

## 强子夸克相变表面张力解析求解

周淑英<sup>1)</sup> 沈婉萍<sup>2)</sup> 毛鸿<sup>1)†</sup>

1) (杭州师范大学物理学院, 杭州 311121)

2) (浙江大学物理系, 杭州 310058)

(2022 年 4 月 9 日收到; 2022 年 7 月 16 日收到修改稿)

最近一级相变动力学的研究在早期宇宙、致密星体和相对论重离子对撞实验等方面得到了广泛的关注, 特别是与一级相变相关的引力波方面的研究, 是当前宇宙学研究的热点问题. 本文利用有限温度场论, 在有限温度和密度下, 研究了 Friedberg-Lee 模型下的单圈有效势能和量子色动力学退禁闭相变的动力学机制, 结果表明在全相图中存在一级相变, 在  $\mu = 0$  MeV 时, 临界温度  $T_c = 119.8$  MeV; 在  $T = 50$  MeV 时, 临界化学势  $\mu_c = 256.4$  MeV. 在薄壁近似下, 通过液滴核合成唯象模型研究了均质气泡成核的强子夸克一级相变的动力学过程, 在适当的边界条件下, 求解场的运动方程, 计算不同温度和密度下气泡临界位形随半径的演化, 获得了表面张力、临界半径和核合成自由能等物理量随温度与夸克化学势密度的变化关系. 为了证明薄壁近似的可靠性和优势, 本文将薄壁近似的分析结果与相应的精确解进行了对比, 讨论了薄壁近似的适用条件, 以及薄壁近似的优缺点等问题. 虽然本文的计算结果是模型相关的, 但是一般性的研发方法和结论具有普适性, 所获得的结果对其他领域一级相变动力学研究有较大的参考价值和现实意义.

**关键词:** 量子色动力学, Friedberg-Lee 模型, 薄壁近似**PACS:** 11.30.Rd, 11.30.Qc, 98.80.Cq, 25.75.Nq**DOI:** 10.7498/aps.71.20220659

## 1 引言

当温度和重子数密度达到一定程度时, 夸克和胶子将不再属于某一个强子, 而是形成一种新的物质状态, 即夸克胶子等离子体 (quark-gluon plasma, QGP), 目前正在运行的相对论重离子对撞实验可以从实验上揭示 QGP 和强相互作用的物理特性. 理论上, 虽然量子色动力学 (quantum chromodynamics, QCD) 是描述强相互作用的基本理论, 可以用来描述强子夸克相变的动力学, 但由于色禁闭的存在, 使得中低能非微扰区域 QCD 的理论和数值计算都受到了极大地限制<sup>[1]</sup>, 因此, 通常需要借助有效模型或理论来理解量子色动力学的非微扰性质, 比如夸克介子模型 (quark meson, QM)<sup>[2]</sup>, Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型<sup>[3,4]</sup>、以及它们的

Polyakov loop 拓展模型<sup>[5,6]</sup>等.

对于一级相变, 亚稳态真空可通过气泡核合成的机制隧穿至稳定真空, 而气泡的成核率等相变动力学的问题可利用标准的量子场论方法计算出来<sup>[7-11]</sup>. 另一方面, 对于相变动力学机制的研究, 有效势能是一个十分重要和有效的理论工具. 基于朗道的相变理论, 在相变临界区域, 有效势能可以按照系统序参量的阶数进行展开, 得到关于相变动力学机制的普适性特征, 而不必太关注相变背后具体的物理背景和动力学过程. 一般性而言, 对于二级相变, 通常保留序参量的二阶项和四阶项, 不过对于一级相变, 还需要加入非常关键的三阶项, 当然, 如果要研究存在三相点的相变体系, 比如存在过渡相变和一级相变的交叉点的问题, 需要把有效势能按照序参量展开成二阶项、四阶项和六阶项的形式<sup>[12]</sup>. 所以, 对于研究强相互作用一级相变的动

† 通信作者. E-mail: [mao@hznu.edu.cn](mailto:mao@hznu.edu.cn)

力学问题, 只要把系统的有效势能按照序参量展开到二阶、三阶和最高阶四阶即可. 从这个意义上讲, Friedberg-Lee 模型及其衍生的模型对于研究一级相变动力学有着天生的优势和得天独厚的条件<sup>[13–15]</sup>. 当然, 这里需要指出的是, 利用该模型计算得到的结果从定量上看肯定是模型依赖的, 但是关于一级相变动力学的定性结论却是普适的和一般的, 可被广泛应用于宇宙学、凝聚态物理和致密星体等领域.

特别是在近期, 一级相变动力学的研究越来越受到重视, 在致密星体的研究中, 可以通过引力波来研究混合中子星的一级相变下的物态方程, 而在宇宙学中, 一级相变被认为是引力波 (GWs) 的潜在来源之一, 并且在不久的将来可能被直接探测到<sup>[16–18]</sup>. 另外, 在早期宇宙的研究中, 一级相变在弱电重子数核合成和暗物质的研究中也占据着非常重要的地位. 对于强子夸克相变, 由于对弱一级强子夸克相变的性质已经进行了大量深入的研究<sup>[19]</sup>, 利用薄壁近似, 本文将采用解析的近似方法深入研究 Friedberg-Lee 模型在有限温度、有限密度下强一级强子夸克相变动力学机制, 并与前期的数值结果进行比较, 得到普适和一般性的结论<sup>[20]</sup>.

本文首先简要介绍了 Friedberg-Lee 模型, 然后基于有限温度场论, 给出了 Friedberg-Lee 模型的有效势能, 并计算得出了相图结构. 通过介绍薄壁近似后计算得出稳定真空相气泡的临界位形、表面张力、临界半径和核合成自由能随温度与化学势密度的变化关系, 并将结果与精确解进行对比讨论.

## 2 Friedberg-Lee 模型

1977 年 Friedberg 和李政道提出 Friedberg-Lee (FL) 模型, 在过去的数十年里, 被广泛应用于研究真空中单个核子的静态物理性质, 并取得了很大的成功<sup>[13–15,21]</sup>. 此外, 在有限温度场论框架下, 该模型还被用于研究 QCD 强一级退禁闭相变的热力学和动力学性质<sup>[20,22–26]</sup>. FL 模型的基本物理框架是把核子看成非拓扑孤子, 通过引用唯象标量场  $\sigma$  来描述量子色动力学真空的非微扰特性, 同时, 该标量场代表核子内各个成分之间的相互作用, 包括夸克之间、胶子之间以及夸克和胶子之间, 直观展示了夸克禁闭和退禁闭相变的物理特性. 当系统处于真空态时, 标量场  $\sigma$  的数值很大, 使得组分夸

克质量超过 1 GeV, 这时夸克就被囚禁在核子中. 但随着系统温度或密度的升高, 标量场  $\sigma$  的数值减小, 并在临界温度处标量场有效值变为零, 夸克变成了自由夸克, 即实现了退禁闭相变的动力学过程.

FL 模型的拉格朗日密度表示如下:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m - g\sigma) \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - U(\sigma). \quad (1)$$

方程 (1) 中,  $\psi$  表示自旋 1/2 的  $u, d$  夸克场;  $\sigma$  就是唯象标量场, 用以表征真空的非微扰特性;  $g$  为耦合常数;  $m$  为夸克的流质量, 在 FL 模型中取  $u, d$  夸克的流夸克质量为零;  $\gamma^\mu$  为狄拉克矩阵.  $U(\sigma)$  为  $\sigma$  场的非线性自相互作用势能, 取到四次项:

$$U(\sigma) = \frac{a}{2!} \sigma^2 + \frac{b}{3!} \sigma^3 + \frac{c}{4!} \sigma^4. \quad (2)$$

对  $U(\sigma)$  求极值, 可求得

$$\sigma_0 = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_v = \frac{3|b|}{2c} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{8ac}{3b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (4)$$

其中  $\sigma_0$  为局域最小值, 对应为亚稳态真空 (或称为伪真空), 此处的夸克的有效质量为零; 而  $\sigma_v$  为绝对最小值, 对应为稳定真空 (或称为真真空), 此时夸克与  $\sigma$  耦合而得到非常大的有效质量  $g\sigma_v$ , 从而实现夸克的禁闭. 为使  $\sigma_v \neq 0$ , 参数  $a, b, c$  需满足  $b^2 > 3ac$ . 将两个真空的有效势能之差记为  $\varepsilon$ , 取  $U(0) = 0$ , 则真空态下口袋常数  $\varepsilon$  表示为

$$\varepsilon = - \left( \frac{a}{2!} \sigma_v^2 + \frac{b}{3!} \sigma_v^3 + \frac{c}{4!} \sigma_v^4 \right). \quad (5)$$

FL 模型中有 4 个可调参数, 分别为  $a, b, c, g$ . 为了拟合这 4 个参数, 基于非拓扑孤子理论<sup>[27]</sup>, 先求得系统的 Euler-Lagrange 方程:

$$\Omega \sigma + \frac{dU}{d\sigma} + g\bar{\psi}\psi = 0, \quad (6)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - g\sigma) \psi = 0. \quad (7)$$

在平均场近似条件下, 将  $\sigma$  看作与时间无关的经典场:

$$\sigma(\mathbf{r}, t) = \sigma(r). \quad (8)$$

考虑球对称情形, 用一组完备的狄拉克函数将夸克场算符展开:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\epsilon t} \sum_k \varphi_k, \quad (9)$$

其中夸克的基态波函数形式为

$$\varphi = \begin{pmatrix} u(r) \\ i\sigma \cdot \hat{r}v(r) \end{pmatrix} \chi, \quad (10)$$

$\chi$  为自旋波函数, 分别为  $\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  或  $\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $\sigma$  是泡利矩阵;  $\hat{r}$  表示  $\mathbf{r}$  矢量的单位矢量;  $u(r)$  和  $v(r)$  为径向波函数的分量. 整理 (6) 式—(10) 式可得到 3 个互相关联的运动方程:

$$\frac{du(r)}{dr} = -[\varepsilon + g\sigma(r)]v(r), \quad (11)$$

$$\frac{dv(r)}{dr} = -\frac{2}{r}v(r) + [\varepsilon - g\sigma(r)]u(r), \quad (12)$$

$$\frac{d^2\sigma(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\sigma(r)}{dr} - \frac{dU}{d\sigma} = Ng[u^2(r) - v^2(r)], \quad (13)$$

加上波函数归一化条件为

$$4\pi \int r^2 [u^2(r) + v^2(r)] dr = 1. \quad (14)$$

对于核子, (13) 式中的  $N$  取 3. 通过求解联立的方程组 (11)—(13), 可以求得核子的质量、半径、轴向向量常数和磁矩等物理量, 并与实验数值进行比较, 从而确定模型的参数. 选择不同参数得到定量的物理结果会有所差异, 但基本的物理图像和结论不依赖于具体的参数. 本文选取了一组在文献中被广泛采用的参数:  $a = 17.70 \text{ fm}^{-2}$ ,  $b = -1457.4 \text{ fm}^{-1}$ ,  $c = 20000$ ,  $g = 12.16$ , 该组参数可以很好地拟合单个核子真空的物理性质 [25].

### 3 Frieberg-Lee 模型的有效势能及相图

有效势能是量子场论中的一个重要的理论工具, 非常适合用来研究对称性自发破缺和热力学相变等物理问题. 在有限温度场论中 [28,29], 通过系统的巨配分函数, 热力学量都可以通过系统的巨正则势能得到:

$$\Omega(T, \mu) = -\frac{T \ln \mathcal{Z}}{V}, \quad (15)$$

其中,  $\mathcal{Z}$  是体系热力学配分函数, 分母  $V$  为系统体积. 根据热力学关系, 系统的压强为

$$p = -\Omega(\sigma; \beta, \mu) = V_{\text{eff}}(\sigma; \beta, \mu). \quad (16)$$

利用标准的有限温度场论方法, FL 模型在有限温度、有限密度下的单圈有效势能形式如下:

$$V_{\text{eff}}(\sigma; \beta, \mu) = U(\sigma) + V_B(\sigma; \beta) + V_F(\sigma; \beta, \mu), \quad (17)$$

其中  $\beta = 1/T$ ,  $\mu$  是夸克数化学势.  $V_B(\sigma; \beta)$  是有限

温度下玻色子的单圈贡献,  $V_F(\sigma; \beta, \mu)$  是有限温度和密度下费米子的单圈贡献. 玻色项和费米项的具体形式是:

$$V_B(\sigma; T) = T \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-E_\sigma/T}), \quad (18)$$

$$V_F(\sigma; T) = -2N_f N_c T \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[ \ln(1 + e^{-(E_q - \mu)/T}) + \ln(1 + e^{-(E_q + \mu)/T}) \right], \quad (19)$$

式中  $N_f = 2$ ,  $N_c = 3$ ;  $E_\sigma = \sqrt{p^2 + m_\sigma^2}$  和  $E_q = \sqrt{p^2 + m_q^2}$  是介子和夸克的能量, 其中  $\mathbf{p}$  为粒子动量, 夸克的质量  $m_q = g\sigma$ , 而介子质量  $m_\sigma^2 = a + b\sigma + \frac{c}{2}\sigma^2$ . 为保证  $m_\sigma$  始终为正值, 本文选取稳定真空状态下  $\sigma$  场的有效质量  $m_\sigma$  作为其固定取值.

获得系统的有效势能之后, 类比于 MIT 口袋模型, FL 模型的口袋常数定义为亚稳态真空与稳定真空的有效势能之差为

$$\varepsilon(T, \mu) = V_{\text{eff}}(0; T, \mu) - V_{\text{eff}}(\sigma_v; T, \mu). \quad (20)$$

当体系的温度和密度比较小的时候, 亚稳态真空的能量大于稳定真空的能量, 系统的口袋常数大于零, 自由夸克被束缚在核子内部, 而随着温度和密度的升高, 这个口袋常数逐渐减小, 并在  $T = T_c$  的时候,  $\varepsilon(T, \mu) = 0$ . 此时, 意味着自由夸克将不再被囚禁在核子内部, 从而变成了自由的夸克, 进而实现了夸克的退禁闭相变.

图 1 给出了  $T - \mu$  下 FL 模型的退禁闭相变相图结构. 图中的曲线为强子相和夸克相的临界线, 在曲线上, 亚稳态真空和稳定真空的有效势能相等, 如果温度继续上升, 两个真空之间将实现了反转. 此外, 对于 FL 模型, 在整个相图的相变临界点,

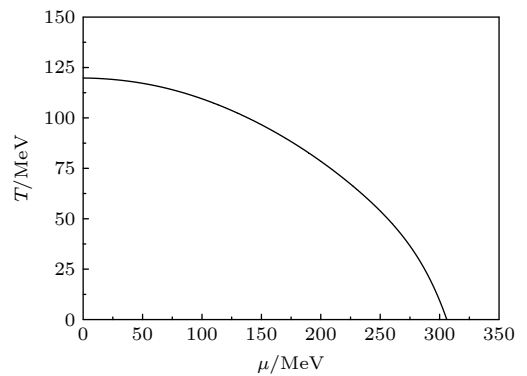


图 1 FL 模型下的 QCD 相图结构

Fig. 1. QCD phase diagram structure under FL model.



由于两个真空之间还被一个势垒隔开, FL 模型只能给出强一级强子夸克相变. 从图 1 可得到, 任何温度  $T$  下的临界化学势  $\mu_c$  或任何化学势  $\mu$  下的临界温度  $T_c$ , 可知在  $\mu = 0$  MeV 时, 临界温度  $T_c = 119.8$  MeV; 在  $T = 50$  MeV 时, 临界化学势  $\mu_c = 256.4$  MeV.

#### 4 薄壁近似下的核合成

对于典型的一级相变, 当系统达到相变临界温度或临界化学势时, 模型的热力学有效势能具有两个相等的极小值, 在这两个极小值之间有一个势垒将它们隔开. 随着温度或化学势的降低, 两个极小值将不再保持相等, 其中,  $\sigma \simeq 0$  处的极小值称为局域极小值, 该数值较大, 所以对应的真空定义为亚稳态真空, 而  $\sigma \simeq \sigma_v$  处的极小值为绝对最小值, 对应的真空定义为稳定真空. 亚稳态真空在经典物理中是稳定的, 但在量子物理中, 亚稳态真空有一定的概率通过量子隧穿效应变成稳定真空 [30,31].

当  $T < T_c$  或  $\mu < \mu_c$  时, 由热涨落产生稳定真空的气泡在亚稳态真空中可能增长也可能收缩, 这取决于系统两种能量之间的竞争. 亚稳态真空中的体自由能密度高于稳定真空中的体自由能密度, 因此, 从亚稳态真空到稳定真空的转变, 即气泡膨胀过程中, 会降低整个系统的能量. 但是, 稳定真空的气泡需要一个界面将稳定真空与亚稳态真空隔开, 界面的表面张力使得整个系统的能量增大. 因此, 从亚稳态真空到稳定真空的相变机制取决于体系自由能密度与表面张力之间的竞争. 稳定真空的气泡的体自由能与  $R^3$  成正比, 两真空相之间的表面张力与  $R^2$  成正比, 其中  $R$  为气泡半径. 当  $R$  比较小的时候, 两个真空相直接的转换使得整个体系的能量增大, 气泡将会收缩直至最终消失, 反之, 当  $R$  较大时, 气泡将不断膨胀, 直至占据整个系统, 从而完成相变整个过程. 所以是否能完成相变取决于气泡半径是否大于临界半径  $R_c$ , 只有半径大于临界半径  $R_c$  的气泡在一级相变中起决定性作用.

根据液滴核合成模型的标准场论方法 [7,8,10,32], 对于 FL 模型, 系统自由能如下:

$$F(\sigma) = \int d^3r \left[ \frac{1}{2} (\nabla \sigma)^2 + V_{\text{eff}}(\sigma; T, \mu) \right], \quad (21)$$

气泡临界位形是自由能函数对于标量场  $\sigma$  的一个极值解. 将系统自由能  $F(\sigma)$  对  $\sigma$  进行变分, 得到一

个非线性常微分方程:

$$\frac{d^2 \sigma(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\sigma(r)}{dr} = \frac{\partial V_{\text{eff}}(\sigma; T, \mu)}{\partial \sigma}. \quad (22)$$

其满足的边界条件为  $\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma(r) = 0$ ,  $\frac{d\sigma(0)}{dr} = 0$ , 第 1 个边界条件源于气泡嵌在亚稳态真空中, 所以无穷远的地方标量场  $\sigma$  取亚稳态真空  $\sigma \simeq 0$ , 第 2 个边界条件源于原点处方程要满足无奇异性这一要求. 结合边界条件对 (22) 式进行求解, 可求得一个鞍点解  $\sigma_b$ , 则此时系统的自由能变为

$$F_b = 4\pi \int r^2 dr \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\sigma_b}{dr} \right)^2 + V_{\text{eff}}(\sigma_b; T, \mu) \right]. \quad (23)$$

为了便于后续讨论, 通常将  $V_{\text{eff}}(0; T, \mu)$  固定为 0. 故系统单位时间、单位体积的临界气泡成核率可以表示为

$$\Gamma = \mathcal{P} e^{-F_b/T}, \quad (24)$$

其中  $T$  为系统的温度,  $\mathcal{P}$  通常近似表示为  $T^4$ . 亚稳态真空与稳定真空之间界面的表面张力定义为

$$\Sigma = \int dr \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\sigma_b}{dr} \right)^2 + V_{\text{eff}}(\sigma_b; T, \mu) \right]. \quad (25)$$

对于一般的有效势  $V_{\text{eff}}$ , (22) 式通常难以解析求解, 一般要通过计算机求得该方程的数值解. 但是对于数值求解, 由于这是一个典型的两点边值二阶微分方程, 数值求解难度通常也很大, 主要取决于猜测值是否合适, 如果猜测值与实际值很接近, 那么很容易得到正确的结果, 但是如果猜测值与实际值相差较大, 那么数值计算收敛性就很差, 一般很难得到正确的结果. 所以运气和经验对于数值求解孤子运动方程显得尤为重要. 当然, 还有第二种方案可以选择, 就是求该运动方程的近似解. 对于处于临界状态的系统, 在  $T \simeq T_c$  或  $\mu \simeq \mu_c$  时, 亚稳态真空和稳定真空的势能之差  $\varepsilon$  远小于隔开两个真空的势垒, 此时稳定真空气泡的半径远大于气泡壁厚. 在这种情况下, 可以将 (22) 式中的第 2 项舍去, 则 (22) 式变为如下形式:

$$\frac{d^2 \sigma(r)}{dr^2} = \frac{\partial V_{\text{eff}}(\sigma; T, \mu)}{\partial \sigma}. \quad (26)$$

对其进行化简, 可得

$$\frac{d\sigma(r)}{dr} = \pm \sqrt{2V_{\text{eff}}}, \quad (27)$$

两边进行积分, 可得

$$r = \int_0^{\sigma_v} \frac{d\sigma}{\sqrt{2V_{\text{eff}}}}. \quad (28)$$

可以发现, 只要将 (22) 式中的第 2 项舍去, 即使没有求解运动方程 (22) 式, 也可以解析地得到体系运动方程的解, 从而进一步得到系统的表面张力、鞍点解  $\sigma_b$  的场位形和临界气泡成核率等物理量. 这种近似称为薄壁近似 (thin-wall approximation), 被广泛地运用于各种体系的一级相变动力学机制的研究中.

在薄壁近似的情况下, 考虑到体自由能和表面张力的竞争, 可以将半径为  $R$  的气泡的系统自由能表示为

$$F(R) = 4\pi R^2 \Sigma - \frac{4}{3}\pi R^3 \varepsilon, \quad (29)$$

其中  $\Sigma$  是亚稳态真空与稳定真空之间界面的表面张力,  $\varepsilon$  表示亚稳态真空与稳定真空的有效势能之差. 当  $F(R)$  为最小值时, 气泡有临界半径, 对 (29) 式进行求导, 可得临界半径  $R_c$ :

$$R_c = 2\Sigma/\varepsilon, \quad (30)$$

只有当稳定真空气泡半径大于临界半径  $R_c$ , 才对系统一级相变起作用.

当  $\varepsilon = 0$  时, 将 (27) 式代入 (25) 式, 可求得薄壁近似下的表面张力表达式:

$$\Sigma = \int_0^{\sigma_v} d\sigma \sqrt{2V_{\text{eff}}}. \quad (31)$$

从 (24) 式可以看出指数因子对气泡成核率有着重要影响, 将 (30) 式代入 (29) 式, 可得

$$F_b = 16\pi\Sigma^3/(3\varepsilon^2). \quad (32)$$

运用 (32) 式可近似求解相变动力学的相关物理量, 甚至不需求解运动方程 (22). 所以薄壁近似是一个非常高效、快捷的研究方法.

## 5 近似解及其与精确解的讨论

运用方程 (28) 可以得到不同温度和化学势密度下  $\sigma$  场随半径  $r$  的演化关系. 图 2 分别绘制出了  $\mu = 0$  MeV,  $T = 0, 70, 100, 105, 109$  MeV 及  $T = 50$  MeV,  $\mu = 0, 150, 200, 230, 240$  MeV 时的标量场  $\sigma$  场位形图.

从图 2(a) 可以看出, 随着半径的增大, 所有曲线都趋向于零, 且稳定真空气泡的半径随着温度  $T$  的增大而增大, 这一趋势与文献 [20] 中精确数值解的结论一致, 只是近似解析解求得的气泡半径比精

确数值解略小. 此外, 从图 2(a) 还可以发现, 当温度  $T < 109$  MeV 时, 气泡内部  $\sigma(0)$  的数值开始慢慢从  $\sigma_v$  偏离, 并且随着温度的降低,  $\sigma(0)$  偏离  $\sigma_v$  越来越大, 当温度等于零的时候,  $\sigma(0)$  略微大于  $\sigma_v/2$ . 根据薄壁近似的结果, 由 (28) 式不难得到, 当温度在临界温度或者非常接近临界温度的时候, 对于  $0 < r < R$  有  $\sigma(r) = \sigma_v$ , 而对于  $r > R$ , 则  $\sigma(r) = 0$ , 这里  $R$  是稳定真空气泡的半径. 所以从图 2(a) 可知, 当温度小于 109 MeV 时, 由于  $\sigma(0)$  开始偏离其预期值  $\sigma_v$ , 说明此时表面薄壁近似的适用性有待重新评估.

对图 2(b) 可做类似的分析, 可以发现随着化学势  $\mu$  的增大, 所有曲线都趋向于零, 且稳定真空气泡的半径随着化学势  $\mu$  的增大而增大, 但利用薄壁近似计算得到的半径值略小于精确解. 从图 2(b) 可以看出, 当化学势  $\mu < 230$  MeV 时,  $\sigma(0)$  开始偏离其预期值  $\sigma_v$ , 并且随着化学势的降低,  $\sigma(0)$  偏离  $\sigma_v$  的程度越来越大, 故此时表面薄壁近似的适用性需要重新考虑.

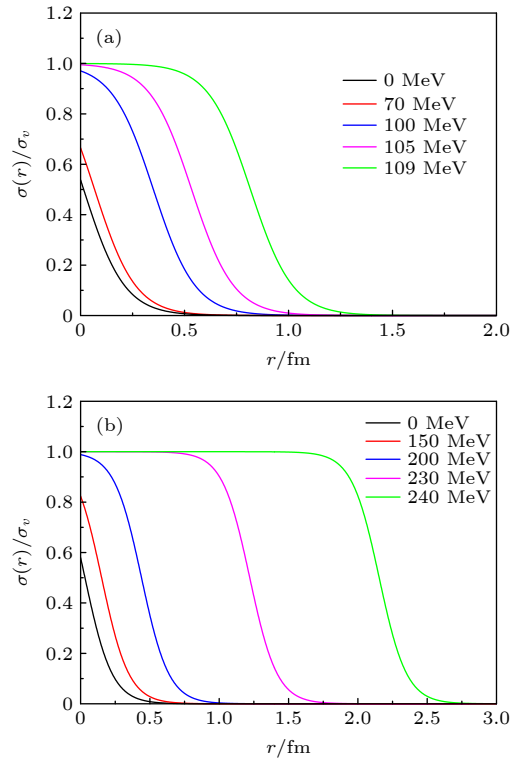


图 2 (a)  $\mu = 0$  MeV,  $T = 0, 70, 100, 105, 109$  MeV 时气泡临界位形; (b)  $T = 50$  MeV,  $\mu = 0, 150, 200, 230, 240$  MeV 时气泡临界位形

Fig. 2. (a) Bubble critical configuration at  $\mu = 0$  MeV,  $T = 0, 70, 100, 105, 109$  MeV; (b) bubble critical configuration at  $T = 50$  MeV,  $\mu = 0, 150, 200, 230, 240$  MeV.

同样, 利用前面得到的有效势能, 根据 (31) 式可以计算薄壁近似下的气泡表面张力. 图 3 给出了在临界温度  $T_c$  下, 夸克强子一级相变的表面张力随化学势密度  $\mu$  的变化关系. 从图 3 可以看出, 当  $T = T_c$  时, 强子相的表面张力随着化学势密度的增大而增大, 温度接近零度时, 表面张力大约为  $14.73 \text{ MeV/fm}^2$ .

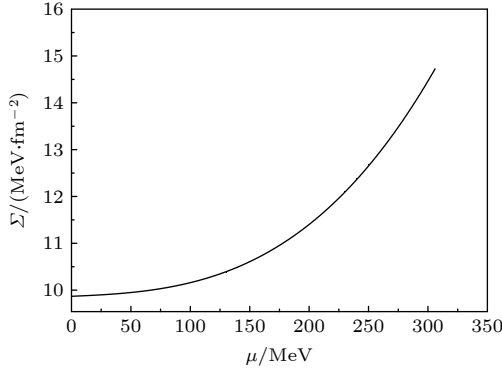


图 3  $T = T_c$  时表面张力随化学势  $\mu$  的变化关系

Fig. 3. Surface tension as a function of chemical potential  $\mu$  when  $T = T_c$ .

运用同样的方法, 也可以计算出非临界状态下的表面张力, 图 4 分别给出了  $\mu = 0 \text{ MeV}$  及  $T = 50 \text{ MeV}$  时表面张力的变化. 图 4(a) 给出了  $\mu = 0 \text{ MeV}$  时表面张力与温度的演化关系, 随着温度  $T$  升高, 表面张力先缓慢增长, 当  $T > 60 \text{ MeV}$  时, 表面张力快速增长, 这与文献 [20] 中的精确解得到的结果一致. 不同的是, 精确解给出的表面张力在  $T$  趋于  $109 \text{ MeV}$  时快速增大, 并在  $T = 109 \text{ MeV}$  时达到最大值  $\Sigma(T) \simeq 7.38 \text{ MeV/fm}^2$ , 在  $109 \text{ MeV} < T < 119.8 \text{ MeV}$  范围内, 表面张力随着温度的升高而减小. 而薄壁近似给出的结果显示, 温度接近于临界温度  $T_c = 119.8 \text{ MeV}$  时, 表面张力迅速增加, 并在  $T_c = 119.8 \text{ MeV}$  时达到最大值  $\Sigma(T) \simeq 9.17 \text{ MeV/fm}^2$ , 大于精确解给出的临界温度时的表面张力.

图 4(b) 给出了  $T = 50 \text{ MeV}$  时表面张力与化学势  $\mu$  的演化关系, 显示出了相似的曲线, 薄壁近似下表面张力随着化学势  $\mu$  的增加而持续增加, 并在临界化学势  $\mu_c = 256.4 \text{ MeV}$  时达到最大值  $\Sigma(T) \simeq 12.64 \text{ MeV/fm}^2$ ; 而对于精确解, 表面张力的最大值出现在  $\mu = 230 \text{ MeV}$  处, 其数值为  $\Sigma(T) \simeq 7.73 \text{ MeV/fm}^2$ , 小于薄壁近似给出的近似解. 可知, 薄壁近似下, 临界化学势下的表面张力大于精确解.

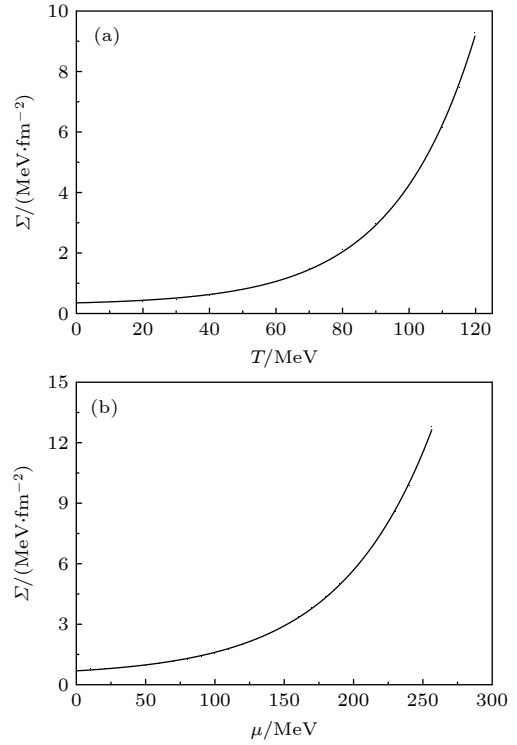


图 4 (a)  $\mu = 0 \text{ MeV}$  时表面张力与温度  $T$  的关系; (b)  $T = 50 \text{ MeV}$  时表面张力与化学势  $\mu$  的关系

Fig. 4. (a) Surface tension as a function of temperature  $T$  when  $\mu = 0 \text{ MeV}$ ; (b) surface tension as a function of chemical potential  $\mu$  when  $T = 50 \text{ MeV}$ .

表面张力精确解与近似解的差别主要来源于运动方程的“阻力”项  $\frac{d\sigma}{dr}$ . 对于薄壁近似, 通常忽略了这一阻力项, 而对于精确解, 表面张力的大小不仅与有效势  $V_{\text{eff}}$  有关, 还与  $\frac{d\sigma}{dr}$  有关, 并且  $\frac{d\sigma}{dr}$  项对表面张力的影响大于有效势  $V_{\text{eff}}$ . 从文献 [20] 给出的临界气泡位形图可以看出, 当化学势  $\mu = 0 \text{ MeV}$  时, 在  $0 \text{ MeV} < T < 109 \text{ MeV}$  范围内,  $\frac{d\sigma}{dr}$  随着温度的升高而增大, 因此表面张力在此温度 ( $0 \text{ MeV} < T < 109 \text{ MeV}$ ) 范围内一直单调递增, 但在  $109 \text{ MeV} < T < 119.8 \text{ MeV}$  范围内,  $\frac{d\sigma}{dr}$  逐渐变小, 因此表面张力从  $T = 109 \text{ MeV}$  开始变小. 故精确解结果是表面张力在  $T = 109 \text{ MeV}$  时达到最大值, 随后减小. 但是, 薄壁近似下表面张力随着温度的降低单调递减.

对  $T = 50 \text{ MeV}$  的情况可做类似分析: 在温度  $T = 50 \text{ MeV}$  时, 有效势  $V_{\text{eff}}$  随着化学势  $\mu$  的升高而增大, 故在薄壁近似下, 表面张力呈现出单调递增的趋势; 而对于精确求解情况, 在温度  $T = 50 \text{ MeV}$  时, 当  $0 \text{ MeV} < \mu < 230 \text{ MeV}$  时,  $\frac{d\sigma}{dr}$  随着温度的升

高而增大, 因此在  $0 \text{ MeV} < \mu < 230 \text{ MeV}$  范围内, 表面张力一直单调递增, 但在  $230 \text{ MeV} < \mu < 256.4 \text{ MeV}$  范围内,  $\frac{d\sigma}{dr}$  逐渐变小, 因此表面张力从  $\mu = 256.4 \text{ MeV}$  开始变小. 故精确解结果是表面张力在  $\mu = 256.4 \text{ MeV}$  时达到最大值, 随后减小.

计算得到表面张力后, 可利用 (30) 式分别计算出  $\mu = 0 \text{ MeV}$  及  $T = 50 \text{ MeV}$  情况下气泡临界半径的演变关系, 如图 5 所示. 根据液滴核合成唯象模型, 半径小于临界半径的气泡会在亚稳态真空中收缩并且消失, 只有半径大于临界半径的气泡会增长并推动相变, 因此半径大于临界半径的气泡在相变中起着决定性作用.

从图 5 可以看出, 气泡的临界半径随着温度或化学势的升高, 先缓慢增大, 当趋近于临界温度或临界化学势时, 气泡的临界半径迅速增加至无穷大. 这个现象可以根据 (30) 式作出解释, 当  $T \rightarrow T_c$  或  $\mu \rightarrow \mu_c$  时, 亚稳态真空和稳定真空的有效势之

差  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 这导致了气泡临界半径分散, 该结果与精确解一致.

从亚稳态真空向稳定真空相变的过程会使系统自由能降低, 薄壁近似下自由能的转变可由 (32) 式算出. 从 (24) 式可以看出指数因子  $F_b/T$  对气泡成核率有着重要影响, 图 6 分别绘制了  $\mu = 0 \text{ MeV}$  及  $T = 50 \text{ MeV}$  下  $F_b/T$  的演变关系.

从图 6(a) 可以看出, 当  $\mu = 0 \text{ MeV}$  时,  $F_b/T$  随着温度升高先减小后增大, 在接近临界温度时迅速增大至发散. 当  $T \simeq 114.5 \text{ MeV}$  时,  $F_b/T \approx 1$ , 则成核率  $\Gamma$  将受到指数因子  $F_b/T$  的强烈抑制, 系统将会在亚稳态真空中保持较长的时间. 当系统温度  $T < 114.5 \text{ MeV}$ . 从图 5(a) 也可以看出, 当温度  $T < 114.5 \text{ MeV}$  时, 临界半径  $R_c$  很小, 任何半径大于临界半径的气泡都将膨胀完成亚稳态真空到稳定真空的相变, 而当  $114.4 \text{ MeV} < T < 119.8 \text{ MeV}$  时, 临界半径  $R_c$  迅速增大并发散, 任何半径小于临

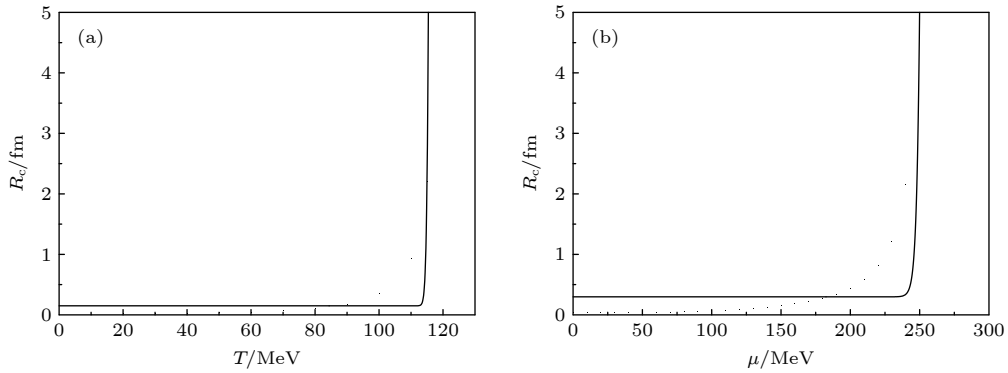


图 5 (a)  $\mu = 0 \text{ MeV}$  时临界半径与温度  $T$  的关系; (b)  $T = 50 \text{ MeV}$  时临界半径与化学势  $\mu$  的关系

Fig. 5. (a) Typical radius of the critical bubble as a function of temperature  $T$  when  $\mu = 0 \text{ MeV}$ ; (b) typical radius of the critical bubble as a function of chemical potential  $\mu$  when  $T = 50 \text{ MeV}$ .

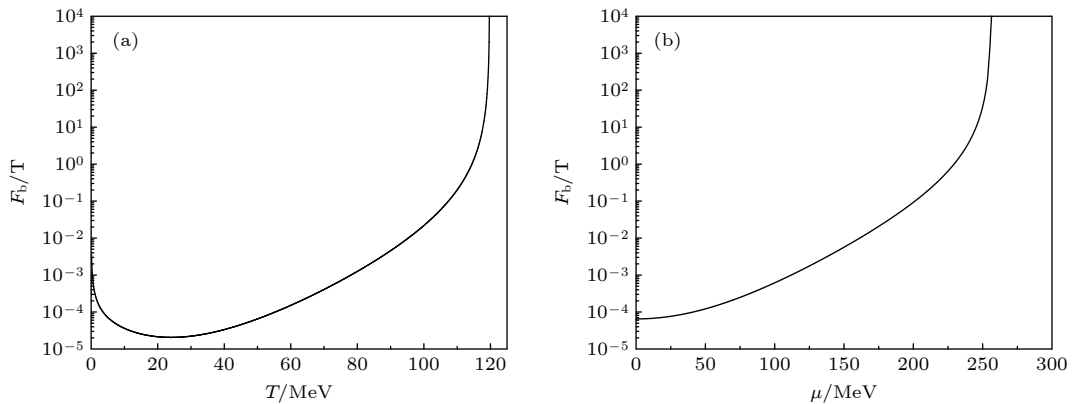


图 6 (a)  $\mu = 0 \text{ MeV}$  时  $F_b/T$  与温度  $T$  的关系; (b)  $T = 50 \text{ MeV}$  时  $F_b/T$  与化学势  $\mu$  的关系

Fig. 6. (a)  $F_b/T$  as a function of temperature  $T$  when  $\mu = 0 \text{ MeV}$ ; (b)  $F_b/T$  as a function of chemical potential  $\mu$  when  $T = 50 \text{ MeV}$ .



界半径的气泡都将收缩并消失, 故此时成核率受到抑制.

针对图 6(b) 中  $T = 50$  MeV 的情况可做类似分析, 从图 6(b) 可以看出, 当  $T = 50$  MeV 时,  $F_b/T$  随着化学势升高单调递增, 在接近临界化学势时迅速增大至发散. 当  $\mu \simeq 229.4$  MeV 时,  $F_b/T \approx 1$ , 成核率  $\Gamma$  受到指数因子  $F_b/T$  的强烈抑制, 系统将会在亚稳态真空中保持较长的时间. 从图 5(b) 也可看出, 当化学势  $\mu < 229.4$  MeV 时, 临界半径很小, 任何半径大于临界半径  $R_c$  的气泡都将膨胀完成亚稳态真空到稳定真空的相变, 而当  $229.4$  MeV  $< \mu < 256.4$  MeV 时, 临界半径  $R_c$  迅速增大并发散, 任何半径小于临界半径的气泡都将收缩并消失, 故此时成核率受到抑制. 上述结果与精确解保持一致.

## 6 总 结

基于 Friedberg-Lee 模型, 本文采用薄壁近似, 通过液滴核合成唯象模型研究了均质气泡成核的强子夸克一级相变的动力学过程, 并将薄壁近似得到的结果与精确解进行了比较和讨论, 同时给出了 Friedberg-Lee 模型的相图.

在化学势  $\mu = 0$  MeV 时, 气泡表张力呈现递增趋势, 表面张力最大值为  $\Sigma(T) \simeq 9.17$  MeV/fm<sup>2</sup>, 近似结果略大于精确解结果, 同时解释了两者存在差别的原因. 此外发现  $\mu = 0$  MeV 时气泡临界半径  $R_c$  与温度  $T$  的演化关系是先缓慢增大, 临近临界温度时迅速增大至发散, 而  $\mu = 0$  MeV 时  $F_b/T$  与温度  $T$  的演化关系是先减小后增大, 在接近临界温度时迅速增大至发散. 进一步, 对于  $T = 50$  MeV 的情况进行了分析, 在此情况下, 气泡表面张力也呈现递增趋势, 最大值为  $\Sigma(T) \simeq 12.64$  MeV/fm<sup>2</sup>. 本文还给出了  $T = 50$  MeV 时气泡临界半径  $R_c$  与化学势  $\mu$  的演化关系是先缓慢增大, 而  $T = 50$  MeV 时  $F_b/T$  与化学势  $\mu$  的演化关系是持续增大, 两者在接近临界化学势时均迅速增大至发散.

表面张力在 QCD 相变、宇宙学和致密星体的研究中有重要作用, 被广泛关注和讨论. 在合适的边界条件下, 数值求解方程 (22) 是一个典型的两点边值问题, 求解此类问题最关键的是找到方程解的猜测值, 猜测值与真实值越接近, 方程越容易求解, 反之则很困难. 此外, 由于存在数值计算的不确定性, 对于某些温度, 找到正确的精确解仍是一

个挑战, 故难以求得整个相图的表面张力. 考虑到精确数值求解运动方程的困难, 通常可以采用薄壁近似来解析求解该运动方程, 从而得到表面张力、临界半径和系统自由能的近似值, 通过与精确解析结果的比对, 发现即使温度低于或者远小于临界温度, 解析解与数值解的差别也不大, 说明对于一级相变的大部分问题, 都可以采用薄壁近似来处理, 进而可以避免难以求解的两点边值问题. 此外, 对于缺乏精确解, 只有近似解的模型, 如 QM 模型和 PQM 模型 (Polyakov-quark-meson model), 知道近似解和精确解之间的差别是十分重要的, 本文利用 FL 模型讨论发现, 虽然近似解会抹掉一些重要的信息, 比如表面张力随温度变化的非线性行为, 但在定性的结论上两者差别并不是很大, 这从侧面反映出其他模型的近似解和精确解在定性结论上的差异.

此外, 通过比对解析解和数值解的场位形, 对于那些一定需要精确求解的物理体系, 解析解也可以作为精确求解方程的猜测值, 从而更容易得到收敛的数值解. 比如对于 QM 模型、NJL 模型以及其拓展模型, 通常数值求解运动方程非常困难, 薄壁近似有助于更快得到精确的数值解, 目前所有的这些研究工作正在进行中.

## 参考文献

- [1] Fukushima K, Hatsuda T 2011 *Rep. Prog. Phys.* **74** 014001
- [2] Gell-Mann M, Levy M 1960 *Nuovo. Cimento.* **16** 705
- [3] Nambu Y, Jona-Lasinio G 1961 *Phys. Rev.* **122** 345
- [4] Nambu Y, Jona-Lasinio G 1961 *Phys. Rev.* **124** 246
- [5] Schaefer B J, Pawłowski J M, Wambach J 2007 *Phys. Rev. D* **76** 074023
- [6] Costa P, Ruivo M C, Sousa C D, Hansen H 2010 *Symmetry* **2** 1338
- [7] Coleman S 1977 *Phys. Rev. D* **15** 2929
- [8] Callan C G, Coleman J, Coleman S 1977 *Phys. Rev. D* **16** 1762
- [9] Coleman S 1988 *Aspects of Symmetry* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [10] Linde A D 1981 *Phys. Lett. B* **100B** 37
- [11] Linde A D 1983 *Nucl. Phys. B* **216** 421
- [12] Kohsuke Y, Tetsuo H, Yasuo M 2005 *Quark-Gluon Plasma* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [13] Friedberg R, Lee T D 1977 *Phys. Rev. D* **15** 1694
- [14] Friedberg R, Lee T D 1977 *Phys. Rev. D* **16** 1096
- [15] Friedberg R, Lee T D 1978 *Phys. Rev. D* **18** 2623
- [16] Daniel C, Mark H, Weir D J 2018 *Phys. Rev. D* **97** 123513
- [17] Cutting D, Escartin E G, Hindmarsh M, Weir D J 2021 *Phys. Rev. D* **103** 023531
- [18] Wang X, Huang F P, Zhang X 2020 *JCAP* **2005** 045
- [19] Bessa A, Fraga E S, Mintz B W 2008 *Phys. Rev. D* **79** 034012



- [20] Zhou S, Shu S, Mao H 2021 *Chin. Phys. C* **45** 043104
- [21] Goldflam R, Wilets L 1982 *Phys. Rev. D* **25** 1951
- [22] Reinhardt H, Dang B V, Schulz H 1985 *Phys. Lett. B* **159** 161
- [23] Li M, Birse M C, Wilets L 1987 *J. Phys. G* **13** 1
- [24] Gao S, Wang E, Jiarong L I 1992 *Phys. Rev. D* **46** 3211
- [25] Mao H, Yao M, Zhao W Q 2008 *Phys. Rev. C* **77** 065205
- [26] Shu S, Li J R 2010 *Phys. Rev. C* **82** 045203
- [27] Birse M C 1992 *Progr. Part. Nucl. Phys.* **25** 1
- [28] Laine M, Vuorinen A 2016 *Basics of Thermal Field Theory* (New York: Springer International Publishing)
- [29] Kapusta J I, Gale C 2006 *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [30] Coleman S 1988 *Aspects of Symmetry* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [31] Weinberg E J 2012 *Classical Solutions in Quantum Field Theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics* (Cambridge: Cambridge Monographs on Mathematical Physics)
- [32] Linde A D 1983 *Nucl. Phys. B* **216** 421 Erratum: [1983 *Nucl. Phys. B* **223** 544]

# Analytical solution of surface tension of quark-hadron phase transition

Zhou Shu-Ying<sup>1)</sup> Shen Wan-Ping<sup>2)</sup> Mao Hong<sup>1)†</sup>

<sup>1)</sup> (School of Physics, Hangzhou Normal University, Hangzhou 311121, China)

<sup>2)</sup> (Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

( Received 9 April 2022; revised manuscript received 16 July 2022 )

## Abstract

By using the finite temperature field theory, the one-loop effective potential and the dynamics of the quantum chromodynamics deconfinement phase transition in the framework of Friedberg-Lee model are studied at finite temperature and density. Our results show that there is a first-order deconfinement phase transition for the full phase diagram, and the critical temperature is about 119.8 MeV for a zero chemical potential whereas the critical chemical is around 256.4 MeV when the temperature is fixed at  $T = 50$  MeV. Moreover, in the thin-wall approximation, we investigate the dynamics of a strong first-order quark-hadron transition via homogeneous bubble nucleation in the Friedberg-Lee model. Under an appropriate boundary condition, the equation of motion for the  $\sigma$  field is solved, then the evolutions of the bubble critical configuration with radius  $r$  at different temperatures and densities are calculated. The surface tension, the typical radius of the critical bubble and the shift in the coarse-grained free energy each as a function of temperature and chemical potential are obtained. In order to gain the reliability and advantages of the thin-wall approximation, our analytical results based on the thin-wall approximation are compared with those obtained by the exact numerical method accordingly. Finally, some consequences and possible applications of our results in the quark meson model and Polyakov quark meson model are also presented in the end of this paper.

**Keywords:** quantum chromodynamics, Friedberg-Lee model, thin-wall approximation

**PACS:** 11.30.Rd, 11.30.Qc, 98.80.Cq, 25.75.Nq

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220659

† Corresponding author. E-mail: [mao@hznu.edu.cn](mailto:mao@hznu.edu.cn)

## 强子夸克相变表面张力解析求解

周淑英 沈婉萍 毛鸿

### Analytical solution of surface tension of quark-hadron phase transition

Zhou Shu-Ying Shen Wan-Ping Mao Hong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 211101 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220659

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220659>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 夸克介子模型的相图和表面张力

Phase structure and surface tension in quark meson model

物理学报. 2019, 68(18): 181101 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190798>

#### 混合中子星内强子-夸克退禁闭相变

Hadron-quark deconfinement phase transition in hybrid stars

物理学报. 2020, 69(24): 242101 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200925>

#### 格点量子色动力学蒸馏算法中关联函数的计算优化

Calculation and optimization of correlation function in distillation method of lattice quantum chromodynamics

物理学报. 2021, 70(16): 161201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210030>

#### 三量子比特Dicke模型中的两体和三体纠缠动力学

The dynamics of the bipartite and tripartite entanglement in the three-qubit Dicke model

物理学报. 2021, 70(4): 040301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201602>

#### 表面张力对高雷诺数Rayleigh-Taylor不稳定性后期增长的影响

Effect of surface tension on late-time growth of high-Reynolds-number Rayleigh-Taylor instability

物理学报. 2021, 70(11): 114701 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201960>

#### 玻色-费米超流混合体系中的相互作用调制隧穿动力学

Interaction-modulated tunneling dynamics of a mixture of Bose-Fermi superfluid

物理学报. 2022, 71(9): 090301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212168>