

# 界面动力学参数对深胞晶界面形态整体波动不稳定性的影响\*

钮迪<sup>1)</sup> 蒋晗<sup>1)†</sup>

1) (桂林电子科技大学, 数学与计算科学学院, 桂林 541004)

(2022 年 2 月 22 日收到; 2022 年 4 月 25 日收到修改稿)

研究界面动力学对定向凝固中深胞晶形态稳定性的影响. 应用多重变量法和匹配渐近法, 通过寻找系统的模式解, 导出了胞晶界面扰动振幅的变化率满足的色散关系, 得到了界面形态的量子化条件. 结果表明, 考虑了界面动力学参数的深胞晶生长的定向凝固系统有两种整体不稳定性机制, 整体振荡不稳定机制和低频不稳定性. 稳定性分析表明, 界面稳定性参数  $\varepsilon$  与胞晶相对参数  $\lambda_0$  有关, 低阶时界面动力学参数  $M_*$  越大, 中性模式产生强振荡的枝晶结构的整体波动不稳定性稳定区域越大.

**关键词:** 定向凝固, 深胞晶生长, 界面动力学, 形态稳定性

**PACS:** 81.10.Aj, 81.30.Fb, 68.35.Ja

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220322

## 1 引言

定向凝固是一种在合金制备的过程中常用的工艺, 其固液界面的传播速度可以受到人为控制. 在定向凝固过程中, 固液界面形态会受到凝固速度的影响. 随着凝固速度的提高, 界面形态将由低速生长的平直界面, 依次演变为小振幅的胞晶界面、大振幅的深胞晶界面、枝晶界面、细胞晶界面, 最后变为高速生长的平直界面. 固液界面形成的典型微结构是枝晶和胞晶, 其生长的稳定性是材料学中重要的研究课题. 合金中胞晶生长的稳定性会影响合金的微结构, 对最终成品合金的性能造成影响. 例如 Peng 等<sup>[1]</sup>通过实验发现, 在定向凝固过程中会出现雀斑缺陷, 且凝固过程中的枝晶形貌与 Gibbs-Thomson 效应密切相关.

许多学者也对晶体生长进行了研究. Mullins 和 Sekerka<sup>[2,3]</sup>研究了晶体生长的界面稳定性, 提出了

界面稳定性动力理论, 称为 M-S 理论, 为固液界面形态特征理论奠定了基础. 随后 Nash 和 Glicksman<sup>[4]</sup>提出最大生长速度理论, 他们在原有的系统上额外加上了两个边界条件并求解了数值解. Kruskal 和 Segur<sup>[5]</sup>提出了微观可解性条件 (MSC) 理论的 3 个断言, 考虑了各向异性界面能, 在 Nash-Glicksman 的模型中加入了各向异性参数. Xu 等<sup>[6,7]</sup>提出了界面波 (IFW) 理论, 该理论对 Nash-Glicksman 模型进行了重要修正, 使用摄动方法推导出了自由枝晶稳定性生长的理论模型. Pocheau 和 Georgelin<sup>[8]</sup>、Ding 等<sup>[9]</sup>通过实验发现了定向凝固中胞晶形态选择具有历史相关性.

另一方面, 界面动力学对于晶体的生长和界面稳定性有着重要影响. Coriell 和 Sekerka<sup>[10]</sup>研究发现晶体的界面动力学特性也是影响晶体生长的因素. Trivedi 等<sup>[11]</sup>研究了界面动力学各向异性对定向凝固中胞晶微结构产生的影响, 发现界面动力学各向异性会使得胞晶界面倾斜. 李金富和周尧和<sup>[12]</sup>

\* 广西科技基地与人才专项 (批准号: 桂科 AD18281053) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jiangh1986@163.com

通过理论分析,发现引入动力学项,扩大了共晶耦合生长的过冷度范围,降低了共晶生长速度. Tan 等<sup>[13]</sup>研究了 Ag-Cu(质量分数为 15%)合金的快速定向凝固的枝晶生长模型,并与实验结果进行对比,发现引入界面动力学使得模型与实验结果更接近. 蒋晗等<sup>[14]</sup>研究了各向异性界面动力学对定向凝固的深胞晶的影响,发现界面动力学各向异性和表面张力各向异性偏好方向的角度差值不同会影响深胞晶的形态. Chen 等<sup>[15,16]</sup>通过解析方法研究了界面动力学对球晶生长的影响,发现界面动力学对球晶的生长有较强的稳定作用. 他们发现,与忽略了界面动力学情况相比,界面动力学会使界面过冷度显著减小,界面更稳定,这与实验<sup>[17,18]</sup>的结论一致. 但是,数值和实验方法并不能解释其内在的机制,需要使用解析的方法才能解释. 本文将采用多重变量展开法,对考虑了界面动力学参数的深胞晶界面稳定性进行研究.

## 2 定向凝固系统的数学模型

考虑样本材料细长的二元合金熔体定向凝固过程中的深胞晶生长. 样本位于 Hele-shaw 生长室,这是一个细长的生长室,因此可以看作是二维空间  $Oxy$  下的定向凝固过程,其中原点位于胞晶尖端. 忽略溶质在固相内的扩散,且除了扩散系数外,其他热力学性质在固相内相同,且系统内无对流. 界面提拉速度  $V$  的方向指向上液相方向. 温度梯度为  $G_T$ ,浓度为  $C$ ,远场浓度为  $C_\infty$ ,胞晶列周期为  $l_w$ ,纯熔体温度为  $T_{M0}$ ,溶质扩散率为  $\kappa_D$ ,溶质扩散长度  $l_D = \kappa_D/V$ ,单位体积内固相产生的潜热为  $\Delta H$ ,毛细长度为  $l_c = \gamma c_p \rho T_{M0}$ ,其中  $\gamma$  为表面张力,  $\rho$  为密度,  $c_p$  为比热容. 胞晶生长满足热传导方程、溶质扩散方程和界面方程,满足热平衡条件、Gibbs-Thomson 条件、熵守恒条件、溶质守恒条件和界面分离条件. 然后对系统进行无量纲化,选取深胞晶尖端半径  $l_t$  为长度尺度,  $V$  作为速度尺度,  $l_t/V$  作为时间尺度. 选取小参数为界面稳定性参数  $\varepsilon = \sqrt{l_c} = \sqrt{l_c/l_t}$ , Péclet 数  $Pe = l_t/l_D$ ,且有  $Pe = \varepsilon \hat{Pe}$ ,其中  $\hat{Pe} = O(1)$ . 无量纲化的温度梯度为  $G = \frac{l_D}{\Delta H/(c_p \rho)} G_T$ ,形态学参数为  $M = -\frac{mC_\infty}{\Delta M/(c_p \rho)}$ ,其中  $m < 0$  是相图中液相线的斜率. 参数  $\lambda_G = l_D/l_G$ ,其中  $l_G = -mC_\infty/G_T$ . 主间距参数为  $W = l_w/l_t$ ,参数  $E =$

$\frac{\Delta H}{c_p \rho T_M}$ . 于是可以将深胞晶生长满足的热传导方程、溶质扩散方程转化为无量纲的控制方程. 假设深胞晶尖端半径远远小于溶质扩散长度,即  $l_t \ll l_D$ . 基于 Saffinen-Taylor 解构造曲线坐标系<sup>[19]</sup>  $(\xi, \eta)$ ,如图 1 所示. 曲线坐标系与原来的  $(x, y)$  平面坐标的关系如下:

$$x = WX(\xi, \eta) = W \left\{ \lambda_0 \xi - \frac{2(1-\lambda_0)}{\pi} \times \arctan \left[ \frac{(1-e^{\pi\eta}) \sin(\pi\xi)}{(\cos(\pi\xi)+1)(1+e^{\pi\eta})} \right] \right\}, \quad (1)$$

$$y = WY(\xi, \eta) = W \left[ (2\lambda_0 - 1)\eta + \frac{(1-\lambda_0)}{\pi} \ln \frac{e^{2\pi\eta} + 2e^{\pi\eta} \cos(\pi\xi) + 1}{4} \right], \quad (2)$$

其中  $\lambda_0$  为胞晶的相对宽度,其与主间距参数  $W$  有关. 温度场的线性描述为  $T(\xi, \eta, \varepsilon) = \varepsilon \hat{P}[WY(\xi, \eta) - y_0]$ .

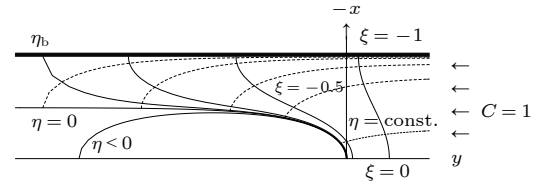


图 1 基于 Saffinen-Taylor 解构造的曲线坐标系  $(\xi, \eta)$ <sup>[20]</sup>  
Fig. 1. Curve coordinate system  $(\xi, \eta)$  based on Saffinen-Taylor solution.

假设胞晶列具有周期性,每个胞晶宽度都为  $W$ . 此时只需要考虑单个区间即可. 因此模型等价于在固定侧壁  $x = \pm W$  的通道中的胞晶生长. 使用曲线坐标系  $(\xi, \eta)$ ,控制方程化为

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} = \varepsilon \hat{Pe} \left( G^2 \frac{\partial C}{\partial t} - Y_\xi \frac{\partial C}{\partial \xi} - X_\xi \frac{\partial C}{\partial \eta} \right), \quad (3)$$

其中  $M_* = \frac{V}{\mu T_M}$  为界面动力学参数,  $\mu$  是界面动力学系数. 假设  $M_* = O(\varepsilon^2) = \varepsilon^2 m_*$ ,  $m_* = O(1)$ .

此外边界条件: 1) 远场条件,当  $\eta \rightarrow \infty$  时,有  $C \rightarrow 1$ ; 2) 侧壁区域,当  $\xi = \pm 1$  时有  $\frac{\partial C}{\partial \xi} = 0$ ; 3) 在界面  $\eta = \eta_s(\xi, t, \varepsilon)$ ,有:

$$C = y_* - \varepsilon \lambda_G W \hat{Pe} Y(\xi, \eta_s) - \frac{\varepsilon^2}{MW} (K_0 + K_1 \eta_{s'} + K_2 \eta_{s''}) - \frac{\varepsilon^2 \hat{Pe} E^{-1} m_*}{M}, \quad (4)$$

其中:

$$K_0 + K_1\eta_{s'} + K_2\eta_{s''} = -\frac{1}{G(\xi, \eta_s)} \left\{ \frac{\eta_{s''}}{(1 + \eta_{s'})^{3/2}} + \frac{\Pi_0(\xi, \eta_s)}{G^2(\xi, \eta_s)(1 + \eta_s'^2)^{1/2}} - \frac{\Pi_1(\xi, \eta_s)}{G^2(\xi, \eta_s)(1 + \eta_s'^2)^{1/2}} \eta_{s'} \right\}$$

是两倍平均曲率算子, 且有:

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= Y_{\xi\xi}X_\xi - X_{\xi\xi}Y_\xi, \quad \Pi_1 = X_{\xi\xi}X_\xi + Y_{\xi\xi}Y_\xi, \quad K_0 = -\frac{\Pi_0}{G^3(1 + \eta_s'^2)^{1/2}}, \\ K_1 &= \frac{\Pi_1}{G^3(1 + \eta_s'^2)^{1/2}}, \quad K_2 = -\frac{1}{G^3(1 + \eta_s'^2)^{3/2}}, \quad G = \sqrt{X_\xi^2 + Y_\xi^2}. \end{aligned}$$

质量守恒条件:

$$\frac{\partial C}{\partial \eta} - \eta_{s'} \frac{\partial C}{\partial \xi} + \varepsilon W \hat{P}e (1 - \kappa) C \left( G^2 \frac{\partial \eta_s}{\partial t} - Y_\xi \eta_{s'} + Y_\eta \right) = 0. \quad (5)$$

### 3 外部渐近解

#### 3.1 定常基态解与线性扰动态

将定常胞晶生长的整体基态解作为基态, 则当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 在界面  $\eta = O(1)$  附近的子区域, 定常解可简化为

$$C_B(\xi, \eta, \varepsilon) = y_{*0} + \varepsilon \hat{P}e \{ y_{*1} - W \lambda_G Y(\xi, \eta) + W \eta [\lambda_G - (y_{*0} - 1)] \} + \dots, \quad (6)$$

其中:

$$\begin{aligned} y_{*0} &= \frac{1 + \lambda_G(1 - \lambda_0)}{1 - \lambda_0(1 - \kappa)}, \quad y_{*1} = \frac{W(1 - \kappa)\lambda_0\lambda_G\beta_0}{(1 - \kappa)\lambda_0 - 1}, \quad \beta_0 = -\frac{2(1 - \lambda_0)}{\pi} \ln 2, \\ \lambda_0 &= \frac{y_{*0} - 1 - \lambda_G}{(1 - \kappa)y_{*0} - \lambda_G}, \quad W = \frac{\pi(1 - \lambda_0)}{2\lambda_0^2} + \dots, \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

非稳态解可写成两部分:

$$C(\xi, \eta, t, \varepsilon) = C_B(\xi, \eta, \varepsilon) + \tilde{C}(\xi, \eta, t, \varepsilon), \quad (7)$$

$$\eta_S(\xi, t, \varepsilon) = \eta_B(\xi, \varepsilon) + \tilde{\eta}_s(\xi, t, \varepsilon). \quad (8)$$

且假设胞晶相对宽度  $\lambda_0$  是给定的常数, 则主间距  $W$  和胞晶尖端位置  $y_*$  是无扰动的. 将 (7) 和 (8) 式代入系统并进行线性化处理, 得到线性扰动系统. 扰动系统可写为

$$\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \eta^2} = \varepsilon W \hat{P}e \left( G^2 \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} - Y_\xi \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \xi} - X_\xi \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \eta} \right). \quad (9)$$

边界条件: 1) 远场区域, 当  $\tilde{\eta} \rightarrow \infty$ , 有  $\tilde{C} \rightarrow 0$ ; 2) 侧壁区域, 当  $\xi = \pm 1$ , 有  $\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \xi} = 0$ ; 3) 在界面  $\eta = \eta_B$  处, 齐次的 Gibbs-Thomson 条件:

$$\frac{\partial C_B}{\partial \eta_B} \tilde{\eta}_s + \tilde{C} = -\varepsilon \lambda_G W \hat{P}e \frac{\partial Y(\xi, \eta_B)}{\partial \eta_B} \tilde{\eta}_s - \frac{\varepsilon^2}{MW} \left\{ K[\eta_B] + K_1 \tilde{\eta}_{s'} + K_2 \tilde{\eta}_{s''} + \frac{\partial K[\eta_B]}{\partial \eta_B} \tilde{\eta}_s \right\} - \frac{\varepsilon^2 \hat{P}e^2 E^{-1} m_*}{M}. \quad (10)$$

以及齐次的质量守恒条件:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 C_B}{\partial \eta_B^2} \tilde{\eta}_s + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \eta_B} - \frac{\partial \tilde{\eta}_s}{\partial \xi} \left( \frac{\partial C_B}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial \eta_B}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta_B}{\partial \xi} \tilde{\eta}_s \frac{\partial^2 C_B}{\partial \xi \partial \eta} \\ & - \varepsilon W \hat{P}e (1 - \kappa) \left( \frac{\partial C_B}{\partial \eta_B} \tilde{\eta}_s + \tilde{C} \right) \left[ Y_\xi \left( \frac{\partial \eta_B}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\eta}_S}{\partial \xi} \right) - Y_\eta - G^2 \left( \frac{\partial \eta_B}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\eta}_s}{\partial t} \right) + Y_{\xi\eta} \frac{\partial \eta_B}{\partial \xi} \tilde{\eta}_s - Y_{\eta\eta} \tilde{\eta}_s \right] \\ & - \varepsilon W \hat{P}e (1 - \kappa) C_B \left( Y_\xi \frac{\partial \tilde{\eta}_S}{\partial \xi} - G^2 \frac{\partial \tilde{\eta}_s}{\partial t} + Y_{\xi\eta} \frac{\partial \eta_B}{\partial \xi} \tilde{\eta}_s - Y_{\eta\eta} \tilde{\eta}_s \right) + (h.o.t) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

### 3.2 外部区域内扰动态的多重变量渐近展开解

定义如下的快变量<sup>[21]</sup>来使用多重变量渐近展开方法:

$$\begin{aligned} t_+ &= \frac{\sigma\tau}{\beta(\varepsilon)}, \\ \xi_+ &= \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\beta(\varepsilon)} = \frac{1}{\beta(\varepsilon)} \int_{\xi_0}^{\xi} k(\xi_1, \eta) d\xi_1, \\ \eta_+ &= \frac{\psi(\xi, \eta)}{\beta(\varepsilon)} = \frac{1}{\beta(\varepsilon)} \int_0^{\eta} k(\xi, \eta_1) d\eta_1, \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $\beta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ . 同时按照多重变量  $(\xi, \eta, \xi_+, \eta_+, t_+)$ , 解可写成:

$$\begin{aligned} C(\xi, \eta, t, \varepsilon) &= C_B(\xi, \eta, \varepsilon) + \tilde{C}(\xi, \eta, \xi_+, \eta_+, t_+, \varepsilon), \\ \eta_s &= \eta_B(\xi, \varepsilon) + \tilde{\eta}_s(\xi, \xi_+, t_+, \varepsilon). \end{aligned} \quad (13)$$

利用远场条件、侧壁条件和表面条件, 把系统(9)转变为多变量系统的形式, 且(13)式有如下的渐近展开:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\xi, \xi_+, \eta, \eta_+, t_+, \varepsilon) &\sim \\ \varepsilon [\tilde{\mu}_0(\varepsilon) \tilde{C}_0(\xi, \eta, \xi_+, \eta_+) + \tilde{\mu}_1(\varepsilon) \tilde{C}_1(\xi, \eta, \xi_+, \eta_+)] e^{t_+} &+ \cdots, \\ \tilde{\eta}_s(\xi, \xi_+, \varepsilon) &\sim \\ [\tilde{b}_0(\varepsilon) \tilde{h}_0(\xi, \xi_+) + \tilde{b}_1(\varepsilon) \tilde{h}_1(\xi, \xi_+) + \cdots] e^{t_+}, & \\ k(\xi, \eta, \varepsilon) &\sim k_0(\xi, \eta) + \varepsilon k_1(\xi, \eta) + \cdots, \\ g(\xi, \eta, \varepsilon) &\sim g_0(\xi, \eta) + \varepsilon g_1(\xi, \eta) + \cdots, \\ \bar{k}(\xi, \varepsilon) &\sim \bar{k}_0(\xi) + \varepsilon \bar{k}_1(\xi) + \cdots, \\ \sigma(\varepsilon) &\sim \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \cdots, \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $\bar{k} = k(\xi, 0)$ .

将(9)–(14)式代入线性扰动系统, 可得控制方程:

$$\frac{\partial^2 \tilde{C}_0}{\partial \xi_+^2} + \frac{\partial^2 \tilde{C}_0}{\partial \eta_+^2} = 0. \quad (15)$$

边界条件如下: 1) 远场区域, 当  $\eta \rightarrow \infty$  时, 有  $\tilde{C}_0 \rightarrow 0$ ; 2) 侧壁区域, 当  $\xi = 1$  时, 有  $\frac{\partial \tilde{C}_0}{\partial \xi_+} = 0$ ; 3) 在界面  $\eta = \eta_+ = 0$  处, Gibbs-Thomson 条件:

$$\tilde{C}_0 = -W\hat{P}e(\lambda_G - y_{*0} + 1)\tilde{h}_0 + \frac{\bar{k}_0^2}{MWG_0(\xi)} \frac{\partial^2 \tilde{h}_0}{\partial \xi_+^2}, \quad (16)$$

和质量守恒条件:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{C}_0}{\partial \eta_+} + \sigma_0 W\hat{P}e(1 - \kappa)y_{*0}G_0^2(\xi)\tilde{h}_0 \\ + \bar{k}_0 W\hat{P}e[\lambda_G - (1 - \kappa)y_{*0}]Y_{\xi,0}(\xi) \frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \xi_+} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\bar{k}_0 = k_0(\xi, 0)$ ;

4) 尖端条件: 在  $\xi = \xi_+ = 0$  处, 有  $\tilde{h}_0 = 0$ ,  $\frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \xi_+} = 0$ ; 5) 根部条件: 当  $\xi_+ \rightarrow \infty$  时, 有  $\tilde{h}_0 \rightarrow \infty$ .

考虑一般模式的解:

$$\tilde{C}_0 = \tilde{A}_0 \exp[i\xi_+ - \eta_+], \quad (18)$$

$$\tilde{h}_0 = \tilde{D}_0 \exp[i\xi_+], \quad (19)$$

其中系数  $\tilde{D}_0$  是任意常复数.

把(19)代入(16)和(17)式, 得到色散公式:

$$\sigma_0 = \frac{\bar{k}_0 \lambda_0}{\Lambda_0 G_0^2} - \frac{\bar{k}_0^3}{\Lambda_0 \Lambda_1 G_0^3} + \frac{i \bar{k}_0 Y_{\xi,0}(\xi, 0)}{\Lambda_0 G_0^2}, \quad (20)$$

其中:

$$\bar{\Lambda}_0 = \frac{(1 - \kappa)y_{*0}}{(1 - \kappa)y_{*0} - \lambda_G} > 0,$$

$$\bar{\Lambda}_1 = MW^2 \hat{P}e[(1 - \kappa)y_{*0} - \lambda_G] > 0.$$

色散式(20)是  $\bar{k}_0$  的三次多项式, 它是 Mullins-Sekerka 色散公式的归一化. 对于给定的复参数  $\sigma_0$ , 可得到 3 个函数的波函数  $\{k_0^{(1)}(\xi), k_0^{(2)}(\xi), k_0^{(3)}(\xi)\}$ . 色散式(20)展示了胞晶列生长系统内扰动态的界面波特征.

### 3.3 变量替换

为了进一步分析色散式(20), 引入新变量  $\rho$  来代替  $\xi$ . 令:

$$\rho = -\frac{Y_{\xi,0}(\xi)}{\lambda_0} = \left( \frac{1 - \lambda_0}{\lambda_0} \right) \tan\left(\frac{\pi\xi}{2}\right), \quad (21)$$

当  $\xi \rightarrow 1^-$  时, 有  $\rho \rightarrow \infty$ . 则有  $G_0(\xi) = \lambda_0 S(\rho)$  和  $G(\rho) = \frac{\pi}{2a}(\rho + ia)(\rho - ia)$ , 其中  $a = \frac{1 - \lambda_0}{\lambda_0}$ .

运用新变量  $\rho$ , 把色散式(20)转化为

$$\sigma_e = \frac{k_e(\rho)}{S^2(\rho)} \left[ (1 - i\rho) - \frac{k_e^2(\rho)}{S(\rho)} \right], \quad (22)$$

其中:

$$k_e(\rho) = \frac{\tilde{k}_0(\rho)G(\rho)}{\lambda_0 \sqrt{\Lambda_1}}, \sigma_e = \frac{\bar{\Lambda}_0}{\sqrt{\Lambda_1}} \sigma_0, S(\rho) = \sqrt{1 + \rho^2}.$$

给定  $\sigma_0$ , 可得以下方程:

$$\sigma_e = \frac{k_e(\rho)}{S^2(\rho)} \left[ (1 - i\rho) - \frac{k_e^2(\rho)}{S(\rho)} \right]. \quad (23)$$

(23) 式的 3 个根为

$$\begin{aligned} k_e^{(1)}(\rho) &= M(\rho) \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{\sigma_e}{N(\rho)} \right] \right\}, \\ k_e^{(2)}(\rho) &= M(\rho) \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{\sigma_e}{N(\rho)} \right] + \frac{2}{3} \pi \right\}, \\ k_e^{(3)}(\rho) &= M(\rho) \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{\sigma_e}{N(\rho)} \right] + \frac{4}{3} \pi \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中:

$$\begin{aligned} N(\rho) &= -\frac{M(\rho)(1 - i\rho)}{3S^2(\rho)}, \\ M(\rho) &= \sqrt{\frac{4S(\rho)}{3}}(1 - i\rho)^{1/2}. \end{aligned}$$

注意到  $\text{Re}\{k_0^{(2)}\} < 0$ , 因此波函数  $k_e^{(2)}(\rho)$  的解  $H_2(\rho)$  给出的扰动态的远场条件不能满足, 需要排除. 因此只有  $H_1(\rho)$  和  $H_3(\rho)$  有意义. 从而外部区域的通解可用如下两个界面行波的组合表示:

$$\begin{aligned} \widetilde{h}_0 &= D_1 \exp \left[ \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\rho_0}^{\rho} \left( \widetilde{k}_0^{(1)} + \varepsilon \widetilde{k}_1^{(1)} + \cdots \right) d\rho \right] \\ &+ D_3 \exp \left[ \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\rho_0}^{\rho} \left( \widetilde{k}_0^{(3)} + \varepsilon \widetilde{k}_1^{(3)} + \cdots \right) d\rho \right], \end{aligned} \quad (25)$$

常数  $\{D_1, D_3\}$  是在复平面  $\rho$  上沿着  $\rho$  的实轴的分片常数.

## 4 根部解与量子化条件

### 4.1 一级奇异摄动系统

一级近似系统的控制方程可写成:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{C}_1}{\partial \xi_+^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{C}_1}{\partial \eta_+^2} = 0. \quad (26)$$

该系统具有标准模式解:

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_1 &= \widetilde{A}_1(\xi, \eta) \exp \{i\xi_+ - \eta_+\}, \\ \widetilde{h}_1 &= \widetilde{D}_1 \exp \{i\xi_+\}. \end{aligned} \quad (27)$$

则由 (27) 式可得 Gibbs-Thomson 条件:

$$\widetilde{A}_1 + J_1 \widetilde{D}_1 = I_1 \widetilde{D}_0, \quad (28)$$

和质量守恒条件:

$$-k_0 \widetilde{A}_1 + J_2 \widetilde{D}_1 = I_2 \widetilde{D}_0, \quad (29)$$

其中:

$$\begin{aligned} J_1 &= \widehat{P}eW(\lambda_G - y_{*0} + 1) + \frac{k_0^2}{MWG_0}, \\ I_1 &= -k_0 h_1 \left[ \widehat{P}eW(\lambda_G - y_{*0} + 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_0^2}{MWG_0}(1 - \alpha_4 B_0) \right] \\ &\quad - \frac{2k_0 k_1}{MWG_0} - \frac{\widehat{P}e^2 E^{-1} m^*}{M} k_{0i}, \\ J_2 &= \widehat{P}eW[\lambda_G - (1 - \kappa)y_{*0}]Y_\xi(\xi, 0)k_{0i} \\ &\quad + W\widehat{P}e(1 - \kappa)y_{*0}G_0^2\sigma_0, \\ I_2 &= -Q_0 + k_0^2 h_1 \left[ \widehat{P}eW(\lambda_G - y_{*0} + 1) + \frac{k_0^2}{MWG_0} \right] \\ &\quad - k_1 \left[ \widehat{P}eW(\lambda_G - y_{*0} + 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_0^2}{MWG_0} + \widehat{P}eW\lambda_G Y_\xi(\xi, 0)i \right] \\ &\quad + \widehat{P}eW[\lambda_G - (1 - \kappa)y_{*0}]Y_{\eta\eta}(\xi, 0) \\ &\quad - \widehat{P}eW(1 - \kappa)y_{*0}G_0^2\sigma_1 \\ &\quad + W\widehat{P}e(1 - \kappa)y_{*0}Y_\xi(\xi, 0)k_{1i} = 0. \end{aligned}$$

若令 (28) 和 (29) 式构成的非齐次线性系统的系数矩阵的行列式为 0, 则  $\{\widetilde{A}_1, \widetilde{D}_1\}$  有非平凡解的相容性条件为

$$I_2 + k_0 I_1 = 0. \quad (30)$$

将  $I_1$  和  $I_2$  代入 (30) 式, 有:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{F(\xi)} \left\{ Q_0 - \widehat{P}eW[\lambda_G - (1 - \kappa)y_{*0}]Y_{\eta\eta}(\xi, 0) \right. \\ &\quad \left. + W\widehat{P}e(1 - \kappa)y_{*0}G_0^2\sigma_1 - k_{0i}^2 \left( -\frac{\widehat{P}eE^{-1}m^*}{M} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

其中:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= -\widehat{P}eW(\lambda_G - y_{*0} + 1) - \frac{3k_0^2}{MWG_0} \\ &\quad + \widehat{P}eW[(1 - \kappa)y_{*0} - \lambda_G]Y_\xi(\xi, 0)i. \end{aligned} \quad (32)$$

这表明解  $k_1$  在函数  $F(\xi)$  的解处有奇异性, 它位于  $\xi$  的扩展复平面  $\zeta = \xi + i\xi_1$  内.

将  $F(\xi)$  等函数解析延拓到复平面  $\zeta = \xi + i\xi_1$  内, 则波函数  $\overline{k}_0(\zeta, 0) \equiv \{\overline{k}_0^{(1)}(\xi), \overline{k}_0^{(2)}(\xi), \overline{k}_0^{(3)}(\xi)\}$  服从扩展后的色散公式:



$$\sigma_0 = \Sigma(\bar{k}_0, \zeta) = \frac{\bar{k}_0(\zeta, 0)}{A_0 G_0^2(\zeta)} \left\{ [\lambda_0 + iY_\xi(\zeta, 0)] - \frac{\bar{k}_0^2(\zeta, 0)}{A_1 G_0(\zeta)} \right\}. \quad (33)$$

相应地, 解析函数  $\widetilde{k}_0(\rho) \equiv \left\{ \widetilde{k}_0^{(1)}(\rho), \widetilde{k}_0^{(2)}(\rho), \widetilde{k}_0^{(3)}(\rho) \right\}$  服从色散公式:

$$\sigma_e = \frac{k_e(\rho)}{S^2(\rho)} \left[ -\frac{k_e^2(\rho)}{S(\rho)} + (1 - i\rho) \right]. \quad (34)$$

用变量  $\rho$  表示的奇异点  $\rho_c$  位于复平面  $\rho$  内, 并且服从方程:

$$\left[ \widetilde{k}_0^{(1)}(\rho) - \widetilde{k}_0^{(3)}(\rho) \right] = 0. \quad (35)$$

(35) 式结合 (33) 和 (34) 式有:

$$\sigma_e = \frac{2}{\sqrt{27}} \left( \frac{1 - i\rho c}{1 + i\rho c} \right)^{3/4} = \frac{\bar{A}_0}{\sqrt{\bar{A}_1}} \sigma_0. \quad (36)$$

由 (36) 式可得到 3 个复奇异点, 它们的位置与  $\sigma_0$ ,  $\bar{A}_0$  和  $\bar{A}_1$  有关.

## 4.2 特征值 $\sigma_1$ 的一级近似

对固定的  $\sigma_0$ , 通过对色散式 (33) 求关于  $\zeta$  的全导数和偏导数, 对 (32) 式求导, 可得:

$$F'(\zeta) = F_{0'}(\zeta) - \frac{3k_0}{MWG_0} \left( 2\frac{R_0(\zeta)}{F(\zeta)} - \frac{G_{0'}}{G_0} \right). \quad (37)$$

因此, 当  $\zeta = \zeta_c$  时, (31) 式化解为

$$k_1(\xi) = \frac{R_1(\xi)}{F(\xi)} - i\frac{R_2(\xi)}{F(\xi)} \frac{k_{0'}(\xi)}{k_0(\xi)}, \quad (38)$$

其中:

$$\begin{aligned} R_1(\xi) &= -\frac{ik_0^2}{MW} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{G_0(\xi)} \right] \\ &\quad - \widehat{P}eW [\lambda_G - (1 - \kappa)y_{*0}] Y_{\eta\eta}(\xi, 0) \\ &\quad + W\widehat{P}e(1 - \kappa)y_{*0}G_0^2\sigma_1 - k_{0i}^2 \left[ -\frac{\widehat{P}eE^{-1}m^*}{M} \right], \\ R_2(\xi) &= \frac{2k_0^2}{MWG_0(\xi)}. \end{aligned}$$

从 (38) 式可知, 当  $\zeta$  趋于孤立奇点  $\zeta_c$  时, 有:

$$k_1(\zeta) = \frac{m_1 R_1(\zeta_c)}{(\zeta - \zeta_c)^{1/2}} + \frac{m_2}{\zeta - \zeta_c}, \quad (39)$$

其中  $m_1 = m_2 = O(1)$ .

函数  $k_1(\zeta)$  在奇点附近可展开为 Laurent 级数. 由 (39) 式,  $R_1(\zeta_c) = 0$ , 且  $\zeta_c$  是函数  $k_1(\zeta)$  的单极点, 由此得  $\sigma_1$  为

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{W\widehat{P}e(1 - \kappa)y_{*0}G_0^2(\zeta_c)} \left\{ -i\frac{F_0(\zeta_c)}{3} \frac{G_{0'}(\zeta_c)}{G_0(\zeta_c)} \right. \\ &\quad + \widehat{P}eW [\lambda_G - (1 - \kappa)y_{*0}] Y_{\eta\eta}(\zeta_c, 0) \\ &\quad \left. - i\frac{F_0(\zeta_c)\widehat{P}eE^{-1}m^*WG_0(\zeta_c)}{3} \right\}. \quad (40) \end{aligned}$$

由 (40) 式  $\sigma_1$  由自由参数  $\sigma_0$  确定. 接下来将研究奇异点  $\zeta_c$  附近的行为, 导出  $\sigma_0$  的表达式, 扩展  $(\xi, \eta)$  平面内的全局波模式解.

## 4.3 奇异点 $(\zeta_c, 0)$ 附近的内解与近似

为求解  $(\zeta_c, 0)$  附近的内解, 在齐次系统内引入内变量:

$$\zeta_* = \frac{\zeta - \zeta_c}{\varepsilon^\alpha}, \quad (41)$$

$$\eta_* = \frac{\eta}{\varepsilon^\alpha}, \quad (42)$$

其中  $\alpha$  待定. 使用上述内变量后, 内解的控制方程变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widetilde{C}_*}{\partial \zeta_*^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{C}_*}{\partial \eta_*^2} + \varepsilon^{\alpha+1} W\widehat{P}e \left[ Y_\xi \frac{\partial \widetilde{C}_*}{\partial \zeta_*} \right. \\ \left. + X_\xi \frac{\partial \widetilde{C}_*}{\partial \eta_*} - G^2 \frac{\sigma}{\beta(\varepsilon)} \frac{\partial \widetilde{C}_*}{\partial t_+} \right] = 0. \quad (43) \end{aligned}$$

界面条件为当  $\eta_* = 0$  时, 有 Gibbs-Thomson 条件:

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_* \varepsilon^\alpha &= -\varepsilon \widehat{P}eW [\lambda_G - (y_{*0} - 1)] \widetilde{\eta}_{*s} \varepsilon^\alpha \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2}{MW} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon^\alpha G_0} \widetilde{\eta}_{*s}'' + \frac{\partial K[0]}{\partial \eta_B} \varepsilon^\alpha \widetilde{\eta}_{*s} \right\}, \quad (44) \end{aligned}$$

和质量守恒条件:

$$\begin{aligned} &-\varepsilon \widehat{P}eW \lambda_G Y_{\eta\eta}(\xi, 0) \varepsilon^\alpha \widetilde{\eta}_{*s} + \frac{\partial \widetilde{C}_*}{\partial \eta_*} + \varepsilon \widehat{P}eW \lambda_G \\ &\times Y_\xi(\xi, 0) \frac{\partial \widetilde{\eta}_{*s}}{\partial \zeta_*} + \varepsilon^{\alpha+1} Y_\eta W \widehat{P}e(1 - \kappa) \left\{ \varepsilon \widehat{P}eW \right. \\ &\times [-\lambda_G Y_\eta(\xi, 0) + \lambda_G - (y_{*0} - 1)] \widetilde{\eta}_{*s} + \widetilde{C}_* \left. \right\} \\ &-\varepsilon W \widehat{P}e(1 - \kappa) C_B Y_\xi(\xi, 0) \frac{\partial \widetilde{\eta}_{*s}}{\partial \zeta_*} + \varepsilon^{\alpha+1} W \widehat{P}e \\ &\times (1 - \kappa) C_B G^2 \frac{\sigma}{\beta(\varepsilon)} \frac{\partial \widetilde{\eta}_{*s}}{\partial t_+} + \varepsilon^{\alpha+1} W \widehat{P}e(1 - \kappa) \\ &\times C_B Y_{\eta\eta} \widetilde{\eta}_{*s} + (h.o.t) = 0. \quad (45) \end{aligned}$$

然后把内解进行渐近展开:

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_*(\zeta_*, \eta_*, t_+, \varepsilon) &= \\ \varepsilon \left[ \widetilde{v}_0(\varepsilon) \widetilde{C}_{*0}(\zeta_*, \eta_*) + \widetilde{v}_1(\varepsilon) \widetilde{C}_{*1}(\zeta_*, \eta_*) + \cdots \right] e^{t_+}, \quad (46) \end{aligned}$$

$$\widetilde{\eta}_{*s}(\zeta_*, t_+, \varepsilon) =$$

$$\left[ \widetilde{v}_0(\varepsilon) \widetilde{h}_{*0}(\zeta_*) + \widetilde{v}_1(\varepsilon) \widetilde{h}_{*1}(\zeta_*) + \cdots \right] e^{t_+}. \quad (47)$$

去掉内解系统里的高阶无穷小, 可得内解首级近似下的控制方程:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{C}_{*0}}{\partial \zeta_*^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{C}_{*0}}{\partial \eta_*^2} = 0. \quad (48)$$

界面条件为当  $\eta_* = 0$  时, 有 Gibbs-Thomson 条件:

$$\widetilde{C}_{*0} = -\widehat{P}eW[\lambda_G - (y_{*0} - 1)] \widetilde{h}_{*0} + \frac{\varepsilon^{1-2\alpha}}{MWG_0} \frac{\partial^2 \widetilde{h}_{*0}}{\partial \zeta_*^2}, \quad (49)$$

和质量守恒条件:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{C}_{*0}}{\partial \eta_*} + \widehat{P}eW[\lambda_G - (1 - \kappa)y_{*0}] Y_\xi(\xi, 0) \frac{\partial \widetilde{h}_{*0}}{\partial \zeta_*} \\ + \varepsilon^{\alpha-\frac{1}{2}} W \widehat{P}e(1 - \kappa) y_{*0} \sigma_0 G_0^2 \widetilde{h}_{*0} = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

由解的解析性, 可得  $\frac{\partial \widetilde{C}_{*0}}{\partial \eta_*} = i \frac{\partial \widetilde{C}_{*0}}{\partial \zeta_*}$ . 再运用变量  $\rho = -\frac{Y_\xi(\xi, 0)}{\lambda_0}$ ,  $G_0 = \lambda_0 S(\rho)$ ,  $\frac{d\rho}{d\xi} = P(\rho)$  和相应的内变量  $\rho_* = \frac{\rho - \rho_c}{\varepsilon^\alpha}$ , 得到转化后的 Gibbs-Thomson 条件:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \widetilde{C}_{*0}}{\partial \zeta_*} = i \frac{\partial}{\partial \zeta_*} \left\{ -\widehat{P}eW[\lambda_G - (y_{*0} - 1)] \widetilde{h}_{*0} \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^{1-2\alpha}}{MWG_0} \frac{\partial^2 \widetilde{h}_{*0}}{\partial \zeta_*^2} \right\}. \end{aligned} \quad (51)$$

以及转化后的质量守恒条件:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1-2\alpha} P^3(\rho) \frac{\partial^3 \widetilde{h}_{*0}}{\partial \rho_*^3} + \overline{\Lambda}_1 \lambda_0^2 S(\rho) P(\rho) (1 - i\rho) \\ \times \frac{\partial \widetilde{h}_{*0}}{\partial \rho_*} - i\varepsilon^{\alpha-\frac{1}{2}} W^2 M \widehat{P}e(1 - \kappa) y_{*0} \sigma_0 \lambda_0^3 \\ \times S^3(\rho) \widetilde{h}_{*0} + (h.o.t) = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

为了解 (52) 式, 对外部区域和内部区域对的解分别运用变换  $\widetilde{h}_0(\rho) = \widetilde{W}_0(\rho) \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\rho_c}^{\rho} k_c(\rho_1) d\rho_1 \right\}$  和  $\widetilde{h}_{*0}(\rho_*) = \widetilde{W}_{*0}(\rho_*) \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\rho_c}^{\rho} k_c(\rho_1) d\rho_1 \right\}$ , 参照波函数  $k_c(\rho)$  待定, 且满足  $\text{Re} \{k_0^{(3)}\} < \text{Re} \{k_c\} < \text{Re} \{k_0^{(1)}\}$ . 于是外部区域的解  $\widetilde{h}_0$  可写作两个  $W$  波的组合:

$$\widetilde{W}_0(\rho) = D_1 \widetilde{W}_0^{(+)}(\rho) + D_3 \widetilde{W}_0^{(-)}(\rho), \quad (53)$$

其中:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_0^{(+)}(\rho) &= H_1(\rho) \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\rho_c}^{\rho} k_c(\rho) d\rho_1 \right\}, \\ \widetilde{W}_0^{(-)}(\rho) &= H_3(\rho) \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\rho_c}^{\rho} k_c(\rho_1) d\rho_1 \right\}. \end{aligned}$$

此时, 可把 (52) 式重写成以下形式的控制方程:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1-2\alpha} \Omega_3(\rho) \frac{\partial^3 \widetilde{W}_{*0}(\rho_*)}{\partial \rho_*^3} + \varepsilon^{1/2-\alpha} \Omega_2(\rho) \frac{\partial^2 \widetilde{W}_{*0}(\rho_*)}{\partial \rho_*^2} \\ + \Omega_1(\rho) \frac{\partial \widetilde{W}_{*0}(\rho_*)}{\partial \rho_*} + \Omega_4(\rho) \widetilde{W}_{*0}(\rho_*) \\ - i\varepsilon^{\alpha-1/2} W^2 M \widehat{P}e(1 - \kappa) y_{*0} \sigma_0 \lambda_0^3 S^3(\rho) \widetilde{W}_{*0}(\rho_*) \\ + (h.o.t) = 0, \end{aligned} \quad (54)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Omega_0(\rho) &= \Sigma(k_c, \zeta) = \frac{k_c(\rho) P(\rho)}{\Lambda_0 \lambda_0 S^2(\rho)} \\ &\times \left[ -\frac{k_c^2(\rho) P^2(\rho)}{\Lambda_1 \lambda_0^2 S(\rho)} + (1 - i\rho) \right], \\ \Omega_1(\rho) &= -3k_c^2 \Omega_3(\rho) + \overline{\Lambda}_1 \lambda_0^2 S(\rho) P(\rho) (1 - i\rho), \\ \Omega_2(\rho) &= 3ik_c \Omega_3(\rho), \quad \Omega_3(\rho) = P^3(\rho), \\ \Omega_4(\rho) &= i\varepsilon^{\alpha-1/2} \left[ W^2 M \widehat{P}e(1 - \kappa) y_{*0} \lambda_0^3 S^3(\rho) \right] \Omega_0(\rho). \end{aligned}$$

$$\text{选取 } k_c = \sqrt{\frac{\Lambda_1 \lambda_0^2 S(\rho) (1 - i\rho)}{3P^2(\rho)}} \text{ 可得 } \Omega_1(\rho) = 0,$$

则 (54) 式最终化为

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1-2\alpha} P^3(\rho) \frac{\partial^3 \widetilde{W}_{*0}(\rho_*)}{\partial \rho_*^3} + \varepsilon^{1/2-\alpha} i \lambda_0 P^2(\rho) \\ \times \sqrt{3\overline{\Lambda}_1 S(\rho) (1 - i\rho)} \frac{\partial^2 \widetilde{W}_{*0}(\rho_*)}{\partial \rho_*^2} \\ \times \left[ \sigma_0 - \frac{2}{\sqrt{27}} \frac{\sqrt{\overline{\Lambda}_1} (1 - i\rho)^{2/3}}{\Lambda_0 S^{2/3}(\rho)} \right] \\ \times \lambda_0^3 S^3(\rho) \widetilde{W}_{*0}(\rho_*) + (h.o.t) = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

(55) 式有 5 个孤立奇点和转向点:  $\rho = \pm i, \pm i\alpha, \rho_c$ , 其中  $\rho_c$  是方程中复平面  $\rho$  内的一个简单转向点,  $\rho = \pm i, \pm i\alpha$  分别是函数  $S(\rho)$  和  $P(\rho)$  的零点. 由于:

$$\sigma_0 = \frac{2}{\sqrt{27}} \frac{\sqrt{\overline{\Lambda}_1}}{\Lambda_0} \left( \frac{1 - i\rho_c}{1 + i\rho_c} \right)^{3/4}, \quad (56)$$

因此, 要研究转向点  $\rho_c$  附近内解行为以得出一致有效渐近解, 需要考虑以下两种情况: 1)  $|\sigma_0| = O(1)$ ; 2)  $|\sigma_0| \ll 1$ . 情况 1) 可得如下的连接条件:

$$\begin{aligned}
 H^{(2)} &= v(z e^{i\pi}) - 2\cos(v\pi) H_v^{(2)}(z) + e^{iv\pi} H_v^{(1)}(z) \\
 &= 2\cos(v\pi) \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-iz+i(v/2+1/4)\pi} \\
 &\quad + e^{iv\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz-i(v/2+1/4)\pi} \\
 &= e^{i(1/6+1/4)\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-iz} - i e^{i(1/6+1/4)\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz} \\
 &= D_3 e^{-iz} + D_1 e^{iz}. \quad (57)
 \end{aligned}$$

则  $D_1/D_3 = -i = e^{-\frac{1}{2}\pi i}$ ,  $D_3 = D'_3$ , 其中  $H_v^{(2)}(z)$  是第二类  $v$  阶 Hankel 函数. 情况 2) 又包含两种情况: 一个是奇异点  $\rho = -i$  位于  $\rho_c$  附近的内部区域, 但  $\rho = -ia$  不在; 另一种则是两个奇异点都在  $\rho_c$  附近的内部区域. 前一种情况下, 可得以下的连接条件:

$$\begin{aligned}
 D_1/D_3 &= -i2\cos(v\pi) = 2\cos(v\pi) e^{-\frac{1}{2}\pi i}, \\
 D_3 &= D'_3: \rho \in S_1; \rho \in (0, \rho_c), D_1/D_3 = 0, \\
 D_3 &= D'_3: \rho \in S'_2 \cup S_2; \rho \in (\rho'_c, \infty).
 \end{aligned}$$

后一种情况则无法与外解匹配, 故排除.

#### 4.4 内解结果总结

内部区域远离远场的内部方程可写成如下的 Airy 方程:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{W}_{*0}(\widehat{\rho}_*)}{\partial \widehat{\rho}_*^2} + \widehat{\rho}_*^{p_0} \widetilde{W}_{*0}(\widehat{\rho}_*) = 0. \quad (58)$$

且远场处内解的首级近似具有  $\widetilde{W}_{*0}(\widehat{\rho}_*) = D_* \widehat{\rho}_*^{1/2} H_v^{(2)}(z)$  的形式, 其中  $z = 2v\rho_*^{1/(2v)}$ ,  $v = 1/(p_0 + 2)$ . 对于情况 1, 有  $\widehat{\rho}_* = A^{\frac{1}{3}} \rho_*$ ,  $A = O(1)$ ,  $p_0 = 1$ ,  $\theta_L = \frac{2}{3}\pi$ ,  $\alpha = 1/3$ ,  $v = 1/3$ ; 对于情况 2, 则有  $\widehat{\rho}_* = A_*^{4/15} \rho_*$ ,  $A_* = O(1)$ ,  $p_0 = \frac{7}{4}$ ,  $\theta_L = \frac{8}{15}\pi$ ,  $\alpha = \frac{2}{7}$ ,  $v = \frac{4}{15}$ . 参数  $\theta_L$  表示两条 Stokes 线的夹角. 通过匹配内解和外解, 最终得到两种情况下的统一形式的连接条件:

$$\begin{aligned}
 1) \quad D_1/D_3 &= -i2\cos(v\pi) = 2\cos(v\pi) e^{-\frac{1}{2}\pi i}, \quad D_3 = D'_3, \quad (59) \\
 2) \quad D_1/D_3 &= 0, \quad D_3 = D'_3. \quad (60)
 \end{aligned}$$

在这基础上运用尖端光滑条件后, 复特征值  $\sigma_0$  可以确定  $\varepsilon$  和其他参数.

### 5 整体稳定性机制

#### 5.1 复特征值的频谱及整体振荡 (GTW) 不稳定性

对于 4.4 节的情况 1,  $p_0 = 1$ ,  $v = 1/3$ . 假设  $\sigma_0 =$

$\sigma_R - i\omega$  ( $\omega > 0$ ), 只考虑生长速度较小的模式, 即  $|\sigma_R| \ll 1$  进行稳定性分析. 在外部区域使用复特征值  $\sigma_0$  表示物理解:

$$\text{Re} \left\{ \widetilde{h}_0(\rho, t) \right\} = \text{Re} \left\{ H(\rho) e^{\frac{\sigma_0 t}{\sqrt{\varepsilon}}} \right\},$$

其中  $H(\rho) = D_1 H_1 + D_3 H_3$ ,  $D_1, D_3$  是  $H$  波的系数,  $H_1, H_3$  是  $H$  波, 且有:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= D_1 e^{-i\chi_1}, d_3 = D_3 e^{-i\chi_3}, \\
 \text{其中 } \chi_1 &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{\rho_c} \widetilde{k}_0^{(1)} d\rho, \chi_3 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{\rho_c} \widetilde{k}_0^{(3)} d\rho.
 \end{aligned}$$

然后根据 (59) 式, 则有:

$$\frac{d_1}{d_3} = \frac{D_1}{D_3} = -ie^{-i(\chi_1 - \chi_3)} = -ie^{-i\chi},$$

$$\text{其中 } \chi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{\rho_c} \left( \widetilde{k}_0^{(1)} - \widetilde{k}_0^{(3)} \right) d\rho.$$

由尖端光滑性条件,  $d_1$  和  $d_3$  要满足:

1) 对称 S-模式:

$$\frac{d_3}{d_1} = -\frac{\widetilde{k}_0^{(1)}(0)}{\widetilde{k}_0^{(3)}(0)}; \quad (61)$$

2) 反对称 A-模式:

$$d_1 = -d_3. \quad (62)$$

由 (61) 和 (62) 式, 得量子化条件:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\varepsilon_e} \int_0^{\rho_c} \left( \widetilde{k}_0^{(1)} - \widetilde{k}_0^{(3)} \right) d\rho \\
 &= \left( 2n + 1 + \frac{1}{2} + \theta_0 \right) \pi - i \ln \alpha_0, \\
 &n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (63)
 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \widetilde{k}_0^{(i)}(\rho) = \frac{k_e^{(i)}(\rho)}{G(\rho)} = \frac{\widetilde{k}_0^{(i)}(\rho)}{\lambda_0 \sqrt{A_1}}; \quad \varepsilon_e = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon}.$$

$$\text{S-模式下 } \alpha_0 e^{i\theta_0 \pi} = \frac{\widetilde{k}_0^{(1)}(0)}{\widetilde{k}_0^{(3)}(0)}, \text{ A-模式下 } \alpha_0 = 1,$$

$$\theta_0 = y_{*0} = \frac{1 + \lambda_G(1 - \lambda_0)}{1 - \lambda_0(1 - \kappa)}, \text{ 因此当前系统的参数}$$

$\overline{A_1} = MW^2 \widehat{P} e[(1 - \kappa)y_{*0} - \lambda_G] \lambda_0$  的函数.

量子化条件 (63) 确定了复特征值  $\sigma_0$  ( $|\sigma_0| = O(1)$ ) 的频谱:  $\{\sigma_{0,n}\}$ ,  $n = 0, 1, 2$ , 它们是胞晶相对宽度  $\lambda_0$  和小参数  $\varepsilon$  的参数. 这个频谱产生了两个离散的特征模式列: S-模式和 A-模式. 给定  $\lambda_0$ ,  $\widehat{P}e$  和其他物理参数, 系统允许一组中性稳定模式  $\sigma_R = 0$ , 此时  $\varepsilon = \varepsilon_{*n}$ ,  $n = 0, 1, 2$ , 且  $\varepsilon_* = \varepsilon_{*0} > \varepsilon_{*1} > \varepsilon_{*2}$ , 它们表示沿着界面传播的行波, 因此也称作



整体振荡不稳定为整体行波机制. 在首级近似下, 可以使用  $R\{\sigma_0\} = 0$  来计算  $\varepsilon_*$  取值, 一级近似下使用  $R\{\sigma_0 + \varepsilon\sigma_1\} = 0$ . 为了方便计算, 使用新的操作数:

$$\varepsilon_c = \sqrt{\frac{l_c V}{\kappa_D}}, \lambda_G = \frac{G_c}{\varepsilon_c^2}, \bar{A}_1 = \widehat{Pe} \widehat{A}_1,$$

其中:

$$G_c = \frac{l_c}{l_G}, \widehat{A}_1 = MW^2 \left[ (1 - \kappa) y_{*0} - \frac{G_c}{\varepsilon_c^2} \right],$$

$$\widehat{Pe} = \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_*^3}, \varepsilon_e = \frac{\varepsilon^2}{\lambda_0 \sqrt{\widehat{A}_1 \varepsilon_c}}.$$

由 (24), (56), (63) 式, 发现对于同一个  $n$ , GTW-S 模式增长率比 GTW-A 模式更大, 也称 GTW-S 模式比 GTW-A 模式更危险. 此外还可以得到  $\varepsilon_*$  和  $\lambda_0$  的关系, 并得到不同的物理参数下  $\varepsilon_*$  和  $\lambda_0$  的图像, 得到界面动力学参数  $M_*$  对系统稳定区域大小的影响.

通过绘图发现, 一级近似下, 界面动力学参数  $M_*$  越大, 系统的稳定区域越大. 图 2 展示了首级近似和一级近似下  $\varepsilon_*$  和  $\lambda_0$  的关系. 图像表示, 对于同一个胞晶相对宽度  $\lambda_0$ , 一级近似下的  $\varepsilon_*$  小于首级近似下的  $\varepsilon_*$ . 图 3 展示了  $n = 0, 1, 2$  时的 GTW-S 中性曲线, 发现 GTW 机制下  $n = 0$  时最危险. 图 4 和 5 分别展示了  $E = 0.1, 0.25$  时和  $m_* = 1, 5, 10$  时的 GTW-S 中性曲线. 发现对于同一个  $\lambda_0$ ,  $E$  越小, 系统的稳定区域越大, 或  $m_*$  越大, 系统稳定区域越

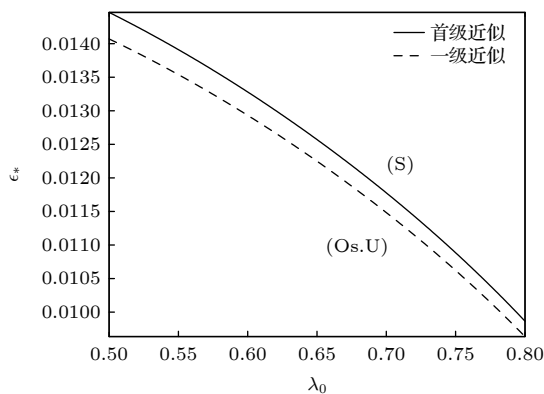


图 2 首级近似与一级近似的 GTW-S 中性模式曲线. 参数分别为  $n = 0$ ,  $\lambda_G = 0.3991$ ,  $\kappa = 0.29$ ,  $G_c = 0.14485 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_c = 0.5388 \times 10^{-2}$ ,  $M = 0.09552$ ,  $E = 0.25$ ,  $m_* = 1$

Fig. 2. The neutral curves of GTW-S-modes with zero-th-order approximation and first-order approximation for the case  $n = 0$ ,  $\lambda_G = 0.3991$ ,  $\kappa = 0.29$ ,  $G_c = 0.14485 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_c = 0.5388 \times 10^{-2}$ ,  $M = 0.09552$ ,  $E = 0.25$ ,  $m_* = 1$ .

大. 这里  $m_*$  是一个与界面动力学参数  $M_*$  有关的参数, 有  $M_* = \varepsilon^2 m_*$ ;  $E = \frac{\Delta H}{c_p \rho T_M}$  是一个和纯熔体温度  $T_M$  相关的参数.

从以上分析发现, GTW-S 中性模式的曲线将平面分成了稳定区域 (S) 和不稳定区域 (Os.U). 由此得到振荡稳定性判断依据: 若  $(\varepsilon, \lambda_0) \in (S)$ , 则稳定; 若  $(\varepsilon, \lambda_0) \in (Os.U)$ , 则振荡不稳定.

对于 4.4 节的情况 2, 这种情况导致实特征值 ( $|\sigma_0| \ll 1$ ) 的频谱. 此时系统此时系统允许两种整体低频模式, 包括对称模式与反对称模式. 但是在该模式的首级近似下, 界面动力学参数不起作用,

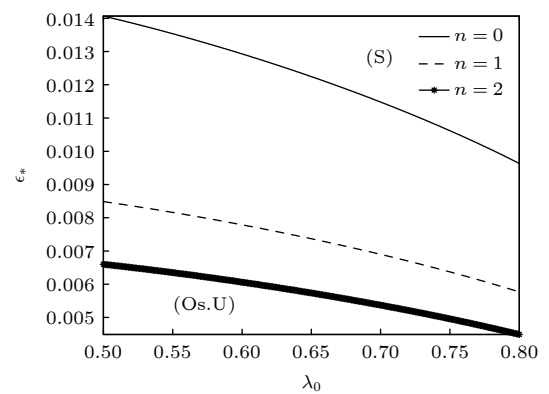


图 3 一级近似下的 GTW-S 中性模式曲线. 参数分别为  $n = 0, 1, 2$ ,  $\lambda_G = 0.3991$ ,  $\kappa = 0.29$ ,  $G_c = 0.14485 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_c = 0.5388 \times 10^{-2}$ ,  $M = 0.09552$ ,  $E = 0.25$ ,  $m_* = 1$

Fig. 3. The neutral curves of GTW-S-modes with first-order approximation for the case  $n = 0, 1, 2$ ,  $\lambda_G = 0.3991$ ,  $\kappa = 0.29$ ,  $G_c = 0.14485 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_c = 0.5388 \times 10^{-2}$ ,  $M = 0.09552$ ,  $E = 0.25$ ,  $m_* = 1$ .

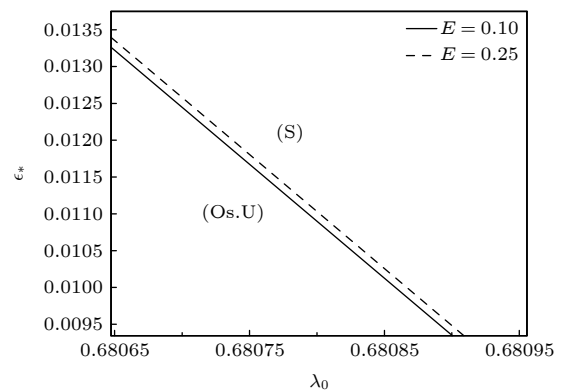


图 4 一级近似下的 GTW-S 中性模式曲线. 参数分别为  $E = 0.1, 0.25$ ,  $n = 0$ ,  $\lambda_G = 0.3991$ ,  $\kappa = 0.29$ ,  $G_c = 0.14485 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_c = 0.5388 \times 10^{-2}$ ,  $M = 0.09552$ ,  $m_* = 1$

Fig. 4. The neutral curves of GTW-S-modes with first-order approximation for the case of  $E = 0.1, 0.25$ ,  $n = 0$ ,  $\lambda_G = 0.3991$ ,  $\kappa = 0.29$ ,  $G_c = 0.14485 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_c = 0.5388 \times 10^{-2}$ ,  $M = 0.09552$ ,  $m_* = 1$ .

不影响系统在该模式下的稳定性. 一阶近似下界面动力学会影响稳定性, 后续会跟进研究.

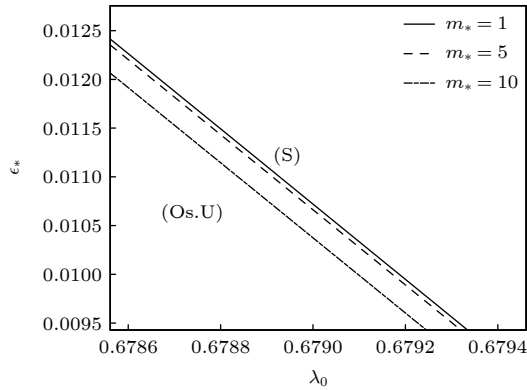


图 5 一级近似下的 GTW-S 中性模式曲线. 参数分别为  $m^* = 1, 5, 10$ ,  $E = 0.25$ ,  $\lambda_G = 0.3991$ ,  $\kappa = 0.29$ ,  $G_c = 0.14485 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_c = 0.5388 \times 10^{-2}$ ,  $M = 0.09552$

Fig. 5. The neutral curves of GTW-S-modes with first-order approximation for the case of  $m^* = 1, 5, 10$ ,  $E = 0.25$ ,  $n = 0$ ,  $\lambda_G = 0.3991$ ,  $\kappa = 0.29$ ,  $G_c = 0.14485 \times 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_c = 0.5388 \times 10^{-2}$ ,  $M = 0.09552$ .

## 6 结 论

本文通过匹配渐近展开法和多重变量展开法, 研究了定向凝固过程中界面动力学参数对深胞晶界面形态的稳定性造成的影响. 通过定义快变量进行变量替换, 寻找外部系统和根部系统的模式解, 导出了胞晶界面扰动振幅的变化率满足的色散关系, 得到了整体模式解, 界面形态的量子化条件, 内解与外解的匹配条件以及深胞晶生长的临界稳定性判断依据. 结果表明, 界面动力学参数对定向凝固中对整体波动不稳定性有影响. 考虑了界面动力学的胞晶拥有两种整体不稳定性机制: 整体振荡不稳定性 and 整体低频不稳定性. 整体振荡不稳定性出现在复特征值频谱的情况下, 表示沿着界面传播的行波, 此时系统允许对称 S-模式和反对称 A-模

式. 而整体低频不稳定性出现在实特征值频谱的情况下, 此时系统允许对称模式和反对称模式. 稳定性分析表明, 在整体波动不稳定性中, GTW-S 模式  $n = 0$  是最危险的模式, 其整体振荡模式中的枝晶结构的不稳定区域最大. 在其他参数固定的情况下, 界面动力学参数  $M^*$  越大, 则系统越稳定, 整体振荡模式中的枝晶结构的整体波动不稳定性的稳定区域越大.

## 参考文献

- [1] Peng P, Li S Y, Zheng W C, Lu L, Zhou S D 2021 *Trans. Nonferrous Met. Soc. China* **31** 3096
- [2] Mullins W W, Sekerka R F 1963 *Appl. Phys.* **34** 323
- [3] Pelcé P 1988 *Dynamics of Curved Fronts* (New York: Academic Press) pp345–352
- [4] Nash G E, Glicksman M E 1974 *ScriptaMetal.* **8** xxix
- [5] Kruskal M D, Segur H 1991 *Stud. Appl. Math.* **85** 129
- [6] Xu J J 1991 *Phys. Rev. A* **43** 930
- [7] Xu J J 1991 *Eur. J. Appl. Math.* **2** 105
- [8] Pocheau A, Georgelin M 1999 *J. Cryst. Growth* **206** 215
- [9] Ding G, Huang W, Xin L, Zhou Y 1997 *J. Cryst. Growth* **177** 281
- [10] Coriell S R, Sekerka R F 1976 *J. Cryst. Growth* **34** 157
- [11] Trivedi R, Seetharaman V, Eshelman M A 1991 *Metall. Mater. Trans. A* **22** 585
- [12] Li J F, Zhou Y H 2005 *中国科学: E 辑* **35** 10 (in Chinese) [李金富, 周尧和 2005 *Science in China(Series E)* **35** 10]
- [13] Tan Y, Wang H 2012 *J. Mater. Sci.* **47** 5308
- [14] Jiang H, Chen M W, Wang T, Wang Z D 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 10 (in Chinese) [蒋哈, 陈明文, 王涛, 王自东 2017 *物理学报* **66** 10]
- [15] Chen M W, Wang Z D, Xu J J 2008 *Sci. China Ser. E* **51** 225
- [16] Chen M W, Ni F, Wang Y L, Wang Z D, Xie J X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 068103 (in Chinese) [陈明文, 倪锋, 王艳林, 王自东, 谢建新 2011 *物理学报* **60** 068103]
- [17] Guo H M, Yang X J 2008 *Chin. J. Nonferrous Met.* **18** 651 (in Chinese) [郭洪民, 杨湘杰 2008 *中国有色金属学报* **18** 651]
- [18] Tong L L, Lin X, Zhao L N, Huang W D 2009 *Acta Metall. Sin.* **45** 737 (in Chinese) [统雷雷, 林鑫, 赵力宁, 黄卫东 2009 *金属学报* **45** 737]
- [19] Pelcé P 1988 *Dynamics of Curved Fronts*(New York: Academic. Press) pp155–174
- [20] Chen Y Q, Xu J J 2011 *Phys. Rev. E* **83** 041601
- [21] Xu J J, Chen Y Q 2011 *Phys. Rev. E* **83** 061605

# Influence of interface kinetics parameters on the overall fluctuation instability of the interface morphology of deep cell crystal<sup>\*</sup>

Niu Di<sup>1)</sup> Jiang Han<sup>1)†</sup>

<sup>1)</sup> (School of Mathematics & Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

( Received 22 February 2022; revised manuscript received 25 April 2022 )

## Abstract

The effect of interface kinetics on the stability of deep cell morphology in directional solidification is studied. By using the multiple variable method and the matching asymptotic method and by finding the mode solution of the system, the dispersion relation satisfied by the change rate of the disturbance amplitude of the cell-crystal interface is derived, and the quantization condition of the interface morphology is obtained. The results show that there are two global instability mechanisms in the directional solidification system with considering the growth of deep cell crystal with interfacial dynamic parameters: global oscillation instability mechanism and low-frequency instability. The stability analysis shows that the interface stability parameter  $\varepsilon$  is related to the cell relative parameter  $\lambda_0$ , and that the larger the interface dynamic parameter  $M^*$ , the larger the stable region of the overall fluctuation instability of the dendrite structure in the overall oscillation mode is.

**Keywords:** directional solidification, deep cellular crystal growth, interface kinetics, morphological stability

**PACS:** 81.10.Aj, 81.30.Fb, 68.35.Ja

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220322

---

<sup>\*</sup> Supported by the Guangxi Science and Technology Base and Talent Project (Grant No. Guike AD18281053).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [jiangh1986@163.com](mailto:jiangh1986@163.com)

## 界面动力学参数对深胞晶界面形态整体波动不稳定性的影响

钮迪 蒋晗

### Influence of interface kinetics parameters on the overall fluctuation instability of the interface morphology of deep cell crystal

Niu Di Jiang Han

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 168101 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220322

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220322>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 各向异性表面张力对定向凝固中共晶生长形态稳定性的影响

Effect of anisotropic surface tension on morphological stability of lamellar eutectic growth in directional solidification

物理学报. 2018, 67(11): 118103 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180186>

#### 浓度相关的扩散系数对定向凝固枝晶生长的影响

Effect of concentration-dependent diffusion coefficient on dendrite growth in directional solidification

物理学报. 2019, 68(16): 166401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190603>

#### 温度梯度区域熔化作用下熔池迁移的元胞自动机模拟

Cellular automaton simulation of molten pool migration due to temperature gradient zone melting

物理学报. 2019, 68(4): 048102 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181587>

#### 耦合界面张力的三维流体界面不稳定性的格子Boltzmann模拟

Lattice Boltzmann simulation of three-dimensional fluid interfacial instability coupled with surface tension

物理学报. 2022, 71(4): 044701 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212061>

#### 定向凝固单晶冰的取向确定与选晶

Orientation determination and manipulation of single ice crystal via unidirectional solidification

物理学报. 2018, 67(19): 196401 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180700>

#### 经典瑞利-泰勒不稳定性界面变形演化的改进型薄层模型

Improved thin layer model of classical Rayleigh-Taylor instability for the deformation of interface

物理学报. 2018, 67(9): 094701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172613>