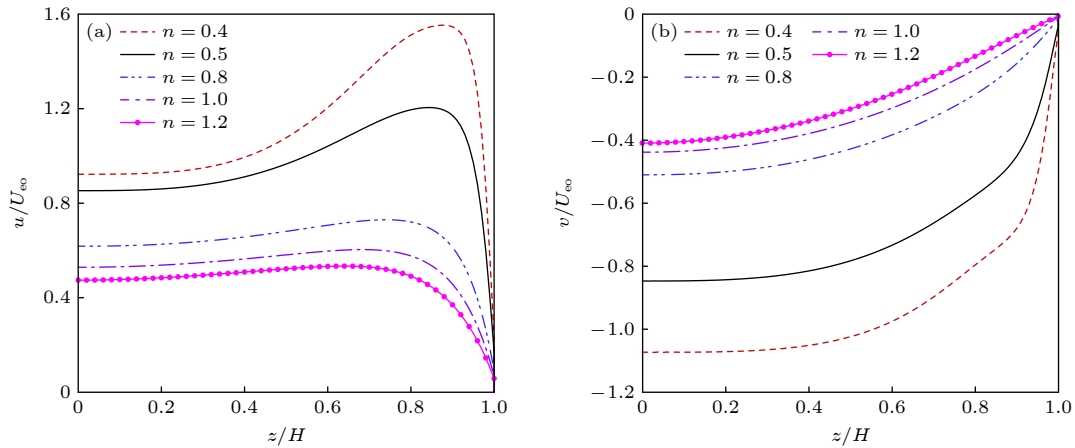


图 3 当无滑移边界条件时, 幂律流体行为指数 n 对外加磁场的旋转电渗流速度的影响, 其中 $\beta = 0$, $K = 10$, $\Omega = 100$ rad/s, $\bar{\psi}_\omega = 5$ V, $a = 0.05$, $Ha = 1$, $S = 1$

Fig. 3. When there is a no-slip boundary condition, the influence of power-law fluid behavior index n on rotating electroosmotic flow velocity with the external magnetic field, $\beta = 0$, $K = 10$, $\Omega = 100$ rad/s, $\bar{\psi}_\omega = 5$ V, $a = 0.05$, $Ha = 1$, $S = 1$.

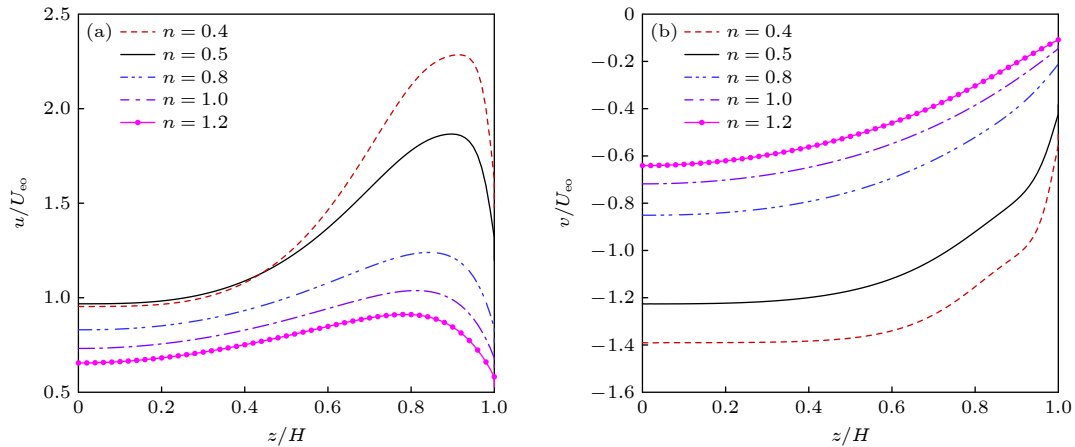


图 4 当存在滑移边界条件时, 幂律流体行为指数 n 对外加磁场的旋转电渗流速度的影响, 其中 $\beta = 0.1$, $K = 10$, $\Omega = 100$ rad/s, $\bar{\psi}_\omega = 5$ V, $a = 0.05$, $Ha = 1$, $S = 1$

Fig. 4. When there is a slip boundary condition, the influence of the power-law fluid behavior index n on the rotating electroosmotic flow velocity with an external magnetic field, $\beta = 0.1$, $K = 10$, $\Omega = 100$ rad/s, $\bar{\psi}_\omega = 5$ V, $a = 0.05$, $Ha = 1$, $S = 1$.

更加困难. 图 3(a) 和图 4(a) 的对比可以得出, 滑移边界条件存在时对壁面处流体黏性的减小, 也导致相比于不存在滑移条件时, 到达了更大的速度最大值和距离壁面更短的距离. 同样的现象也可以在图 3(b) 和图 4(b) 中找到.

图 5 中给出了哈特曼数 Ha 对外加磁场的旋转电渗流速度分布的影响. 图 5 和图 6 展示了当幂律流体行为指数 $n < 1$ 及 $n > 1$ 时, 哈特曼数 Ha 对外加磁场的旋转电渗流速度分布的影响. 由图 5(a) 和图 5(b) 与图 6(a) 和图 6(b) 可以看出, 当哈特曼数 $Ha > 1$ 时, 速度随着哈特曼数 Ha 的增加而减小, 因为当哈特曼数 Ha 大时, 洛伦兹力里的阻力部分 $\sigma_e u B^2$ 变大, 总的洛伦兹力变成远远小于电

渗力. 但当哈特曼数 $Ha < 1$ 时, x 方向速度 u 的大小随着 Ha 的增加而增加, 如图 5(c) 和图 6(c) 所示, 这意味着在哈特曼数 Ha 小的情况下, 洛伦兹力可以加快流体流动.

如图 7 和图 8 所示, 图中分别呈现了行为指数 $n = 0.8$ 和 $n = 1.2$ 时, 旋转角速度 Ω 对外加磁场的旋转电渗流速度分布的影响. 从图 7(a)、图 7(c)、图 7(d) 和图 8(a)、图 8(c)、图 8(d) 中可以看出, 当没有旋转角速度时, x 方向的 u 速度在内部有一个平坦的速度平台. 随着 Ω 的增大, 外加磁场的旋转电渗流速度 u 减小, 与 Xie 和 Jian [22] 的结果相似. 中心速度甚至在大的旋转角速度时变为负值 ($\Omega = 400, 800$). 由图 7(b) 和图 8(b) 表明, 随着旋转

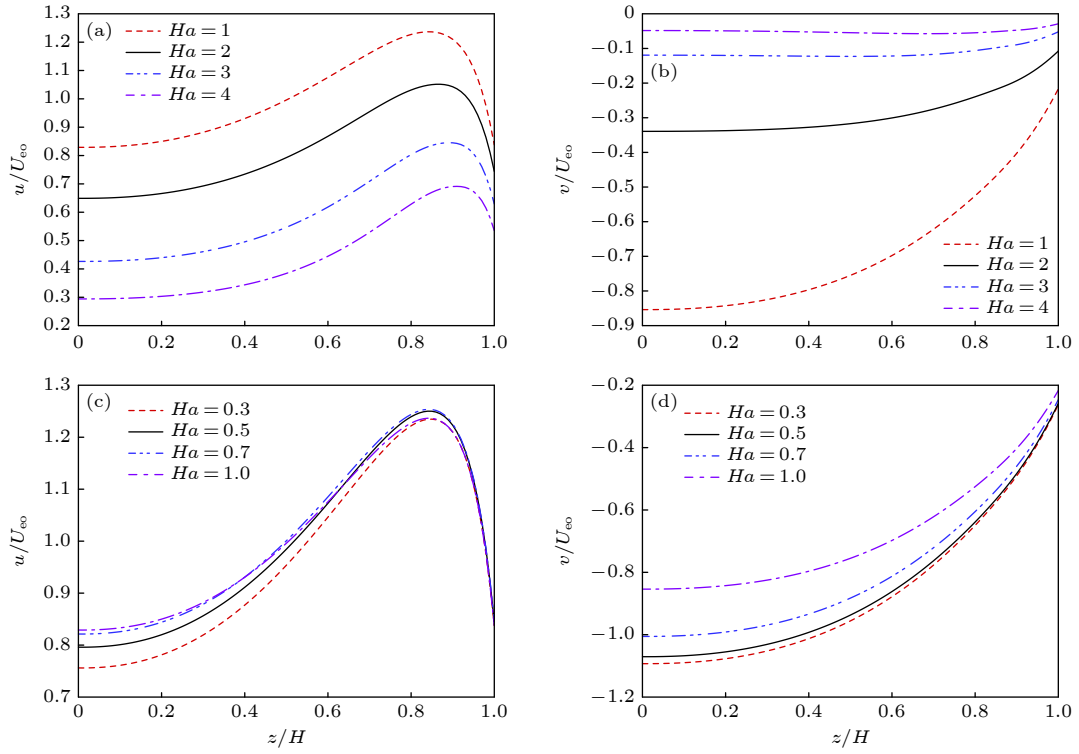


图 5 哈特曼数 Ha 对外加磁场的旋转电渗流速度的影响, 其中 $n = 0.8$, $K = 10$, $\beta = 0.1$, $\Omega = 100 \text{ rad/s}$, $\bar{\psi}_\omega = 5 \text{ V}$, $a = 0.05$, $S = 1$

Fig. 5. The influence of Hartmann number Ha on the velocity of rotating electroosmotic flow with external magnetic field, $n = 0.8$, $K = 10$, $\beta = 0.1$, $\Omega = 100 \text{ rad/s}$, $\bar{\psi}_\omega = 5 \text{ V}$, $a = 0.05$, $S = 1$.

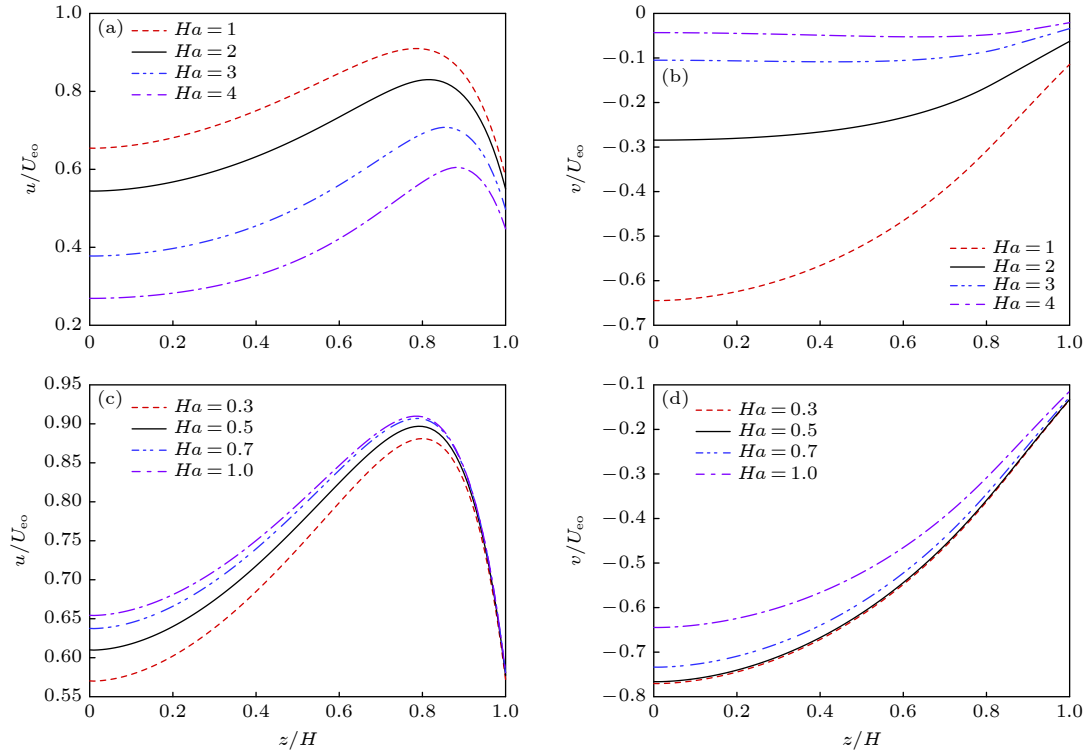


图 6 哈特曼数 Ha 对外加磁场的旋转电渗流速度的影响, 其中 $n = 1.2$, $K = 10$, $\beta = 0.1$, $\Omega = 100 \text{ rad/s}$, $\bar{\psi}_\omega = 5 \text{ V}$, $a = 0.05$, $S = 1$

Fig. 6. The influence of Hartmann number Ha on the velocity of rotating electroosmotic flow with external magnetic field, $n = 1.2$, $K = 10$, $\beta = 0.1$, $\Omega = 100 \text{ rad/s}$, $\bar{\psi}_\omega = 5 \text{ V}$, $a = 0.05$, $S = 1$.

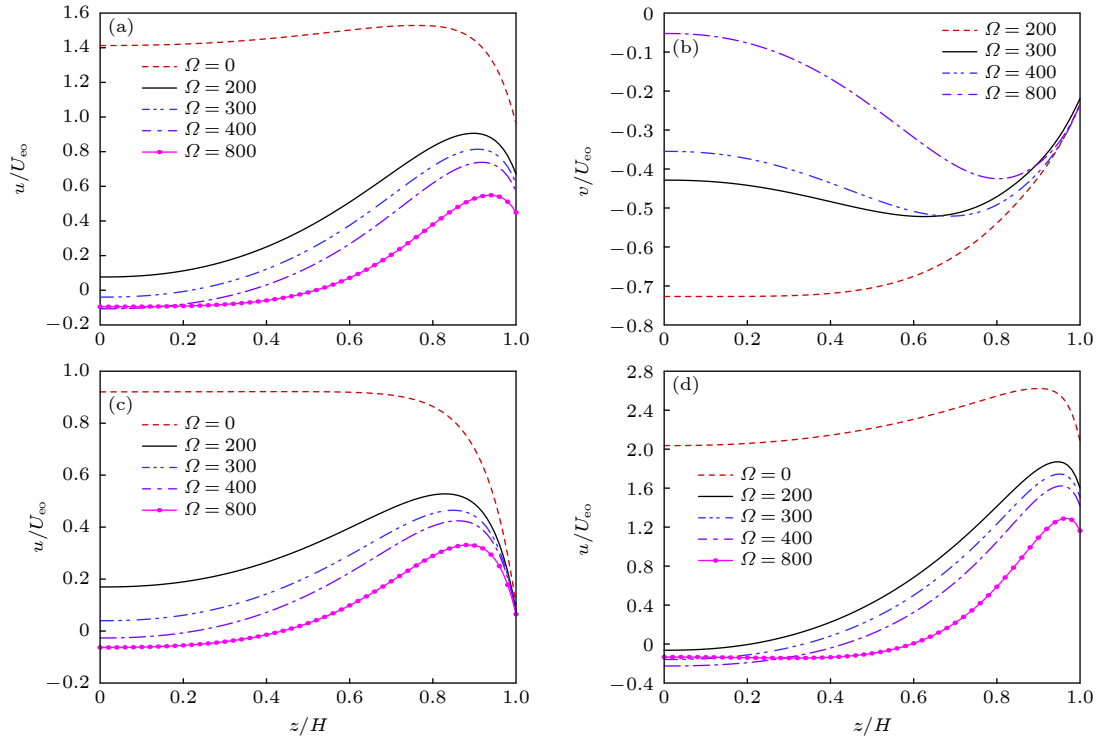


图 7 旋转角速度 Ω 对外加磁场的旋转电渗流速度的影响, 其中 $n = 0.8$, $\bar{\psi}_\omega = 5$ V, $a = 0.05$, $Ha = 1$, $S = 1$ (a) $K = 10$, $\beta = 0.1$; (b) $K = 10$, $\beta = 0.1$; (c) $K = 10$, $\beta = 0$; (d) $K = 20$, $\beta = 0.1$.

Fig. 7. The influence of the rotational angular velocity Ω on the rotational electroosmotic flow velocity of the external magnetic field, $n = 0.8$, $\bar{\psi}_\omega = 5$ V, $a = 0.05$, $Ha = 1$, $S = 1$ (a) $K = 10$, $\beta = 0.1$; (b) $K = 10$, $\beta = 0.1$; (c) $K = 10$, $\beta = 0$; (d) $K = 20$, $\beta = 0.1$.

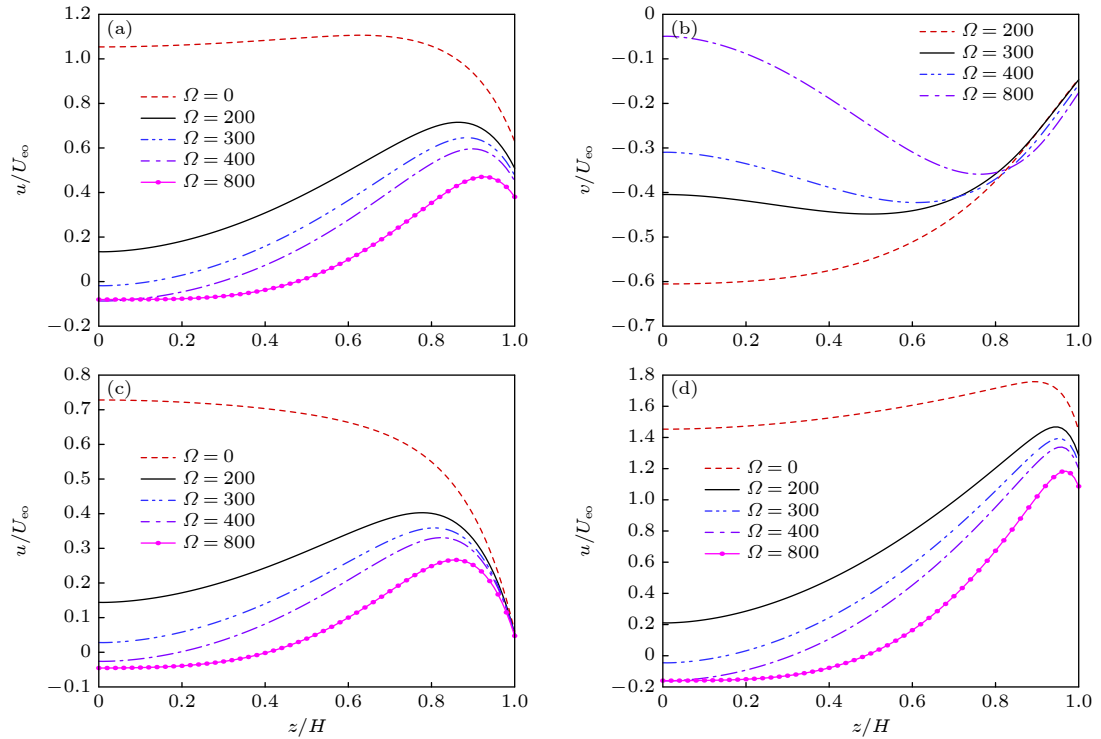


图 8 旋转角速度 Ω 对外加磁场的旋转电渗流速度的影响, 其中 $n = 1.2$, $\bar{\psi}_\omega = 5$ V, $a = 0.05$, $Ha = 1$, $S = 1$ (a) $\beta = 0.1$, $K = 10$. (b) $\beta = 0.1$, $K = 10$. (c) $\beta = 0$, $K = 10$. (d) $\beta = 0.1$, $K = 30$.

Fig. 8. The influence of the rotational angular velocity Ω on the rotational electroosmotic flow velocity of the external magnetic field, $n = 1.2$, $\bar{\psi}_\omega = 5$ V, $a = 0.05$, $Ha = 1$, $S = 1$ (a) $\beta = 0.1$, $K = 10$. (b) $\beta = 0.1$, $K = 10$. (c) $\beta = 0$, $K = 10$. (d) $\beta = 0.1$, $K = 30$.

角速度 Ω 的进一步增大, y 方向的速度 v 的中心速度表现出减小的特性. 其结果与 Chang 和 Wang^[9] 相似.

图 9、图 10 和图 11 分别呈现了当行为指数 $n = 0.8$ 和 $n = 1.2$ 时电动宽度 K 对外加磁场的旋转电渗流速度分布的影响. 从图 9 和图 10 可以看出电动宽度 K 的增大导致外加磁场的旋转电渗流速度的增加, 并随着 n 的减小电动宽度 K 影响的效果更加显著. 从图 10 和图 11 中可以看到, 在滑移边界条件下 (见图 10) 出现与不存在滑移边界条件下 (Xie 和 Jian^[22], 见图 11) 不同的结论. 此外, 从图 9(b) 中, 当 $n = 0.8$ 时, 速度 v 呈碗状, 其大小随电动宽度 K 增加. 图 10(b) 和图 11(b) 中, 当 $n = 1.2$ 时, 速度 v 呈抛物线形状, 在滑移边界条件下

速度随电动宽度 K 增大而增大; 无滑移边界条件下随电动宽度 K 增大导致速度减小.

当幂律流体行为指数分别为 $n = 0.8$ 和 $n = 1.2$ 时, 不同的滑移参数 β 对外加磁场的旋转电渗流速度分布的影响如图 12 和图 13 所示. 从图 12 和图 13 可以发现, 随着滑移参数 β 的增加, x 方向和 y 方向的速度均相应的增大. 由于壁面的滑移效应, 变截面微管道的中心速度要较为平稳, 接近壁面的速度受到 β 值的影响出现剧烈变化, 并快速减小. 从图中可以发现由于滑移边界条件的存在, 壁面上的速度分布出现差异, β 值越小边界附近的速度下降的越剧烈. 当滑移边界条件不存在时, 即 $\beta = 0$, 边界处的速度将下降到 0.

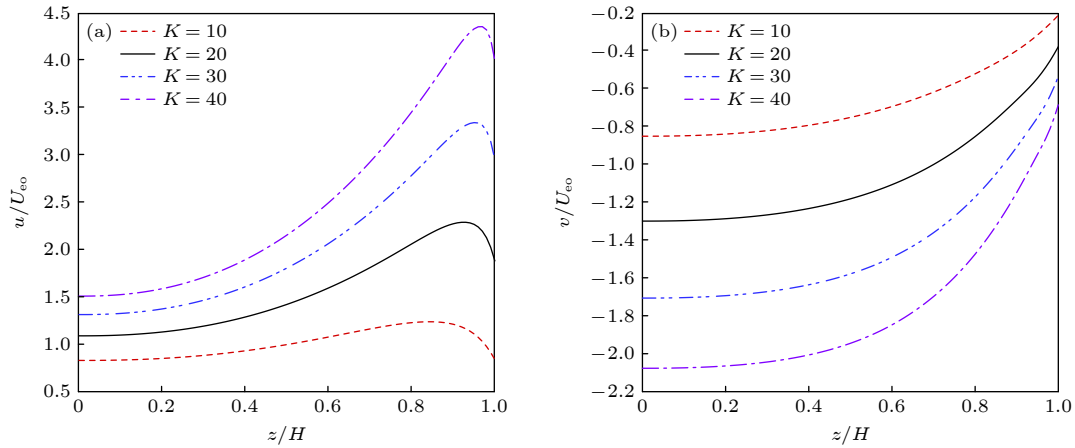


图 9 电动宽度 K 对外加磁场的旋转电渗流速度分布的影响, 其中 $n = 0.8$, $\beta = 0.1$, $\Omega = 100$ rad/s, $\bar{\psi}_\omega = 5$ V, $a = 0.05$, $Ha = 1$, $S = 1$

Fig. 9. The influence of the electric width K on the velocity distribution of rotating electroosmotic flow with external magnetic field, $n = 0.8$, $\beta = 0.1$, $\Omega = 100$ rad/s, $\bar{\psi}_\omega = 5$ V, $a = 0.05$, $Ha = 1$, $S = 1$.

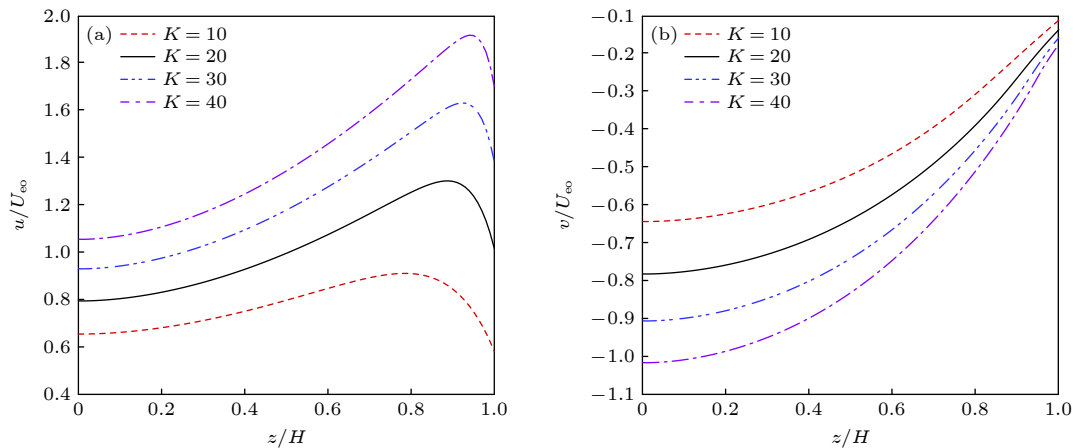


图 10 电动宽度 K 对外加磁场的旋转电渗流速度分布的影响, 其中 $n = 1.2$, $\beta = 0.1$, $\Omega = 100$ rad/s, $\bar{\psi}_\omega = 5$ V, $a = 0.05$, $Ha = 1$, $S = 1$

Fig. 10. The influence of the electric width K on the velocity distribution of rotating electroosmotic flow with external magnetic field, $n = 1.2$, $\beta = 0.1$, $\Omega = 100$ rad/s, $\bar{\psi}_\omega = 5$ V, $a = 0.05$, $Ha = 1$, $S = 1$.

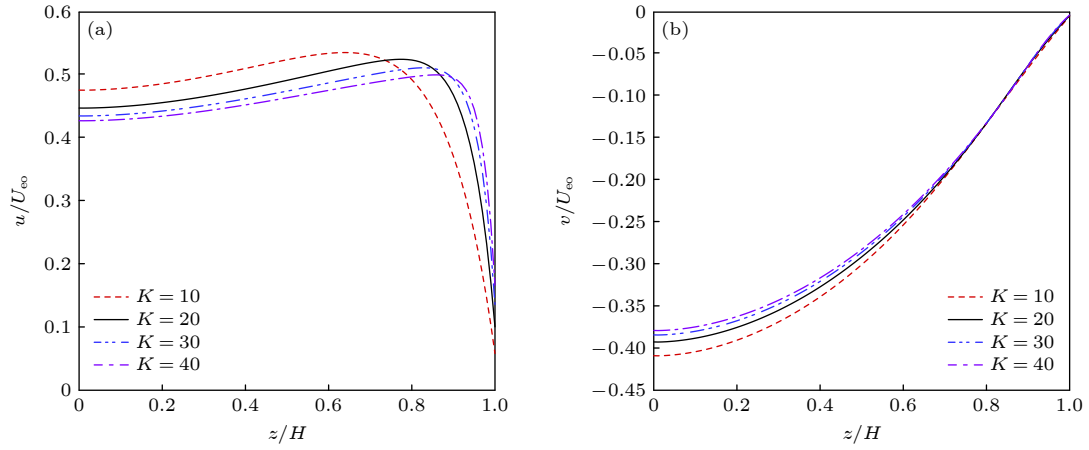


图 11 电动宽度 K 对外加磁场的旋转电渗流速度的影响, 其中 $n = 1.2, \beta = 0, \Omega = 100 \text{ rad/s}, \bar{\psi}_\omega = 5 \text{ V}, a = 0.05, Ha = 1, S = 1$

Fig. 11. The influence of the electric width K on the velocity distribution of rotating electroosmotic flow with external magnetic field, $n = 1.2, \beta = 0, \Omega = 100 \text{ rad/s}, \bar{\psi}_\omega = 5 \text{ V}, a = 0.05, Ha = 1, S = 1$.

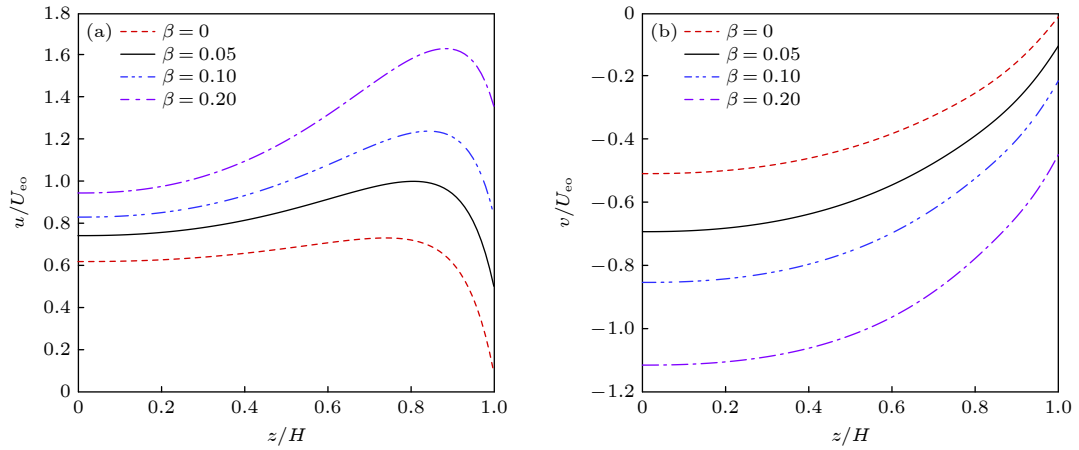


图 12 滑移参数 β 对外加磁场的旋转电渗流速度的影响, 其中 $n = 0.8, K = 10, \Omega = 100 \text{ rad/s}, \bar{\psi}_\omega = 5 \text{ V}, a = 0.05, Ha = 1, S = 1$

Fig. 12. The influence of the slip parameter β on the rotating electroosmotic flow velocity with an external magnetic field, $n = 0.8, K = 10, \Omega = 100 \text{ rad/s}, \bar{\psi}_\omega = 5 \text{ V}, a = 0.05, Ha = 1, S = 1$.

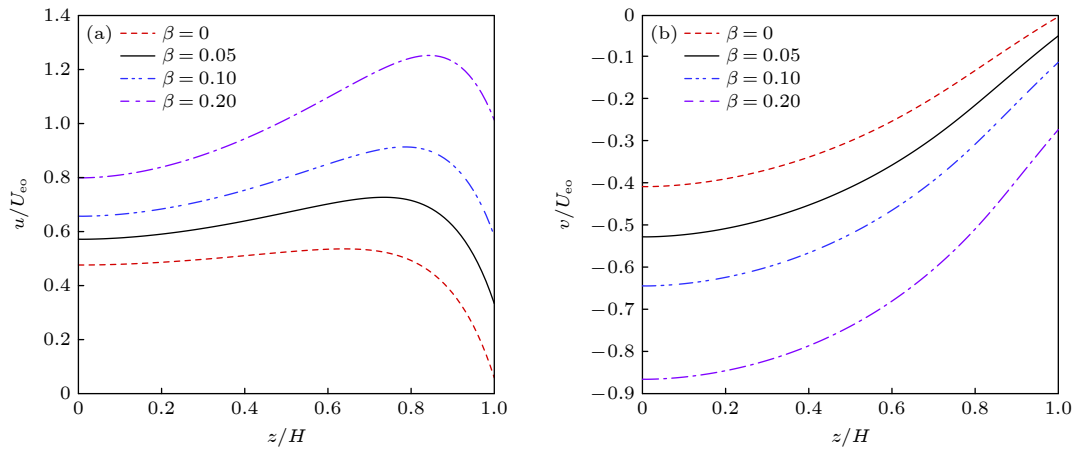


图 13 滑移参数 β 对外加磁场的旋转电渗流速度的影响, 其中 $n = 1.2, K = 10, \Omega = 100 \text{ rad/s}, \bar{\psi}_\omega = 5 \text{ V}, a = 0.05, Ha = 1, S = 1$

Fig. 13. The influence of the slip parameter β on the rotating electroosmotic flow velocity with an external magnetic field, $n = 1.2, K = 10, \Omega = 100 \text{ rad/s}, \bar{\psi}_\omega = 5 \text{ V}, a = 0.05, Ha = 1, S = 1$.

5 结 论

本文建立了高 zeta 势下具有滑移边界条件的幂律流体在变截面微管道中的外加磁场的旋转电渗流的数学模型, 利用有限差分法, 对幂律流体进行了数值研究, 得到了速度分量的数值解. 结果表明, 在相同的条件下, 变截面微管道中假塑性流体 ($n < 1$) 的速度比膨胀塑性流体 ($n > 1$) 的速度高. 当哈特曼数 $Ha > 1$ 时, 速度随着哈特曼数 Ha 的增加而减小; 但当哈特曼数 $Ha < 1$ 时, x 方向速度 u 的大小随着 Ha 的增加而增加. 旋转角速度 Ω 越大, 外加磁场旋转电渗流的速度逐渐减小, 影响效果由壁面逐渐向中心区域增加, 且达到最大值的距离逐渐靠近壁面. 旋转系统产生的科里奥利力对外加磁场的电渗流起主导作用. 电动宽度 K 的增大导致外加磁场的旋转电渗流速度的增加, 并随着 n 的减小电动宽度 K 影响的效果更加显著. 滑移参数的增大使变截面微管道内的流动增强, 最大值速度接近微管道壁面.

附录 A

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = \frac{2n_0z_0e}{\varepsilon} \sinh\left(\frac{z_0e\psi}{k_B T}\right). \quad (A1)$$

两边同时乘以 $d\psi/dz$ 得到:

$$\frac{d}{dz} \left[\left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 \right] = \frac{4n_0k_B T}{\varepsilon} \frac{d}{dz} \left[\cosh\left(\frac{z_0e\psi}{k_B T}\right) \right]. \quad (A2)$$

对上述表达式积分并应用边界条件 (8) 式和公式 $\cosh 2x = 2\sinh^2 x + 1$, 可得到:

$$\left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 = \frac{8n_0k_B T}{\varepsilon} \sinh^2\left(\frac{z_0e\psi}{2k_B T}\right) = 4\frac{\kappa^2}{\alpha^2} \sinh^2\left(\frac{\alpha\psi}{2}\right), \quad (A3)$$

其中 $\alpha = z_0e/k_B T$, $\kappa^2 = 2n_0z_0^2e^2/\varepsilon k_B T$.

由于 $\sinh x$ 是一个奇函数, 并考虑边界条件 (7) 式和 (8) 式, 电势 ψ 由以下方程给出:

$$\frac{d\psi}{dz} = 2\frac{\kappa}{\alpha} \sinh\left(\frac{\alpha\psi}{2}\right). \quad (A4)$$

利用不定积分表达式:

$$\int \frac{1}{\sinh x} dx = \ln \tanh \frac{x}{2} + C. \quad (A5)$$

并对 (A4) 式的等价形式进行变换, $d(\alpha\psi/2)/\sinh(\alpha\psi/2) = \kappa dz$, 在区间 $[z, h]$ 上积分, 可以得到电势 ψ 分布的表达式, 即 (9) 式:

$$\psi = \frac{4}{\alpha} \tanh^{-1} \left[\tanh\left(\frac{\alpha\psi_\omega}{4}\right) e^{(\kappa z - \kappa h)} \right]. \quad (A6)$$

参考文献

- [1] Stone H A, Stroock A D, Ajdari A 2004 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **36** 381
- [2] Patel M, Kruthiventi S S H, Kaushik P 2020 *Colloids Surf. B* **193** 111058
- [3] Srinivas, Bhadri 2016 *Colloids Surf. A* **492** 144
- [4] Nekoubin N 2018 *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **260** 54
- [5] Baños R D, Arcos J C, Bautista O, Méndez F, Merchán-Cruz E A 2021 *J. Braz. Soc. Mech. Sci.* **43** 1
- [6] Baños R, Arcos J, Bautista O, Méndez F 2020 *Defect Diffus. Forum* **399** 92
- [7] Jiang Y T, Qi H T 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 174702 (in Chinese) [姜玉婷, 齐海涛 2015 物理学报 **64** 174702]
- [8] Ajdari A 2002 *Phys. Rev. E* **65** 16301
- [9] Chang C C, Wang C Y 2011 *Phys. Rev. E* **84** 056320
- [10] Song J, Wang S W, Zhao M L, Li N 2020 *Z. Naturforsch. A: Phys. Sci.* **75** 649
- [11] Shit G C, Mondal A, Sinha A, Kundu P K 2016 *Colloids Surf. A* **489** 249
- [12] Liu Q S, Yang L G, Su J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 144702 (in Chinese) [刘全生, 杨联贵, 苏洁 2013 物理学报 **62** 144702]
- [13] Duan J, Chen Y Q, Zhu Q Y 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 034702 (in Chinese) [段娟, 陈耀钦, 朱庆勇 2016 物理学报 **65** 034702]
- [14] Weston M C, Gerner M D, Fritsch I 2010 *Anal. Chem.* **82** 3411
- [15] Jian Y J, Chang L 2015 *AIP Adv.* **5** 057121
- [16] Xie Z Y, Jian Y J 2017 *Colloids Surf. A* **529** 334
- [17] Habib U, Hayat T, Ahmad S, Alhodaly M S 2021 *Int. Commun. Heat Mass Transfer* **122** 105111
- [18] Sarkar S, Ganguly S 2017 *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **250** 18
- [19] Yang C H, Jian Y J, Xie Z Y, Li F Q 2020 *Micromachines* **11** 418
- [20] Xie Z Y, Jian Y J 2017 *Energy* **139** 1080
- [21] Wang S W, Li N, Zhao M L, Azese M N 2018 *Z. Naturforsch. A: Phys. Sci.* **73** 825
- [22] Xie Z Y, Jian Y J 2014 *Colloids Surf. A* **461** 231
- [23] Bird R B, Armstrong R C, Hassager O, Curtiss C F, Middleman S 1978 *Phys. Today* **31** 54

Rotational electroosmotic slip flow of power-law fluid at high zeta potential in variable-section microchannel*

Zhang Tian-Ge Ren Mei-Rong Cui Ji-Feng

Chen Xiao-Gang[†] Wang Yi-Dan

(College of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China)

(Received 16 December 2021; revised manuscript received 3 March 2022)

Abstract

In this paper we study the rotating electroosmotic flow of a power-law fluid with Navier slip boundary conditions under high zeta potential subjected to the action of a vertical magnetic field in a variable cross-section microchannel. Without using the Debye–Hückel linear approximation, the finite difference method is used to numerically calculate the potential distribution and velocity distribution of the rotating electroosmotic flow subjected to an external magnetic field. When the behavior index $n = 1$, the fluid obtained is a Newtonian fluid. The analysis results in this paper are compared with the analytical approximate solutions obtained in the Debye–Hückel linear approximation to prove the feasibility of the numerical method in this paper. In addition, the influence of behavior index n , Hartmann number Ha , rotation angular velocity Ω , electric width K and slip parameters β on the velocity distribution are discussed in detail. It is obtained that when the Hartmann number $Ha > 1$, the velocity decreases with the increase of the Hartmann number Ha ; but when the Hartmann number $Ha < 1$, the magnitude of the x -direction velocity u increases with the augment of Ha .

Keywords: high zeta potential, Navier slip boundary condition, electro magneto-hydrodynamic, finite difference method

PACS: 47.11.Bc, 47.65.-d, 47.85.Dh

DOI: 10.7498/aps.71.20212327

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12062018, 12172333), the Young Talents of Science and Technology in Universities of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. NJYT22075), and the Natural Science Foundation of Inner Mongolia, China (Grant No. 2020MS01015).

[†] Corresponding author. E-mail: xiaogang_chen@imut.edu.cn