

## 利用电磁场动量互易定理导出惠更斯原理

刘国强 刘婧

## Huygens' principle derived by using momentum reciprocity theorem of electromagnetic field

Liu Guo-Qiang Liu Jing

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 140301 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20212334

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212334>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

洛伦兹破缺理论与Vaidya黑洞弯曲时空中的Dirac粒子隧穿辐射特征

Lorentz-violating theory and tunneling radiation characteristics of Dirac particles in curved spacetime of Vaidya black hole

物理学报. 2019, 68(19): 190401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190437>

洛伦兹对称破缺框架下的广义克莱因-戈尔登谐振子

Generalized Klein-Gordon oscillator in Lorentz symmetry violation framework

物理学报. 2022, 71(6): 060301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211733>

非平衡感应耦合等离子体流场与电磁场作用机理的数值模拟

Numerical investigation on interaction mechanisms between flow field and electromagnetic field for nonequilibrium inductively coupled plasma

物理学报. 2019, 68(18): 185202 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190865>

声子系统中弹性波与热输运的拓扑与非互易现象

Topological and non-reciprocal phenomena in elastic waves and heat transport of phononic systems

物理学报. 2019, 68(22): 220302 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191463>

非扩散洛伦兹系统的周期轨道

Periodic orbits of diffusionless Lorenz system

物理学报. 2018, 67(24): 240501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181581>

蓝失谐驱动下双腔光力系统中的光学非互易性

Optical nonreciprocity with blue-detuned driving in two-cavity optomechanics

物理学报. 2019, 68(17): 170701 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190205>

## 利用电磁场动量互易定理导出惠更斯原理\*

刘国强<sup>1)2)†</sup> 刘婧<sup>1)2)</sup>

1) (中国科学院电工研究所, 北京 100190)

2) (中国科学院大学电子电气与通信工程学院, 北京 100049)

(2021 年 12 月 17 日收到; 2022 年 4 月 11 日收到修改稿)

经典电磁场互易定理(即洛伦兹互易定理)作为电磁学重要的理论之一,被广泛应用于通信、天线信号传输和电磁成像等诸多领域,它是一种“能量型”互易定理.已有研究用微分形式扩展“Rumsey 反应”的概念,使其同时包含了洛伦兹力密度反应和功率密度反应项.进一步有研究从麦克斯韦方程组导出了动量互易定理.动量互易定理与洛伦兹互易定理一样,既可以用于理论分析,也可以解决实际问题.因此利用洛伦兹互易定理可导出惠更斯原理,本文利用动量互易定理导出惠更斯原理.

**关键词:** 洛伦兹互易定理, 动量互易定理, 惠更斯原理**PACS:** 03.50.De, 04.30.Nk**DOI:** 10.7498/aps.71.20212334

## 1 引言

1896 年,洛伦兹<sup>[1]</sup>提出的经典电磁互易定理是电磁学重要理论之一,它将两个独立的电磁场联系起来,反映了两组场源之间的能量相互作用.洛伦兹互易定理在电磁场理论分析和实际应用中发挥了重要作用,如可为论证波导元件和天线的互易性提供基础<sup>[2]</sup>,可用于确定波导和空腔谐振器中波型间的正交性<sup>[3]</sup>,也常用于电磁成像等图像重建问题的求解<sup>[4,5]</sup>.

此后百余年间,人们陆续被发展了一些新的电磁互易定理,包括频率域和时间域的互易定理,如 Feld-Tai 互易定理<sup>[6,7]</sup>和互能定理<sup>[8,9]</sup>等.

上述定理均为“能量型”互易定理.事实上,电磁场除了具有能量还具有动量,因此从两组场源的相互作用关系来看,除了能量作用关系,还应当有动量作用关系.2020 年, Lindell 等<sup>[10]</sup>采用微分形式对“Rumsey 反应”的概念进行了拓展,导出了时

空统一形式的广义反应密度.它对应的吉普斯矢量形式为

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_2 - \rho_1 \mathbf{E}_2 + (\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{e}_4. \quad (1)$$

广义反应密度同时包含了洛伦兹力密度反应和功率密度反应,其中洛伦兹力密度反应为空间项,功率密度反应为时间项,(1)式中 $\mathbf{e}_4$ 为时间基.

同年, Liu 等<sup>[11,12]</sup>从麦克斯韦方程组导出了两组反映电磁场源之间动量相互作用关系的定理,分别为

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{J}_2 \times \mathbf{B}_1 - \rho_1 \mathbf{E}_2 - \rho_2 \mathbf{E}_1) dV \\ &= - \oint_s d\mathbf{S} \cdot [(\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_2 \mathbf{I} - \mathbf{H}_1 \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{H}_1) \\ & \quad - (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \mathbf{I} - \mathbf{D}_1 \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \mathbf{D}_1)], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{J}_1 \times \mathbf{D}_2 + \mathbf{J}_2 \times \mathbf{D}_1 + \rho_1 \mathbf{H}_2 + \rho_2 \mathbf{H}_1) dV \\ &= - \oint_s d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{D}_2 \mathbf{I} + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{D}_1 \mathbf{I} - \mathbf{H}_1 \mathbf{D}_2 \\ & \quad - \mathbf{D}_2 \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_1 \mathbf{H}_2), \end{aligned} \quad (3)$$

\* 国家自然科学基金重点项目(批准号: 51937010)和国家自然科学基金青年科学基金(批准号: 51907191)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: gqliu@mail.iece.ac.cn

式中,  $\mathbf{I}$  为单位并矢,  $\rho$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{D}$  分别为电荷密度、电流密度、磁通密度、电场强度、磁场强度和电通密度, 下角标 1 和 2 代表两组电磁场.

这两组动量互易定理是对洛伦兹互易定理和 Feld-Tai 互易定理的扩展, 与能量型互易定理一样, 可在工程实际应用中发挥重要作用, 例如, 在医学磁声电成像中利用动量互易定理进行图像重建<sup>[12]</sup>, 亦可成为电磁场理论分析的重要工具, 例如, 通过动量互易定理导出惠更斯原理.

惠更斯原理是一个比较特殊的电磁原理, 它深刻揭示了波的形成和波的本质. 惠更斯原理是将波前上的每一点作为一个新的波源, 根据这些源在波传播方向上所产生的场的叠加找出传播规律. 惠更斯原理提供了一种电磁场简化分析方法, 可以不用考虑实际源分布, 只需在闭合面上设置与实际源等效的惠更斯源来简化分析. 前人用洛伦兹互易定理可以导出惠更斯原理<sup>[13]</sup>, 本文利用动量互易定理导出惠更斯原理, 说明了一些经典电磁理论相互之间存在内在联系.

## 2 理论模型

设实际电流源和磁流源分别为  $\mathbf{J}_{e1}$  和  $\mathbf{J}_{m1}$ , 电荷源和磁荷源分别为  $\rho_{e1}$  和  $\rho_{m1}$ . 做闭合面  $S_h$ , 该闭合面围成的区域为  $V_h$ .

设  $P$  为  $S_h$  外一点, 在  $P$  点放入  $I\Delta l$  的电流元, 可看作电流  $I$  分布在体积为  $\Delta V$  的小导体圆柱电流段  $V_2$ ,  $\mathbf{e}_P$  为圆柱上表面  $A$  的单位法向方向矢量, 也是电流密度的方向. 当圆柱体积趋于零时, 电流段的电流密度为

$$\mathbf{J}_2 = e_P I \Delta l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_P), \quad (4)$$

式中  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_P)$  是三维  $\delta$  函数, 其量纲是  $\text{m}^{-3}$ .

电流段等效为圆柱  $V_2$  的上表面  $A$  和下表面  $B$  分布等量异种面电荷的电偶极子. 当  $I\Delta l$  为  $1 \text{ A}\cdot\text{m}$  时, 该电流段即为单位电偶极子点源, 可表示为

$$\mathbf{J}_2 = e_P \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_P). \quad (5)$$

根据电流连续性定理可知, 圆柱  $V_2$  的上下表面满足

$$\mathbf{e}_P \cdot \mathbf{J}_2 = j\omega \rho_{sA}, \quad (6a)$$

$$-\mathbf{e}_P \cdot \mathbf{J}_2 = j\omega \rho_{sB}. \quad (6b)$$

于是, 圆柱  $V_2$  的上下表面的面电荷为

$$\rho_{sA} = \frac{1}{j\omega} \mathbf{e}_P \cdot \mathbf{J}_2 = \frac{1}{j\omega} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \quad (7a)$$

$$\rho_{sB} = -\frac{1}{j\omega} \mathbf{e}_P \cdot \mathbf{J}_2 = -\frac{1}{j\omega} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B), \quad (7b)$$

式中  $\omega$  为角频率, 矢径  $\mathbf{r}_P$  在圆柱的上下表面分别化为  $\mathbf{r}_A$  和  $\mathbf{r}_B$ . 做一个包围  $P$  点和  $S_h$  面的闭合面  $S$ , 体积为  $V$ , 如图 1 所示.

由于  $\rho_2$  只分布在  $V_2$  范围, 故  $\rho_2 \mathbf{E}_1$  在区域  $V$  中的积分等于它在区域  $V_2$  中的积分, 即

$$\int_V \rho_2 \mathbf{E}_1 dV = \int_{V_2} \rho_2 \mathbf{E}_1 dV. \quad (8)$$

面电荷可看作载荷层厚度  $h$  趋于零而载荷体密度趋于无限时二者乘积的极限值, 即有:

$$\rho_{sA} = \lim_{h \rightarrow 0; \rho_2 \rightarrow \infty} \rho_2 h, \quad (9a)$$

$$\rho_{sB} = -\lim_{h \rightarrow 0; \rho_2 \rightarrow \infty} \rho_2 h. \quad (9b)$$

将 (7) 式和 (9) 式代入 (8) 式, 有

$$\begin{aligned} \int_V \rho_2 \mathbf{E}_1 dV &= \int_{V_2} \rho_2 \mathbf{E}_1 dV = \int_{S_A} \rho_{sA} \mathbf{E}_1 dS + \int_{S_B} \rho_{sB} \mathbf{E}_1 dS = \int_{S_A} \frac{1}{j\omega} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \mathbf{E}_1 dS \\ &\quad - \int_{S_B} \frac{1}{j\omega} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B) \mathbf{E}_1 dS = \frac{1}{j\omega} [\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_A) - \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_B)] = \frac{1}{j\omega} \mathbf{e}_P \cdot \nabla \mathbf{E}_1. \end{aligned} \quad (10)$$

在区域  $V$  中, 应用动量互易定理, 并利用  $\delta$  函数性质, 有

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{J}_{e1} \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{J}_{m1} \times \mathbf{D}_2 - \rho_{e1} \mathbf{E}_2 + \rho_{m1} \mathbf{H}_2) dV &= - \int_{V_2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) \mathbf{e}_P \\ &\quad \times \mathbf{B}_1 dV + \int_V \rho_2 \mathbf{E}_1 dV = -\mathbf{e}_P \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_P) + \frac{1}{j\omega} \mathbf{e}_P \cdot \nabla \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_P), \end{aligned} \quad (11)$$

式中  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_P)$  和  $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}_P)$  分别为实际源产生的电场强度和磁通密度。

为确定  $S_h$  面上惠更斯源密度, 将实际源拿走, 在  $S_h$  面上放置等效的源  $\mathbf{J}_{es}$ ,  $\mathbf{J}_{ms}$ ,  $\rho_{es}$  和  $\rho_{ms}$ , 如图 2 所示。

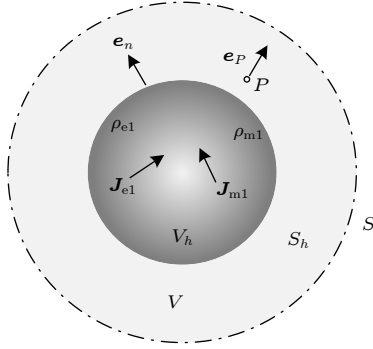


图 1 实际的电流源、磁流源、电荷源和磁荷源产生的场  
Fig. 1. Fields generated by the actual current, magnetic current, charge sources and magnetic charge sources.

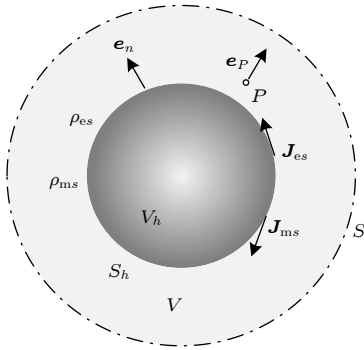


图 2 惠更斯面电流源、面磁流源、面电荷源和磁荷源产生的场  
Fig. 2. Fields generated by the Huygens surface current, magnetic current, charge sources and magnetic charge sources.

等效的面流 (或) 源可看作载流层厚度  $h$  趋于零而载流 (或荷) 体密度趋于无限时二者乘积的极限值, 即有

$$\mathbf{J}_{es} = \lim_{h \rightarrow 0; \mathbf{J}_{e1} \rightarrow \infty} \mathbf{J}_{e1} h, \quad (12a)$$

$$\mathbf{J}_{ms} = \lim_{h \rightarrow 0; \mathbf{J}_{m1} \rightarrow \infty} \mathbf{J}_{m1} h, \quad (12b)$$

$$\rho_{es} = \lim_{h \rightarrow 0; \rho_{e1} \rightarrow \infty} \rho_{e1} h, \quad (12c)$$

$$\rho_{ms} = \lim_{h \rightarrow 0; \rho_{m1} \rightarrow \infty} \rho_{m1} h, \quad (12d)$$

在区域  $V$  中, 有

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{J}_{e1} \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{J}_{m1} \times \mathbf{D}_2 - \rho_{e1} \mathbf{E}_2 + \rho_{m1} \mathbf{H}_2) dV \\ &= \oint_{S_h} (\mathbf{J}_{es} \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{J}_{ms} \times \mathbf{D}_2 - \rho_{es} \mathbf{E}_2 + \rho_{ms} \mathbf{H}_2) dS, \end{aligned} \quad (13)$$

应用动量互易定理, 有

$$\begin{aligned} & \oint_{S_h} (\mathbf{J}_{es} \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{J}_{ms} \times \mathbf{D}_2 - \rho_{es} \mathbf{E}_2 + \rho_{ms} \mathbf{H}_2) dS \\ &= -\mathbf{e}_P \times \mathbf{B}_{h1}(\mathbf{r}_P) + \frac{1}{j\omega} \mathbf{e}_P \cdot \nabla \mathbf{E}_{h1}(\mathbf{r}_P), \end{aligned} \quad (14)$$

式中  $\mathbf{E}_{h1}(\mathbf{r}_P)$  和  $\mathbf{B}_{h1}(\mathbf{r}_P)$  是惠更斯面上的等效源产生的电场强度和磁通密度。

由于  $\mathbf{J}_{es}$ ,  $\mathbf{J}_{ms}$ ,  $\rho_{es}$  和  $\rho_{ms}$  是实际源的等效源, 必有

$$\begin{aligned} & -\mathbf{e}_P \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_P) + \frac{1}{j\omega} \mathbf{e}_P \cdot \nabla \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_P) \\ &= -\mathbf{e}_P \times \mathbf{B}_{h1}(\mathbf{r}_P) + \frac{1}{j\omega} \mathbf{e}_P \cdot \nabla \mathbf{E}_{h1}(\mathbf{r}_P). \end{aligned}$$

考虑到  $\mathbf{e}_P$  方向的任意性, 有

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}_P) = \mathbf{B}_{h1}(\mathbf{r}_P), \quad (15a)$$

$$\nabla \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_P) = \nabla \mathbf{E}_{h1}(\mathbf{r}_P), \quad (15b)$$

在  $V_h$  区域使用动量互易定理, 有

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{J}_{e1} \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{J}_{m1} \times \mathbf{D}_2 - \rho_{e1} \mathbf{E}_2 + \rho_{m1} \mathbf{H}_2) dV \\ &= \oint_{S_h} [-\mathbf{e}_n (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_2) + (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{H}_1) \mathbf{B}_2 + (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{B}_2) \mathbf{H}_1 \\ & \quad + \mathbf{e}_n (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2) - (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D}_1) \mathbf{E}_2 - (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{D}_1] dS, \end{aligned} \quad (16)$$

(11) 式和 (16) 式的体积分相等, 有

$$\begin{aligned} & \oint_{S_h} [-\mathbf{e}_n (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_2) + (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{H}_1) \mathbf{B}_2 + (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{B}_2) \mathbf{H}_1 \\ & \quad + \mathbf{e}_n (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2) - (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D}_1) \mathbf{E}_2 - (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{D}_1] dS \\ &= -\mathbf{e}_P \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_P) + \frac{1}{j\omega} \mathbf{e}_P \cdot \nabla \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_P). \end{aligned} \quad (17)$$

利用 (15) 式, 可知 (14) 式和 (17) 式的面积分相等, 即

$$\begin{aligned} & \oint_{S_h} (\mathbf{J}_{es} \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{J}_{ms} \times \mathbf{D}_2 - \rho_{es} \mathbf{E}_2 + \rho_{ms} \mathbf{H}_2) dS \\ &= \oint_{S_h} [-\mathbf{e}_n (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_2) + (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{H}_1) \mathbf{B}_2 + (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{B}_2) \mathbf{H}_1 \\ & \quad + \mathbf{e}_n (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2) - (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D}_1) \mathbf{E}_2 - (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{D}_1] dS, \end{aligned} \quad (18)$$

利用恒等式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

有

$$-\mathbf{e}_n (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{B}_2) + (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{B}_2) \mathbf{H}_1 = (\mathbf{e}_n \times \mathbf{H}_1) \times \mathbf{B}_2, \quad (19a)$$

$$-\mathbf{e}_n (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2) + (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{D}_1 = (\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_1) \times \mathbf{D}_2, \quad (19b)$$

$$(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{H}_1) \mathbf{B}_2 = (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{B}_1) \mathbf{H}_2, \quad (19c)$$

将 (19) 式代入 (18) 式有

$$\begin{aligned} & \oint_{S_h} (\mathbf{J}_{es} \times \mathbf{B}_2 + \mathbf{J}_{ms} \times \mathbf{D}_2 - \rho_{es} \mathbf{E}_2 + \rho_{ms} \mathbf{H}_2) dS \\ &= \oint_{S_h} [(\mathbf{e}_n \times \mathbf{H}_1) \times \mathbf{B}_2 - (\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_1) \times \mathbf{D}_2 \\ & \quad - (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D}_1) \mathbf{E}_2 + (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{B}_1) \mathbf{H}_2] dS. \end{aligned} \quad (20)$$

比较 (20) 式两端, 可知惠更斯源密度为

$$\mathbf{J}_{es} = \mathbf{e}_n \times \mathbf{H}_1, \quad (21a)$$

$$\mathbf{J}_{ms} = -\mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_1, \quad (21b)$$

$$\rho_{es} = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D}_1, \quad (21c)$$

$$\rho_{ms} = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{B}_1. \quad (21d)$$

(21) 式和 (15) 式表示, 对惠更斯面  $S_h$  外的场点  $P$ , 要产生相同的磁通密度,  $S_h$  面上应放置惠更斯面电流源  $\mathbf{J}_{es}$ 、面磁流源  $\mathbf{J}_{ms}$ 、面电荷源  $\rho_{es}$  和面磁荷源  $\rho_{ms}$ . 对比洛伦兹互易定理导出的等效源, 动量互易定理导出的等效源增加了面电荷源  $\rho_{es}$  和面磁荷源  $\rho_{ms}$ , 但在惠更斯面上, 流源与荷源之间并非独立,  $\mathbf{J}_{es}$  和  $\rho_{es}$  以及  $\mathbf{J}_{ms}$  和  $\rho_{ms}$  分别可以通过电流连续性定理和磁流连续性定理联系起来.

同理, 若在点  $P$  放置单位磁偶极子, 亦可以导出 (21) 式, 类似于 (15) 式, 可以导出:

$$\mathbf{D}_1(\mathbf{r}_P) = \mathbf{D}_{h1}(\mathbf{r}_P), \quad (22a)$$

$$\nabla \mathbf{H}_1(\mathbf{r}_P) = \nabla \mathbf{H}_{h1}(\mathbf{r}_P), \quad (22b)$$

联合 (21) 式和 (22) 式可知, 对惠更斯面  $S_h$  外的场

点  $P$ , 要产生相同的电通密度,  $S_h$  面上应放置惠更斯面电流源  $\mathbf{J}_{es}$ 、面磁流源  $\mathbf{J}_{ms}$ 、面电荷  $\rho_{es}$  和面磁荷  $\rho_{ms}$ .

### 3 结 论

本文利用动量互易定理导出了惠更斯原理, 丰富了电磁场基础理论, 为惠更斯原理及其应用提供了新的研究思路.

### 参考文献

- [1] Lorentz H A 1896 *Amsterdammer Akademie der Wetenschappen* **4** 176
- [2] Chen Y T, Wang J W, Chen W J, Xu J 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 154206 (in Chinese) [陈云天, 王经纬, 陈伟锦, 徐竞 2020 物理学报 **69** 154206]
- [3] Fu G X 1991 *Engineering Electromagnetic Theory and Methods* (Beijing: People's Post and Telecommunications Press) pp58, 59 (in Chinese) [符果行 1991 工程电磁理论方法 (北京: 人民邮电出版社) 第58, 59页]
- [4] Chen C S, Wang B Z, Wang R 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 070201 (in Chinese) [陈传升, 王秉中, 王任 2021 物理学报 **70** 070201]
- [5] Zhao Q, Li J, Liu S, Liu G Q, Liu J 2021 *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **70** 1
- [6] Feld Y N, Miller D G 1992 *Soviet Phys. Doklady.* **37** 235
- [7] Tai C T. 1992 *IEEE Trans. Antennas. Prop.* **40** 675
- [8] Rumsey V H 1954 *Phys. Rev.* **94** 1483
- [9] Zhao S R 1987 *Acta Electron. Sin.* **15** 88 (in Chinese) [赵双任 1987 电子学报 **15** 88]
- [10] Lindell I V, Sihvola A 2020 *Prog. Electromagn. Res. Lett.* **89** 1
- [11] Liu G Q, Li Y Y, Liu J 2020 *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.* **19** 2159
- [12] Liu G Q, Liu J, Li Y Y 2020 *Generalized Reciprocity Theorem for Electromagnetic Fields* (Beijing: Science Press) pp38, 53, 95–101 (in Chinese) [刘国强, 刘婧, 李元园 2020 电磁场广义互易定理 (北京: 科学出版社) 第38, 53, 95–101页]
- [13] Quan S H 2013 *Advanced Engineering Electromagnetic Field Theory* (Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press) pp149–151 (in Chinese) [全绍辉 2013 高等工程电磁场理论 (北京: 北京航空航天大学出版社) 第149–151页]

# Huygens' principle derived by using momentum reciprocity theorem of electromagnetic field\*

Liu Guo-Qiang<sup>1)2)†</sup> Liu Jing<sup>1)2)</sup>

1) (*Institute of Electrical Engineering, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

2) (*School of Electronic, Electrical and Communication Engineering, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

( Received 17 December 2021; revised manuscript received 11 April 2022 )

## Abstract

The classical reciprocity theorem of electromagnetic field proposed by Lorentz H.A. in 1896 is one of the important theories of electromagnetics. The Lorentz reciprocity theorem is widely used in many fields such as communication, antenna signal transmission, and electromagnetic imaging. The Lorentz reciprocity theorem is an “energy-based” reciprocity theorem. Over the past hundred years, some new reciprocity theorems of electromagnetic field have been discovered, including reciprocity theorems in frequency domain and time domain. In 2020, Lindell et al. extended the concept of the 'Rumsey reaction' in a differential form to include both the Lorentz force density reaction term and the power density reaction term. In the same year, Liu et al. derived the momentum reciprocity theorem from the Maxwell's equations. The momentum reciprocity theorem, like the Lorentz reciprocity theorem, can be used for both theoretical analysis and practical applications. Huygens' principle is usually derived by the Lorentz reciprocity theorem. In this paper, the momentum reciprocity theorem is employed to derive the Huygens' principle.

**Keywords:** Lorentz reciprocity, omentum eciprocity, Huygens' principle

**PACS:** 03.50.De, 04.30.Nk

**DOI:** 10.7498/aps.71.20212334

\* Project supported by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51937010) and the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51907191).

† Corresponding author. E-mail: [gqliu@mail.iee.ac.cn](mailto:gqliu@mail.iee.ac.cn)