

基于同位素链核电荷半径的新关系

焦宝宝

New relation for nuclear charge radius based on isotope chain

Jiao Bao-Bao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 152101 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20212343

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212343>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

原子核电荷半径的研究

Study of nuclear charge radius

物理学报. 2020, 69(16): 162101 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191643>

有机半导体中极化子运动的同位素效应

Isotope effect of carrier transport in organic semiconductors

物理学报. 2020, 69(24): 246701 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200789>

激光烧蚀-吸收光谱测量铀同位素比实验研究

Measurement of uranium isotope ratio by laser ablation absorption spectroscopy

物理学报. 2021, 70(16): 163201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210193>

托卡马克离子温度梯度湍流输运同位素定标修正中杂质的影响

Role of impurities in modifying isotope scaling law of ion temperature gradient turbulence driven transport in tokamak

物理学报. 2018, 67(19): 195203 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180703>

相对论多组态相互作用方法计算Mg⁺离子同位素位移

Calculation of isotope shift of Mg⁺ ion by using the relativistic multi-configuration interaction method

物理学报. 2018, 67(1): 013101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171817>

Al⁺离子3s² 1S₀→3s3p 3,1P_{1,0}跃迁同位素偏移的理论研究

Theoretical study on the isotope shift factors for the 3s² 1S₀ → 3s3p 3,1P_{1,0} transitions in Al⁺ ion

物理学报. 2018, 67(5): 053101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172261>

基于同位素链核电半径的新关系*

焦宝宝†

(东华理工大学核科学与工程学院, 南昌 330013)

(2021 年 12 月 18 日收到; 2022 年 4 月 8 日收到修改稿)

系统研究了 2013 年发表的核电半径数据库中的实验值, 基于这个数据库中大量的同位素链核电半径实验值, 对相邻 3 个同位素核电半径之间的关系进行分析, 进而得到一个新的核电半径关系: 一个原子核的电荷半径等于其左右相邻的两个同位素核电半径之和的一半. 运用该关系对质量数 $A \geq 20$ (质子数 $Z \geq 10$ 和中子数 $N \geq 10$) 的核电半径进行拟合, 结果发现核电半径的理论值与实验值符合得较好, 均方根偏差 (RMSD) 仅为 0.00471 fm; 对质量数 $A \geq 54$ 的核电半径进行拟合时, 得到理论值和实验值的 RMSD 仅为 0.00337 fm. 同时还添加了奇偶摆动修正来提高核电半径的精确度. 此外, 利用这个新的核电半径关系, 结合 1999 年和 2004 年发表的数据库对一些核电半径进行预言, 得到核电半径的预言值与 2013 年发表的数据库中的实验值符合得较好; 基于 CR2013 数据库得到的预言值与近几年新测得的核电半径的实验值也较接近. 研究结果表明新的核电半径关系对电荷半径的描述和预言具有一定的精确性和可靠性.

关键词: 核电半径, 同位素链, 奇偶摆动**PACS:** 21.10.Ft, 21.10.-k**DOI:** 10.7498/aps.71.20212343

1 引言

核电半径 (nuclear charge radius, CR) 的系统研究对核物理、原子物理以及天体物理等相关学科具有重要的意义, 它是原子核最基本的性质之一, 有助于研究原子核的结构 (中子皮 (neutron skin)、形状相变等 [1–3]). 原子核电半径的研究分为实验测量和理论计算两方面: 实验上已经有许多方法可用来测量原子核电半径, 如 μ^- 原子 X 射线 [4,5]、高能电子散射 [6]、原子光谱 [7,8] 等技术都可用来测量核电半径; 理论上也有许多模型与公式用来计算和预言核电半径, 如 Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) 理论 [9,10]、唯象公式 [11,12]、Garvey-Kelson (G-K) 公式 [13]、原子核的新电荷半径关系 [14,15]、 $A^{1/3}$ 律 [16–18] 的单参数公式、朴素贝叶斯概率 [19] 等. 目前, 已经有许多核电半径实验数据库, 最新的数据库是发表于 2013 年的 CR2013 数

据库 [20] (约 909 个实验值), 它比发表于 2004 年的 CR2004 [21] 数据库 (约 799 个实验值) 多大约 110 个实验值, 比发表于 1999 年的 CR1999 [22] 数据库 (约 285 个实验值) 多大约 514 个核电半径实验值, 这些数据库有助于系统性地研究原子核电半径. 此外, 每年还有大量的核电半径 [23–30] 方面的科研成果, 可见核电半径依然是一个重要的研究方向.

核电半径理论研究大概分为两个方向. 第一个方向是在核电半径的 $A^{1/3}$ 律和 $Z^{1/3}$ 律的基础上直接得到核电半径的计算值, 此外还会添加一些修正项来研究核电半径. 基于常用的 $A^{1/3}$ 律单参数公式, 文献 [16, 17] 的作者研究了同位旋修正对核电半径的影响, 文献 [18] 提出了 Casten 因子项和奇偶摆动项的修正来研究核电半径; 基于曾谨言 [31] 提出的 $Z^{1/3}$ 律的单参数公式, 张双全等 [32] 研究了同位旋对 $Z^{1/3}$ 律公式得到核电半径的影响. 第二个方向是在近似模型或相邻核电半径关系的基础上间接得到原子核电半径的计算值:

* 东华理工大学博士科研启动基金 (批准号: DHBK2019151) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: baobaojiao91@126.com

HFB 理论^[9,10] 计算电荷半径的均方根偏差 (RMSD) 通常在 0.027 fm 左右; 唯象公式^[11,12] 的 RMSD 大约为 0.022 fm; 模拟 6 个相邻原子核的电荷半径之间的 G-K 关系^[13] 来计算电荷半径, 计算值和实验值之间的 RMSD 约为 0.01 fm; 文献^[14, 15] 研究质量数 $Z, N \geq 2$ 的 4 个相邻原子核的电荷半径, 得到 4 种共 16 个关系式, 利用这 16 个关系式, 结合 CR2013 数据库得到核电荷半径的计算值, RMSD 为 0.0078 fm; 此外, 文献^[25, 33] 也基于相邻原子核电荷半径之间的关系对核电荷半径进行了研究, 尤其是对未知核电荷半径的个数进行了大量的预言, 得到的预言个数分别为 830 和 1647. 由此可知, 利用相邻核电荷半径之间的关系进行研究具有一定的优越性.

本文在文献^[13–15, 25, 33] 的基础上进行分析, 通过研究 3 个相邻同位素核的电荷半径得到一个简单的关系式. 利用这个关系式结合 CR2013 数据库计算质量数 $A \geq 20$ (质子数 $Z \geq 10$ 和中子数 $N \geq 10$) 的核电荷半径, 得到的计算值与实验值之间的 RMSD 为 0.00471 fm, 并且为了得到更精确的核电荷半径, 还研究了奇偶摆动项^[18] 的修正对核电荷半径的影响. 接着运用得到的关系式结合 CR1999, CR2004 和 CR2013 数据库中的实验值外推得到核电荷半径的预言值, 将预言值和实验值进行比较, 进而来检验这种方法的可靠性和精确性. 最后对这项研究进行了具体的分析和总结.

2 核电荷半径的研究

由 CR2013 数据库分析可知, 中质量核和重核的同位素核电荷半径的实验值较多, 且 CR2013 数据库中一共有 909 个核电荷半径, 质量数 $A \geq 20$ (质子数 $Z \geq 10$ 和中子数 $N \geq 10$) 的有 877 个, 占数据库核电荷半径实验值总个数的 96.5%. 基于 CR2013 数据库以上的两个特点, 本文对质量数 $A \geq 20$ 的原子核相邻同位素核电荷半径之间的关系进行了研究.

由文献^[34–36] 中三参数的中子奇偶质量差公式很容易类比得到 3 个相邻同位素核电荷半径的关系式, 称为 $dR_n(Z, N)$:

$$dR_n(Z, N) = R(Z, N+1) - 2R(Z, N) + R(Z, N-1), \quad (1)$$

其中 $R(Z, N)$ 代表质子数为 Z , 中子数为 N 的原子核

电荷半径. 基于 CR2013 数据库选取的 877 个质量数 $A \geq 20$ (质子数 $Z \geq 10$ 和中子数 $N \geq 10$) 核电荷半径的实验值结合 (1) 式得到 600 个 $dR_n(Z, N)$, 如图 1 所示, 其中渐变颜色的菱形代表原子核的 $dR_n(Z, N)$.

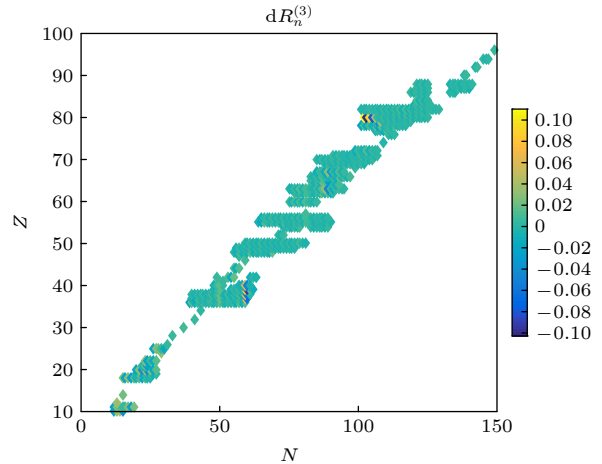


图 1 600 个原子核的 $dR_n(Z, N)$
Fig. 1. The $dR_n(Z, N)$ of 600 nuclei.

由图 1 可知, 一些原子核的 $dR_n(Z, N)$ 较大, 统计性较差, 尤其是当 $A \geq 54$ 时, 有些原子核的 $dR_n(Z, N)$ 绝对值异常大. 研究发现这些 $dR_n(Z, N)$ 异常大是因为有些核电荷半径比较特殊, 不太符合同位素核电荷半径的规律, 这些特殊的核为 ^{97}Rb , ^{98}Sr , ^{99}Y , ^{100}Zr , ^{101}Nb , ^{152}Eu , ^{154}Tb , ^{156}Ho , ^{187}Au , ^{181}Hg , ^{183}Hg , ^{185}Hg , 可分为两种情况分析 (图 2 和图 3). 图 2(a) 中的空心圈、五角星、正方形、菱形和三角形分别代表 $\text{Rb}(Z=37)$, $\text{Sr}(Z=38)$, $\text{Y}(Z=39)$, $\text{Zr}(Z=40)$ 和 $\text{Nb}(Z=41)$ 同位素链核电荷半径的实验值. 由图 2(a) 可知, 这些同位素链在中子数 $N=60$ 时 (^{7}Rb , ^{98}Sr , ^{99}Y , ^{100}Zr , ^{101}Nb) 核电荷半径出现了拐点, 导致用这些核电荷半径计算得到的 $dR_n(Z, N)$ 的绝对值比较大, 也就是图 1 中的那些统计性比较差的菱形. 此外由图 2(a) 可知, 在 $N=50$ 时核电荷半径也有一个拐点, 这是因为中子数是幻数的原因, 但是对于 $dR_n(Z, N)$ 绝对值的影响不是太大, 这里暂不考虑幻数的问题; 图 2(b) 中的空心圈、五角星和正方形分别代表 $\text{Eu}(Z=63)$, $\text{Tb}(Z=65)$ 和 $\text{Ho}(Z=67)$ 同位素链核电荷半径的实验值, 与图 2(a) 中的情况类似, 同位素链在中子数 $N=89$ 时 (^{152}Eu , ^{154}Tb , ^{156}Ho) 核电荷半径出现了拐点, 因而利用这些核电荷半径

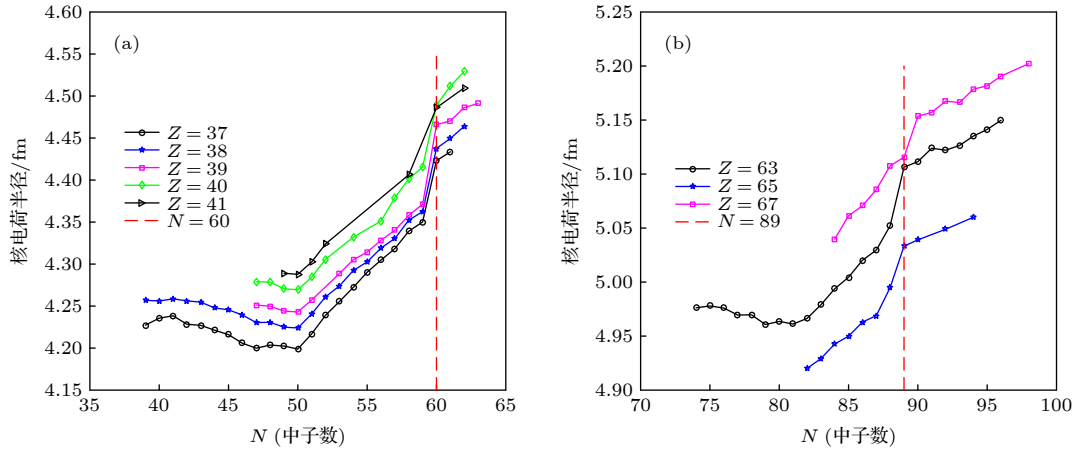


图 2 (a) Rb ($Z=37$), Sr ($Z=38$), Y ($Z=39$), Zr ($Z=40$) 和 Nb ($Z=41$) 同位素链核电半径的实验值; (b) Eu ($Z=63$), Tb ($Z=65$) 和 Ho ($Z=67$) 同位素链核电半径的实验值

Fig. 2. (a) Nuclear charge radii of Rb ($Z=37$), Sr ($Z=38$), Y ($Z=39$), Zr ($Z=40$) and Nb ($Z=41$) elements; (b) nuclear charge radii of Eu ($Z=63$), Tb ($Z=65$) and Ho ($Z=67$) elements.

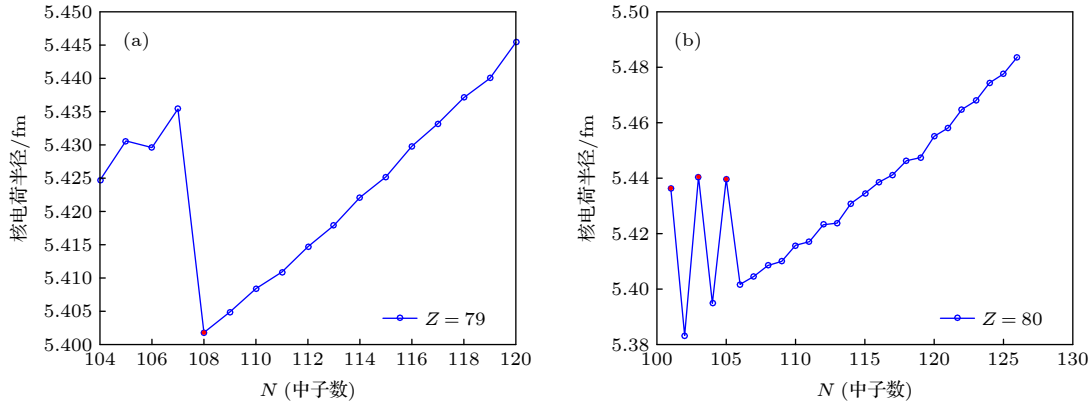


图 3 (a) Au ($Z=79$) 同位素链核电半径的实验值; (b) Hg ($Z=80$) 同位素链核电半径的实验值

Fig. 3. (a) Nuclear charge radii of Au ($Z=79$) elements; (b) nuclear charge radii of Hg ($Z=80$) elements.

计算得到的 $dR_n(Z, N)$ 的绝对值也较大, 因此在研究时删除了以上 8 个原子核电半径的实验值.

图 3(a) 和图 3(b) 中的情况更为特殊, 某些核电半径的跳跃更不符合同位素链核电半径的规律. 图 3(a) 中的空心圈代表 Au ($Z=79$) 同位素链的核电半径的实验值, 实心点表示质子数为 79 和中子数为 108 的 ^{187}Au 核电半径, 由图 3(a) 可知, Au 的同位素链在中子数为 108 时核电半径呈跳跃式变化; 图 3(b) 中的空心圈代表 Hg ($Z=80$) 同位素链的核电半径, 实心点表示质子数为 80 和中子数分别为 101, 103, 105 的 (^{181}Hg , ^{183}Hg , ^{185}Hg) 核电半径实验值, 图中曲线表明 Hg 的同位素链中子数为 101, 103 和 105 时核电半径呈跳跃式变化. 以上这些跳跃式变化的核电半径导致有些 $dR_n(Z, N)$ 的绝对值较大, 统计性较差, 因

此研究中也删除了这 4 个核电半径的实验值.

由图 2 和图 3 的分析可知, 从质量数 $A \geq 20$ (质子数 $Z \geq 10$ 和中子数 $N \geq 10$) 的 877 个核电半径中删除了 12 个核电半径的实验值, 基于剩下的 865 个核电半径的实验值, 结合 (1) 式计算得到 573 个 $dR_n(Z, N)$, 如图 4 所示, 其中空心圈表示 $dR_n(Z, N)$. 从图 4 可看出, 当质量数 $A \geq 54$ 时, $dR_n(Z, N)$ 的统计性比较好; 质量数 $A < 54$ 时, $dR_n(Z, N)$ 的统计性较差.

本文计算了质量数 A 相同的原子核电半径差的平均值, 图 4 中的绿色曲线代表利用平均值得到的电荷半径差曲线, 由此曲线的特点研究分析得到 3 个相邻同位素核电半径之间的新关系式:

$$\begin{aligned} & R(Z, N+1) - 2R(Z, N) + R(Z, N-1) \\ & = dR_n(Z, N) \approx 0. \end{aligned} \quad (2)$$

图 4 中的粗直线就是利用新关系式 $dR_n(Z, N) = 0$ 得到的, 进而, 利用得到的新关系式结合 (1) 式来计算核电荷半径.

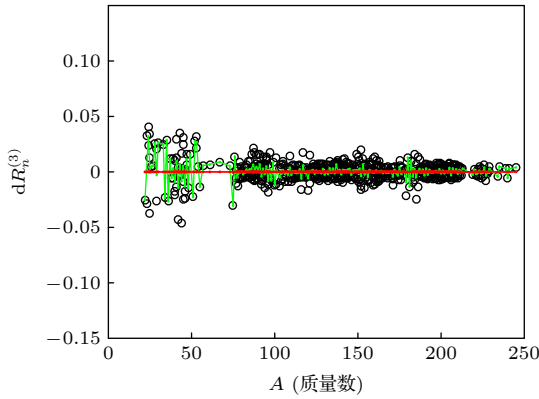


图 4 573 个原子核的 $dR_n(Z, N)$

Fig. 4. The $dR_n(Z, N)$ of 573 nuclei.

2.1 均方根误差和不确定度

基于新关系式 (2) 得到核电荷半径的计算公式:

$$R^{\text{cal}}(Z, N) = \frac{R(Z, N+1) + R(Z, N-1) - 0}{2}. \quad (3)$$

由 (3) 式可知, 一个原子核的电荷半径等于其左右相邻的两个同位素核电荷半径之和的一半, 也可知新关系式在计算过程中仅涉及到 2 个相邻同位素的核电荷半径, 关系式较为简便, 且 CR2013 数据库中大量同位素核电荷半径的特点是与我们的研究同位素核电荷半径之间关系的思想相符合, 有助于我们更好地对数据库进行研究. 此外, CR2013 数据库中有 909 个实验值, 利用 (3) 式就可以计算得到 573 个核电荷半径, 由此可知这一新关系式对 NCR2013 数据库具有较好的研究能力.

通过 (3) 式结合 CR2013 数据库得到核电荷半径的理论计算值, 然后得到计算值与 CR2013 中的实验测量值之间的 RMSD, 公式为

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_i^{\text{exp}} - R_i^{\text{cal}})^2}. \quad (4)$$

由 (3) 式和 (4) 式计算得到的 573 个核电荷半径的计算值和实验值之间的 RMSD 为 0.00471 fm; 当研究 $Z, N \geq 2$ 的原子核电荷半径时, 得到的 RMSD 为 0.0082 fm; 当原子核的范围为 $Z < 20$ 和 $Z \geq 20$ 时, 得到的 RMSD 分别为 0.0261 fm 和 0.0041 fm; 当 $A \geq 54$ 时, 得到 518 个核电荷半径的

计算值和实验值之间的 RMSD 为 0.00337 fm. 其实由图 4 也可知, 当质量数 A 较大时, $dR_n(Z, N)$ 的统计性更好, 因此 RMSD 会更小. 文献 [14, 15] 利用原子核的新电荷半径关系计算 $Z, N \geq 2$ 原子核电荷半径得到的 RMSD 为 0.0078 fm; 当原子核的范围为 $Z < 20$ 和 $Z \geq 20$ 时, 得到的 RMSD 分别为 0.0194 和 0.0069 fm. 由此可知, 本文的新关系式研究 $Z, N \geq 2$ 原子核电荷半径得到的 RMSD 和 $dR_n(Z, N)$ 方法相差不大; 当研究 $Z \geq 20$ 原子核电荷半径时, RMSD 比 $dR_n(Z, N)$ 方法精确一些; 当研究 $Z < 20$ 原子核的电荷半径时, RMSD 比 $dR_n(Z, N)$ 方法要大, 由此可知我们的新关系式可以与文献 [14, 15] 中的方法相媲美. 此外, 利用本文的新关系式研究 $Z, N \geq 2$ 原子核电荷半径的 RMSD 要比全局质量关系 [9,10,12] 小一些, 文献 [9, 10] 中利用 HFB 理论得到的 RMSD 为 0.027 fm, 文献 [12] 基于 WS 方法得到的 RMSD 为 0.022 fm. 这里需要说明的是, 由 (2) 式可以变换出其他两个计算公式: $R(Z, N+1) = 2R(Z, N) - R(Z, N-1)$ 和 $R(Z, N-1) = 2R(Z, N) - R(Z, N+1)$, 当利用这两个公式对不同区域的核电荷半径进行计算时, RMSD 变为 (3) 式的 2 倍.

另外, 本文简述了核电荷半径理论计算值和预言值不确定度的计算方法. 以 (3) 式为例, 利用文献 [37–39] 中的最大似然法程序可以得到 573 个核电荷半径理论计算公式的不确定度 $\sigma_{\text{th}}^*(A)$. 由文献 [37, 38] 可以得到核电荷半径预言值不确定度 $\sigma_{\text{pred}}(Z, N)$ 的表达式:

$$[\sigma_{\text{pred}}(Z, N)]^2 = \frac{1}{4}[\sigma_{\text{exp}}(Z, N+1)]^2 + \frac{1}{4}[\sigma_{\text{exp}}(Z, N-1)]^2 + \frac{1}{4}[\sigma_{\text{th}}(A)]^2. \quad (5)$$

其中 $\sigma_{\text{th}}(A)$ 的取值为质量数 A 相同区域时不确定度 $\sigma_{\text{th}}^*(A)$ 的值, $\sigma_{\text{exp}}(Z, N+1)$ 和 $\sigma_{\text{exp}}(Z, N-1)$ 分别代表 CR2013 数据库中核电荷半径 $R(Z, N+1)$ 与 $R(Z, N-1)$ 实验值的误差或不确定度.

2.2 核电荷半径的修正

上述计算结果表明, 利用相邻 3 个同位素核电荷半径之间的新关系式 (2) 得到核电荷半径的计算值与 CR2013 数据库中的实验值符合得较好. 本文主要利用同位素电荷半径差 $dR_n^{(3)}(Z, N)$ 来计算核电荷半径, 所以 $dR_n^{(3)}(Z, N)$ 越精确就会得到越

精确的核电荷半径, 下面研究奇偶摆动修正项对核电荷半径的影响.

由文献 [18] 可知, 大多数的同位素链, 偶偶核的电荷半径比相邻两个奇偶核半径之和的平均值还要大, 而奇奇核正好相反, 奇奇核的电荷半径比相邻的两个奇偶核半径之和的平均值要小, 因此接下来研究奇偶摆动修正对核电荷半径的影响, 修正后的 $dR_n^{\text{cal}}(Z, N)$ 为

$$dR_n^{\text{cal}}(Z, N) = d \cdot \frac{\delta}{A^{2/3}}, \quad (6)$$

其中, 当为偶偶核时 $\delta = 1$, 为奇奇核时 $\delta = -1$, 为奇偶核和偶奇核时 $\delta = 0$. 基于最小二乘法得到的最佳拟合参数为: $d = 0.11$, 计算得到的 RMSD 为 $\sigma = 0.00439$ fm, 减小了 0.00032 fm, 减小约 6.8% . 由此可知, 奇偶摆动项的添加对核电荷半径精确度的提高具有一定的意义.

3 核电荷半径的预言

所有的模型和公式都是为了系统地研究核电荷半径, 此外, 核电荷半径的精确预言也是一项重要工作. 本节基于 CR1999, CR2004 和 CR2013 数据

库结合新关系式 (2) 来外推得到预言值, 然后与已测得的实验值进行比较, 进而来研究本文方法的精确性和可靠性. 由 (3) 式变换得到核电荷半径的预言公式:

$$R^{\text{cal}}(Z, N) = \frac{R(Z, N+1) + R(Z, N-1)}{2}, \quad (7)$$

$$R^{\text{cal}}(Z, N) = 2R(Z, N+1) - R(Z, N+2), \quad (8)$$

$$R^{\text{cal}}(Z, N) = 2R(Z, N-1) - R(Z, N-2). \quad (9)$$

基于 CR1999 数据库结合 (7) 式—(9) 式得到核电荷半径的预言值, 这里需要说明的是 CR1999 数据库中的实验值用 CR2013 中新测得的实验值进行替换. 如果 (7) 式—(9) 式中的 3 个公式或其中 2 个公式得到同一个核电荷半径的预言值, 则取它们的平均值. 基于替换后的 CR1999 数据库得到约 100 个预言值, 其中 42 个核电荷半径的预言值在 CR2013 数据库中有相应的实验值, 如表 1 所列, 把这些预言值列出来和实验值进行对比. 其中 2013^{Exp} 代表 CR2013 数据库中的实验值, R_{th1} 代表利用替换后的 CR1999 数据库得到的预言值, dev1 代表 CR2013 数据库中的实验值与预言值 R_{th1} 的差值.

表 1 基于 CR1999 数据库得到的预言值与 CR2013 数据库中的实验值进行对比

Table 1. Difference between the predicted values of nuclear charge radius (obtained by the CR1999 database) and experimental values in the CR2013 database.

Nucleus	2013 ^{Exp} /fm	R_{th1} /fm	dev1/fm	Nucleus	2013 ^{Exp} /fm	R_{th1} /fm	dev1/fm
²³ Ne	2.9104	2.9355	-0.0251	¹²⁶ Sn	4.6833	4.6795	0.0038
³⁷ Ar	3.3908	3.3967	-0.0059	¹²⁷ Xe	4.7747	4.7761	-0.0014
³⁹ Ar	3.4093	3.4151	-0.0058	¹³³ Xe	4.7831	4.7895	-0.0064
⁴⁰ K	3.4381	3.4434	-0.0053	¹³³ Ba	4.8286	4.835	-0.0064
⁴¹ Ca	3.478	3.5068	-0.0288	¹³⁹ Ba	4.8513	4.8442	0.0071
⁴⁵ Ca	3.4944	3.5235	-0.0291	¹⁴¹ Nd	4.9057	4.8992	0.0065
⁴⁵ Ti	3.5939	3.6178	-0.0239	¹⁴⁶ Sm	4.9808	4.9742	0.0066
⁴⁷ Ca	3.4783	3.4862	-0.0079	¹⁵¹ Sm	5.055	5.0622	-0.0072
⁶⁷ Zn	3.953	3.9575	-0.0045	¹⁵³ Sm	5.0925	5.0936	-0.0011
⁷⁹ Kr	4.2034	4.2004	0.003	¹⁶⁰ Dy	5.1951	5.185	0.0101
⁸¹ Kr	4.1952	4.1956	-0.0004	¹⁶⁹ Yb	5.2771	5.28	-0.0029
⁸⁵ Kr	4.1846	4.1878	-0.0032	¹⁷⁵ Yb	5.3135	5.3166	-0.0031
⁸⁵ Sr	4.2304	4.2358	-0.0054	¹⁷⁵ Hf	5.3191	5.3263	-0.0072
⁸⁶ Rb	4.2025	4.2013	0.0012	¹⁸⁷ Os	5.3933	5.3961	-0.0028
⁸⁹ Sr	4.2407	4.2231	0.0176	¹⁹³ Pt	5.4191	5.4202	-0.0011
⁸⁹ Zr	4.2706	4.2543	0.0163	¹⁹⁵ Pb	5.4389	5.4442	-0.0053
¹⁰⁷ Cd	4.5466	4.548	-0.0014	¹⁹⁷ Hg	5.4412	5.4452	-0.004
¹⁰⁹ Cd	4.5601	4.5678	-0.0077	²⁰¹ Hg	5.4581	5.4614	-0.0033
¹⁰⁹ Sn	4.5679	4.5734	-0.0055	²⁰³ Hg	5.4679	5.4696	-0.0017
¹¹⁴ In	4.6056	4.6083	-0.0027	²⁰⁴ Tl	5.4704	5.4712	-0.0008
¹¹⁵ Cd	4.6114	4.6153	-0.0039	²³⁶ U	5.8431	5.8383	0.0048

利用 CR2004 数据库结合 (7) 式—(9) 式得到核电荷半径的预言值, 这里需要说明的是 CR2004 数据库中的实验值用 CR2013 中新测得的实验值进行替换. 如果 (7) 式—(9) 式中的 3 个公式或其中 2 个公式得到同一个核电荷半径的预言值, 也取它们的平均值. 由于在 CR2004 数据库中已知核电荷半径的同位素比 CR1999 数据库多, 因此基于 CR2004 数据库得到的预言值要比 CR1999 更多一些. 研究得到的约 168 个预言值中, 只有 19 个核电荷半径在数据库 CR2013 中有实验值. 把这 19 个预言值与 CR2013 数据库中的实验值进行对比, 如表 2 所列, 2013^{Exp} 代表 CR2013 数据库中的实验值, R_{th2} 代表基于替换后的 CR2004 数据库得到的预言值, dev2 代表 CR2013 数据库中的实验值与预言值 R_{th2} 的差值.

表 2 基于 CR2004 数据库得到的预言值与 CR2013 数据库中的实验值进行对比

Table 2. Difference between the predicted values of nuclear charge radius (obtained by the CR2004 database) and experimental values in the CR2013 database.

Nucleus	$2013^{\text{Exp}}/\text{fm}$	R_{th2}/fm	$\text{dev2}/\text{fm}$
^{39}Ga	3.4595	3.4772	-0.0177
^{41}Ar	3.4251	3.4455	-0.0204
^{45}Ti	3.5939	3.6178	-0.0239
^{67}Zn	3.953	3.9575	-0.0045
^{77}Sr	4.2569	4.2536	0.0033
^{117}Cd	4.6136	4.6258	-0.0122
^{126}Sn	4.6833	4.6795	0.0038
^{127}Xe	4.7747	4.7761	-0.0014
^{133}Xe	4.7831	4.7895	-0.0064
^{137}Eu	4.9762	4.9798	-0.0036
^{155}Yb	5.104	5.1047	-0.0007
^{157}Yb	5.1324	5.1358	-0.0034
^{159}Yb	5.1629	5.1656	-0.0027
^{169}Yb	5.2771	5.2787	-0.0016
^{171}Hf	5.3041	5.2986	0.0055
^{175}Yb	5.3135	5.3166	-0.0031
^{189}Pb	5.4177	5.4215	-0.0038
^{195}Pb	5.4389	5.4428	-0.0039
^{204}Tl	5.4704	5.4725	-0.0021

由表 1 和表 2 可知, 利用数据库 CR1999 和 CR2004 结合本文的新关系式得到的预言值与 CR2013 中的实验值符合得较好. 也可以知道, 中质量核和重核电荷半径的预言值与实验值更接近. 其实

由图 4 也可得到该结论, 因为质量数 $A \geq 54$ 的原子核的 $dR_n(Z, N)$ 统计性更好, 所以未知核电荷半径原子核的 $dR_n(Z, N)$ 预言值越精确, 得到的核电荷半径的预言值也越精确.

本文也利用核电荷半径之间的新关系式结合 CR2013 数据库进行预言, 将得到的预言值与近期主流的一些核电荷半径模型 [25,33] 的预言值进行对比. 文献 [25] 利用原子核的新电荷半径关系得到大量的核电荷半径预言值 R_{np} , 文献 [33] 利用 δR 的经验公式与 WS^* (Weizsäcker-Skyrme) 模型得到的预言值分别为 R_{emp} 和 R_{ws} , 此外文献 [33] 也利用 δR 的经验公式与 WS^* 模型得到核电荷半径加权平均值 $R_{\text{emp-ws}}$. 本文基于 CR2013 数据库得到核电荷半径的预言值约为 200 个, 其中与文献 [25, 33] 有共同预言值的核电荷半径个数为 80, 对比结果如图 5 所示. 图 5(a) 中的实心圆圈代表本文的预言值 R_{th3} 与文献 [25] 中预言值 R_{np} 之间的差值; 图 5(b)—(d) 中的实心正方形、实心菱形和实心三角形分别代表文献 [33] 中的预言值 R_{emp} , R_{ws} 和 $R_{\text{emp-ws}}$ 与 R_{th3} 之间的差值.

由图 5 可知, 本文的预言值与文献 [25, 33] 中利用几种方法得到预言值的精度可以媲美. 此外, 本文的新公式也比较简单方便, 但是由于是以同位素核为基础进行研究的, 所以只能依靠已知核电荷半径的同位素核个数来预言, 因此可预言的核电荷半径的个数会受到限制.

此外, 近几年实验上对于核电荷半径的研究也很多 [27,28,40–44], 因此有许多新的核电荷半径被测出来, 表 3 列出一些预言值与实验值进行对比. 其中 R_{exp} 代表近几年新测得的核电荷半径, R_{th3} 代表本文基于 CR2013 得到的预言值, dev3 代表新测得的实验值 R_{exp} 与预言值 R_{th3} 之间的差值. 由表 3 可知, 预言值与新测得的实验值之间的误差比较小, ^{37}K 和 ^{64}Cu 的精确度甚至可以达到 0.0011 fm 和 0.005 fm. 对比结果进一步表明利用本文的新关系式结合数据库得到核电荷半径的预言值具有一定的可靠性.

以上的对比结果表明本文得到的新关系式可以较好地描述 CR2013 数据库, 还可以结合 CR1999, CR2004 和 CR2013 数据库对未知的核电荷半径进行预言, 而且得到的预言值具有一定的精确性和可靠性.

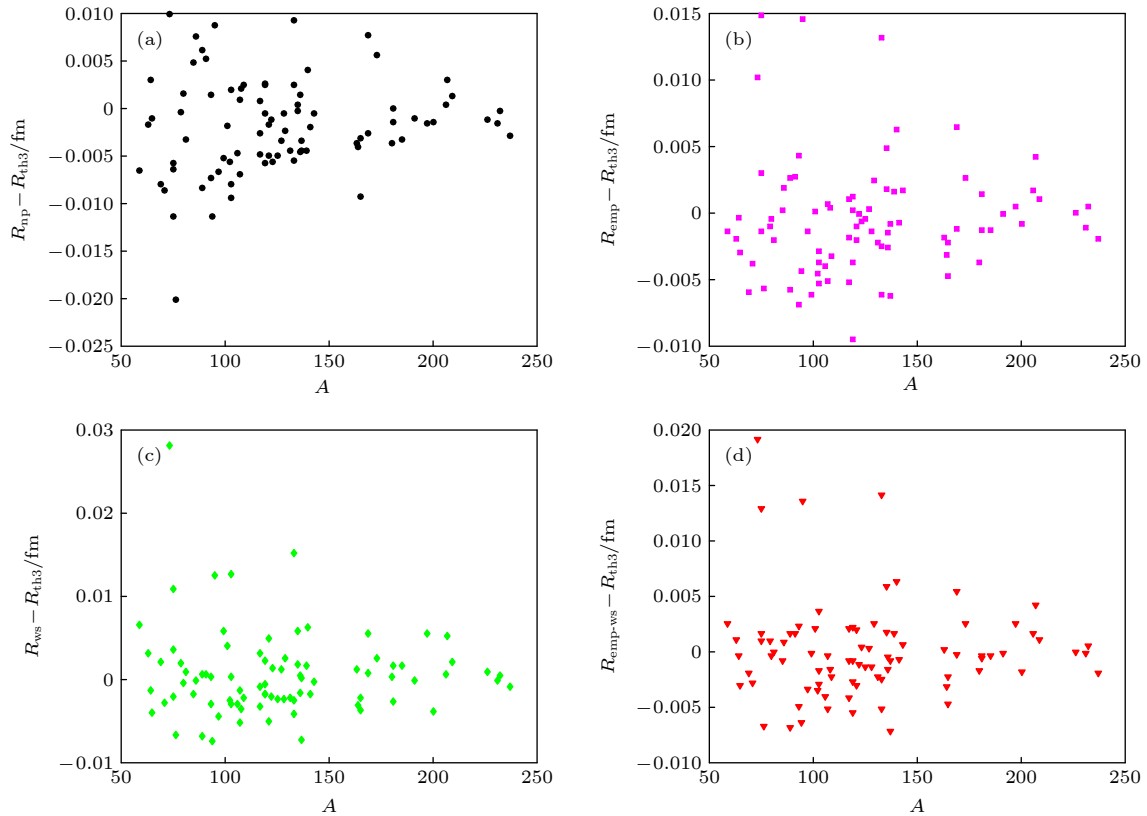


图 5 基于 CR2013 数据库得到的预言值与其他模型 [25,33] 得到的预言值对比图

Fig. 5. Difference for predicted values of nuclear charge radius between in our paper (obtained by the CR2013 database) and others' papers [25,33].

表 3 基于 CR2013 数据库得到的预言值与近几年测得的实验值 [27,28,40,41] 进行对比

Table 3. Difference between the predicted values of nuclear charge radius (obtained by the CR2013 database) and experimental values in recent years.

Nucleus	R_{th3}/fm	R_{exp}/fm	dev3/fm
^{37}K	3.4179	3.419 ^[28]	-0.0011
^{48}K	3.4510	3.4825 ^[28]	-0.0315
^{64}Cu	3.8923	3.8873 ^[27,40]	0.005
^{65}Zn	3.9420	3.9164 ^[41]	0.0256
^{69}Zn	3.9769	3.9524 ^[41]	0.0245

4 结 论

利用相邻核电荷半径之间的关系进行研究具有一定的优越性, 因此, 本文在文献 [13–15, 25, 33] 的基础上对 CR2013 数据库中质量数 $A \geq 20$ (质子数 $Z \geq 10$ 和中子数 $N \geq 10$) 的同位素链核电荷半径的实验值进行了分析研究, 进而提出一个新的核电荷半径关系式: 原子核的电荷半径等于其左右相邻的两个同位素核电荷半径之和的一半. 利用

这个新的关系式结合 CR2013 数据库对质量数 $A \geq 20$ (质子数 $Z \geq 10$ 和中子数 $N \geq 10$) 的核电荷半径进行计算, RMSD 仅为 0.00471 fm; 对质量数 $A \geq 54$ 的核电荷半径进行拟合时, 得到理论值和实验值的 RMSD 仅为 0.00337 fm. 同时, 为了得到更加精确的核电荷半径的计算值, 用文献 [18] 提及的奇偶摆动对 $dR_n(Z, N)$ 进行修正, 计算结果表明, 偶摆动修正项的添加对核电荷半径精确度的提高比较明显, 使得 RMSD 由 0.00471 fm 减少到 0.00439 fm, 减小约 6.8%. 此外, 利用新关系式结合 CR1999 和 CR2004 得到的预言值与 CR2013 数据库中的实验值之间的误差较小, 而且利用新关系式结合 CR2013 数据库得到的预言值与重要的预言文献 [25, 33] 中的预言值较符合, 与近几年测得的核电荷半径的实验值 [27,28,40,41] 也较接近. 以上的研究结果表明, 新的关系式可以较好地核电荷半径进行计算和预言.

本文提出的核电荷半径新关系在计算和预言的过程中较为简便, 涉及到的原子核仅为 2 个. 此外, 利用一个关系式结合 CR2013 数据库就可以得

到 573 个核电荷半径的计算值且 RMSD 还较小, 得到的预言值与近几年新测得的实验值也较接近. 综上所述, 核电荷半径的新关系式说明相邻 3 个原子核电荷半径之间的关联性比较高, 同时也说明基于同位素链核电荷半径的新关系计算和预言电荷半径具有一定的精确性和可靠性, 这会为今后的实验提供有意义的参考.

参考文献

- [1] Horowitz C J, Piekarewicz J 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5647
- [2] Zhang S S, Smith M S, Kang Z S, Zhao J 2014 *Phys. Lett. B* **730** 30
- [3] Abrahamyan S, Ahmed Z, Albataineh H, et al. 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 112502
- [4] Engfer R, Schneuwly H, Vuilleumier J L, Walter H K, Zehnder A 1974 *At. Data Nucl. Data Tables* **14** 509
- [5] Fricke G, Bernhardt C, Heilig K, et al. 1995 *At. Data Nucl. Data Tables* **60** 177
- [6] De Vries H, De Jager C W, De Vries C 1987 *At. Data Nucl. Data Tables* **36** 495
- [7] Aufmuth P, Heilig K, Steudel A 1987 *At. Data Nucl. Data Tables* **37** 455
- [8] Heilig K, Steudel A 1974 *At. Data Nucl. Data Tables* **14** 613
- [9] Stoitsov M V, Dobaczewski J, Nazarewicz W, Pittel S, Dean D J 2003 *Phys. Rev. C* **68** 054312
- [10] Goriely S, Chamel N, Pearson J M 2010 *Phys. Rev. C* **82** 035804
- [11] Dieperink A E L, Van Isacker P 2009 *Eur. Phys. J. A* **42** 269
- [12] Wang N, Li T 2013 *Phys. Rev. C* **88** 011301
- [13] Garvey G T, Gerace W J, Jaffe R L, Talmi I, Kelson I 1969 *Rev. Mod. Phys.* **41** S1
- [14] Sun B H, Lu Y, Peng J P, Liu C Y, Zhao Y M 2014 *Phys. Rev. C* **90** 054318
- [15] Bao M, Lu Y, Zhao Y M, Arima A 2016 *Phys. Rev. C* **94** 064315
- [16] Nerlo-Pomorska B, Pomorski K 1993 *Z. Phys. A* **344** 359
- [17] Nerlo-Pomorska B, Pomorski K 1994 *Z. Phys. A* **348** 169
- [18] Sheng Z Q, Fan G W, Qian J F 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 112101 (in Chinese) [圣宗强, 樊广伟, 钱建发 2015 物理学报 **64** 112101]
- [19] Ma Y F, Su C, Liu J, Ren Z Z, Xu C, Gao Y H 2020 *Phys. Rev. C* **101** 014304
- [20] Angeli I, Marinova K P 2013 *At. Data Nucl. Data Tables* **99** 69
- [21] Angeli I 2004 *At. Data Nucl. Data Tables* **87** 185
- [22] Angeli I 1999 *Table of Nuclear Root Mean Square Charge Radii (Appendix IV)* (Vienna: International Nuclear Data Committee) INDC(HUN)-033 IAEA Nuclear Data Section
- [23] Reinhard P G, Nazarewicz W 2021 *Phys. Rev. C* **103** 054310
- [24] Wu D, Bai C L, Sagawa H, Zhang H Q 2020 *Phys. Rev. C* **102** 054323
- [25] Bao M, Zong Y Y, Zhao Y M, Arima A 2020 *Phys. Rev. C* **102** 014306
- [26] Thakur V, Dhiman S K 2019 *Nucl. Phys. A* **992** 121623
- [27] De Groote R P, Billowes J, Binnersley C L, et al. 2020 *Nat. Phys.* **16** 620
- [28] Koszorús Á, Yang X F, Jiang W G, et al. 2021 *Nat. Phys.* **17** 439
- [29] Reinhard P G, Nazarewicz W, Garcia Ruiz R F 2020 *Phys. Rev. C* **101** 021301(R)
- [30] Fadeev P, Berengut J C, Flambaum V V 2020 *Phys. Rev. A* **102** 052833
- [31] Zeng J Y 1957 *Acta Phys. Sin.* **13** 357 (in Chinese) [曾谨言 1957 物理学报 **13** 357]
- [32] Zhang S Q, Meng J, Zhou S G, Zeng J Y 2002 *High Energy Physics and Nuclear Physics* **26** 252 (in Chinese) [张双全, 孟杰, 周善贵, 曾谨言 2002 高能物理与核物理 **26** 252]
- [33] Ma C, Zong Y Y, Zhao Y M, Arima A 2021 *Phys. Rev. C* **104** 014303
- [34] Borrajo M, Egidio J E 2017 *Phys. Lett. B* **764** 328
- [35] Satuła W, Dobaczewski J, Nazarewicz W 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3599
- [36] Qi C, Wyss R 2016 *Phys. Scr.* **91** 013009
- [37] Möller P, Nix J R, Myers W D, Swiatecki W J 1995 *At. Data Nucl. Data Tables* **59** 185
- [38] Fu G J, Lei Y, Jiang H, Zhao Y M, Sun B, Arima A 2011 *Phys. Rev. C* **84** 034311
- [39] Jiao B B 2018 *Mod. Phys. Lett. A* **33** 1850156
- [40] Bissell M L, Carette T, Flanagan K T, et al. 2016 *Phys. Rev. C* **93** 064318
- [41] Xie L, Yang X F, Wraith C, et al. 2019 *Phys. Lett. B* **797** 134805
- [42] Gorges C, Rodríguez L V, Balabanski D L, et al. 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 192502
- [43] Koszorús Á, Yang X F, Billowes J, et al. 2019 *Phys. Rev. C* **100** 034304
- [44] Marsh B A, Day Goodacre T, Sels S, et al. 2018 *Nat. Phys.* **14** 1163

New relation for nuclear charge radius based on isotope chain^{*}

Jiao Bao-Bao[†]

(School of Nuclear Science and Engineering, East China University of Technology, Nanchang 330013, China)

(Received 18 December 2021; revised manuscript received 8 April 2022)

Abstract

In this paper, experimental values of nuclear charge radii in database published in 2013 (CR2013 database) are systematically investigated. We analyze the relationship among the three neighboring nuclei based on the nuclear charge radius of isotope chain in the database. Then we obtain a new nuclear charge radius relation for atomic nuclei: the charge radius of a given nucleus is equal to the average of the charge radii of its two neighboring nuclei. We calculate the nuclear charge radius by combining the new relation with CR2013 database, the root-mean-squared deviation (RMSD) between our calculated values and the experimental values in CR2013 database is small: for nuclei with $A \geq 20$ (proton number $Z \geq 10$ and neutron number $N \geq 10$), the $\text{RMSD} \approx 0.00471$ fm; for nuclei with $A \geq 54$, the RMSD reaches an accuracy of $\text{RMSD} \approx 0.00337$ fm. The systematicness of nuclear charge radius in heavy nucleus region is better than that in the light nucleus region, so that the values are more precise in the heavy nucleus region. In the meantime, we also use the odd-even staggering to improve the accuracy of nuclear charge radius: the accuracy increases by about 6.8%. In addition, according to the CR1999 and CR2004 database and the new relation, we make some predictions about some nuclear charge radii, and we find that our predicted values only slightly deviate from the experimental values in CR2013 database. The difference between our predicted value based on CR2013 database and experimental value measured in recent years is small. These results show that the proposed new relation used to study nuclear charge radius is feasible and accurate. The predicted values can provide a valuable reference for future experiments.

Keywords: nuclear charge radius, isotope chain, odd-even staggering

PACS: 21.10.Ft, 21.10.-k

DOI: 10.7498/aps.71.20212343

^{*} Project supported by the Doctoral Scientific Research Foundation of East China University of Technology, China (Grant No. DHBK2019151).

[†] Corresponding author. E-mail: baobaojiao91@126.com