

## 基于线性与非线性干涉仪的量子精密测量研究进展

孙思彤 丁应星 刘伍明

### Research progress in quantum precision measurements based on linear and nonlinear interferometers

Sun Si-Tong Ding Ying-Xing Liu Wu-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 130701 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220425

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220425>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 能够突破标准量子极限的原子双数态的制备研究

Generation of twin-Fock states for precision measurement beyond the standard quantum limit

物理学报. 2018, 67(16): 160303 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181029>

#### 基于量子增强型光纤马赫-曾德尔干涉仪的低频信号测量

Measurement of low-frequency signal based on quantum-enhanced fiber Mach-Zehnder interferometer

物理学报. 2018, 67(24): 244202 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181335>

#### 基于单一分光棱镜干涉仪的双通路定量相位显微术

Dual-channel quantitative phase microscopy based on a single cube beamsplitter interferometer

物理学报. 2018, 67(14): 140704 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172722>

#### 超冷原子系综的非高斯纠缠态与精密测量

Non-Gaussian entangled states and quantum metrology with ultracold atomic ensemble

物理学报. 2019, 68(4): 040306 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190147>

#### 高灵敏度的量子迈克耳孙干涉仪

High sensitivity quantum Michelson interferometer

物理学报. 2018, 67(13): 134202 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172563>

#### 探测器对量子增强马赫-曾德尔干涉仪相位测量灵敏度的影响

Effect of detection efficiency on phase sensitivity in quantum-enhanced Mach-Zehnder interferometer

物理学报. 2018, 67(23): 234202 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181193>

专题: 非厄米物理前沿

# 基于线性与非线性干涉仪的 量子精密测量研究进展\*

孙思彤<sup>#</sup> 丁应星<sup>#</sup> 刘伍明<sup>†</sup>

(中国科学院物理研究所, 北京 100190)

(2022 年 3 月 9 日收到; 2022 年 4 月 1 日收到修改稿)

量子精密测量根据量子力学的基本原理, 利用光、原子、磁之间的相互作用对待测物理量进行测量. 随着实验条件和技术的成熟, 如何利用干涉仪进一步提高相位信号这一物理量的测量精度从而打破散粒噪声的限制、突破标准量子极限并逼近海森伯极限成为研究的前沿课题. 本文阐述了利用线性干涉仪 (包括原子/光子干涉仪) 与非线性干涉仪调用不同阶段的量子资源在测量过程中提高参数评估精度的几种方法, 通过向干涉仪中输入非经典态来实现高精度测量, 如压缩态、双数态、NOON 态等, 还介绍了为直接观测量子态而发展出的弱测量及其在非厄米系统中的应用和为消除参数之间精度制衡而提出的多参数测量. 最后, 对几种测量方法进行了分析比较, 并展望了量子精密测量的发展前景.

**关键词:** 量子精密测量, 干涉仪, 海森伯极限, 标准量子极限, 非厄米系统**PACS:** 07.60.Ly, 42.50.Dv**DOI:** 10.7498/aps.71.20220425

## 1 引言

计量学与量子力学的结合产生了量子精密测量这一前沿领域, 对前沿技术的发展具有重要意义, 它不仅能够提高普朗克常数  $h$ , 万有引力常数  $G$  等基本物理学常数的测量精度, 而且能应用于设计并制造各种量子仪器如原子钟、陀螺仪、原子重力仪、原子磁强计等来提高时间、频率、重力加速度、磁场等参数的测量精度<sup>[1–8]</sup>. 量子精密测量主要研究在量子力学原理允许的条件下如何实现高精度测量, 具体测量分为两个方面, 一种是利用统计规律的经典测量方法所能达到的最高测量精度, 被称为标准量子极限; 另一种是利用系综中不同粒子之间的量子纠缠和关联的手段达到的最高测量

精度, 被称为海森伯极限. 这些都是可观测到的量子涨落所允许的最大精度. 因干涉仪具有的高分辨率和高稳定性, 使得基于干涉仪的量子精密测量成为量子精密测量领域的主要发展方向. 目前, 量子精密测量广泛应用于离子系综<sup>[9–11]</sup>、冷原子系综<sup>[12,13]</sup>、光子系综<sup>[14,15]</sup>以及核磁共振系综<sup>[16–18]</sup>等物理体系, 其中, 冷原子系综拥有较高的可控性和稳固的量子相干性, 因此具有较高的测量精度.

由于量子力学中不确定性原理的条件限制, 测量结果会有误差, 为了减小误差带来的影响, 一般进行多次实验, 重复测量, 取测量结果的平均值. 根据中心极限定理, 重复  $N$  次 ( $N$  远大于 1) 独立的测量, 其测量结果满足正态分布, 测量误差可以达到  $1/\sqrt{N}$ , 该比例因子即为标准量子极限, 这就是经典力学框架下的测量极限. 而量子测量则可以

\* 国家重点研发计划资助项目 (批准号: 2021YFA1400900, 2021YFA0718300, 2021YFA1400243) 和国家自然科学基金 (61835013) 的资助.

<sup>#</sup> 同等贡献作者.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: [wmliu@iphy.ac.cn](mailto:wmliu@iphy.ac.cn)

利用粒子之间的量子关联来突破该极限,在体系中使用更少的原子数即达到相同的精度.如将输入态制备成最大纠缠态,使  $N$  个粒子的量子态相互纠缠,则可以把测量精度提高到  $1/N$ ,比标准量子极限允许的精度提高了  $\sqrt{N}$  倍,该比例因子被称为海森伯极限.向干涉仪中注入非经典态可以使位相测量精度达到海森伯极限.在原子干涉测量领域中,在捕获离子系统、低温气体、超冷原子中,也已经证明了超过标准量子极限的测量精度.对于数量巨大的粒子来说,灵敏度的增长幅度也是巨大的.

本文将介绍量子精密测量的几种典型方法,主要从线性干涉中的原子/光子干涉仪精密测量与非线性干涉仪精密测量两个方面介绍近年来突破标准量子极限和逼近海森伯极限的进展.

## 2 基于线性干涉仪的精密测量

线性干涉仪是利用线性光学分束器 BS 作为干涉器件进行分束合束.向其中输入相干态压缩噪声从而提高信噪比.系综越大求平均值的置信度越高,对于一个较大的系综来说,相位由时间来积累.线性干涉仪的测量过程可以分为:将探针制备到所需的输入态,再将待测量放入干涉仪与探针进行动力学演化,然后有区分地测量多个粒子的输出态,进行这 3 个过程的数据处理.假设输入态为  $\rho_{\text{in}}$ ,在零时刻给定一个系综,进行相位演化  $U(\varphi) = e^{iG\varphi}$ ,若测量对象为距离,则  $G$  为动量,若测量对象为时间,则  $G$  为哈密顿量.若输入态为不同能量的叠加态,则随着时间的变化,不同态上有不同的时间相位积累,两个能级差积累在与  $\varphi$  对应的相位上,故得到输出态  $\rho_{\text{out}}(\varphi) = U(\varphi)\rho_{\text{in}}(0)U^\dagger(\varphi)$ ,根据误差传递公式,可以得到待测量  $\theta = \langle I(\theta) \rangle^{-1}$  的相位灵敏度  $\delta\theta = \frac{\delta I(\theta)}{d\langle I(\theta) \rangle / d\theta}$ ,其中,  $\delta I(\theta)$  是观测量的标准偏差,  $d\langle I(\theta) \rangle / d\theta$  为信号变化率.通过将指向北极的自旋相干态作为输入状态,当  $\theta = \pi/2$  时,状态旋转到自旋相干态指向  $I(\theta)_x$ ,故给出  $\delta I(\theta) = \sqrt{N}/2$ ,  $d\langle I(\theta) \rangle / d\theta = N/2$ ,可得  $\delta\theta = 1/\sqrt{N}$ .

初末态相位之差称为 Hellinger 距离,量化两个分布之间的相似性,对于任意可观测量, Hellinger 距离为

$$d_{\text{H}}^2(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_x \left[ \sqrt{P_x(q)} - \sqrt{P_x(0)} \right]^2, \quad (1)$$

当  $\varphi$  非常小时

$$d_{\text{H}}^2(\varphi) = \frac{F}{8} \varphi^2 + O(\varphi^3), \quad (2)$$

$F$  为 Fisher 信息<sup>[19]</sup>

$$F = \sum_x P_x(\varphi) \left[ \frac{\partial \ln P_x(\varphi)}{\partial \varphi} \right]^2, \quad (3)$$

对于纯态来讲

$$\rho_{\text{in}} = |\lambda\rangle\langle\lambda|. \quad (4)$$

Fisher 信息本质上为  $G$  的方差,  $G$  在干涉仪输入态的涨落应为最大,则

$$F_Q = 4 \langle \Delta G^2 \rangle = 4 \left( \langle \lambda | G^2 | \lambda \rangle - \langle \lambda | G | \lambda \rangle^2 \right). \quad (5)$$

对于混态来讲

$$\rho_{\text{in}} = \sum_n P_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|, \quad (6)$$

则

$$F_Q(\rho_{\text{in}}) = \sum_{m,n} \frac{2(P_m - P_n)^2 |\langle \phi_m | G | \phi_n \rangle|^2}{P_m + P_n}. \quad (7)$$

在量子力学的框架中,单参数估计的测量精度极限是用量子 Fisher 信息的倒数来决定的,在一个  $N$  粒子的纠缠态中,随着量子 Fisher 信息的增大,其相位测量精度极限越高,进而可能会突破标准量子极限,多于多粒子体系, Fisher 信息也描述多粒子的纠缠度.在参量估计中,最高量子 Fisher 信息对应最高的测量精度极限,即相对相位不确定度  $\Delta\varphi \geq \Delta\varphi_{\text{CR}} = 1/\sqrt{F_Q(\varphi)}$ ,通过干涉仪测量的标准量子极限 (standard quantum limit, SQL)  $\Delta\phi \geq 1/[(M-1)\sqrt{N}]$ ,其中  $N$  为系综数.干涉仪工作的过程是:一束波(电磁波或者物质波)通过分束器后变成两束波,两束波分为不同的路径,进行一定的相位演化后再进行合束,实现相干叠加,最后使用探测器探测干涉信号,根据干涉信号的强度推算相位的变化,进而得出待测量的参数大小.

### 2.1 光子干涉仪

光子干涉仪以光波干涉原理为基础,是目前在光学系统、光学元件的检测中具有高效性和高准确性的手段,光子线性干涉仪以最典型的 Mach-Zehnder (M-Z) 干涉仪为例,结构示意图如图 1 所示.

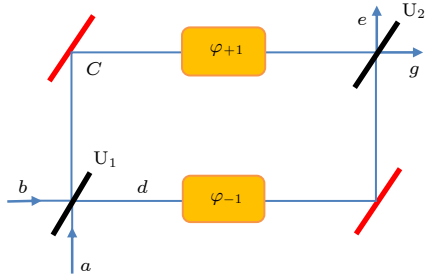


图1 Mach-Zehnder 干涉仪.  $a, b$  为入射端;  $e, g$  为输出端;  $U_1$  为分束镜;  $U_2$  为合束镜. 入射光  $a$  和  $b$  经过第一个分束镜  $U_1$  后, 产生的光场线性映射到  $c$  和  $d$  两个路径上, 然后进行相位积累后再合束在一起, 实现相干态叠加, 最后输出探测场是  $e$  和  $g$

Fig. 1. Schematic diagram of Mach-Zehnder interferometer.  $a, b$  are incident end;  $e, g$  are output end;  $U_1$  is the beam-splitting mirrors;  $U_2$  is the beam-closing mirrors. After the incident light  $a$  and  $b$  pass through the first beam division mirror  $U_1$ , the resulting light field is linearly mapping to the two paths  $c$  and  $d$ , then phase accumulation and then beam together to achieve coherent state superposition, and the final output detection fields are  $e$  and  $g$ .

由于作为探测光的相干态光场的光子数满足泊松分布, 干涉仪输出光强会存在一定的起伏. 这个起伏的大小为干涉仪最小可测量位相 (振幅) 信号的大小, 被称为经典测量系统的散粒噪声极限.

线性干涉仪又叫 Ramsey 干涉仪<sup>[20,21]</sup>, 它是光子 Mach-Zehnder 干涉仪的一部分, Ramsey 干涉仪由两个分束器和一个在其间积累相位的演化时间组成. Ramsey 干涉仪的序列可以用广义 Bloch 球表示, 如图 2 所示.

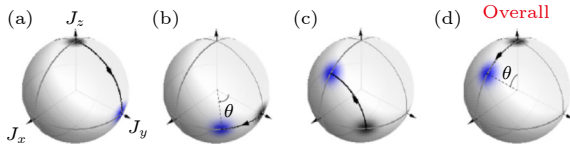


图2 在 Bloch 球上的 Ramsey 干涉仪的序列 (a) 第一个光束对应于一个量子态围绕  $J_x$  轴旋转  $\pi/2$ , 输入态为指向北极的自旋相干态; (b) 自由演化得到相位差  $\theta$ , 即围绕  $J_z$  旋转  $\theta$ ; (c) 第二个分束器再次围绕  $J_x$  轴旋转  $\pi/2$ ; (d) Ramsey 序列的整体效应是初始状态沿  $J_y$  轴旋转一个角度  $\theta$ . 通过测量  $J_z$  即可读出  $\theta$ <sup>[22]</sup>

Fig. 2. Sequences of the Ramsey interferometer are illustrated with the Bloch sphere: (a) First beam corresponds to a  $\pi/2$  rotation of the quantumstate around the  $J_x$  axis, and the input state is a CSS pointing toward the north pole; (b) free evolution picks up a phase difference  $\theta$ , which corresponds to a rotation around the  $J_z$  by an angle of  $\theta$ ; (c) second beam splitter again revolve around  $J_x$  axis of  $\pi/2$ ; (d) overall effect for the Ramsey sequence is a rotation of the initial state by an angle  $\theta$  along the  $J_y$  axis. By measuring the  $J_z$  can read  $\theta$ <sup>[22]</sup>.

测量相位  $\theta$  代表在 Bloch 球上甄别两个不同的方向, 一个为初始态方向, 另一个为转动方向. 线性干涉仪的映射可用下式来表示:

$$e^{-i\frac{\pi}{2}J_x}e^{-i\theta J_z}e^{i\frac{\pi}{2}J_x} = e^{-i\theta J_y}. \quad (8)$$

还有一种常用的干涉仪——Michelson 干涉仪, 线性干涉仪的一个重要应用就是 LIGO 干涉仪, 目前国际上分辨率最高的引力波探测器是 LIGO, 它是全光 Michelson 干涉仪. 2016 年, 在美国 Hangford 的 LIGO 利用 Michelson 干涉仪探测到了由两个黑洞合并产生的引力波, 验证了爱因斯坦 1916 年的预言. LIGO 的有效臂长为 1120 km, 有效探测光强为 750 W, 最终相位分辨率可以达到  $10^{-19}\text{m}$ <sup>[23]</sup>. 同年, Henning 等<sup>[24]</sup>在 LIGO 的基础上使用了压缩光, 在 15 dB 的纠缠元下经过干涉仪后获得了 3 dB 的信噪比增强. LIGO 探测结果如图 3 所示.

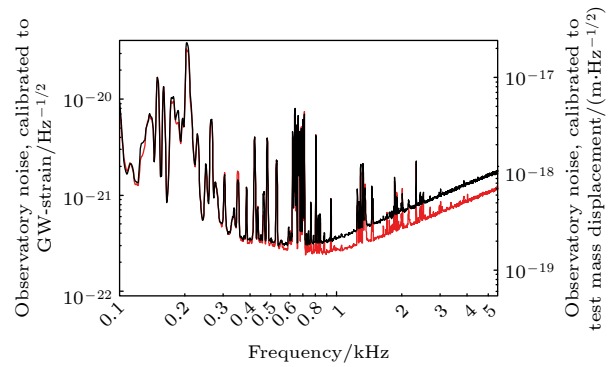


图3 LIGO 探测结果<sup>[25]</sup>, 红线有压缩光的观测噪声, 黑线为无压缩光的观测噪声

Fig. 3. Detection results of LIGO detector, red line compression light observation noise, black line for no compression light observation noise.

## 2.2 原子干涉仪

不同于光学干涉仪, 原子干涉仪是物质波干涉仪. 而光-原子混合的  $SU(2)$  型干涉仪的工作原理与 Mach-Zehnder 干涉仪有相似之处, 但  $SU(2)$  混合干涉仪不使用分束器, 而是利用线性拉曼转换过程来实现原子、光自旋波的相干叠加<sup>[26]</sup>. 干涉仪的两条路径对应一个粒子, 实际上为一个量子比特, 一条路径为 0, 一条路径为 1, 路径 1 对应路径 0 有一个相位, 而对原子来说两条路径分别代表基态和激发态, 相位为时间相位, 自旋相干态分布趋近于标准的正态分布, 量子比特可以完美地映射到一个 Bloch 球上, 如图 4 所示.



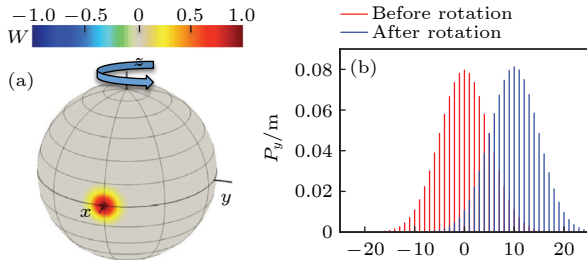


图4 (a) 一个沿正  $x$  轴的自旋相干态在 Bloch 球上的旋转; (b) 对应的沿  $y$  方向的自旋概率为  $P_y(m) = |\langle m_y | \Psi \rangle|^2$  (右图)<sup>[27]</sup>

Fig. 4. (a) A coherent spin state along the  $x$  axis in the rotation of the Bloch sphere; (b) spin probability  $P_y(m) = |\langle m_y | \Psi \rangle|^2$  along the  $y$  direction<sup>[27]</sup>.

由自旋相干态提供的相位灵敏度即是所谓的标准量子极限. 它可以通过引入物体的位置/动量不确定性反射光的光子数/相位不确定性之间的相关性来克服.

与光波干涉仪类似, 原子干涉仪作为量子传感器, 在测量重力加速度  $g$ 、重力梯度  $e$ 、转动引力常数  $G$  等方面显示出巨大的应用潜力, 大大提升了测量灵敏度. 原子 M-Z 干涉仪中, 物质波被拉曼激光束的驻波分裂、反射和结合, 原子的内部状态与路径纠缠在一起. 与光学 Ramsey 干涉仪类似, 原子 Ramsey 干涉仪使用两对  $\pi/2$  拉曼激光束作为振荡场. 拉曼原子干涉仪同样由 4 个阶段组成: 原子的磁光囚禁与冷却、形成原子喷泉、拉曼光与原子的相互作用以及探测阶段. 1991 年, 美国斯坦福大学朱棣文团队采用受激拉曼跃迁技术实现了原子 M-Z 干涉仪<sup>[28]</sup>. 2009 年, 詹明生团队实现了一个冷原子 M-Z 干涉仪, 并在此之前观察到对比度为 37% 的干涉条纹. 此外, 该团队还利用 Ramsey 原子干涉仪进行实验, 观察到了清晰的 Ramsey 条纹. 在此基础上, 基于冷原子干涉仪的重力仪、陀螺仪等得到迅速发展. 冷原子重力仪的灵敏度  $\sigma$  与两次脉冲的周期间隔  $T$  以及噪声有关<sup>[29]</sup>, 表达式为  $\sigma = \frac{1}{\text{SNR}} \frac{1}{k_{\text{eff}} T^2}$ , SNR 为冷原子重力仪的信噪比. 目前, 中国科学技术大学研究组在安静的山洞环境中<sup>[30]</sup>, 在不使用其他减振平台和数据修正的情况下, 实现了  $70 \mu\text{Gal}/\sqrt{\text{Hz}}$  以下的测量精度. 此外, 在地面与微重力环境下, 对冷原子内部展现出的量子磁性测量是探寻冷原子领域通向更低温的重要手段, 在经过两级冷却后, 通过态转移, 将玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein condensations,

BECs)<sup>[31]</sup> 制备到预期的磁量子数态上, 便可进行量子磁性相变的测量, 在原子和光的相互作用后通过“非破坏性”成像测量技术, 如吸收成像或色散成像进行探测. 2005 年, Higbie 等<sup>[32]</sup> 对  $^{87}\text{Rb}$  冷原子团进行了磁敏相衬成像. 2010 年, Sadler 等<sup>[33]</sup> 将该成像用于铁磁域的动力学实验中. 在微重力情况下, 一方面冷原子的温度可以降低到 PK 量级, 使量子磁性效应显著, 更容易测量; 另一方面 BEC 的寿命被延长, 从而满足绝热磁性相变的测量条件.

线性 SU(2) 光-原子混合干涉仪基于光和原子的相互作用, 其输出信号兼具对光场和原子的相位敏感性, 相比经典干涉仪具有更广泛的应用场景. 光学干涉仪具有更高的动态高速测量、空间分辨率和更宽的波段. 但由于光学干涉仪可见单色光干涉条纹的分辨率较小, 而且在测量过程中存在空气阻尼、光电探测器中的非线性效应、仪器自身的摆动误差、时间和位移测量的不确定度等, 这些都会影响干涉光的质量, 影响测量精度. 相比于光学干涉仪, 冷原子干涉仪具有更高的可操作性, 得以较好地控制冷原子的量子态, 而冷原子的速度较低, 从而增加了干涉的作用时间, 可以得到较好的干涉条纹, 使得重力测量方面的测量精度至少提高一个数量级, 且应用范围更加广泛.

### 3 基于非线性干涉仪的精密测量

经典干涉仪的测量灵敏度主要受限于散粒噪声极限, 而量子增强的精密测量可以超越这一极限. 量子干涉是一种常用的参数测量手段, 但线性干涉仪在测量时的灵敏度受限于探测噪声, 1985 年 Yurke 等<sup>[34]</sup> 提出非线性干涉仪, 克服了这一困难. 利用非线性光学分束器 NBS 作为干涉器件, 代替干涉仪中的 BS, 将干涉仪的输入状态进行压缩纠缠, 从而利用压缩噪声提高信噪比, 进而提高测量精度. 基于非线性物理过程的非线性干涉仪又叫 SU(1, 1) 干涉仪. 但探测光场的平均光子数受限于放大器的增益, 导致灵敏度无法达到具有实际测量价值的水平, 2010 年, Plick 等<sup>[35]</sup> 提出通过在非线性干涉仪的输入端口注入相干态来提高系统的测量灵敏度. 2013 年, Kong 等<sup>[36]</sup> 利用四波混频过程实现了 SU(1, 1) 干涉仪, 在实验上, 四波混频的 SU(1, 1) 干涉仪有 90% 以上的对比度, 与传统的

M-Z 干涉仪相比, SU(1, 1) 干涉仪提高了  $(4.1 \pm 0.3)$  dB 的信噪比. 除了全光干涉仪, 还有原子波构成的原子干涉仪, 以及光原子混合干涉仪. 华东师范大学张卫平团队 [26,37,38] 利用原子和光的受激拉曼散射过程实现了一种新的光-原子混合 SU(1, 1) 干涉仪, 基于光和原子的相互作用, 实现广域原子之间的干涉, 并且在混合干涉仪的输出端观测到对比度为 95% 左右的干涉条纹. 在原子干涉测量领域, 在俘获离子系统、冷热气体和冷原子中已经证明了超过标准量子极限的测量精度.

干涉仪的 3 个阶段都可以通过量子资源的调用来实现标准量子极限的突破. 对于第一个阶段, 不同的输入态会导致不同的灵敏度. 经典情况下输入为相干态, 即对应标准量子极限, 若输入为量子态, 如压缩态、纠缠态、NOON 态、双 FOCK 态等, 则可以提升灵敏度达到海森伯极限, 但由于光子数的限制, 实际上在绝对灵敏度上与经典测量仍然存在一定差距; 第二个阶段是分/合束过程. 传统的 M-Z 干涉仪是一个线性过程, 不会涉及到信号的衰减或者放大, 通过一个非线性过程 (如参量转换和四波混频过程) 来代替线性的合束器与分束器, 这样可以带来信号的增益, 提升灵敏度; 第三个阶段是探测过程, 常用的探测手段主要是通过强度探测 (intensity detection, ID), 平衡零拍探测 (homodyne detection, HD), 宇称探测 (parity detection, PD) 这 3 种探测手段来提升灵敏度.

非线性干涉仪以 SU(1, 1) 为例. 利用一个非线性衍化 (即在一束经典光的作用下使两个光子同时产生或同时湮灭) 进行映射, 也可以说对于量子模式下两个均为真空态的输入态, 通过参量转换、四波混频来产生一对有关联的光子, 则对  $U_1$  来说, 哈密顿量  $H_1 = i\hbar k(a_1 a_{-1} - a_1^\dagger a_{-1}^\dagger)$ , 在没有相位衍化时, 干涉仪从输入真空态到输出真空态, 进行时间的反演产生负哈密顿量, 即  $U_2 = U_1^\dagger$ ;  $H_2 = -H_1$ , 测量两个相位加和  $U_\varphi$ ;  $\varphi = \varphi_{+1} + \varphi_{-1}$ ,  $U_1$  为分束镜,  $U_2$  为合束镜. 非线性干涉仪原则上即指在合束阶段进行时间反演的操作, 此时的输出态为经典态, 从而放大信号, 提高测量精度. 原理如图 5 所示. 非线性干涉仪映射可用下式表示:

$$e^{iH\tau/\hbar} e^{-i\theta G} e^{-iH\tau/\hbar}, \quad (9)$$

在海森伯表象里  $G$  对应的涨落越大, 则测量精度越高.

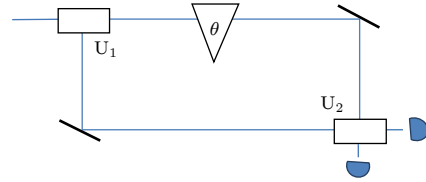


图 5 非线性干涉仪. 将分束镜和合束镜用非线性的哈密顿量压缩到哈密顿量来产生,  $U_1$  为分束镜,  $U_2$  为合束镜. 将相同的压缩机制进行反压缩成真空态后, 信号便得到了放大

Fig. 5. Schematic diagram of the nonlinear interferometer. The beam-splitting mirrors and beam-closing mirrors are produced by squeezing to the Hamiltonian with a nonlinear Hamiltonian,  $U_1$  is the beam-splitting mirrors,  $U_2$  is the beam-closing mirrors. After the same compression mechanism is inversely compressed into a vacuum state, the signal is amplified.

非线性 SU(1, 1) 光-原子混合干涉仪的分/合束过程采用参量型拉曼散射的方式, 非线性与线性光-原子混合干涉仪都可使测量精度突破标准量子极限. 理论研究表明, 在理想条件下, 通过非线性过程产生的光场会处于非经典量子态. 这样的干涉仪的测量精度都允许达到海森伯极限. 下面主要针对这几个不同的阶段来讨论如何利用非线性干涉仪在非经典态中突破标准量子极限达到海森伯极限.

### 3.1 压缩态 (单模压缩) 测量

#### 3.1.1 输入阶段

压缩态是指光场或粒子某一物理量的不确定度小于散粒噪声极限下的量子态. 量子压缩光降低了量子噪声. 真空态经过压缩算符  $\hat{S}(\zeta) = \exp[(\zeta \hat{a}^2 - \zeta^* \hat{a}^{2\dagger})/2]$  作用可以得到压缩真空态,  $\zeta = r e^{i\phi}$  为各因素的相关系数. 压缩态光场作为一种非典型光场, 一般包括光子数压缩、正交压缩和强度差压缩等, 单模压缩态光场是指正交压缩态光场 (即光场的一个正交分量噪声被压缩) 可以低于标准量子极限, 此时, 由于海森伯测不准原理的限制, 光场的另一个正交分量噪声高于标准量子极限. 量子压缩的程度直接决定了它对物理系统性能的提高程度. 在量子力学中, 限定了测量系统精度的不确定性关系针对的是一对不对易物理量, 如光场的振幅、位相分量算符和  $\hat{X}$  和  $\hat{Y}$ , 它们的涨落特性可以由海森伯不确定关系表述:

$$\Delta \hat{X} \cdot \Delta \hat{Y} \geq 1, \quad (10)$$

压缩态的相位和振幅的不确定度不相等, 因而在相

空间中是一个压缩的椭圆. 描述光的不确定度在一个自由度上变小时在另一个自由度上变大, 故在测量其中一个物理量的精度时, 不考虑另一个物理量的精度要求, 便能使该物理量的精度达到更高. 对于压缩态, 其平均光子数不为零, 基于压缩态的相位最小测量值为

$$\Delta\phi^{\text{sqz}} = \frac{[|\alpha|^2 e^{-2r} + \sinh^2 r]^{\frac{1}{2}}}{|\alpha|^2 - \sinh^2 r}, \quad (11)$$

式中,  $\sinh^2 r$  为压缩光光子数,  $r$  为压缩因子, 相位灵敏度 ( $1/\Delta\phi$ ) 随着  $r$  的增大而提高,  $r$  的增大也导致  $\sin(h^2 r)$  的增大, 当满足  $\sinh^2 r \approx \sqrt{N}/2$  时, 得到最小测量值的最优解  $\Delta\phi \approx N^{-\frac{3}{4}}$  [39–41], 可到达海森伯极限的测量灵敏度.

自 1979 年 Yuen 和 Shapiro [42] 首次提出使用简并四波混频效应产生压缩态光场的概念后, 1986 年 Wu 等 [43] 利用光学参量下转换在实验中观测到了单模压缩态. 此后, 随着研究的不断深入, 实现了不同类型的压缩, 压缩精度也在不断提高. 1992 年, 山西大学彭堃堃教授团队首次在国内成功制备了单模压缩态 [44]. 2008 年, LIGO 实验室 Goda 等 [45] 通过向 Michelson 干涉仪中注入压缩光将测量的精度提高了 44%. 2013 年, LIGO 研究团队 [46] 利用压缩光在 150 Hz 处得到了 40% 的宽带精度提高. 2016 年, 德国汉诺威大学 Vahlbruch 等 [47] 获得了目前最高的单模压缩态, 达 15 dB. 2020 年, 麻省理工学院 Yu 等 [48] 对比了 3 种不同  $\phi$  值的压缩测量值, 如图 6 所示.

减法后推断在注入压缩态时进行测量的量子噪声的表达式  $Q(\Omega)$  为

$$Q(\Omega) = D_s(\Omega) - [D_r(\Omega) - M_r(\Omega)], \quad (12)$$

式中,  $D_r$ ,  $D_s$  和  $M_r$  分别表示参考和压缩操作情况下的频率相关数据和模型光谱密度.

## 3.2 纠缠态 (双模压缩) 测量

### 3.2.1 分/合束阶段

纠缠态又叫 EPR 态或双模压缩态, 是两个光场模式的正交分量之间存在纠缠. 当光子经过第一个分束器后有两种路径的选择, 假如  $N$  个光子依次经过分束器, 如果输入的光子之间相互独立, 那么前后两个光子的路径选择没有关联. 如果光子之

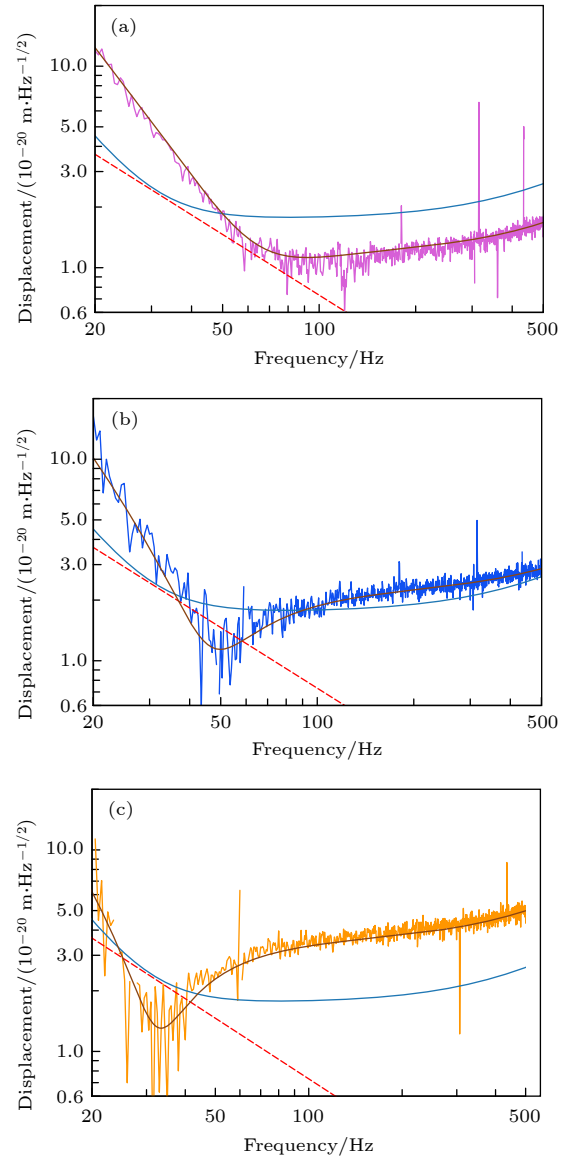


图 6 不同压缩角时的量子噪声谱 (a) 7°; (b) 24°; (c) 46°. 每个数据集都采用经典噪声减法绘制, 并绘制了有注入压缩态时相应的量子噪声模型曲线 (铜线) 和没有注入压缩态的模型 (蓝线) 以进行比较. 结果表明随着注入状态的变化, 量子辐射压力噪声的贡献可以增加和减少 [48]

Fig. 6. Quantum noise spectra at different additional squeezing angles: (a) 7°; (b) 24°; (c) 46°. Each dataset is plotted with the classical noise subtraction, The corresponding quantum noise model curve (copper line) with the injected compressed state and the un.injected compressed state model (blue line) are also plotted for comparison. The results show that, the quantum radiation pressure noise contribution can be increased and decreased as the injected state is varied [48].

间存在纠缠, 就会使所有的光子选择保持一致, 然后在经过第一个分束器后, 便会有两种结果: 即所有的光子都选择第一条路径或所有的光子都选择第二条路径. 这两种可能的结果之间相差一个相位,



比单个光子的实验信号放大了  $N$  倍, 由此可获得的测量灵敏度达到海森伯极限. 原子在相对较短的时间内可以产生自旋压缩态. 如果一个垂直于平均自旋分量的方差小于相干自旋态给出的散粒噪声  $J/2$ , 则认为量子态被自旋压缩. 存在子系统的态和另一个子系统的态有一定的关联, 这样的态我们称为量子纠缠态. 对于二能级原子组成的冷原子系统, 纠缠态需满足  $F_Q > N$  的条件.

自发参量下转换是一个利用二阶非线性效应的过程. 非线性干涉仪基于参量放大过程也可以显著提高相位测量精度. 利用光学参量放大器 (optical parametric amplifier, OPA) 输出光场的纠缠特性, 使探测光场由相干态转为压缩态, 从而实现突破标准量子极限的测量精度. OPA 的变换算符被称为纠缠算符, 又叫双模压缩算符, 表达式为  $\hat{S}(z) = \exp[(\zeta \hat{a}_1 \hat{a}_2 - \zeta^* \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger)/2]$ . 双模真空态光场  $|0, 0\rangle_{a,b} = |0\rangle_a |0\rangle_b$  在该算符作用下变为纠缠态  $|r\rangle_{a,b} = \hat{S}_{a,b}|0, 0\rangle_{a,b}$ .

有相干态注入的非线性干涉仪理论模型以及具体过程如图 7 所示. 通过将被测量合理地调制在具有纠缠特性的光场的一臂或两臂, 该信号在噪声下降的同时得到放大, 与线性干涉仪相比, 非线性干涉仪系统在小信号测量时可以获得显著提升的信噪比<sup>[49]</sup>.

当输入态为相干态和压缩真空态时, 经过 OPA1

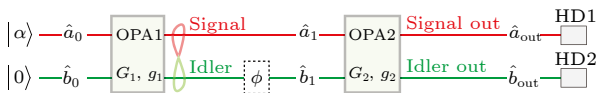


图 7 非线性干涉仪原理图. OPA1-2, 光学参量放大器; HD1-2, 平衡零拍探测器,  $\hat{a}_0$  为信号光场,  $\hat{b}_0$  为闲频光场;  $G_1, g_1, G_2, g_2$  为参量放大器振幅增益系数<sup>[49]</sup>. 将相干态  $|\alpha\rangle$  光场和真空态  $|0\rangle$  光场同时输入 OPA1 中进行非相敏放大, 利用产生的具有纠缠特性的闲频光场与信号光场作为探测光场, 将被测信号加载到纠缠光上, 然后将携带被测信号的两束光同时输入 OPA2 中进行相敏放大

Fig. 7. Principle diagram of the nonlinear interferometer. OPA1-2, optical parametric amplifier; HD1-2, setup of balanced homodyne detection,  $\hat{a}_0$  is signal light field,  $\hat{b}_0$  is idle frequency light field;  $G_1, g_1, G_2, g_2$  are parametric amplifier amplitude gain coefficient. The coherent state  $|\alpha\rangle$  light field and vacuum state  $|0\rangle$  light field simultaneously input in OPA1 for nonphase sensitive amplification, using the entanglement of idle frequency light field and signal light field as detection light field, the measured signal on the entangled light, and then carry the two light of the measured signal simultaneously input OPA2 for phase sensitive amplification<sup>[49]</sup>.

之后, 其中一个模式的光束会产生一个相移  $\phi$ , 而另一个模式的参考光束则保持固定的相位, 然后再经过 OPA2 合束/分束. 当  $\phi = 0$  时即为最优的相敏点, 根据实际测得的信号涨落计算得到最优相位灵敏度为

$$(\Delta\phi')^2 = \frac{1}{e^{2r}} \frac{1}{N_\alpha} \frac{1}{N_{\text{OPA}}(N_{\text{OPA}} + 2)}, \quad (13)$$

式中,  $e^{2r}$  为输入的压缩真空,  $N_\alpha = |\alpha|^2$  为输入的相干态,  $N_{\text{OPA}} = 2\sinh^2 g$  是 OPA1 在真空输入下输出的光子数, 即自发辐射光子数. 随着正交分量  $r$  的增大, 测量的相位灵敏度越高. 在最优条件下, 当  $N_{\text{OPA}} \gg 1$  时, 非线性干涉仪的相位测量精度可接近海森伯极限  $(\Delta\phi')^2 \approx 1/N^2$ .

四波混频作为一个三阶非线性相互作用的过程, 不需要与外部腔进行耦合, 具有空间多模的特性. 被广泛应用于量子精密测量和量子信息. 四波混频基于铷原子的超精细能级结构, 其中两个强光与非线性介质相互作用, 从而产生一对光子. 在原子系综的四波混频过程满足动量守恒和能量守恒, 在非简并情况下可得到纠缠态, 得到更高的压缩度. 1985 年, Slusher 等<sup>[50]</sup> 发现通过钠原子蒸汽中的四波混频过程可观测到双模压缩态. 1999 年, 彭堃堉教授团队<sup>[51]</sup> 成功制备了连续变量 EPR 纠缠态. 2008 年, Lett 团队<sup>[52]</sup> 利用基于铷原子系综中双  $\Lambda$  型能级结构的四波混频过程制备了双模压缩态. 2011 年, Glorieux 等<sup>[53]</sup> 利用铷原子气体四波混频效应得到纠缠态. 2019 年, 华东师范大学刘胜帅等<sup>[54]</sup> 基于碱金属原子系综过程中的四波混频过程得到了  $10.13 \pm 0.21$  的量子压缩强度, 是目前获得的最高强度差压缩. 此外, 在多体系统中, 时间反演这一操作的实现难度阻碍了非线性干涉仪的发展. 2021 年 12 月, 清华大学尤力教授团队<sup>[55]</sup> 提出了使用相互作用系统内禀的周期性演化的方法, 以此代替时间反演, 并成功观测到突破标准量子极限, 约增加了 5 dB 的相位灵敏度.

### 3.2.2 探测阶段

强度测量是经典干涉测量中探测噪声最常用的测量手段, 其工作原理为对两个输出端口中任意一个端口的输出强度进行测量. 在输入态为两束相干光  $|\alpha\rangle$  和  $|\beta\rangle$  的情况下, 强度探测的最优相位灵敏度为<sup>[56]</sup>



$$(\Delta\phi^I)^2 = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{4|\alpha|^2|\beta|^2 N_{\text{OPA}} (N_{\text{OPA}} + 2)}, \quad (14)$$

1983 年, Yuen 和 Chan<sup>[57]</sup> 提出了测量光场量子态正交分量值的方法, 被称为平衡零拍探测

$$(\Delta\phi^H)^2 = \frac{1}{|\alpha|^2 N_{\text{OPA}}^2 + |\beta|^2 N_{\text{OPA}} (N_{\text{OPA}} + 2) + 2|\alpha||\beta| N_{\text{OPA}} \sqrt{N_{\text{OPA}} (N_{\text{OPA}} + 2)}}. \quad (15)$$

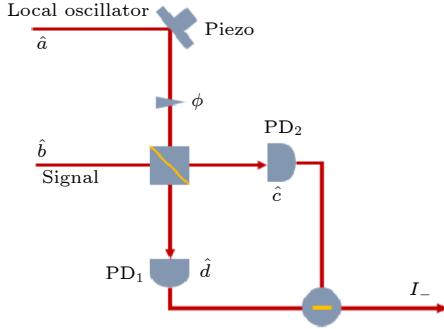


图 8 平衡零拍探测装置<sup>[59]</sup>. 将输入光场  $a$  与待测光场  $b$  通过 50:50 分束器进行合束, 合束后, 用光电探测器分别对输出的两束光场  $c$  与  $d$  进行光强探测, 然后将探测信号相减, 得到的即为待测光场的正交分量值

Fig. 8. Setup of balanced homodyne detection<sup>[59]</sup>. The input light fields  $a$  and  $b$  light fields to be measured are combined through a 50:50 beam splitter. After the beam combined, the two output light fields  $c$  and  $d$  are detected by photodetector, and then let the detection signal subtraction. The result is the orthogonal component value of the light field to be measured.

宇称测量也被称为奇偶测量, 1996 年, 由 Bollinger 等<sup>[60]</sup> 在研究囚禁离子实验中首次提出, 后被 Gerry<sup>[61]</sup> 应用到光学干涉测量. 这种测量手段是对任意一个输出端口中光子数的奇偶性进行统计, 从而估计所要进行测量的相位信息. 当光子数为偶数时, 测量结果记为 1, 当光子数为奇数时, 测量结果为 -1. 因此, 以输出端为例奇偶测量的测量算符可表示为

$$\Pi_A = e^{i\pi a^\dagger a}. \quad (16)$$

在输入态为一束相干态和一束压缩真空态的  $SU(1, 1)$  非线性干涉仪中, 宇称探测在  $\phi = 0$ 、相干态的初始相位  $\theta_\alpha = 0$  时具有最优相位灵敏度<sup>[60]</sup>:

$$\Delta\phi_P = \frac{1}{[(N_\alpha e^{2r} + N_s + 1) N_{\text{OPA}} (N_{\text{OPA}} + 2)]^{\frac{1}{2}}}, \quad (17)$$

式中,  $N_\alpha = |\alpha_0|^2$  是相干光的平均光子数,  $N_s =$

(balanced homodyne detection, BHD), 并在同年由 Abbas 等<sup>[58]</sup> 实现. 当干涉仪的输入状态完全等于输出状态时, 称为平衡条件, 平衡零拍探测的基本原理如图 8 所示.

在平衡零拍探测情况下, 最优相位敏感度为

$\sinh^2 r$  是压缩真空态的平均光子数,  $N_{\text{OPA}} = 2\sinh^2 g$  是 OPA1 自发辐射光子数.

当输入的相干态和压缩真空态的平均光子数大约相等时, 非线性干涉仪的相位灵敏度可接近海森伯极限, 通过参量之间的约束关系可得宇称探测的相位灵敏度为

$$\Delta\phi_P = \frac{1}{\sqrt{4N_\alpha^2 N_{\text{OPA}}^2}} \approx \frac{1}{N}. \quad (18)$$

当输入压缩真空态, 且独立测量次数比较小时, 宇称探测的相位灵敏度为

$$\Delta\phi_P = \frac{1}{\sqrt{N_{\text{OPA}} (N_{\text{OPA}} + 2)}}, \quad (19)$$

可突破  $1/\langle \hat{N}_{\text{Tot}} \rangle = 1/N_{\text{OPA}}$ <sup>[62]</sup>.

综上所述, 当输入态不同时, 最适用的探测手段各不相同, 宇称探测适用于输入态为一束压缩真空态和一束相干态, 平衡零拍探测适用于两束相干态, 且这两束相干态光强需相等. 在理想情况下, 两者测量方法都可接近海森伯极限测量精度.

### 3.2.3 其他形式纠缠态测量

1992 年, Kitagawa 和 Ueda<sup>[63]</sup> 首次提出了自旋压缩的概念, 自旋压缩是在干涉测量法中见证大尺度量子纠缠突破标准量子极限的最成功的方法之一. 对于自旋为  $J$  的系统, 当一个量子态沿某个自旋方向的涨落  $(\Delta \hat{J}_\perp)^2$  小于  $|\langle \hat{J}_k \rangle|/2$  ( $k$  为平均自旋方向), 则该量子态被称为自旋压缩态. 常见的自选压缩参数分为 3 种, 第一种根据海森伯不确定原理定义为:  $\xi_H^2 = \frac{2(\Delta \hat{J}_\alpha)^2}{|\langle \hat{J}_\gamma \rangle|}$ ,  $\alpha \neq \gamma \in (x, y, z)$ ; 第二种定义为  $\xi_S^2 = \frac{\min(\Delta \hat{J}_{n_\perp})^2}{J/2} = \frac{4\min(\Delta \hat{J}_{n_\perp})^2}{N}$ , 即自旋分量涨落 (与平均自旋方向垂直) 与平均自旋长度的比值; 第三种为  $\xi_R^2 = \frac{\Delta\phi}{(\Delta\phi)_{\text{SCS}}} = \frac{N(\Delta \hat{J}_{n_\perp})^2}{|\langle \hat{J} \rangle|^2}$ ,  $\langle \hat{J} \rangle$  为

平均自旋长度, 即给定的量子态相位不确定度与参考的自旋相干态相位不确定度的比值, 当压缩系数  $\xi_m^2 < 1$ , ( $m = H, S, R$ ) 时, 体系产生自旋压缩. 将输入的自旋压缩态进行 Ramsey 干涉, 其  $F_Q > N$ , 故测量精度可以实现标准量子极限的突破. 2020 年, Szigeti 等 [64] 证明, 玻色-爱因斯坦凝聚态 (BEC) 原子间的相互作用可以提高冷原子重力仪的灵敏度. BEC 的原子间相互作用可利用干涉仪通过 OAT 产生自旋压缩, 对于  $N$  个不相关原子产生的最小压缩态为

$$\xi_{\min} \approx \frac{1 - \frac{1}{2} |Y| N \lambda \left( \sqrt{4 + |Y|^2 N^2 \lambda^2} - |Y| N \lambda \right)}{|Y|^2}, \quad (20)$$

式中,  $\lambda \equiv \int_0^{2T_{\text{OAT}}} dt' \chi(t')$ ,  $\chi(t) = \chi_{11}(t) + \chi_{12}(t) - 2\chi_{12}(t)$ ,  $Y \equiv |Y| e^{i\varphi} = \int d\mathbf{r} u_1^*(\mathbf{r}, 2T_{\text{OAT}}) u_2(\mathbf{r}, 2T_{\text{OAT}})$ , 量化了干涉仪两条路径在 BS2 上的空间匹配程度.

当  $T \gg T_{\text{OAT}}$  时, 该方案可使重力仪的灵敏度从原来的  $\Delta g = \frac{1}{\sqrt{N} k_0 T^2}$ , 变为压缩后的

$$\Delta g = \frac{\xi}{\sqrt{N} k_0 T^2} = \frac{1}{\sqrt{N} k_0 T^2} \min \left( \frac{N \text{Var}(\hat{J}_{\theta, \phi})}{\left\langle \hat{J}_{\frac{\pi}{2}, \phi + \frac{\pi}{2}} \right\rangle^2} \right), \quad (21)$$

式中,  $\xi \equiv \min_{\theta, \phi} \xi_{\theta, \phi}$  为自旋压缩参数, 测量灵敏度大约超出散粒噪声极限的 2—5 倍. 该方案提供了一条实现量子增强冷原子引力测量的途径.

当  $N$  个处于  $|\downarrow\rangle$  的粒子与  $N$  个处于  $|\uparrow\rangle$  的粒子等概率叠加时被称为最大纠缠态, 又叫 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 态, 可写成

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{\left| \frac{N}{2}, +\frac{N}{2} \right\rangle + e^{i\gamma} \left| \frac{N}{2}, -\frac{N}{2} \right\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (22)$$

式中,  $\gamma$  代表一个任意相位, 在干涉仪中当  $\gamma=0$  时, 输入态为

$$|\Psi\rangle_{\text{in}} = \frac{\left| \frac{N}{2}, +\frac{N}{2} \right\rangle + \left| \frac{N}{2}, -\frac{N}{2} \right\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (23)$$

经过自由演化, 处于  $|\downarrow\rangle$  的粒子积累  $+\frac{\varphi}{2}$  相位, 处于  $|\uparrow\rangle$  的粒子积累  $-\frac{\varphi}{2}$  相位, 得到输出态为

$$|\Psi\rangle_{\text{out}} = \frac{e^{-i\frac{N\varphi}{2}} \left| \frac{N}{2}, +\frac{N}{2} \right\rangle + e^{+i\frac{N\varphi}{2}} \left| \frac{N}{2}, -\frac{N}{2} \right\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (24)$$

故可得  $F_Q = N^2$ , 相位测量精度可达  $1/N$  [65–70].

由于最大纠缠态的实验条件较为困难, 形成的纠缠较弱且不易控制, 容易受相关环境因素的影响, 导致粒子数的损失, 从而影响测量精度. 于是自旋猫态这种易于制备且更稳定的多粒子态应运而生.

自旋猫态又叫 NOON 态, NOON 态本质上是一种宏观自旋相干态的叠加 [71], 可写为 [72]

$$|\Psi(\theta)\rangle_N = \frac{\sum_{m=-J}^J c_m(\theta) (|J, m\rangle + |J, -m\rangle)}{\sqrt{2}}. \quad (25)$$

2018 年研究发现, NOON 态具有海森伯极限标度, 由 (25) 式可得

$$F_Q = \left( 1 - \frac{2 \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} \right)^2 N^2, \quad (26)$$

故相位测量精度满足

$$\Delta\phi \geq \Delta\phi_{\text{QCR}} \equiv v^{-\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{2 \tan^2(\theta/2)}{1 - \tan^2(\theta/2)} \right) N^{-1}, \quad (27)$$

由此可看出该测量精度接近海森伯极限 [72].

相较于最大纠缠态, NOON 态更容易制备, 理论上, 量子力学中相空间的方法可实现混合 NOON 态, 但在实验过程中有着极大的困难和挑战. NOON 态具有鲁棒性的特点, 即系统对参数扰动的不敏感性, 基于该理论被应用于制造实时测量物体的温度、位置等物理量变化的量子传感器, 实现高精度测量.

双数态又叫 balanced spin -1/2 Dicke 态, 一种高度纠缠态, 是自旋朝上和朝下粒子数相等的量子态, 在广义 Bloch 球上表征为一个在赤道上的圆环, 如图 9 所示.

在单粒子 Fock 直积态下, 双数态可表示为

$$|\text{TFS}\rangle_N = \left| \frac{N}{2} \right\rangle_a \left| \frac{N}{2} \right\rangle_b = \left| \frac{N}{2}, 0 \right\rangle, \quad (28)$$

式中,  $N$  为偶数, 利用双数态作为输入, 可以实现达到海森伯极限的量子干涉测量, 利用双数态进入分束器的系数进行计算可得其量子 Fisher 信息为

$$F_Q = N(1 + N/2), \quad (29)$$

得其相位测量精度满足

$$\Delta\varphi \geq 1/\sqrt{N^2/2 + N}. \quad (30)$$

因此, 利用双数态进行相位测量, 理论上所能达到的最小相位不确定度几乎正比于总粒子数  $N$  ( $N \gg 1$ ), 具有海森伯极限的测量精度<sup>[73]</sup>. 在实验方面, 国内外团队在基于冷原子系综的双数态的制备中也取得了先进的实验成果.

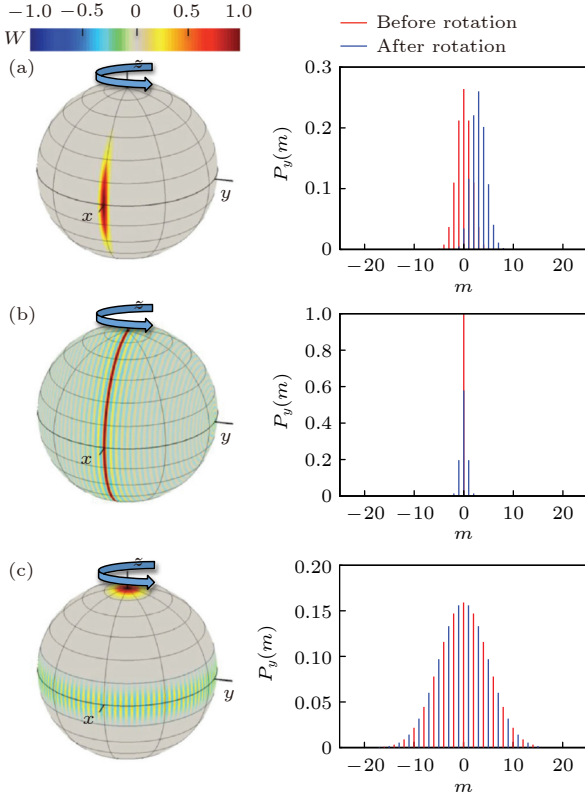


图9 左图为不同的量子态的旋转, 右图为对应不同量子态沿  $y$  方向的自旋概率为  $P_y(m) = |\langle m_y | \Psi \rangle|^2$  (a) 自旋压缩态; (b) 双 Fock 态, 由不可区分的玻色粒子组成,  $|\uparrow\rangle$  和  $|\downarrow\rangle$  的原子数相等, 在 Bloch 球中, 沿纬度方向的量子投影噪声为零即不确定度为零, 但沿经度方向的分布则完全不确定; (c) NOON 态<sup>[27]</sup>

Fig. 9. Rotation of different quantum states (left), spin probability  $P_y(m) = |\langle m_y | \Psi \rangle|^2$  along the  $y$  direction of different quantum states (right): (a) Spin-squeezed state. (b) twin-Fock state. Comconsists of indistinguishable Bosonic particles, with equal atomic numbers for  $|\uparrow\rangle$  and  $|\downarrow\rangle$ . The quantum projection noise along the latitude direction is zero and the uncertainty is zero, but the distribution along the longitude direction is completely uncertain. (c) NOON state<sup>[27]</sup>.

## 4 弱测量

### 4.1 弱测量的实现

弱测量是通过将测量仪器与量子系统耦合, 并检测由耦合强度决定的仪器态位移水平来实现的,

为直接观察量子态、量子波函数和基本的量子效应提供了可能. 1988 年, Aharonov 和 Alber 等首先提出弱值的概念. 由于量子测量会造成量子态  $|\Psi\rangle$  坍缩, 为了移除使用  $|\Psi\rangle$  而造成的时间不对称, 降低  $t$  时刻的观测对量子系统的影响, 则需要采用弱测量方法, 弱测量被理解为一种间接测量的方式, 利用量子指针对测量结果进行筛选, 一般分为 3 个过程: 选择前初态的制备、系统和探针之间的相互作用以及系统后选择. 不同于强测量, 弱测量会使耦合变弱, 在几乎不干扰量子态的情况下对量子系统进行测量, 不会导致量子系统坍缩. 弱值表示了对由演化算符变化引起的探测概率变化的纠正, 一般来讲, 弱值可取复数. 将测试量子系统后选择的放大程度用弱值来量化, 将其定义为  $A_w = \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle}$ ,  $|\psi_i\rangle$  为前选择态,  $|\psi_f\rangle$  为后选择态, 其原理如图 10. 在量子力学中, 观测量的变化通过哈密顿算符来表示, 在弱测量中, 假设相互作用的哈密顿量为  $\hat{H} = g\delta(t - t_0)\hat{A}$ , 从而可得相互作用的时间演化算符为  $\hat{U} = e^{(-i\int \hat{H} dt/\hbar)} = e^{(-ig\hat{A})}$ ,  $\hat{U}$  用以比较经过演化前后的探测概率的差异.

可通过观察后选择光子数的变化来估计  $g$ . 对于单个探测脉冲, 假设初始状态为相干态, 写为

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_k \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle, \quad (31)$$

对于纯相干态精度探测的尺度, 测量灵敏度计算为

$$\Delta g = \frac{|\alpha|}{\frac{\partial \Delta n}{\partial g}} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}, \quad (32)$$

式中,  $n = |\alpha|^2$  为平均光子数,  $\Delta n$  为平均光子数变化量.

文献<sup>[75]</sup>给出了在  $n = 2$  当系统初始状态为最大纠缠态时, 后选择概率为

$$P_d = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-2g^2 n^2 \delta^2 \cos \varepsilon} \right), \quad (33)$$

后选择后指针分布为

$$\frac{1}{P_d} \sin^2 \left( n g p + \frac{\varepsilon}{2} \right) P(p). \quad (34)$$

当系统初始状态为直积态时, 后选择概率为

$$p'_d = 2^{-n} \left( 1 - e^{-2g^2 n^2 \delta^2 \cos \varepsilon} \right), \quad (35)$$

后选择后指针分布为

$$\frac{1}{2^{n-1} p'_d} \sin^2 \left( n g p + \frac{\varepsilon}{2} \right) P(p). \quad (36)$$

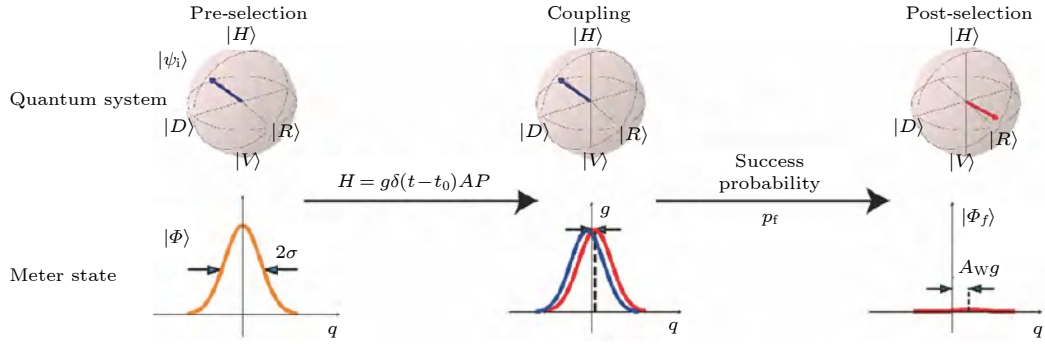


图 10 弱值放大原理图,  $g$  为耦合强度,  $A$  为量子系统的可观测量,  $P$  为测量仪器态的可观测量,  $|\psi_i\rangle$  为测量仪器与量子系统的联合态,  $\delta(t - t_0)$  为该哈密顿量在  $t_0$  时刻的瞬时相互作用,  $|\phi\rangle$  为仪器态,  $|\phi_f\rangle$  为后选择成功的测量仪器态<sup>[74]</sup>

Fig. 10. Schematic for the weak-value amplification, the  $g$  is the coupling strength, the  $A$  is the observable of the quantum system, and the  $P$  is the observance of the measured instrumental state,  $|\psi_i\rangle$  is the joint state of the measurement instrument and the quantum system,  $\delta(t - t_0)$  indicates the instantaneous interaction of this Hamiltonian at time  $t_0$ ,  $|\phi\rangle$  is Instrument state,  $|\phi_f\rangle$  is the successfully post selective measurement instrument state<sup>[74]</sup>.

2014 年, Dressel 等<sup>[76]</sup> 采用光学实验来通过偏振变化来得到弱值. 最初实验装置如图 11(a) 所示, 平行激光束的初始态表示为  $|\varphi_i\rangle|\psi_i\rangle$ , 其中  $|\varphi_i\rangle$  为初始光偏振态,  $|\psi_i\rangle$  表示初始横向位置信息态, 二者表示了初始态的两个维度之间的张量积. 光束通过选择态对应的线性偏振态  $|\varphi_f\rangle$  之后由 CCD(charge coupled device) 探测器接收. CCD 探测器的每个像素探测光子对应的探测概率表示为

$$P = |\langle\varphi_f|\varphi_i\rangle|^2 |\langle\psi_f|\psi_i\rangle|^2, \quad (37)$$

式中,  $|\psi_f\rangle$  为探测器像素横向位置的后选择态. 对于我们来说后选择态对应的是特定横向位置态  $|x\rangle$  或者动量态  $|p\rangle$ , 后选择态取决于 CCD 探测的是位置信息还是动量信息, 称这种探测概率  $P$  为“非扰动”探测概率.

现将双折射晶体放在初选态和后选择偏振片之间, 如图 11(b) 所示.

双折射晶体的作用可以用对应的时间演化算符表示为  $\hat{U}(\varepsilon) = \exp\left(-i \int \hat{H} dt\right)$ , 其中的相互作用哈密顿量表示为

$$\hat{H} = \nu \hat{A} \otimes \hat{P}, \quad (38)$$

$\hat{A} = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|$  表示斯托克斯 (Stokes) 偏振操作符, 对应的  $|H\rangle$  和  $|V\rangle$  的特征值分别为 1 和 -1.  $\hat{P}$  为横向动量算符, 表征产生在横向位置对应  $x$  的变化. 时间演化算符  $\hat{U}(\varepsilon)$  将光子的偏振变化和光子的位置变化联系起来, 经过该演化过程之后的“扰动”所对应的探测概率表示为

$$P_g = \left| \langle\varphi_f| \langle\phi_f| e^{-i\varepsilon \hat{A} \otimes \hat{P}} |\varphi_i\rangle |\psi_i\rangle \right|^2, \quad (39)$$

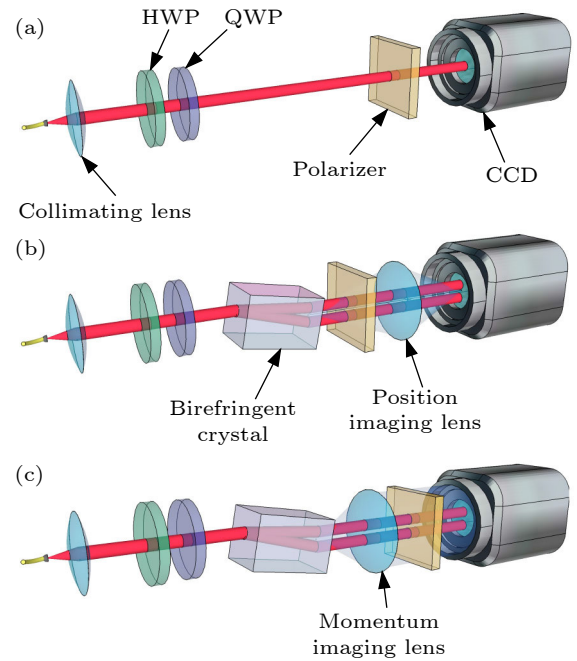


图 11 弱值实现实验装置图 (a) 单模光纤射出的平行光符合高斯强度分布, 由 1/4 波片和半波片实现初始态, 偏振片形成后选择态, CCD 用来检测偏振相关的位移变化情况; (b) 弱值实部的实验装置图; (c) 弱值虚部的实验装置图<sup>[76]</sup>

Fig. 11. Experimental setup for showing how weak values can be obtained: (a) Light emitted from a single mode fiber is Gaussian distribution, which is collimated by a len and is preselected by an initial polarization state constructed by a quarter-wave plate (QWP) and a half-wave plate(HWP). A polarizer plays an role of postselection and the following CCD then measure the intensity dependent position information. (b) real weak value realization setup. (c) imaginary weak value realization setup<sup>[76]</sup>.



作为实际例子, 考虑光子位置满足高斯分布

$$\langle x|\Psi_i\rangle = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right), \quad (40)$$

初始的偏振态的选择为

$$|\varphi_i\rangle = \frac{|\varphi_i\rangle - e^{i\phi}|V\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \phi = 0.1, \quad (41)$$

对应的后选择偏振态表示为

$$|\varphi_f\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|H\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|V\rangle, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - 0.2, \quad (42)$$

图 12(a) 中整体的探测概率为  $|\langle\varphi_f|\varphi_i\rangle|^2 = 0.012$ . 当晶体放置在其中 (如图 11(b)), 相互正交的偏振态对应的光在后选择态之前在空间上偏移分量的表示为  $\varepsilon$ , 不同  $\varepsilon$  情况下的分布如图 11(a) 中实线所示, 其中的虚线对应“无扰动”情况的分布. 在弱相互作用机制下, 晶体厚度非常小,  $\varepsilon$  足够小的情况下, 得到

$$\frac{P_\varepsilon}{P} - 1 \approx 2\tau \text{Im}\hat{H}_w = 2\varepsilon [\text{Re}A_w \text{Im}P_w + \text{Im}A_w \text{Re}P_w], \quad (43)$$

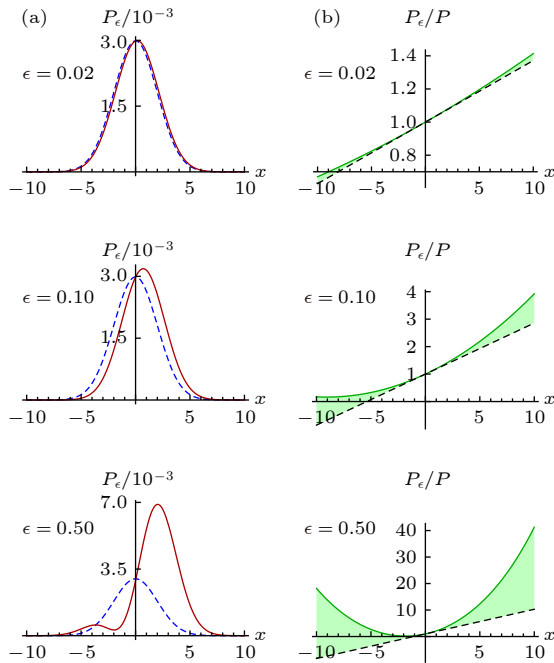


图 12 弱测量结果示意图<sup>[76]</sup> (a)“扰动”(实线)和“无扰动”(虚线)在不同  $\varepsilon$  情况下探测概率比较; (b) 完全阶数情况下的(实线)和一阶弱值(虚线)在不同  $\varepsilon$  情况下的比较, 在  $\varepsilon$  极小时, 二者近似

Fig. 12. (a) Comparisons between perturbed situation (solid) and unperturbed situation (dashed) with different  $\varepsilon$ ; (b) diagram between exact ratio of  $P_\varepsilon/p$  (solid curve) and the first order approximation in weak measurement linear regime (dashed curve), both of them are approaching when the  $\varepsilon$  is ultra-small<sup>[76]</sup>.

式中,  $A_w = \frac{\langle\varphi_f|\hat{A}|\varphi_i\rangle}{\langle\varphi_f|\varphi_i\rangle}$ ,  $P_w = \frac{\langle\varphi_f|\hat{P}|\varphi_i\rangle}{\langle\varphi_f|\varphi_i\rangle}$ . 弱值实部  $\text{Re}A_w$  的实现如图 11(b) 所示, 对应的  $P_w = \frac{ix}{2\sigma^2}$ , 后选择态为横向位置  $|x\rangle$ . 对应的 (43) 式可简化为

$$\frac{P_\varepsilon}{P} = 1 + \frac{\varepsilon x}{\sigma^2} \text{Re}A_w. \quad (44)$$

图 12(b) 中实线表明了  $P_\varepsilon/P$  在不同  $\varepsilon$  情况下随  $x$  的变化曲线. 同样, 通过傅里叶变换得到后选择态  $|\varphi_f\rangle = |P\rangle$ , 可以得到弱值的虚部  $\text{Im}A_w$  (如图 12(c) 所示), 由动量弱值  $P_w = p$  可以推出

$$P_g/P = 1 + 2\varepsilon p \text{Im}A_w. \quad (45)$$

结果表明, 可以通过不同的前后选择的设置来得到弱值的实部和虚部的弱测量, 实部和虚部有着不同的物理意义, 同样有着不同的性质. 最开始的弱测量利用的一般是实部的弱测量, 后面的结果表明, 虚部的弱测量可以利用光子位置或者动量的不确定性. 选择何种弱测量方式取决于演化算符和最后测量的光子信息.

2018 年, 中国科学技术大学陈耕等<sup>[77]</sup> 提出了一种估计纯量子系统与探针之间弱耦合强度测量 (又叫单光子克尔效应测量) 的新方案. 从理论和实验上证明了混合探针态结合纯量子系统的后选择, 可以用来提高精度. 通过混合一系列纯态, 可以使探针状态的不确定性增加, 这种方法即不纠缠也不压缩, 所依赖的量子资源是单光子叠加, 这更加易于生产和操作, 在该方案中, 测量了虚数的弱值 (平均光子数的变化量) 而不是实数的弱值. 将测量探针与弱值虚部结合可得  $\delta P = 2g(\Delta P)^2 \text{Im}A_w$ . 当探针为各种相干态的混合物时, 使用混合态探测大大增加了平均光子数的变化量, 由于混合态可以通过一定相干态  $\alpha_0$  的振幅调制产生, 因此标准偏差  $\sigma$  超过量子涨落  $|\alpha_0|$ , 达到  $\sigma \propto N$ . 用  $v$  入射脉冲数对  $g$  的估计精度为

$$\Delta g \propto 1/(N\sqrt{v}), \quad (46)$$

式中,  $N$  为所使用的量子资源数量, 由此可以看出, 测量精度  $g$  可突破标准量子极限达到海森伯极限精度. 计算得 Fisher 信息为  $F_Q = 4v \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \propto \tilde{v}N^2$ . 通过绘制  $g$  与混合态平均光子数  $N$  的精度, 可以观察到一个明显的海森伯测量尺度, 如图 13 所示

通过测量后选择的概率也可以达到海森伯测量精度, 弱测量的前后选择状态分别为  $|\psi_i\rangle = |0\rangle + |1\rangle$  和  $|\psi_f\rangle = |0\rangle - e^{-i\varepsilon}|1\rangle$ . 根据后选择概率可估计出

相互作用强度  $g$ , 则测量灵敏度可通过仪器上的不确定度和仪器态位移灵敏度的比值来预测. 计算可得测量精度为  $\Delta g \approx \frac{\Delta p_{\sqrt{}}}{s} = \frac{1}{n}$ ,  $p_{\sqrt{}}$  为成功后选择概率,  $\Delta p_{\sqrt{}} = (p_{\sqrt{}})^{\frac{1}{2}} \approx \frac{(gn + \varepsilon)}{2}$ ;  $s$  为测量灵敏度.

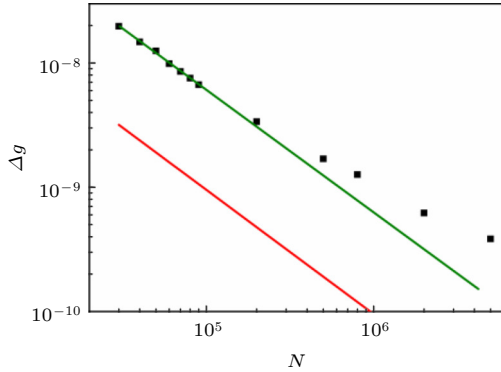


图 13 具有海森伯精度的实验测量结果, 绿色实线表示对点的拟合, 红色实线表示混合态测量精度的一个界限<sup>[77]</sup>  
Fig. 13. Experimentally obtained precision showing Heisenberg scaling, shown as a green line, obtained by fitting these points. The red line is a bound on the precision for mixed state<sup>[77]</sup>.

而后选择概率以及评估测量精度方面, 纠缠系统初态的方案要优于直积系统初态方案. 由于传统的量子层析的方法中量子态有着复杂的重构过程, 因此对高维量子态采用直接层析的方法, 在对一般量子态进行测量时, 直接层析可以得到比弱测量更高的灵敏度和精度. 2019 年, Ogawa 等<sup>[78]</sup> 利用演化算符  $T$ , 提出了光子空间波函数直接层析的理论方案, 该方案不仅表征效率, 也避免了光子损失.

传统的弱测量一般应用光子的位置和动量信息, 文献<sup>[79]</sup> 提出了一种基于相干光的光子统计信息的弱测量方法, 利用相干态作为指针, 光子的统计分布信息随着耦合参数的变化而变化. 文献<sup>[79]</sup> 分析了光子数态的分布特性, 不同于探测总光子数变化情况, 可以更为有效地利用弱测量结构. 未来或可应用压缩态的光子统计分布作为一种弱测量的方法.

## 4.2 弱测量在非厄米系统的应用

在应用方面, 弱测量理论的提出也为测量非厄米系统提供了新的方法. 在量子力学中, 能量的本征值为实数, 哈密顿量在一般情况下为自厄米, 而本征值为虚数的系统被称为非厄米系统, 在某些对

称情况下, 非厄米哈密顿量也存在实数本征值. 长期以来, 量子力学中用厄米算符表示可观测物理量是一种根深蒂固的观念. 而事实上可观测物理量只是算符具有厄米性的必要条件, 很多非厄米算符也可以对应正定的实数本征值. 这些非厄米算符也对应一套自洽的量子理论, 这些理论大大地扩展了厄米量子理论的应用范围.

1988 年, PT (parity-time) 对称理论的发表使得量子力学理论得到了迅速发展, 若一个模型既有 PT 对称区, 又有 PT 破缺区, 则该模型被称为赝厄米. 这种具有厄米力学量性质的哈密顿量非厄米被称为赝厄米系统, 赝厄米系统的能谱有两种可能, 即为实数或为一个正虚数对.

非厄米的本质是一个相对权重的变化, 该相对权重等效地用非厄米哈密顿量来表示. 2017 年, Masahito Ueda<sup>[80]</sup> 给出了真实的计算例子, 如图 14 所示.

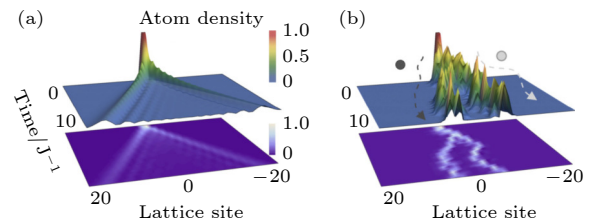


图 14 (a) 无测量的么正演化; (b) 弱测量下的连续演化<sup>[80]</sup>. 结果表明, 随着时间的演化, 若在没有进行测量或跃迁时为么正演化, 会形成一个相对光滑的图形; 若投影到子空间或进行弱测量时, 会形成具有明显跳跃幅度的图形, 即为非厄米哈密顿量最终表达的效果

Fig. 14. (a) Without measurement: unitary evolution; (b) continuous evolution under the weak measurements<sup>[80]</sup>. The results show that with the evolution of time, a unitary evolution occurs when no measurements or transitions are made, forming a relatively smooth figure, if projected to the subspace or weak measurement, forming a figure with significant jump amplitude, that is, the final expression of the non-Hermitian Hamiltonian.

2020 年, 李传锋教授团队<sup>[81]</sup> 建立了一个量子弱测量 PT 对称系统, 并将 PT 增强传感器转换为量子版本, 实现了比传统厄米传感器增强 8.856 倍的测量灵敏度. 弱测量可用于构造非厄米量子的 PT 对称系统. 给定一个 PT 对称的哈密顿量  $H_{PT}$  (以下简称  $H$ ) 和一个态矢量  $|\varphi\rangle$ . 直接测量  $H$  在  $|\varphi\rangle$  上的平均值, 即  $\langle \varphi | H | \varphi \rangle_{\eta}$ , 这里  $\langle \varphi_1 | H | \varphi_2 \rangle_{\eta} = \langle \varphi_1 | \eta H | \varphi_2 \rangle$ , 代表  $\eta$  的内积. 不失一般性, 一个二能级 PT 对称哈密顿量可写为

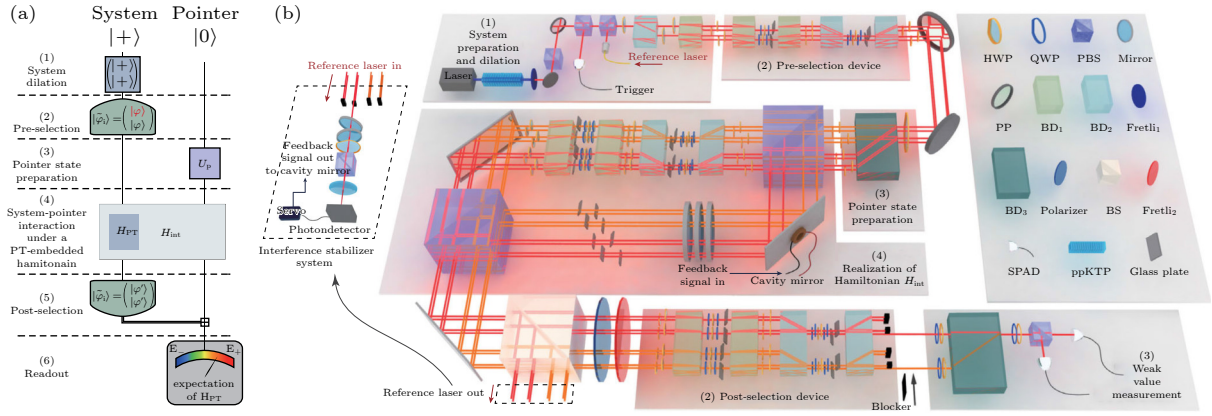


图 15 (a)PT 对称系统构建逻辑图实验装置<sup>[81]</sup>(流程见图). (b) 图表和设置都为 6 个模块: (1) 系统准备和扩展; (2) 预选状态准备; (3) 指针状态准备; (4) 指针与嵌入了 PT 对称系统的膨胀系统的耦合; (5) 后选; (6) 弱值读出. HWP, 半波片; QWP, 1/4 波片; BS, 分束器; PBS, 偏振分束器; PP, 相位板; BD, 光束置换器; ppKTP, 周期性极化的磷酸氧钛钾; BF, 带通滤波器; SPAD, 单光子雪崩二极管

Fig. 15. (a) Logic diagram of the construction of PT-symmetric system. (b) Experimental setup. Both the diagram and setup are divided into 6 modules: (1) system preparation and dilation; (2) preselection state preparation; (3) pointer state preparation; (4) coupling of the pointer and dilated system in which the PT-symmetric system is embedded; (5) postselection; (6) weak value readout. HWP, half-wave plate; QWP, quarter-waveplate; BS, beam splitter; PBS, polarizing beam splitter; PP, phase plate; BD, beam displacer; ppKTP, periodically poled potassium titanyl phosphate; BF, band-pass filter; SPAD, single-photon avalanche diode<sup>[81]</sup>.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} re^{i\theta} & s \\ s & re^{-i\theta} \end{bmatrix}, \quad (47)$$

式中,  $s, r$  (假设  $r > 0$ ),  $\theta$  均为实数. 能级为  $E_{\pm} = r \cos \theta \pm \sqrt{s^2 - r^2 \sin^2 \theta}$ , 当  $|s| \geq |r \sin \theta|$  时, PT 对称满足, 否则破缺. 该方法有两个重要基础, 一是  $\mathbf{H}$  在  $|\varphi\rangle$  上的期望值与特殊膨胀哈密顿  $\mathbf{H}$  在预选态  $|\tilde{\varphi}_i\rangle = \begin{bmatrix} |\varphi\rangle \\ |\varphi\rangle \end{bmatrix}$  和后选态  $|\tilde{\varphi}_f\rangle = \begin{bmatrix} |\varphi\rangle \\ |\varphi\rangle \end{bmatrix}$  上期望值的等价性. 这里,  $|\tilde{\varphi}_i\rangle$  与  $|\tilde{\varphi}_f\rangle$  是态  $|\varphi\rangle$  的扩展. 即  $\langle \varphi | \mathbf{H} | \varphi \rangle_{\eta} = \frac{\langle \tilde{\varphi}_f | \tilde{\mathbf{H}} | \tilde{\varphi}_i \rangle}{\langle \tilde{\varphi}_f | \tilde{\varphi}_i \rangle} = \langle \tilde{\mathbf{H}} \rangle_{\mathbf{W}}$ . 二是通过弱耦合和检测指针 (这里是量子比特) 推导膨胀哈密顿量  $\mathbf{H}$  的弱值. 构造的 PT 对称系统如图 15 所示.

使用该方法 and 实验设置路径, 现在可以首先直接描述由  $\mathbf{H}(s)$  控制的 PT-对称系统的能谱  $E_{\pm}(s)$ , 其中  $r, \theta$  为固定参数,  $s$  为变量. 能谱见图 16.

## 5 多参数测量

多参数量子估计是指利用量子纠缠和量子控制等量子资源实现海森伯极限精度的多个参数同时精密测量, 表征量子计量学极限精度的一种广泛使用的工具为量子 Cramér-Rao 界. 对于多参数量子估计, 则涉及到多重海森伯不确定度.

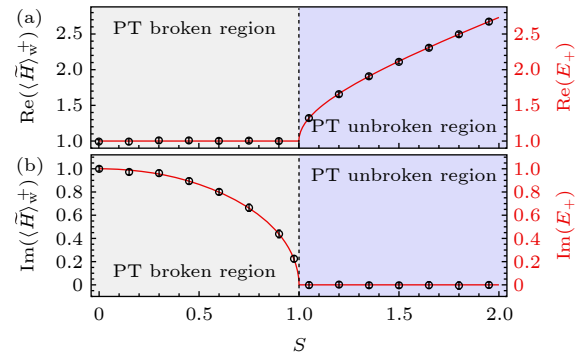


图 16 PT 对称系统的能谱  $E_+(s)$  直接由弱值  $\langle \tilde{\mathbf{H}}(s) \rangle_{\mathbf{W}}^+$  测量<sup>[81]</sup>. 带有误差条的黑色圆圈是弱值的实部和虚部, 红线是直接由 PT 对称哈密顿方程计算的相应本征能量. 即  $E_+(s)|_{r=\sqrt{2}, \theta=\pi/4} = 1 + \sqrt{s^2 - 1}$ <sup>[81]</sup>.

Fig. 16. Energy spectrum  $E_+(s)$  of the PT-symmetric system directly measured by weak value  $\langle \tilde{\mathbf{H}}(s) \rangle_{\mathbf{W}}^+$ . The black circles with error bars are real and imaginary parts of the weak value, and the red lines are the corresponding eigenenergy directly calculated from the PT-symmetric Hamiltonian Eq. (1); i.e.,  $E_+(s)|_{r=\sqrt{2}, \theta=\pi/4} = 1 + \sqrt{s^2 - 1}$ <sup>[81]</sup>.

2021 年, 中国科学技术大学项国勇等实现了一个最优控制的多参数量子估计的实验演示, 使测量精度提高了 13.27 dB<sup>[82]</sup>. 利用 SU(2) 中算子 3 个参数的估计, 研究了多个海森伯不确定关系, 同时实现了所有参数的海森伯极限精度测量. 在测量包含 3 个待测参数的量子比特么正演化算符时, 采用控制增强的次序测量技术, 通过量子控制调控测量



过程, 使得每一份资源中 3 个参数的信息都相干相长积累, 如图 17 所示.

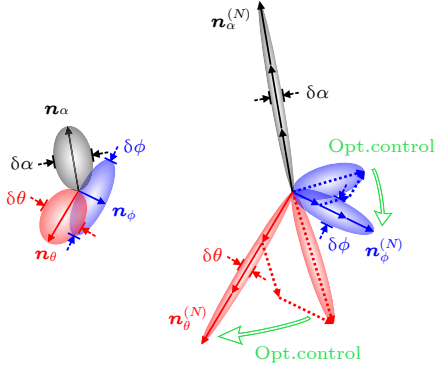


图 17 3 个参数的 Bloch 向量. 量子控制使得 3 个参数的信息 Bloch 方向上同时相干相长, 最终达到海森伯极限的测量精度<sup>[82]</sup>

Fig. 17. Bloch vectors of the three generators. Quantum control enables simultaneous growth in the informative Bloch direction of the three parameters, eventually reaching the measurement accuracy in the Heisenberg limit<sup>[82]</sup>.

3 个参数的探针都变得更加尖锐灵敏, 同时达到海森伯精度极限, 除控制增强次序方案外, 可将  $N$  个算符并行排列, 探针状态即可分离也可纠缠. 通用算符可以写为  $U_s = e^{-i\alpha \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}$ ,  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  为泡利矩阵对于可使用  $N$  个演化算符拷贝的所有估计策略, 生成子  $H_x^{(N)}$  的方差上界都是

$$\langle \Delta^2 [\mathbf{H}_x^{(N)}] \rangle \leq N^2 \langle \Delta^2 \mathbf{H}_x \rangle, \quad (48)$$

可导出海森伯极限

$$\delta \hat{x}^2 \geq \frac{1}{4N^2 \langle \Delta^2 \mathbf{H}_x \rangle}, \quad (49)$$

在  $n$  次重复过程之后, 计算得出最小方差的最终下界

$$\delta \hat{x}^2 \geq \frac{1}{4nN^2 \langle \Delta^2 \mathbf{H}_x \rangle}, \quad (50)$$

式中,  $\mathbf{H}_x = i(\partial_x U_s) U_s^\dagger$  为该参数的对应生成元. 实验分为 3 个步骤, 首先将探针状态制备为最大纠缠态, 偏振量子位, 然后依次通过位置算符  $U_s$ 、控制算符  $U_c$ , 重复进行  $n$  次, 最后执行最优测量. 其中  $U_c = U_s^\dagger(\hat{\alpha}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ . 然后对  $\sigma_3 \sigma_2, \sigma_1 \sigma_3, \sigma_2 \sigma_1$  这 3 个测量值的共同特征向量进行投影测量.

对于  $SU(2)$  算符  $U_s(\alpha, \theta, \phi)$ ,  $\alpha, \theta$  和  $\phi$  的生成子分别为

$$\mathbf{H}_\alpha = n_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}_\theta = \sin \alpha n_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}_\phi = \sin \alpha \sin \theta n_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (51)$$

$n_\alpha = n$ ,  $n_\theta = \cos \alpha n_1 + \sin \alpha n_2$ ,  $n_\phi = -\sin \alpha n_1 + \cos \alpha n_2$ ,  $n_1 = \partial_\theta n = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$ ,  $n_2 = n \times n_1 = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$ . 此 3 参数的生成子是互相不对易的, 方差上界为

$$\begin{aligned} \langle \Delta^2 \mathbf{H}_\alpha \rangle &\leq 1, \quad \langle \Delta^2 \mathbf{H}_\theta \rangle \leq \sin^2 \alpha, \\ \langle \Delta^2 \mathbf{H}_\phi \rangle &\leq \sin^2 \alpha \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (52)$$

使用针对各个参数的最优探针态即可取到这些上界. 探测态  $|\Psi\rangle$  选择最大纠缠态时可以同时让 3 参数的生成子的方差取最大值, 方差分别为

$$\begin{aligned} \langle \Delta^2 \mathbf{H}_x \rangle &= \langle \Psi | \mathbf{H}_x^2 | \Psi \rangle - \langle \Psi | \mathbf{H}_x | \Psi \rangle^2 \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{H}_x^2) - \frac{1}{4} (\text{tr} \mathbf{H}_x)^2, \end{aligned} \quad (53)$$

对于 (49) 式的 3 个生成子, 可得

$$\begin{aligned} \langle \Delta^2 \mathbf{H}_\alpha \rangle &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{H}_\alpha^2) = 1, \\ \langle \Delta^2 \mathbf{H}_\theta \rangle &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{H}_\theta^2) = \sin^2 \alpha, \\ \langle \Delta^2 \mathbf{H}_\phi \rangle &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{H}_\phi^2) = \sin^2 \alpha \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (54)$$

即最大纠缠态可以同时取到不等式 (52) 的上限.

生成子不对易并不意味着 3 个参数同时最优估计不可实现. 如果不同参数的最优探针态相同,  $N$  拷贝酉算符的演化过程一致, 并且最优测量互兼容, 则可以同时实现最小方差. 在最优控制级联方案下这些条件可以满足. 该工作已通过实验实现了控制增强的级联多参数估计方案. 在此方案中, 算符  $U_s$  的  $N$  个拷贝顺序排列, 同时可在每次  $U_s$  作用后插入控制操作  $U_c$  (参见图 18(a)). 于是总演化可表示为  $U_{cs}^N$ , 其中  $U_{cs} = U_c U_s$ , 参数  $x$  的生成子可写为

$$\mathbf{H}_x^{(N)} = i(\partial_x U_{cs}^N) (U_{cs}^N)^\dagger = \sum_{k=0}^{N-1} U_{cs}^k \mathbf{H}_x (U_{cs}^k)^\dagger, \quad (55)$$

其中  $x \in \{\alpha, \theta, \phi\}$ . 若未对演化控制, 如设置  $U_c = \mathbf{I}$ , 则  $\theta$  的生成子的方差无法取到不等式 (48) 的上限, 因为  $U_s$  不与  $\mathbf{H}_\theta$  对易, 图 18(c) 和图 18(d) 对此进行了说明. 但若加入控制, 则可使用适当的控制使  $U_{cs}$  与  $\mathbf{H}_x$  对易, 然后从表达式 (55) 可得到  $\mathbf{H}_x^{(N)} = N \mathbf{H}_x$ , 最后就可以取到不等式 (48) 的上限. 为了同时取得 3 个参数的最小方差, 需要针对 3 个参数设计相同的控制, 即控制应使  $U_{cs}$  与 3 个生成子  $\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}_\theta$  和  $\mathbf{H}_\phi$  同时对易. 这种控制确实存在, 可选择  $U_c = U_s^\dagger$ , 在这种情况下  $U_{cs} = \mathbf{I}$ , 它与所有生成



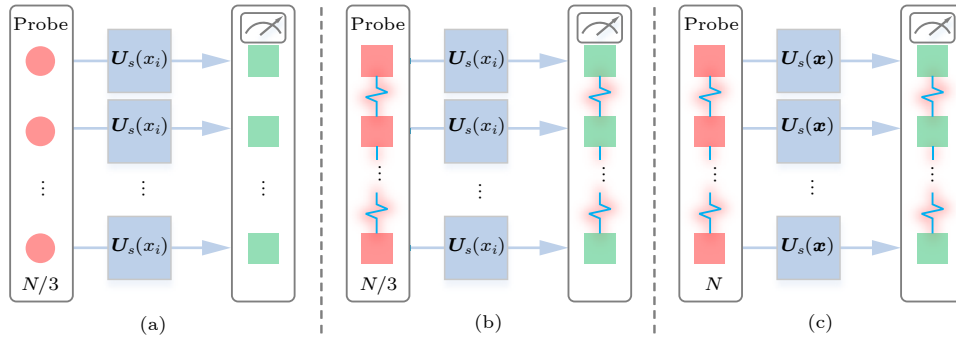


图 18 (a) 经典独立测量; (b) 纠缠独立测量; (c) 纠缠并行测量在 (a) 和 (b) 这两种独立可分的测量方案中, 演化酉算符的 7 V 个拷贝被均匀地分为 3 组, 并且使用一组资源来估计其中一个参数. (a) 和 (b) 之间的区别是 (a) 仅使用可分探针态和可分测量, 而 (b) 允许在每组资源中使用纠缠探针态和集体测量. (c) 中纠缠同时测量未将  $N$  拷贝酉算符分为 3 组, 而是将它们一起使用以同时估计全部 3 个参数<sup>[82]</sup>

Fig. 18. (a) Classical independent measurement; (b) entangled independent measurement; (c) entangled simultaneous measurement are divided into three groups and use a set of resources to estimate one of the parameters. The difference between (a) and (b) is that (a) only uses separable probe states and separable measurements, while (b) allows the use of entangled probe states and collective measurements in each set of resources. The simultaneous measurement of entanglement in (c) does not divide the  $N$ -copy unitary operators into three groups, but uses them together to estimate all three parameters simultaneously<sup>[82]</sup>.

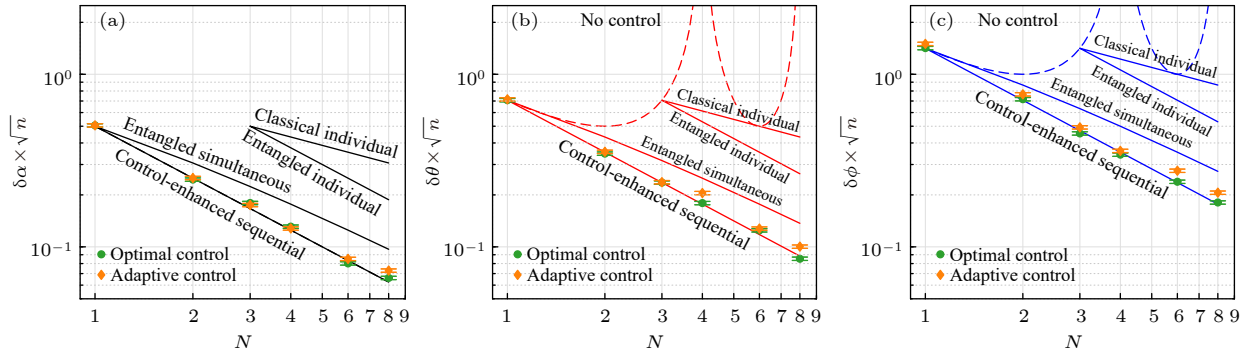


图 19 控制增强次序方案下的精度实验结果<sup>[82]</sup> (a)  $\alpha$ ; (b)  $\theta$ ; (c)  $\varphi$ . 将这 3 个参数在  $\alpha = \frac{\pi}{4}, \theta = \phi = \frac{\pi}{6}$  时的实验结果与经典态独立测量、纠缠态独立测量、纠缠态并行测量下可以达到的理论极限进行比较, 每个参数的控制增强次序方案的理论实线也代表了在单参数估计中所能达到的最佳精度

Fig. 19. Experimental results of the precision under the control-enhanced sequential scheme: (a)  $\alpha$ ; (b)  $\theta$ ; (c)  $\varphi$ . The experimental results of these three parameters at  $\alpha = \frac{\pi}{4}, \theta = \phi = \frac{\pi}{6}$  are compared with the theoretical limits that can be achieved under the classical individual scheme, the entangled individual scheme, and entangled simultaneous estimation, The theoretical solid line of the control-enhanced sequential scheme for each parameter also represents the best precision that can be achieved in the single-parameter estimation<sup>[82]</sup>.

子都对易. 但是, 由于测量之前参数是未知的, 因此实际的控制只能通过自适应的方式选择  $U_s(\hat{\alpha}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ , 其中,  $\hat{\alpha}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$  是基于已有测量数据得到的参数估计值. 在渐进极限情况下, 生成子互相不对易的 3 个参数在不等式 (46) 中的上限是可以取得的. 实验得到的 3 个参数的高精度测量结果如图 19 所示.

以上, 该团队证明了该方案与具有相同损失的经典方案相比提高了 13.27 dB 的测量精度.

2021 年 4 月, 杭州电子科技大学陆晓明教授与浙江大学王晓光教授<sup>[83]</sup> 通过给出估计不同参数

的测量误差之间的限制关系, 将海森伯不确定原理纳入到量子多参数估计中. 得到了限制关系  $\Delta_j^2 + \Delta_k^2 + 2\sqrt{1 - C_{jk}^2} \Delta_j \Delta_k \geq C_{jk}^2$  的联合测量值, 其中对于纯态  $\rho_\theta$ ,  $C_{jk} = \frac{|\text{Im} Q_{jk}|}{\sqrt{\mathcal{F}_{jj} \mathcal{F}_{kk}}}$  为一个实数,  $Q_{jk} = \text{tr}(L_j L_k \rho_\theta)$ ,  $L_j$  为  $\theta_j$  的对称对数导数算子; 对于混态  $\rho_\theta$ , 亦可用变体替换使等式成立. 考虑在相干态中编码的复数  $\alpha$  的估计, Fisher 信息为

$$\frac{1}{\nu \varepsilon_{11}} + \frac{1}{\nu \varepsilon_{22}} \leq 4. \quad (56)$$

(56) 式给出了误差估计的最大信息下限. 就误差估计而言, 结果如图 20 所示.

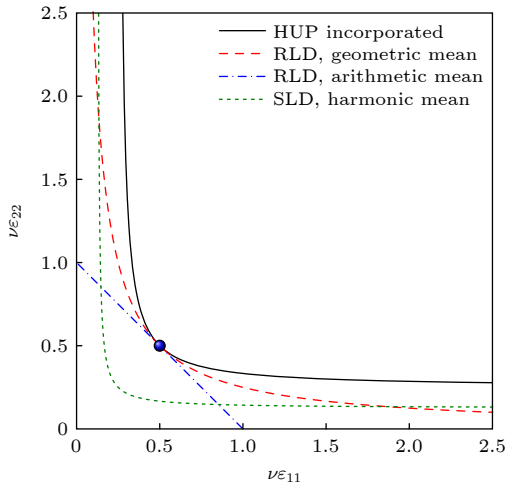


图 20 根据不确定性原理, 曲线左下区域禁止对复数  $\alpha$  的实部和虚部的使用相干态进行估计的均方误差. 黑色实线为限制关系, 红色虚线为基于右对数导数的几何平均量子 Cramér-Rao 界, 蓝色虚线为基于右对数导数的算术平均量子 Cramér-Rao 界, 绿色虚线为基于对称对数导数的谐波平均量子 Cramér-Rao 界<sup>[83]</sup>

Fig. 20. Mean-square errors of estimating the real and imaginary parts of a complex number  $\alpha$  encoded in a coherent state. The regions below the curves are forbidden by the corresponding inequalities. The black solid curve stands for the regret trade-off relation, the red dashed curve stands for the right logarithmic derivative-based geometric-mean quantum Cramér-Rao bound, the blue dash-dotted curve stands for the right logarithmic derivative-based arithmetic mean quantum Cramér-Rao bound, and the green dotted curve stands for the symmetric logarithmic derivative-based harmonic-mean quantum Cramér-Rao bound<sup>[83]</sup>.

## 6 总结与展望

本文回顾了线性与非线性干涉仪在量子精密测量方面的技术发展和基本原理. 原子干涉仪的原子速度远远低于光速, 在干涉过程中会经历更长时间的转动, 产生更大的移动条纹, 其灵敏度远高于光子干涉仪, 有极高的应用价值. 其中, 原子干涉仪系统中的光-原子混合干涉仪在光子探测方面表现更为突出, 这意味着相同信号光子数下冷原子系综有更大的相位移动和损耗的承受能力. 在非线性干涉仪的三种探测手段中, 理想情况下当输入态为真空态时, 宇称探测和强度探测测量精度相当, 都可接近量子 Cramér-Rao 界; 当输入态为两束相干态且这两束相干态光强相等时, 三种探测方式都可接近量子 Cramér-Rao 界, 平衡零拍探测的测量精度最高, 宇称探测的测量精度最低; 当输入态为一束真空态和一束相干态时, 宇称探测拥有最优的测

量精度, 强度探测的测量精度最低, 当输入态仅为一束相干态的结果同上; 非线性干涉仪中的损耗相对线性干涉仪较小, 但也会导致测量精度降低, 但平衡零拍探测受影响程度最好, 宇称探测受影响程度最大. 总体来说, 当  $N$  个无关联粒子进行独立测量时, 线性干涉仪的测量精度为标准量子极限, 非线性干涉仪相比而言有着更好的信噪比, 可以达到海森伯极限, 测量精度提升了  $2G^2$  倍. 线性干涉仪在量子精密测量中有着大量应用, 如探测引力波等, 但在输入态中多粒子纠缠的处理和操作以及测量过程中光子数的损耗和额外噪声的减小都具有一定困难, 虽然非线性干涉仪可以放大信号, 获得更高的探测精度, 但目前为止还没有实际的应用场景.

在非经典量子态测量的实验过程及非线性干涉仪中, 不可避免地存在退相干效应, 使纠缠变弱, 影响测量精度, 不同的退相干机制对测量精度也有不同程度的影响, 在未来这项工作需要更深入的研究. 因此考虑一种既可以放大信号, 又可以容纳一定损耗的高灵敏测量, 2022 年, 张卫平教授团队<sup>[84]</sup>提出了将线性干涉仪嵌入到非线性干涉仪的混合型干涉仪模型, 获得线性光学干涉仪的 BS 测量相位灵敏度后再结合非线性量子放大器 PA 进行相位信号的放大, 实现了有损耗的情况下量子增强特性的保持.

弱测量在非厄米系统中用于设计高灵敏度量子传感器, 而离子阱方面的应用以及多参数测量在量子比特么正演化算符和三维磁场矢量测量、陀螺仪等实际问题的研究也可使测量精度进一步提高. 单参数量子精密测量技术目前已比较成熟, 多参数测量则更常用于实际应用. 在多参数估计任务中, 在使用相同资源的前提下, 单独对每个参数设计最优估计方案并进行测量并不能同时达到多参数估计的精度极限, 而且还会浪费量子资源和时间资源. 为了达到每个参数的最优精度极限, 需要最大化相应生成子的方差. 当生成子相互不对易时, 如果不同参数的最优探针态相同,  $N$  拷贝酉算符的演化过程一致, 并且最优测量互相兼容, 则可利用最优控制级联方案以同时实现生成子最小方差. 当生成子不对易, 又不满足上述同时实现最小方差的条件, 利用何种方法可使各个生成子同时取得最小方差还有待研究.

基于上述研究, 我们猜想是否会存在一种基于

原子自旋效应的多原子混合测量或利用其他粒子的探测手段实现精度为 fT 量级甚至 aT 量级的超高灵敏度测量仪器, 希望给予未来发展以启迪. 量子精密测量在量子计算、量子信息等领域也有巨大的应用价值, 此外, 拥有超高灵敏度的电磁场核自旋放大技术可为暗物质的探测提供服务. 由于海森伯不确定原理的限制, 能否实现超海森伯极限测量精度还存有争议, 在未来, 面对这些挑战, 还需进一步实践与探索.

## 参考文献

- [1] Mnting H, Ahlers H, Krutzik M, Wenzlawski A, Arnold S, Becker D, Bongs K, Dittus H, Duncker H, Gaaloul N, Gherasim C, Giese E, Grzeschik C, Hänsch T, Hellmig O, Herr W, Herrmann S, Kajari E, Kleinert S, Lämmerzahl C, Lewoczko-Adamczyk W, Malcolm J, Meyer N, Nolte R, Peters A, Popp M, Reichel J, Roura A, Rudolph J, Schiemangk M, Schneider M, Seidel S, Sengstock K, Tamma V, Valenzuela T, Vogel A, Walser R, Wendrich T, Windpassinger P, Zeller W, Zoest T, Ertmer W, Schleich W, Rasel E 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 093602
- [2] Dolde F, Fedder H, Doherty M, Nöbauer T, Rempp F, Balsubramanian G, Wolf T, Reinhard F, Hollenberg L, Jelezko F, Wrachtrup J 2011 *Nat. Phys.* **7** 459
- [3] Cooper J, Hallwood D, Dunningham J 2010 *Phys. Rev. A* **81** 043624
- [4] Boto A, Kok P, Abrams D, Braunstein S, Williams C, Dowling J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2733
- [5] Ockeloen C, Schmied R, Riedel M, Treutlein P 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 143001
- [6] Georgescu I 2014 *Nat. Phys.* **10** 474
- [7] Wasilewski W, Jensen K, Krauter H, Renema J, Balabas M, Polzik E 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 133601
- [8] Ke Y, Huang J, Zhuang M, Lu B, Lee C 2018 *Phys. Rev. A* **98** 053826
- [9] Wineland D 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 1103
- [10] Blatt R, Wineland D 2008 *Nature* **453** 1008
- [11] Leibfried D, DeMarco B, Meyer V, Rowe M, Ben-Kish A, Britton J, Itano W, Jelenković B, Langer C, Rosenband T, Wineland D 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 247901
- [12] Riedel M, Böhi P, Li Y, Hänsch T, Sinatra A, Treutlein P 2010 *Nature* **464** 1170
- [13] Gross C, Zibold T, Nicklas E, Estève J, Oberthaler M 2010 *Nature* **464** 1165
- [14] Huver S, Wildfeuer C, Dowling J 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063828
- [15] Afek I, Ambar O, Silberberg Y 2010 *Science* **328** 879
- [16] Simmons S, Jones J, Karlen S, Ardavan A, Morton J 2010 *Phys. Rev. A* **82** 022330
- [17] Nie X, Li J, Cui J, Luo Z, Huang J, Chen H, Lee C, Peng X, Du J 2015 *New J. Phys.* **17** 053028
- [18] Nie X, Huang J, Li Z, Zheng W, Lee C, Peng X, Du J 2018 *Sci. Bull.* **63** 469
- [19] Braunstein S 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 3598
- [20] Ramsey N F 1949 *Phys. Rev.* **76** 996
- [21] Ramsey N F 1950 *Phys. Rev.* **78** 695
- [22] Zou Y Q 2018 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: Tsinghua University) (in Chinese) [邹奕权 2018 博士学位论文 (北京: 清华大学)]
- [23] The LIGO Scientific Collaboration 2011 *Nat. Phys.* **7** 962
- [24] Henning V, Moritz M, Karsten D, Roman S 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 110801
- [25] Abadie J, Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, Abernathy M, Adams C, Adhikari R, Affeldt C, Allen B, Allen G S, Amador Ceron E, Amariutei D, Amin R S, Anderson S B, Anderson W G, Arai K, Arain M A, Araya M C, Aston S M, Atkinson D, Aufmuth P, Aulbert C, Aylott B E, Babak S, Baker P, Ballmer S, Barker D, Barr B, Barriga P, Barsotti L, Barton M A, Bartos I, Bassiri R, Bastarrika M, Batch J, Bauchrowitz J, Behnke B, Bell A S, Belopolski I, Benacquista M, Berliner J M, Bertolini A, Betzwieser J, Beveridge N, Beyersdorf P T, Bilenko I A, Billingsley G, Birch J, Biswas R, Black E, Blackburn J K, Blackburn L, Blair D, Bland B, Bock O, Bodiya T P, Bogan C, Bondarescu R, Bork R, Born M, Bose S, Brady P R, Braginsky V B, Brau J E, Breyer J, Bridges D O, Brinkmann M, Britzger M, Brooks A F, Brown D A, Brummitt A, Buonanno A, Burguet-Castell J, Burmeister O, Byer R L, Cadonati L, Camp J B, Campsie P, Cannizzo J, Cannon K, Cao J, Capano C D, Caride S, Caudill S, Cavaglià M, Cepeda C, Chalermsongsak T, Chalkley E, Charlton P, Chelkowski S, Chen Y, Christensen N, Cho H, Chua S S Y, Chung S, Chung C T Y, Ciani G, Clara F, Clark D E, Clark J, Clayton J H, Conte R, Cook D, Corbitt T R, Cordier M, Cornish N, Corsi A, Costa C A, Coughlin M, Couvares P, Coward D M, Coyne D C, Creighton J D E, Creighton T D, Cruise A M, Cumming A, Cunningham L, Cutler R M, Dahl K, Danilishin S L, Dannenberg R, Danzmann K, Daudert B, Daveloza H, Davies G, Daw E J, Dayanga T, DeBra D, Degallaix J, Dent T, Dergachev V, DeRosa R, DeSalvo R, Dhurandhar S, DiGiuglielmo J, Di Palma I, Díaz M, Donovan F, Dooley K L, Dorsher S, Drever R W P, Driggers J C, Du Z, Dumas J C, Dwyer S Eber 2011 *Nat. Phys.* **7** 962
- [26] Qiu C, Chen S Y, Chen L Q, Chen B, Guo J, Ou Z Y, Zhang W P 2016 *Optica* **3** 000775
- [27] Pezzè L, Smerzi A, Oberthaler M K, Schmied R, Treutlein P 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 035005
- [28] Kasevich M A, Chu S 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 181
- [29] Peters A 1998 *Ph. D. Dissertation* (Palo Alto: Stanford University)
- [30] Geiger R, Me´noret V, Stern G, Zahzam N, Cheinet P, Battelier B, Villing A, Moron F, Lours M, Bidel Y, Bresson A, Landragin A, Bouyer P 2011 *Nat. Commun.* **2** 474
- [31] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R 1995 *Science* **269** 198
- [32] Higbie J M, Sadler L E, Inouye S, Chikkatur A P, Leslie S R, Moore K L, Savalli V, Stamper-Kurn D M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 050401
- [33] Sadler L E, Higbie J M, Leslie S R, Vengalattore M, Stamper-Kurn D M 2006 *Nature* **443** 0605351
- [34] Yurke B, McCall S L, Klauder J R 1986 *Phys. Rev. A* **33** 4033
- [35] Plick W N, Dowling J P, Agarwal G S 2010 *New J. Phys.* **12** 083014
- [36] Kong J, Jing J, Wang H, Hudelist F, Liu C, Zhang W 2013 *Appl. Phys. Lett.* **102** 011130
- [37] Chen B, Qiu C, Chen S Y, Guo J X, Ou Z Y, Zhang W P 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 043602
- [38] Ou Z Y 2012 *Phys. Rev. A* **85** 023815
- [39] Xiao M, Wu L A, Kimble H 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 278

- [40] Barnett S M, Fabre C, Maître A 2003 *Eur. Phys. J. D* **22** 513
- [41] Scully M O, Zubairy M S 1997 *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [42] Yuen H P, Shapiro J H 1979 *Opt. Lett.* **4** 334
- [43] Wu L A, Kimble H, Hall J, Wu H 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 2520
- [44] Zhang Y, Wang H, Li X Y, Jing J T, Xie C D 2000 *Phys. Rev. A* **62** 023813
- [45] Goda K, Miyakawa O, Mikhailov E E, Saraf S, Adhikari R, McKenzie K, Ward R, Vass S, Winstein A J, Maval-vala N 2008 *Nat. Phys.* **4** 472
- [46] The LIGO Scientific Collaboration 2013 *Nat. Photonics* **7** 613
- [47] Vahlbruch H, Mehmet M, Danzmann K, Schnabel R 2016 *Physical Review Lett.* **117** 110801
- [48] Yu H C, McCuller L, Tse M, Kijbunchoo N, Barsotti L, Mavalvala N 2020 *Nature* 583
- [49] Liu H Y 2019 *Ph. D. Dissertation* (Tianjin: Tianjin University) (in Chinese) [刘宏宇 2019 博士学位论文 (天津: 天津大学)]
- [50] Slusher R E, Hollberg L W, Yurke B, Mertz C J, Valley J F 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 2409
- [51] Zhang Y, Su H, Xie C, Peng K C 1999 *Phys. Lett.* **259** 171
- [52] Boyer V, Marino A M, Pooser R C, Lett P D 2008 *Science* **321** 544
- [53] Glorieux Q, Guidoni L, Guibal S, Likforman J P, Coudreau T 2011 *Phys. Rev. A* **84** 053826
- [54] Liu S, Lou Y, Jing J 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 113602
- [55] Liu Q, Wu L N, Cao J H, Mao T W, Li W X, Guo F S, Tey K M, You L 2021 *Nat. Phys.* **18** 167
- [56] Marino M A, Corzo N V, Trejo, Lett P D 2012 *Phys. Rev. A* **86** 023844
- [57] Yuen H P, Chan V W 1983 *Opt. Lett.* **8**
- [58] Abbas G L, Chan V W, Yee T K 1983 *Opt. Lett.* **8**
- [59] Pan X Z 2019 *Ph. D. Dissertation* (Shanghai: East China Normal University) (in Chinese) [潘晓州 2019 博士学位论文 (上海: 华东师范大学)]
- [60] Bollinger J J, Itano W M, Wineland D J, Heinzen D J 1996 *Phys. Rev. A* **54** R4649
- [61] Gerry C C 2000 *Phys. Rev. A* **61** 043811
- [62] Li D 2016 *Ph. D. Dissertation* (Shanghai: East China Normal University) (in Chinese) [李栋 2016 博士学位论文 (上海: 华东师范大学)]
- [63] Kitagawa M, Ueda M 1993 *Phys. Rev. A* **47** 5138
- [64] Szigeti S S, Nolan S P, Close J D 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 100402
- [65] Lee C 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 150402
- [66] Lee C 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 070401
- [67] Hu Y, Feng M, Lee C 2012 *Phys. Rev. A* **85** 043604
- [68] Luo C, Huang J, Zhang X, Lee C 2017 *Phys. Rev. A* **95** 023608
- [69] Zhuang M, Huang J, Lee C 2018 *Phys. Rev. A* **98** 033603
- [70] Ma J, Huang Y, Wang X, Sun C 2011 *Phys. Rev. A* **84** 039907
- [71] Huang J, Qin X, Zhong H, Ke Y, Lee C 2015 *Sci. Rep.* 517894
- [72] Huang J, Zhuang M, Lu B, Ke Y, Lee C 2018 *Phys. Rev. A* **98** 012129
- [73] Braunstein S, Caves C 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3439
- [74] Xu L, Zhang L J 2021 *Laser & Optoelectronics Progress* **58** 49 (in Chinese) [胥亮, 张利剑 2021 激光与光电子学进展 **58** 49]
- [75] Zhang X D, Yu Y F, Zhang Z M 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 240302 (in Chinese) [张晓东, 於亚飞, 张智明 2021 物理学报 **70** 240302]
- [76] Dressel J, Malik M, Miatto F M, Filippo M M, Andrew N, Jordan Robert W B 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 307
- [77] Chen G, Aharon N, Sun Y 2018 *Nat. Commun.* **9** 1
- [78] Ogawa K, Yasuhiko O, Kobayashi H 2019 *New J. Phys.* **21** 043013
- [79] Li Q Z 2015 *M. S. Thesis* (Shanghai: Shanghai Jiao Tong University) (in Chinese) [李钦政 2015 硕士学位论文 (上海: 上海交通大学)]
- [80] Yuto A, Masahito U 2017 *Phys. Rev. A* **95** 022124
- [81] Yu S, Meng Y, Tang J S, Xu X Y, Wang Y T, Yin P, Ke Z J, Liu W, Li Z P, Yang Y Z, Chen G, Han Y J, Li C F, Guo G C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 230402
- [82] Hou Z, Tang J F, Chen H 2021 *Sci. Adv.* **7** eabd2986
- [83] Lu X M, Wang X G 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 7
- [84] Du W, Kong J, Bao G Z, Yang P Y, Jia J, Ming S, Yuan C H, Chen J F, Ou Z Y, Morgan W M, Zhang W P 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 033601



## SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

Research progress in quantum precision measurements based on linear and nonlinear interferometers<sup>\*</sup>Sun Si-Tong<sup>#</sup> Ding Ying-Xing<sup>#</sup> Liu Wu-Ming<sup>†</sup>*(Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)*

(Received 9 March 2022; revised manuscript received 1 April 2022)

**Abstract**

Quantum precision measurement is based on the basic principle of quantum mechanics by using the interaction between light, atoms and magnetism to measure physical quantities, also known as precision measurements based on microscopic particle systems and their quantum states. As an important means of quantum precision measurement, interferometer precision measurement technology has great application value in quantum communication. The linear interferometer measures the magnitude of the physical quantity by using the phase change obtained from the measurements, but measurement accuracy is limited and unable to meet the requirements of today's scientific problems for the precision measurement of some physical quantities. On this basis, nonlinear interferometer is able to take advantage of the quantum entangled state, that is, using the two light fields of quantum correlation characteristics to realize quantum enhanced precision measurement, thus greatly improving the measurement sensitivity. Therefore, the scope of application is wider, but the preparation of quantum entangled states has many limitations in practical manipulation. With the maturity of experimental conditions and technology, how to use both of these interferometers to further improve the measurement accuracy of the phase signal so as to break the limitation to shot noise, breaking the standard quantum limit and even approaching to the Heisenberg limit has become a frontier research topic. In this paper, we introduce several methods to improve the accuracy of parameter evaluation in the measurement process by using linear (including an atomic/photon interferometer) and nonlinear interferometer to call quantum resources at different stages. High-precision measurement can be achieved by inputting non-classical states into the interferometer, such as compressed state, bi-fock state, and NOON state. And we also introduce the weak measurement developed for the direct observation of quantum states and its application to non-Hermitian systems, and the multiparameter measurement proposed to eliminate the accuracy balance between parameters. Compared with the first two measurement methods, weak measurement method is based on the weak value amplification principle of an indirect measurement. Measurements are performed virtually without perturbing the quantum system, which does not lead the wave function to collapse, the weak value of the real and virtual part have different physical significance. The combination of weak measurement theory and non-Hermitian system also further improves the measurement sensitivity. Multi-parameter measurement uses quantum entanglement, quantum control and other quantum resources to make the measurement progress reach the Heisenberg limit, which is the current research hotspot in the field of precision measurement. Furthermore, we present a conjecture whether there will be multi-atomic mixing measurements based on atomic spin effects or ultra-high sensitivity measurement instruments with precision of fT or even aT by using other particles detection. Finally, several measurement methods are analyzed and compared with each other, and the development prospect of quantum precision measurement is forecasted.

**Keywords:** quantum precision measurement, interferometer, Heisenberg limit, standard quantum limit, non-Hermitian system

**PACS:** 07.60.Ly, 42.50.Dv

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220425

<sup>\*</sup> Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2021YFA1400900, 2021YFA0718300, 2021YFA1400243) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61835013).

<sup>#</sup> These authors contributed equally.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [wmliu@iphy.ac.cn](mailto:wmliu@iphy.ac.cn)