

## 高阶单向传播内孤立波理论模型适用性\*

鄧长红<sup>1)2)</sup> 徐双东<sup>3)</sup> 韩盼盼<sup>1)2)†</sup> 陈科<sup>1)2)</sup> 尤云祥<sup>1)2)</sup>

1) (上海交通大学, 海洋工程国家重点实验室, 上海 200240)

2) (上海交通大学, 三亚崖州湾深海科技研究院, 三亚 572000)

3) (中国船舶及海洋工程设计研究院, 上海 200011)

(2022 年 3 月 7 日收到; 2022 年 5 月 6 日收到修改稿)

内孤立波在海洋中广泛存在, 其在生成、传播演化以及耗散过程中对海洋环境、地形地貌和海洋结构物等有着深远的影响. 针对内孤立波理论模型研究, 已有理论模型包括单向传播 Korteweg-de Vries (KdV) 类方程和双向传播 Miyata-Choi-Camassa (MCC) 类方程, 然而, 两类方程均未能有效地模拟大振幅内孤立波的传播演化过程. 本文采用渐近匹配方法, 对原始单向传播内孤立波方程的系数进行修正, 建立了改进的单向传播内孤立波理论模型. 在此基础上, 通过比较分析改进了前后内孤立波的理论模型, 结果表明, 改进后的理论模型稳态内孤立波的理论极限振幅能达到 MCC 方程稳态内孤立波的理论极限振幅. 结合系列实验结果, 通过定量分析稳态内孤立波有效波长、波速和波形与 MCC 方程稳态内孤立波理论解的吻合度, 进一步分析了改进后的内孤立波理论模型在表征定态内孤立波特性方面的适用性. 此外, 针对平坦地形条件下大振幅内孤立波非定态传播演化过程, 探究各类单向传播孤立波理论模型的稳定性. 研究表明改进后高阶单向传播内孤立波理论模型可用于表征大振幅内孤立波传播演化特性, 为海洋结构物水动力学研究提供理论依据.

**关键词:** 内孤立波, 理论模型, 两层流体, 强非线性**PACS:** 47.35.Fg, 47.54.Bd, 47.55.Hd, 47.20.Ky**DOI:** 10.7498/aps.71.20220411

## 1 引言

内孤立波是发生在稳定密度层化海洋内部的一种特殊波动, 具有水平尺度大、能量集中且能够在海洋中长距离传播而保持波形不变的特点. 我国南海北部地形复杂多变, 是大振幅内孤立波最为频发的海域之一<sup>[1–3]</sup>. 据观测, 南海北部海域内孤立波最大波幅可达 240 m, 最大流速高达 2.55 m/s<sup>[4]</sup>, 被认为是目前世界海洋内波观测资料中所记载的最大波幅. 内波尤其是大振幅内孤立波在传播过程中通常携带巨大的能量, 能够引起海水辐聚下沉与辐散上升运动, 同时诱导产生突发性的强水平流, 对海洋工程结构物和水下作战平台等产生强烈的

冲击性载荷, 甚至导致潜艇、鱼类等水下航行器瞬间丧失操纵能力<sup>[5]</sup>. 因此, 内孤立波已经成为海洋工程界和海洋军事活动中不容忽视的灾害性因素<sup>[1]</sup>.

Korteweg-de Vries (KdV) 系列理论已经广泛地用于表征小振幅稳态内孤立波及其传播演化过程<sup>[6–10]</sup>. 针对大振幅内孤立波, Miyata<sup>[11,12]</sup>, Choi 和 Camassa<sup>[13]</sup> 基于原始完全非线性欧拉方程, 结合自由面刚盖条件以及两层流体界面的完全非线性运动学和动力学条件, 采用速度深度平均方法, 建立了完全非线性和弱色散条件下 Miyata-Choi-Camassa (MCC) 理论模型, 其稳态解与实验测量结果<sup>[13,14]</sup>、完全非线性欧拉方程的内孤立波解和海洋观测结果<sup>[15]</sup> 吻合较好. 2020 年, Zhao 等<sup>[16]</sup> 提出在深水条件下展现更优性能的强非线性内孤立波

\* 中国博士后科学基金 (批准号: 2021M702127) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hanpanpan@sjtu.edu.cn

HLGN-FS 模型. 当上下两层流体密度差较大时, 自由表面的影响不可忽略, Kodaira 等<sup>[17]</sup> 研究发现, 与结合自由面刚盖条件的 MCC (Miyata-Choi-Camassa-rigid lid, MCC-RL) 理论模型比, 考虑了自由表面效应的 MCC (Miyata-Choi-Camassa-free surface, MCC-FS) 模型<sup>[18]</sup> 的稳态内孤立波波形较窄, 与实验测量结果更接近. Choi 和 Camassa<sup>[13]</sup> 从原始 MCC 方程出发, 保留高阶非线性项和线性色散项, 推导得到高阶单向内孤立波理论 (high-order unidirectional, HOU) 模型. Ostrovsky 和 Grue<sup>[15]</sup> 也提出类似的模型, 将 KdV 方程中色散项中的线性速度和未扰动层厚度分别替换为浅水方程的特征速度和局部层厚度, 其修正方程更具物理意义.

然而无论是 KdV 类的单向传播内孤立波理论模型, 还是 MCC 类双向传播内孤立波理论, 在模拟强非线性内孤立波传播过程中均存在缺陷. 其中, 单向传播内孤立波理论模型 (包括 KdV, eKdV, HOU 模型) 的稳态内孤立波理论极限振幅不能达到 MCC 型稳态内孤立波理论极限振幅<sup>[19]</sup>; MCC 双向传播内孤立波理论模型在用于传播大振幅内孤立波时, 其数值计算过程中可能会产生 Kelvin-Helmholtz 不稳定性问题<sup>[20]</sup>. 针对此缺陷, Zhi 等<sup>[21,22]</sup> 采用渐近匹配方法, 对原始 Gardner 方程进行修正, 推导得到修正的 Gardner 模型以及适用于变化地形的系数变化修正的 Gardner 模型, 其理论计算结果与实验测量结果符合良好. 此外, Choi 和 Zhi<sup>[19]</sup> 从原始 HOU 方程出发, 通过渐近匹配方法, 调整方程中各项系数, 建立了修正系数的 HOU (adjusted high-order unidirectional, aHOU) 模型, 其内孤立波稳态解的最大波幅、最大波速和最大振幅处有效波长与原始 MCC 方程相符合. 但由于缺乏实验数据支撑, aHOU 方程的可靠性和适用性有待进一步验证. 鉴于此, 本文将依据系列实验结果, 分析单向传播内孤立波理论模型 (包含 KdV, eKdV, aHOU 模型) 与 MCC 模型稳态内孤立波波形的符合度; 探究 KdV, eKdV 和 aHOU 模型表征稳态内孤立波的适用性; 通过对各类单向传播内孤立波理论模型传播大振幅内孤立波的稳定性分析, 进一步验证 aHOU 模型的可靠性和适用性.

## 2 改进的单向传播内孤立波理论模型

与 MCC 理论相比, HOU 型单向传播内孤立

波理论模型不适用于更大振幅内孤立波的原因有两个方面: 一方面是对大振幅内孤立波, HOU 方程理论解的有效波长与 MCC 模型相比存在差异; 另一方面是 HOU 方程的内孤立波理论极限振幅要比 MCC 模型的小. 进一步分析发现, 这些缺陷与 HOU 方程中的系数选择不合适有关. 为此, 通过调整 HOU 方程系数的方法对其进行改进. 采用渐近匹配方法确定改进方程中系数, 其具体推导过程详见先前工作<sup>[19,22]</sup>, 为保证文章的完整性及可读性, 后文将简要列出单向传播内孤立波理论模型的改进方法.

### 2.1 HOU 方程的改进方法

将原始 HOU 方程改写为

$$\zeta_t + \mu_0 \zeta_x + \mu_1 \zeta \zeta_x + \mu_{21} \zeta_{xxx} + \mu_{22} \zeta_{xxt} + \mu_3 \zeta^2 \zeta_x + \mu_4 (\zeta_x^2 + 2\zeta \zeta_{xx})_x = 0. \quad (1)$$

在 (1) 式中, 调整系数  $\mu_0$ ,  $\mu_{21}$  和  $\mu_{22}$  是为了更好地描述内孤立波的色散效应; 调整系数  $\mu_1$  和  $\mu_3$  是为了更好地描述内孤立波非线性效应, 而调整  $\mu_4$  是为了更好地描述内孤立波非线性与色散性的耦合效应. 进一步将 (1) 式改写为

$$(\zeta - \mu_{22} \zeta_{xx})_t + \left[ \mu_0 \zeta + \frac{1}{2} \mu_1 \zeta^2 + \mu_{21} \zeta_{xx} + \frac{1}{3} \mu_3 \zeta^3 + \mu_4 (\zeta_x^2 + 2\zeta \zeta_{xx}) \right]_x = 0. \quad (2)$$

由 (2) 式可知, aHOU 模型除了满足质量守恒关系 (3) 式外, 还满足如下形式的能量守恒关系 (4) 式:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta dx = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (\zeta^2 + \mu_{22} \zeta_x^2) dx = 0. \quad (4)$$

(2) 式的内孤立波稳态解为

$$\zeta_X^2 = \gamma_0 \frac{\zeta^2 (\zeta^2 + \gamma_1 \zeta + \gamma_2)}{\zeta - \bar{a}_*}, \quad (5)$$

其中,  $\gamma_i$  和  $\bar{a}_*$  分别为

$$\gamma_0 = -\frac{\mu_3}{12\mu_4}, \quad \gamma_1 = \frac{2\mu_1}{\mu_3},$$

$$\gamma_2 = -\frac{6(c - \mu_0)}{\mu_3}, \quad \bar{a}_* = -\frac{\mu_{21} + c\mu_{22}}{2\mu_4}. \quad (6)$$

由边界条件:  $\zeta = a$  时,  $\zeta_X = 0$ , 可得 (5) 式的内孤立波波速为

$$c_{\text{aHOU}} = \mu_0 + \frac{1}{6} (2\mu_1 a + \mu_3 a^2). \quad (7)$$

最大波幅  $\bar{a}_m = -\gamma_1/2$  和相应的最大波速分别为

$$\bar{a}_m = -\frac{\mu_1}{\mu_3}, \quad \bar{c}_m = \mu_0 - \frac{\mu_1^2}{6\mu_3}. \quad (8)$$

## 2.2 aHOU 方程系数的确定方法

(2) 式中系数  $\mu_i (i = 0, 1, 2 \dots)$  为上下层流体深度比和密度比的函数, 通过选取适当的  $\mu_i$  使得 aHOU 模型能够拟合 MCC 型内孤立波. 在 (2) 式中,  $\mu_0$ ,  $\mu_{21}$  和  $\mu_{22}$  与内孤立波的线性色散关系有关, 将 aHOU 方程线性化, 可得到其线性速度  $c_{\text{lin}}^{\text{aHOU}}$  为

$$\begin{aligned} c_{\text{lin}}^{\text{aHOU}} &= \frac{\mu_0 - \mu_{21} k^2}{1 + \mu_{22} k^2} \\ &= \mu_0 - (\mu_{21} + c_0 \mu_{22}) k^2 \\ &\quad + (\mu_{21} + c_0 \mu_{22}) \mu_{22} k^4 + O(k^6). \end{aligned} \quad (9)$$

由 MCC 理论的线性波速公式, 可得

$$\begin{aligned} c_{\text{lin}}^{\text{MCC}} &= \left[ \frac{(g/k) (\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 \coth kh_1 + \rho_2 \coth kh_2} \right]^{1/2} \\ &= c_0 - c_2 k^2 + c_6 k^4 + O(k^6), \end{aligned} \quad (10)$$

其中,

$$c_6 = \frac{3c_2^2}{2c_0} + \frac{c_0 h_1 h_2 (\rho_1 h_1^3 + \rho_2 h_2^3)}{90 (\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)}. \quad (11)$$

将 (9) 式和 (10) 式进行匹配, 可得  $\mu_0$ ,  $\mu_{21}$  和  $\mu_{22}$  分别为

$$\mu_0 = c_0, \quad \mu_{21} = c_2 - c_0 (c_6/c_2), \quad \mu_{22} = c_6/c_2. \quad (12)$$

将 HOU 方程线性化, 可得其线性速度为

$$\begin{aligned} c_{\text{lin}}^{\text{HOU}} &= \frac{c_0 - (c_2/2) k^2}{1 + [c_2/(2c_0)] k^2} \\ &= c_0 - c_2 k^2 + [c_2^2/(2c_0)] k^4 + O(k^6). \end{aligned} \quad (13)$$

由此可知, 对  $O(k^4)$  项, HOU 方程的线性速度与 MCC 方程的线性速度并不匹配, 而 aHOU 方程的线性速度与 MCC 方程的线性速度完全匹配.

下面选择合适的  $\mu_1$  和  $\mu_3$  使得 aHOU 方程的最大振幅和最大波速与 MCC 方程相同. 将 (8) 式中的  $\bar{a}_m$  和  $\bar{c}_m$  分别用 MCC 中的  $a_m$  和  $c_m$  替代, 可得

$$\mu_1 = 6(c_m - c_0)/a_m, \quad \mu_3 = -6(c_m - c_0)/a_m^2. \quad (14)$$

由于  $a_m$  和  $c_m$  均为上下两层流体密度比  $\rho_1/\rho_2$  和深度比  $h_1/h_2$  的函数, 因此  $\mu_1$  和  $\mu_3$  也均为  $\rho_1/\rho_2$  和  $h_1/h_2$  的函数. 为确定  $\mu_4$ , 将 aHOU 方程和 MCC 方程稳态内孤立波在最大振幅处的有效波长进行匹配, 可得

$$\mu_4 = \frac{(\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2) c_m^2 (c_m - c_0)}{6g (\rho_2 - \rho_1) a_m^2}. \quad (15)$$

## 2.3 对比 aHOU 方程与原始 HOU 方程

通过比较 aHOU 和 HOU 方程与 MCC 方程线性速度  $c_{\text{lin}}/(gh)$  随波数  $kh$  的变化特性, 进而研究分析 aHOU 系数改进的有效性. 在数值计算中, 令环境参数水深  $h = 1$  m, 上下层密度比  $\rho_1/\rho_2 = 0.972$ , 上下层流体深度比  $h_2/h_1 = 4$ . 图 1(a), (b) 分别给出了  $h_2/h_1 = 4$  时, aHOU 和 HOU 方程与 MCC 方程的线性速度  $c_{\text{lin}}/(gh)$  随  $kh$  的变化特性以及  $kh$  随波幅  $|a|/h$  的变化特性. 由图 1(b) 可知, 当  $h_2/h_1 = 4$  时, MCC 方程的理论极限振幅为  $|a_{\text{max}}^{\text{MCC}}|/h = 0.2965$ , 在此理论极限振幅范围内,  $kh$  的

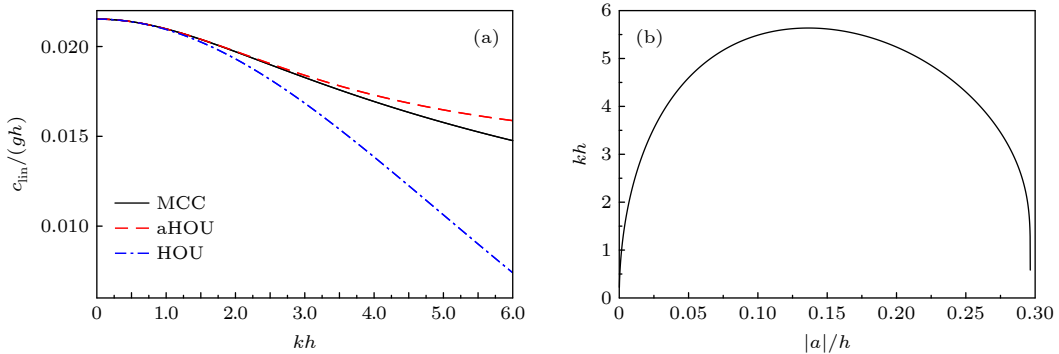


图 1 aHOU, HOU, MCC 方程 (a) 线性速度  $c_{\text{lin}}/(gh)$  随  $kh$  的变化; (b)  $kh$  随波幅的变化

Fig. 1. aHOU, HOU and MCC models: (a) The variation of the linear speed  $c_{\text{lin}}/(gh)$  with  $kh$ ; (b) the variation of  $kh$  with amplitude.

最大值为 5.363. 由图 1(a) 可知, 当  $kh$  在  $(0, 5.363]$  范围内时, aHOU 与 MCC 方程的线性速度符合良好, 但仅当  $kh \leq 2.226$  时, HOU 与 MCC 方程的线性速度符合.

### 3 实验方法

在上海交通大学大型密度分层内波水槽开展实验, 水槽主尺度为  $30.0 \text{ m} \times 0.6 \text{ m} \times 1.2 \text{ m}$  (长、宽和高), 采用注流式方法配制密度分层流体, 应用双推板式造波机技术实现内孤立波振幅的可控化 [23], 并沿内孤立波的传播方向设置两排垂直于来波方向等间距分布的电导率探头, 用以监测内孤立波波形和波速. 实验布置示意图如图 2 所示, 实验中环境参数与数值计算中保持一致, 并选取不同初始内

孤立波波幅作为初始条件. 通过内孤立波实验波形与理论模型波形的对比, 明确单向传播内孤立波理论模型表征定态内孤立波方面的适用性.

#### 3.1 实验结果分析

图 3 为波幅  $a/h = -0.2028, -0.1362, -0.0584$  的内孤立波实验波形与 KdV, eKdV, MCC 和 aHOU 理论波形的对比曲线. 在 MCC 理论极限振幅范围内, 选取 3 个典型的内孤立波波幅分别代表小振幅、中等振幅和大振幅内孤立波. 如图 3(a) 所示, 针对大振幅内孤立波, KdV 理论波形相对较窄, 与实验波形相差较大, 表明该理论不适用于描述大振幅内孤立波; 此外, MCC 和 aHOU 理论模型均与实验波形吻合良好, 表明 aHOU 可用于表

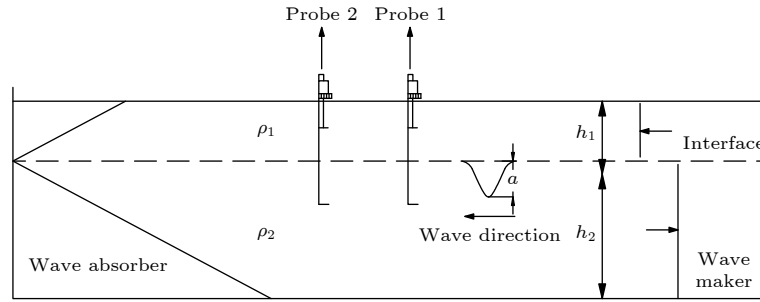


图 2 实验布置示意图

Fig. 2. Schematic diagram of experimental arrangement.

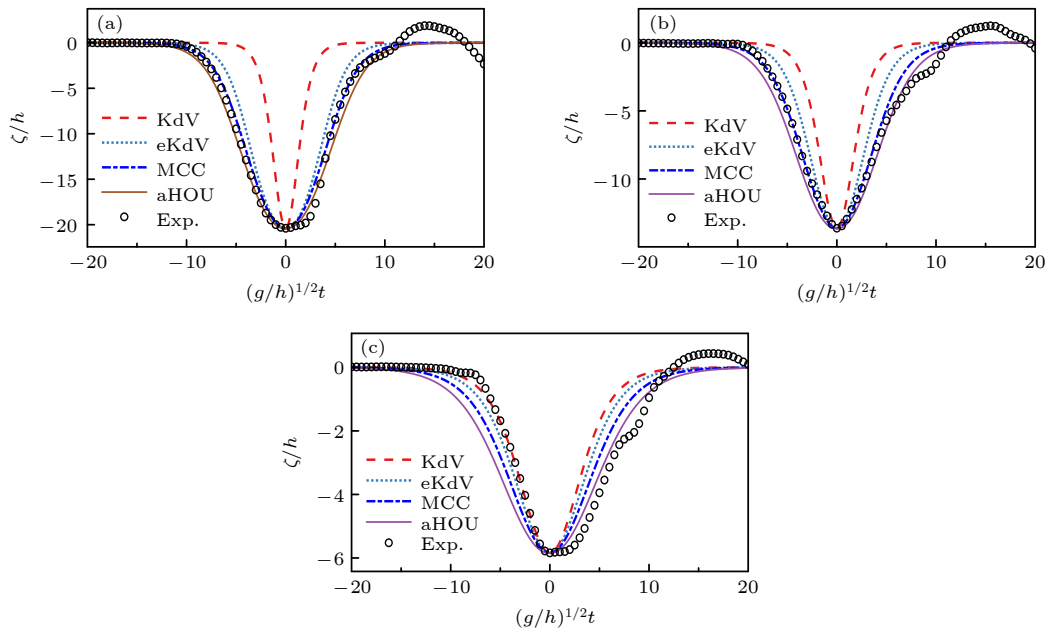


图 3 KdV, eKdV, MCC 和 aHOU 理论波形与实验波形的比较 (a)  $a/h = -0.2028$ ; (b)  $a/h = -0.1362$ ; (c)  $a/h = -0.0584$

Fig. 3. Comparison of theoretical and experimental waveforms for KdV, eKdV, MCC and aHOU models: (a)  $a/h = -0.2028$ ; (b)  $a/h = -0.1362$ ; (c)  $a/h = -0.0584$ .



征大振幅稳态内孤立波. 由图 3(b) 可知, 中等非线性内孤立波波形与 aHOU 和 MCC 理论波形基本一致, 而与弱非线性 KdV 和 eKdV 理论波形相差较大. 图 3(c) 表明对于弱非线性内孤立波, KdV, eKdV, MCC 和 aHOU 理论波形差异较小, 但 KdV 理论波形与其实验波形符合程度最大. 图 3 表明, 波形随着内孤立振幅的增大而变宽, 总体而言, 在 MCC 理论极限振幅范围内, 单向传播内孤立波理论模型中 aHOU 理论适用于表征小、中等和大振幅内孤立波.

### 3.2 稳态内孤立波理论解特性

通过对 KdV, eKdV, aHOU 和 MCC 方程 4 类稳态内孤立波理论解特性进行定量分析, 进一步探究单向传播内孤立波理论模型的适用性. 数值计算过程中, 实验环境参数不变. 图 4(a) 给出了当  $h_1/h_2 = 1:4$  时, 4 类稳态内孤立波理论解的有效波长  $\lambda/h$  随振幅  $|a|/h$  的变化特性. 图 4(b) 给出了波速  $c/c_0$  随振幅  $|a|/h$  的变化特性. 由图 4 可知, 当  $|a|/h < 0.025$  时, KdV, eKdV, aHOU 的有效波长和波速均与 MCC 型稳态内孤立波的有效波长和波速契合良好. KdV 型稳态内孤立波不存在理论极限振幅, 当  $|a|/h > 0.025$ , KdV 型稳态内孤立波的有效波长及波速随着振幅的增大与 MCC 型稳态内孤立波的有效波长和波速偏离的程度越大. eKdV, aHOU 和 MCC 均为有限振幅内孤立波理论. 由图 4(a) 可知, eKdV 型稳态内孤立波理论极限振幅  $|a_{\max}^{\text{eKdV}}|/h = 0.2965$  小于 MCC 型稳态内孤立波理论极限振幅  $|a_{\max}^{\text{MCC}}|/h = 0.2965$ . 但 aHOU 型稳态内孤立波的理论极限振幅与  $|a_{\max}^{\text{MCC}}|/h = 0.2965$  接近. 由图 4(a), (b) 进一步可知, 当  $|a|/h < |a_{\max}^{\text{eKdV}}|/h$  时, eKdV 型稳态内孤立波稳态内孤立波的有效波长及波速与 MCC 型稳态内孤立波的有效波长和波速符合, 而在整个 MCC 型稳态内孤立波理论极限振幅范围内, aHOU 型稳态内孤立波的有效波长及波速与 MCC 型稳态内孤立波的有效波长及波速符合.

进一步考虑 KdV, eKdV 和 aHOU 型稳态内孤立波波形与 MCC 型稳态内孤立波波形的吻合度. 为此, 在  $[-a, 0)$  范围内取  $N$  个值, 设为  $\zeta_n^A$ , 其中,  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ ,  $A$  表示内孤立波理论类型, 如  $A = \text{MCC}$ , 即表示 MCC 方程内孤立波位移  $\zeta$  的取值. 设与  $\zeta_n$  对应的  $X$  ( $X > 0$ ) 值为  $X_n$ , 定义

$A$  型稳态内孤立波与 MCC 型稳态内孤立波波形的误差为

$$\Delta_A = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |X_n^A - X_n^{\text{MCC}}|^2}. \quad (16)$$

$\Delta_A$  越小, 表示  $A$  型稳态内孤立波与 MCC 型稳态内孤立波波形的吻合度越高. 在 MCC 型稳态内孤立波理论极限振幅  $|a_{\max}^{\text{MCC}}|/h = 0.2965$  范围内, 选取若干个振幅  $|a|/h$  的值, 分别计算 aHOU, eKdV 和 KdV 与 MCC 型稳态内孤立波波形的契合度  $\Delta_{\text{aHOU}}$ ,  $\Delta_{\text{eKdV}}$  和  $\Delta_{\text{KdV}}$ , 结果如表 1 所列.

表 1 三类孤立波理论稳态解波形的契合度  
Table 1. Waveform fitness of three theoretical models.

$ a /h$	$\Delta_{\text{aHOU}}$	$\Delta_{\text{eKdV}}$	$\Delta_{\text{KdV}}$
0.010	0.0702	0.0273	0.0459
0.015	0.0748	0.0402	0.0681
0.020	0.0780	0.0549	0.0931
0.025	0.0809	0.0650	0.1121
0.030	0.0828	0.0743	0.1314
0.035	0.0836	0.0852	0.1483
0.040	0.0868	0.0981	0.17197
0.045	0.0883	0.1074	0.1908
0.050	0.0879	0.1135	0.2029
0.070	0.0912	0.1494	0.2775
0.080	0.0914	0.1597	0.3037
0.090	0.0791	0.1709	0.3308
0.100	0.0878	0.1803	0.3607
0.110	0.0895	0.1888	0.3908
0.120	0.0866	0.1941	0.4143
0.130	0.0840	0.2006	0.4464
0.140	0.0842	0.2009	0.4727
0.150	0.0818	0.1972	0.4921
0.200	0.0708	0.0950	0.6075
0.250	0.0876	—	—
0.260	0.0604	—	—
0.270	0.0588	—	—
0.280	0.0567	—	—
0.290	0.0525	—	—

首先分析 KdV 型稳态内孤立波与 MCC 型稳态内孤立波的符合度. 图 5 给出了当  $|a|/h = 0.010, 0.015, 0.020$  和  $0.100$  时, KdV 型稳态内孤立波与 eKdV, HOU, MCC 型稳态内孤立波波形的比较. 结合图 5, 由表 1 可知, 当  $|a|/h < 0.025$  时, KdV 型稳态内孤立波波形与 MCC 理论模型符合

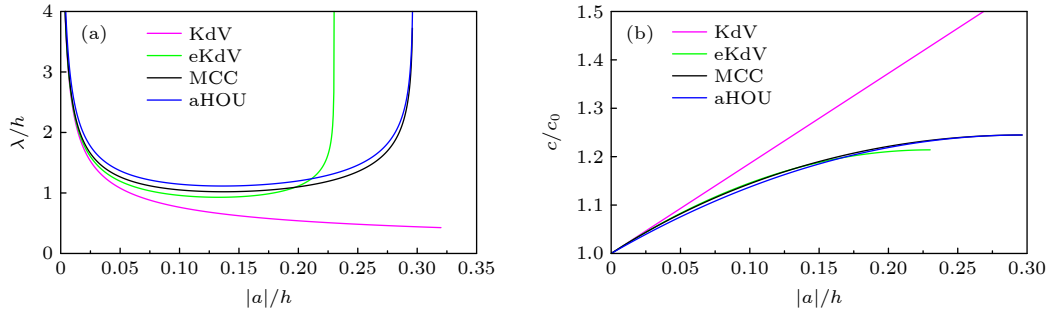


图 4 KdV, eKdV, aHOU 与 MCC 方程的稳态内孤立波 (a) 有效波长  $\lambda/h$  随振幅  $|a|/h$  的变化; (b) 波速  $c/c_0$  随振幅  $|a|/h$  的变化  
Fig. 4. Variation characteristics for KdV, eKdV, aHOU and MCC models: (a) The effective wavelength  $\lambda/h$  with amplitude  $|a|/h$ ; (b) the wave speed  $c/c_0$  with amplitude  $|a|/h$ .

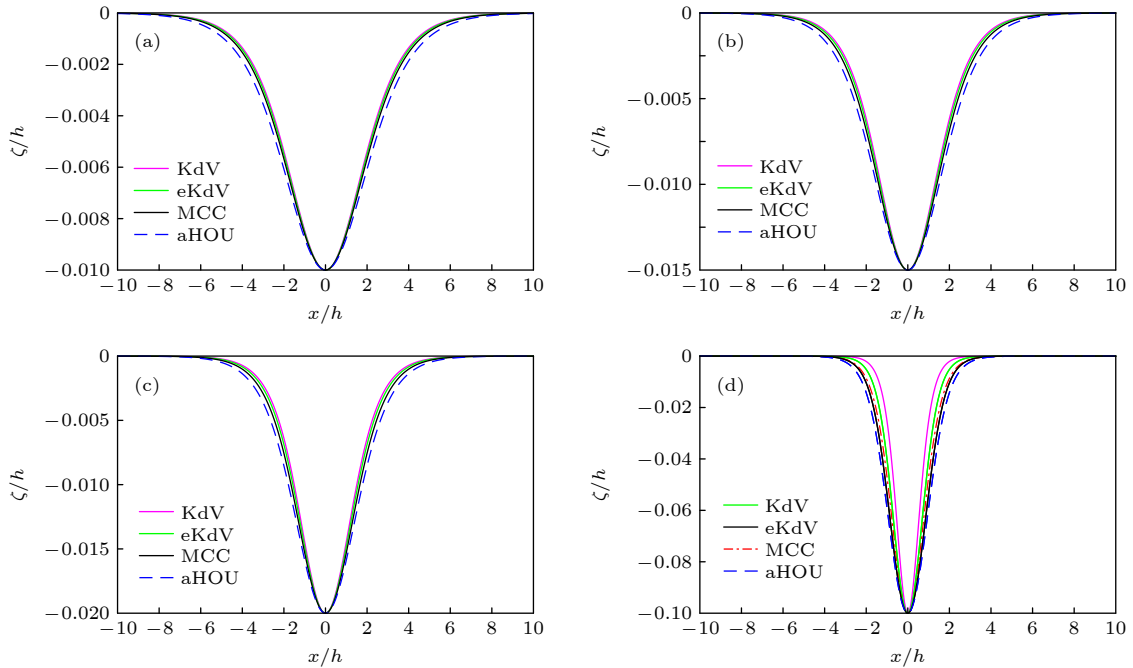


图 5 KdV 型稳态内孤立波与 eKdV, aHOU 和 MCC 型方程稳态内孤立波波形的比较 (a)  $|a|/h = 0.010$ ; (b)  $|a|/h = 0.015$ ; (c)  $|a|/h = 0.020$ ; (d)  $|a|/h = 0.100$   
Fig. 5. Comparison of steady-state internal solitary waveform of KdV, eKdV, aHOU and MCC models: (a)  $|a|/h = 0.010$ ; (b)  $|a|/h = 0.015$ ; (c)  $|a|/h = 0.020$ ; (d)  $|a|/h = 0.100$ .

良好, 误差  $\Delta_{\text{eKdV}}$  均达到  $10^{-2}$  量级. 当  $|a|/h \geq 0.025$  时, 其波形与 MCC 理论模型符合情况逐渐变差. 由图 4 可知, KdV 理论不存在极限振幅. 在 KdV 理论模型中, 色散性精确到一阶色散项  $O(\mu)$  (即弱色散条件), 非线性精确到  $O(\varepsilon)$  (即平方非线性条件), 满足非线性与色散性的平衡条件. 由此可知, KdV 模型仅适用于表征波幅较小的内孤立波.

接下来分析 eKdV 型稳态内孤立波与 MCC 型稳态内孤立波的吻合度. 图 6 给出了当  $|a|/h = 0.015, 0.030, 0.040$  和  $0.100$  时, eKdV 型稳态内孤立波与 aHOU, MCC 型稳态内孤立波波形的比较. 结合图 6, 由表 1 可知, 当  $|a|/h \leq 0.045$  时, eKdV 型

稳态内孤立波波形与 MCC 理论模型吻合良好, 误差  $\Delta_{\text{eKdV}}$  均达到  $10^{-2}$  量级. 当  $|a|/h > 0.045$  时, 其波形与 MCC 理论模型吻合情况较差. 由此可见, eKdV 模型并不是表征 MCC 型内孤立波最有效的单向传播内孤立波理论模型.

最后考虑 aHOU 型稳态内孤立波与 MCC 型稳态内孤立波波形的吻合度. 图 7 给出了当  $|a|/h = 0.015, 0.030, 0.070, 0.110, 0.150$  和  $0.290$  时, aHOU 型稳态内孤立波与 MCC 型稳态内孤立波波形的比较. 由表 1 并结合图 7 可知, 在 MCC 稳态内孤立波理论极限范围内, 两者的波形均吻合良好,  $\Delta_{\text{aHOU}}$  均达到  $10^{-2}$  量级. MCC 理论模型是在弱色

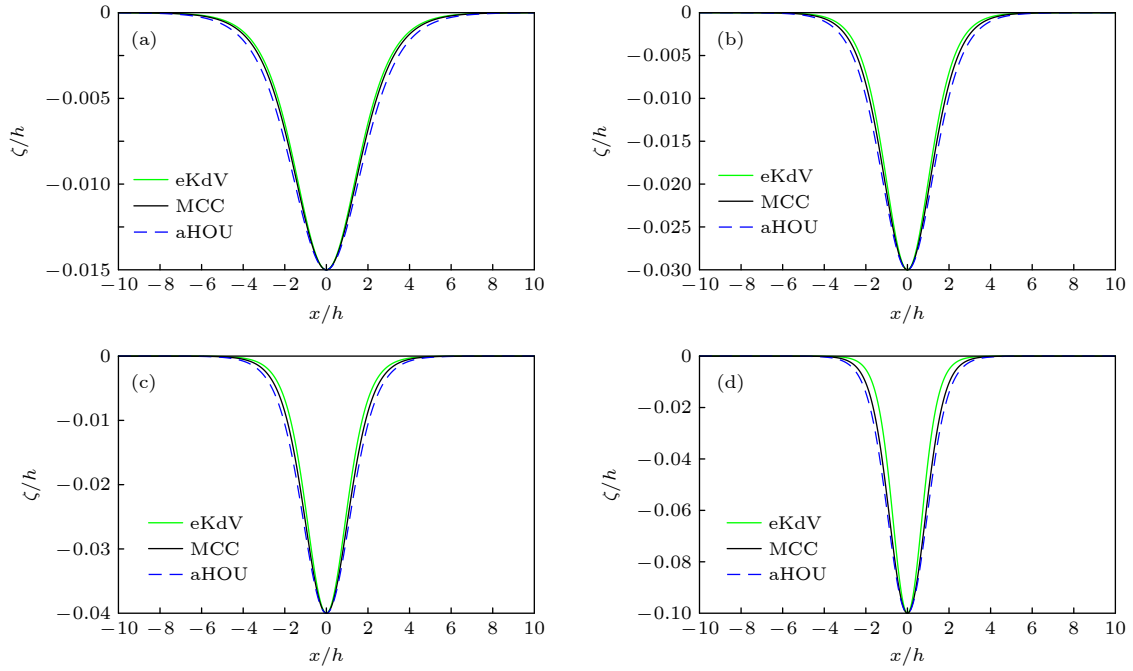


图6 eKdV型稳态内孤立波与aHOU和MCC型方程稳态内孤立波波形的比较 (a)  $|a|/h = 0.015$ ; (b)  $|a|/h = 0.030$ ; (c)  $|a|/h = 0.040$ ; (d)  $|a|/h = 0.100$

Fig. 6. Comparison of steady-state internal solitary waveform of eKdV, aHOU and MCC models: (a)  $|a|/h = 0.015$ ; (b)  $|a|/h = 0.030$ ; (c)  $|a|/h = 0.040$ ; (d)  $|a|/h = 0.100$ .

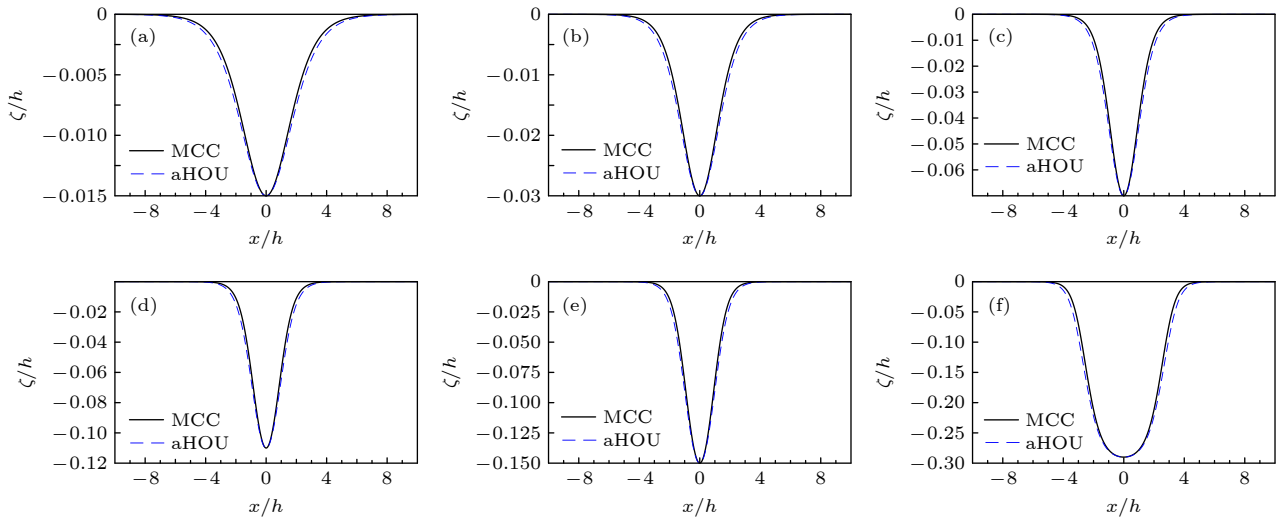


图7 aHOU型稳态内孤立波与MCC型方程稳态内孤立波波形的比较 (a)  $|a|/h = 0.015$ ; (b)  $|a|/h = 0.030$ ; (c)  $|a|/h = 0.070$ ; (d)  $|a|/h = 0.110$ ; (e)  $|a|/h = 0.150$ ; (f)  $|a|/h = 0.290$

Fig. 7. Comparison of the steady-state internal solitary waveform between aHOU and MCC models: (a)  $|a|/h = 0.015$ ; (b)  $|a|/h = 0.030$ ; (c)  $|a|/h = 0.070$ ; (d)  $|a|/h = 0.110$ ; (e)  $|a|/h = 0.150$ ; (f)  $|a|/h = 0.290$ .

散和完全非线性条件下建立的,而在aHOU理论中,对色散性精确到 $O(\mu)$ (即弱色散条件),而对非线性精确到 $O(\varepsilon^2)$ (即立方非线性条件),且同时考虑了非线性和色散性的耦合项 $O(\varepsilon\mu)$ .由此可见,用单向传播内孤立波理论模型aHOU来表征MCC型内孤立波可行且有效.

#### 4 KdV, eKdV 和 aHOU 内孤立波理论模型的稳定性

探究3类内孤立波方程的稳定性问题,即在平坦地形的情况下,分别用KdV, eKdV和aHOU型稳态内孤立波作为初始波,并用其各自内孤立波理论模型进行传播,研究初始波在传播过程中的波形

变化特性. 在数值计算过程中, 空间上采用二阶中心差分方法, 时间上采用四阶 Runge-Kutta 方法.

针对 aHOU 方程, 图 8(a) 给出了当  $0 \leq t(h/g)^{1/2} \leq 3000$  时, 初始波幅为  $a/h = -0.25$  的内孤立波传播过程中波高  $-\zeta/h$  随时间  $t(h/g)^{1/2}$  的变化特性. 在数值计算过程中, 以 aHOU 方程的理论波速作为移动参考系的速度. 由图 8(a) 可知, 当  $0 \leq t(h/g)^{1/2} \leq 3000$  时, 在数值求解 aHOU 方程的过程中, 内孤立波的波幅和波形始终保持不变, 且未发生相位移动的改变, 进一步表明波速始终保持不变. 由此可见, 文中选取的数值格式稳定有效, 且 aHOU 型单向传播内孤立波理论模型可用于描述 aHOU 型内孤立波的传播过程. 图 8(b), (c) 分别给出了利用 eKdV

和 KdV 方程模拟初始波幅为  $a/h = -0.05$  的内孤立波在传播过程中波高  $-\zeta/h$  随时间  $t(h/g)^{1/2}$  的变化特性, 进一步分析可知, KdV, eKdV 和 aHOU 型单向传播内孤立波理论模型分别适用于传播其各自稳态内孤立波.

## 5 结 论

本文基于原始单向传播内孤立波理论模型, 通过调整方程中各项系数, 进而更好地描述内孤立波的色散效应、非线性效应以及非线性和色散项的耦合效应, 提出了 aHOU 模型. 采用渐近匹配方法, 通过将 aHOU 方程的线性色散关系、最大振幅与最大波速以及最大振幅处有效波长与 MCC 方程相匹配, 进而确定 aHOU 方程中各项系数.

由系列实验结果, 表明在 MCC 理论极限振幅范围内, aHOU 理论适用于表征小振幅、中等振幅和大振幅内孤立波. 通过对 KdV, eKdV 和 aHOU 方程与 MCC 方程稳态内孤立波解特性进行定量分析, 进一步表明 KdV 模型仅适用于表征波幅较小的 MCC 型内孤立波, 且 eKdV 模型不是最有效的用于表征 MCC 型内孤立波的单向传播内孤立波理论, 而在 aHOU 理论中, 对色散性精确到  $O(\mu)$  (即弱色散条件), 而对非线性精确到  $O(\varepsilon^2)$  (即立方非线性条件), 且同时考虑了非线性和色散性的耦合项  $O(\varepsilon\mu)$ , 由此用单向传播内孤立波理论模型 aHOU 来表征 MCC 型内孤立波是可行且有效的. 此外, 研究发现 KdV, eKdV 和 aHOU 型单向传播内孤立波理论模型分别适用于传播其各自稳态内孤立波.

鉴于此, aHOU 方程可作为统一的高阶单向传播内孤立波理论模型, 表征小振幅、中等振幅和大振幅稳态内孤立波及其传播演化过程, 解决了已有单向传播理论模型均未能表征大振幅内孤立波的缺陷, 将单向传播内孤立波理论模型拓宽至强非线性范畴.

## 参考文献

- [1] Cai S, Xie J, He J 2012 *Surv. Geophys.* **33** 927
- [2] Alford, H M, Lien, Ren-Chieh, Simmons, Harper, Klymak, Jody, Ramp, Steve, Yang, Jang Y, Tang, David, Chang, Ming-Huei 2010 *J. Phys. Oceanogr.* **40** 1338
- [3] Klymak J M, Pinkel R, Liu C T, Liu A K, David L 2006 *Geophys. Res. Lett.* **33** L11607

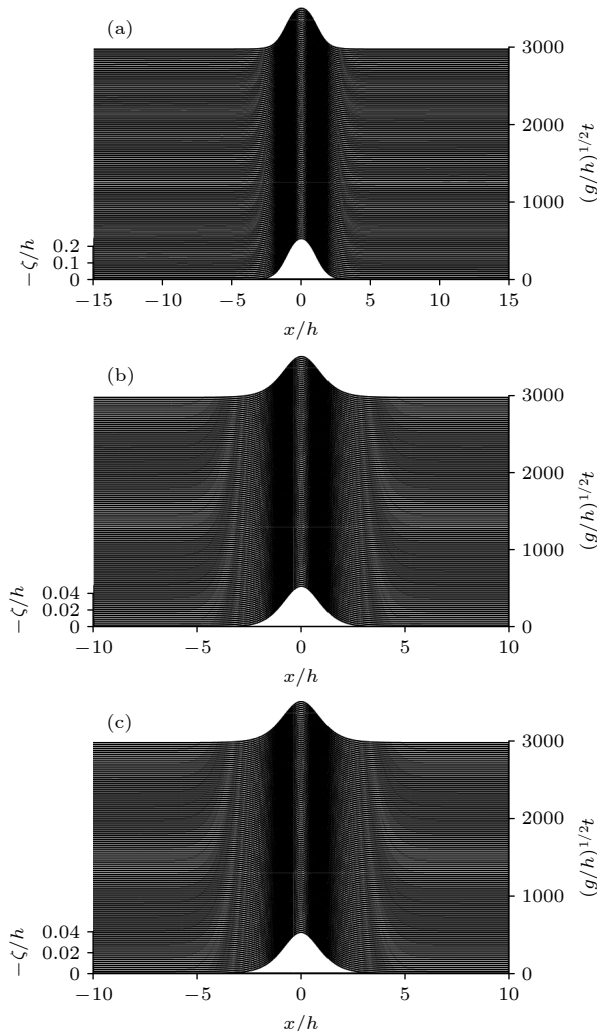


图 8 当  $0 \leq t(h/g)^{1/2} \leq 3000$  时,  $-\zeta/h$  随  $t(h/g)^{1/2}$  的变化特性 (a) aHOU 方程; (b) eKdV 方程; (c) KdV 方程

Fig. 8. Variation characteristics of  $-\zeta/h$  with  $t(h/g)^{1/2}$  when  $0 \leq t(h/g)^{1/2} \leq 3000$ : (a) aHOU model; (b) eKdV model; (c) KdV model.



- [4] Huang X, Chen Z, Zhao W, Zhang Z, Zhou C, Yang Q, Tian J 2016 *Sci. Rep.* **6** 1
- [5] Alford M H, Peacock T, MacKinnon J A, Nash J D, Buijsman M C, Centurioni L R, Chao S Y, Chang M H, Farmer D M, Fringer O B 2015 *Nature* **521** 65
- [6] Holloway P E, Pelinovsky E, Talipova T 1999 *J. Geophys. Res. Oceans* **104** 18333
- [7] Holloway P E, Pelinovsky E, Talipova T, Barnes B 1997 *J. Phys. Oceanogr.* **27** 871
- [8] Zhi C, Chen K, You Y 2021 *J. Shanghai Jiaotong Univ. Sci.* **55** 916 (in Chinese) [邹长红, 陈科, 尤云祥 2021 上海交通大学学报 **55** 916]
- [9] Zhi C, Chen K, You Y 2018 *J. Ocean Eng. Sci.* **3** 83
- [10] Zou L, Du B Y, Ma X Y, Li Z H, Zhang Z H 2019 *Chinese Congress of Theoretical and Applied Mechanics*. Hangzhou, Zhejiang, China, August 25–28, 2019 p13
- [11] Miyata M 1985 *Lamer* **23** 43
- [12] Miyata M 1988 *Nonlinear water waves* (Springer) pp399–406
- [13] Choi W, Camassa R 1999 *J. Fluid Mech.* **396** 1
- [14] Michallet H, Barthelemy E 1998 *J. Fluid Mech.* **366** 159
- [15] Ostrovsky L A, Grue J 2003 *Phys. Fluids* **15** 2934
- [16] Zhao B, Wang Z, Duan W, Ertekin R C, Hayatdavoodi M, Zhang T 2020 *J. Fluid Mech.* **899** A17
- [17] Kodaira T, Waseda T, Miyata M, Choi W 2016 *J. Fluid Mech.* **804** 201
- [18] Choi W, Camassa R 1996 *J. Fluid Mech.* **313** 83
- [19] Choi W, Zhi C, Barros R 2020 *Ocean Model.* **151** 101643
- [20] Jo T C, Choi W 2002 *Stud. Appl. Math.* **109** 205
- [21] Zhi C H, Wang H, Chen K, You Y X 2021 *Ocean Eng.* **223** 108645
- [22] Zhi C H, Chen K, You Y X 2021 *Chinese J. Hydrodyn.* **36** 395 (in Chinese) [邹长红, 陈科, 尤云祥 2021 水动力学研究与进展 (A 辑) **36** 395]
- [23] Huang W H, You Y X, Wang X, Hu T Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 084705 (in Chinese) [黄文昊, 尤云祥, 王旭, 胡天群 2013 物理学报 **62** 084705]

# Applicability of high-order unidirectional internal solitary wave theoretical model\*

Zhi Chang-Hong<sup>1)2)</sup> Xu Shuang-Dong<sup>3)</sup> Han Pan-Pan<sup>1)2)†</sup>  
Chen Ke<sup>1)2)</sup> You Yun-Xiang<sup>1)2)</sup>

1) (*State Key Laboratory of Ocean Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China*)

2) (*SJTU Yazhou Bay Institute of Deepsea Sci-Tech, Shanghai Jiao Tong University, Sanya 572000, China*)

3) (*Marine Design & Research Institute of China, Shanghai 200011, China*)

( Received 7 March 2022; revised manuscript received 6 May 2022 )

## Abstract

Internal solitary waves exist widely in the oceans, and their generations, propagation evolutions, and dissipations have profound effects on the ocean environment, topography, and marine structures. Typically, two basic theoretical models are now being developed to govern the evolutions of internal solitary waves at the interface of two immiscible inviscid fluids. One is a unidirectional wave propagation model described by the KdV (Korteweg-de Vries) equation, and the other is a bidirectional wave propagation model depicted by the Miyata-Choi-Camassa (MCC) equation. Neither of them, however, can effectively characterize the course of the evolution of large-amplitude internal solitary wave. In this paper, a modified unidirectional internal solitary wave model is established by adjusting the coefficients of the original unidirectional model. The adjusted coefficients are determined through asymptotic analysis by matching with the MCC model. The efficacy of the modified coefficients is investigated by comparing the modified model with the original model. The experiments on the generation of internal solitary waves with varying amplitudes are carried out by comparing the internal solitary wave solution of the modified equation. It is shown that the modified model is suitable for describing the waveform of internal solitary waves with small, medium, and large amplitudes within the limiting amplitude of the MCC model. By quantitatively analyzing the agreement of the effective wavelength, wave speed, and waveform of steady-state internal solitary waves between the unidirectional model and the MCC model, the applicability of the modified model in characterization of the properties of steady-state internal solitary waves is further investigated. In addition, the stability of unidirectional theoretical model is analyzed for simulating the propagation of large-amplitude internal solitary wave under flat bottom condition. It is found that the unidirectional model is suitable for initiating its own internal solitary solution provided that the numerical scheme is stable. It is shown that the modified unidirectional model can be used to characterize large-amplitude internal solitary waves, and is also expected to be applied to the study of marine structure hydrodynamics.

**Keywords:** internal solitary waves, theoretical model, two-layer fluid, strong nonlinearity

**PACS:** 47.35.Fg, 47.54.Bd, 47.55.Hd, 47.20.Ky

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220411

\* Project supported by the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. 2021M702127).

† Corresponding author. E-mail: [hanpanpan@sjtu.edu.cn](mailto:hanpanpan@sjtu.edu.cn)



## 高阶单向传播内孤立波理论模型适用性

郑长红 徐双东 韩盼盼 陈科 尤云祥

### Applicability of high-order unidirectional internal solitary wave theoretical model

Zhi Chang-Hong Xu Shuang-Dong Han Pan-Pan Chen Ke You Yun-Xiang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 174701 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220411

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220411>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 浅海内孤立波动态传播过程中声波模态强度起伏规律

Modal intensity fluctuation during dynamic propagation of internal solitary waves in shallow water

物理学报. 2022, 71(2): 024302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211132>

#### 拖曳体激发内波时空特性实验及其理论模型

Theoretical models and experiments for the time-space characteristics of internal waves generated by towed bodies

物理学报. 2018, 67(3): 034701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20170920>

#### 四阶色散非线性薛定谔方程的明暗孤立波和怪波的形成机制

Study on the generation mechanism of bright and dark solitary waves and rogue wave for a fourth-order dispersive nonlinear Schrödinger equation

物理学报. 2020, 69(1): 010502 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191384>

#### 孤子内波环境下三维声传播建模

Modeling of three-dimensional sound propagation through solitary internal waves

物理学报. 2019, 68(20): 204302 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190478>

#### 磁偶极子阵列模型的适用性研究与优化分析

Applicability and optimization analysis of magnetic dipole array model

物理学报. 2022, 71(12): 124101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212223>

#### 两层老化心肌组织中螺旋波和时空混沌的控制

Control of spiral wave and spatiotemporal chaos in two-layer aging cardiac tissues

物理学报. 2021, 70(9): 098202 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201294>