

专题: 非厄米物理前沿

非厄米线性响应理论及其应用*

潘磊†

(清华大学高等研究院, 北京 100084)

(2022 年 5 月 2 日收到; 2022 年 6 月 19 日收到修改稿)

线性响应理论是现代物理实验尤其是量子物态测量实验的理论基础, 其核心是将物理系统的探测信号作为微扰, 利用系统在未受扰动时的关联函数来刻画物理可观测量的响应. 半个多世纪以来, 基于封闭量子系统的线性响应理论在量子物态测量实验上取得了巨大的成功. 随着超冷原子实验在光场与系统相互作用精确操控方面的快速进展, 近年来高精度的冷原子实验已经具备研究耗散量子多体系统的条件, 新奇的物理现象在实验中层出不穷, 这使得国内外研究者对量子开放系统及其非厄米物理的研究与日俱增. 基于此, 我们发展了一个量子开放系统的线性响应理论——非厄米线性响应理论. 该理论将耗散带来的非厄米效应与量子噪声作为外部探测输入来探测量子系统的性质, 并将实验可观测量的含时演化与系统未受扰动状态时的关联函数及其谱函数联系起来, 提供了区分正常物态和奇异物态的一种新手段, 所得到的结果与最近冷原子系统实验的结果高度吻合. 本文介绍了非厄米线性响应理论, 并讨论该理论在量子多体系统以及具有时间反演对称性的量子系统中的应用.

关键词: 非厄米, 线性响应理论, 量子多体系统, 时间反演对称性**PACS:** 03.65.Yz, 03.65.Vf, 05.70.Jk, 31.15.xp**DOI:** 10.7498/aps.71.20220862

1 引言

非平衡态物理尤其是非平衡态动力学是物理学中古老而经久不衰的研究主题. 在量子系统中有两类典型的非平衡动力学过程: 一类是封闭系统的非平衡动力学, 此类过程描述的是系统本身从非平衡态弛豫到平衡态的动力学演化; 另一类是开放系统中的量子耗散动力学, 此类过程描述的是一个与环境热库相互作用的量子系统趋于稳态的动力学演化. 与平衡态物理不同, 量子多体系统中的非平衡动力学演化原则上涉及系统所有的自由度, 这使得量子多体非平衡动力学成为当今物理学中的一大挑战. 近年来, 得益于冷原子实验在精密计时技术与测量手段方面的进步, 高精度的冷原子实验已经具备了研究封闭系统和开放系统的非平衡动力

学的条件, 并发现了许多新奇的物理现象, 冷原子系统逐渐成为非平衡动力学方面研究的理想平台^[1–10], 也使得量子耗散及其非厄米物理在近几年来受到国内外研究者越来越多的研究与关注^[11,12]. 通过对外部光场与系统耦合的精确操控, 实验上成功实现了诸多量子开放系统, 并测量了几种典型的量子耗散动力学演化, 为非平衡动力学的理论研究提供了新的机遇和挑战. 2020 年, 法国巴黎高师 Brossel 实验室的 Gerbier 研究组^[13]通过精确调控激光场与光晶格系统中玻色子的耦合, 研究了二维 Bose-Hubbard 模型在不同相互作用强度下的两体耗散动力学, 他们发现随着粒子之间相互作用的增强, 在动量分布的宽度变化中出现了亚扩散 (subdiffusion) 现象, 并且在动量分布峰值的演化中出现了反常的非指数衰减行为. 针对这些新奇的实验现象, 基于量子物态实验中广泛运用的线性响

* 北京卓越青年科学家计划和中国博士后基金 (批准号: 2020M680496) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: panlei@mail.tsinghua.edu.cn

应理论, 我们提出了将耗散作为外部输入的量子开放系统版本的响应理论, 并将其命名为“非厄米线性响应理论”^[14].

本文首先对非厄米线性响应理论做简单介绍, 然后利用该理论解释耗散二维 Bose-Hubbard 模型中的实验现象, 给出一维相互作用量子气体中的预言, 并应用于具有时间反演对称性保护的量子系统.

2 非厄米线性响应理论简介

测量一个系统的物理性质时, 通常的做法是给待测系统施加一个扰动, 然后探测系统对扰动是如何响应的. 这个外加的扰动强度在能够观测到信号的前提下要尽量小, 以保证系统本身的物理性质不被破坏. 线性响应理论的精神就在于此. 设系统在外场作用下的总哈密顿量为

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{ext}}(t), \quad (1)$$

其中 \hat{H}_0 是系统未受扰动的哈密顿量, $\hat{H}_{\text{ext}}(t) = \sum_j f_j(t) \hat{O}_j$ 为微扰哈密顿量, \hat{O}_j 表示系统与外场耦合的算符, $f_j(t)$ 为含时耦合函数, 下标 j 表示与系统耦合的模式. 按照线性响应的精神, 对外场做微扰处理. 首先引入时间演化算符:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T} \exp \left(-i \int_{t_0}^t \hat{H}_{\text{ext}}(t') dt' \right), \quad (2)$$

其中 \hat{T} 为编时算符, 在相互作用绘景下, 密度矩阵的含时演化为

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}_0 \hat{U}^{-1}(t, t_0). \quad (3)$$

对于系统的某个可观测量算符 $\hat{\mathcal{W}}$, 其平均值为

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{W}}(t) \rangle &= \text{Tr} \hat{\rho}(t) \hat{\mathcal{W}}(t) = \text{Tr} \hat{\rho}_0 \hat{U}^{-1}(t) \hat{\mathcal{W}}(t) \hat{U}(t) \\ &= \text{Tr} \hat{\rho}_0 \left(\hat{\mathcal{W}}(t) + i \int_{t_0}^t dt' \left[\hat{H}_{\text{ext}}(t'), \hat{\mathcal{W}}(t) \right] + \dots \right) \\ &\approx \langle \hat{\mathcal{W}}(t) \rangle_0 + i \int_{t_0}^t dt' \langle \left[\hat{H}_{\text{ext}}(t'), \hat{\mathcal{W}}(t) \right] \rangle_0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\hat{H}_{\text{ext}}(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}_{\text{ext}} e^{-i\hat{H}_0 t}$ 为相互作用绘景下的算符演化. 这里将微扰哈密顿量近似到了线性阶. 定义可观测量的响应 $\delta \langle \hat{\mathcal{W}} \rangle = \langle \hat{\mathcal{W}} \rangle - \langle \hat{\mathcal{W}} \rangle_0$, 则有

$$\begin{aligned} \delta \langle \hat{\mathcal{W}} \rangle &= i \sum_j \int_{t_0}^{+\infty} dt' \theta(t-t') \\ &\quad \times \langle \left[\hat{O}_j(t'), \hat{\mathcal{W}}(t) \right] \rangle_0 f_j(t'), \end{aligned} \quad (5)$$

这就是线性响应理论的公式^[15], 也称为久保公式

(Kubo formula). (5) 式表明, 近似到外场扰动的线性阶, 系统的响应正比于推迟格林函数 $G(t, t') = \theta(t-t') \times \langle \left[\hat{O}_j(t'), \hat{\mathcal{W}}(t) \right] \rangle_0$. 线性响应理论是实验测量的基础, 它的重要意义在于从系统中测量到的响应被包含在了系统的关联函数中. 这种关联在量子物态的测量中尤为显著. 常见的谱学测量, 如非弹性中子散射信号由系统的自旋-自旋关联函数决定; 而输运测量, 如电导的测量由流-流关联函数决定等^[16]. 以上是传统的针对封闭系统的线性响应理论, 现在介绍非厄米线性响应理论. 对于一个与环境自由度耦合的开放系统, 其受到的影响不再是一个简单的含时外场 (如 (1) 式的哈密顿量), 而是一个由如下非厄米哈密顿量描述的系统:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \sum_j \left(-i\gamma_j \hat{O}_j^\dagger \hat{O}_j + \hat{O}_j^\dagger \hat{\xi}_j + \hat{\xi}_j^\dagger \hat{O}_j \right), \quad (6)$$

其中 $\gamma_j \hat{O}_j^\dagger \hat{O}_j$ 表示系统受到的耗散 ($\gamma_j \geq 0$ 为耗散强度), $\hat{O}_j^\dagger \hat{\xi}_j + \hat{\xi}_j^\dagger \hat{O}_j$ 表示系统受到的噪声^[17]. $\hat{\xi}(t)$, $\hat{\xi}^\dagger(t)$ 称为朗之万噪声 (Langevin noise)^[18], 满足以下性质:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\xi}_j(t) \hat{\xi}_\ell^\dagger(t') \rangle_{\text{noise}} &= 2\gamma_j \delta_{j\ell} \delta(t-t'), \\ \langle \hat{\xi}_j^\dagger(t) \hat{\xi}_\ell^\dagger(t') \rangle_{\text{noise}} &= \langle \hat{\xi}_j(t) \hat{\xi}_\ell(t') \rangle_{\text{noise}} \\ &= \langle \hat{\xi}_j^\dagger(t) \hat{\xi}_\ell(t') \rangle_{\text{noise}} = \langle \hat{\xi}_j^\dagger(t) \rangle_{\text{noise}} \\ &= \langle \hat{\xi}_j(t) \rangle_{\text{noise}} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\langle \cdot \rangle_{\text{noise}}$ 表示对噪声做平均. 值得指出的是, 用来描述量子开放系统的哈密顿量不能是仅仅包含耗散部分 ($\gamma_j \hat{O}_j^\dagger \hat{O}_j$) 的非厄米哈密顿量, 因为此时产生湮灭算符的等时对易子 $[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = e^{-\gamma t}$ 不再满足正则对易关系 $[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = 1$, 而朗之万噪声的引入能保证正则对易关系的成立. 对于任意可观测量算符 $\hat{\mathcal{W}}$, 其时间演化为

$$\hat{\mathcal{W}}_H(t) = e^{i\hat{H}^\dagger t} \hat{\mathcal{W}} e^{-i\hat{H} t}. \quad (8)$$

与之前的讨论类似, 引入时间演化算子

$$\hat{\mathcal{U}}(t) = \hat{T} \left[\exp \left(-i \int_0^t \hat{H}_{\text{diss}}(t') dt' \right) \right], \quad (9)$$

其中 $\hat{H}_{\text{diss}} = \sum_j \left(-i\gamma_j \hat{O}_j^\dagger \hat{O}_j + \hat{O}_j^\dagger \hat{\xi}_j + \hat{\xi}_j^\dagger \hat{O}_j \right)$. 按照线性响应理论的精神, 将 \hat{H}_{diss} 视作微扰

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{W}}_H(t) = & \hat{\mathbf{W}}(t) - \sum_j \gamma_j \int_0^t \{ \hat{\mathbf{W}}(t), \hat{\mathbf{O}}_j^\dagger(t') \hat{\mathbf{O}}_j(t') \} dt' \\
 & - i \sum_j \int_0^t \left[\hat{\mathbf{W}}(t), \hat{\mathbf{O}}_j^\dagger(t') \xi_j + \xi_j^\dagger \hat{\mathbf{O}}_j(t') \right] dt' \\
 & + \sum_{j,\ell} \iint_0^t \left(\hat{\mathbf{O}}_j^\dagger(t') \hat{\xi}_j(t') + \hat{\xi}_j^\dagger(t') \hat{\mathbf{O}}_j(t') \right) \hat{\mathbf{W}}(t) \\
 & \times \left(\hat{\mathbf{O}}_\ell^\dagger(t'') \hat{\xi}_\ell(t'') + \hat{\xi}_\ell^\dagger(t'') \hat{\mathbf{O}}_\ell(t'') \right) dt' dt'' + \dots, \quad (10)
 \end{aligned}$$

对噪声做平均, 并利用关系式 (7) 式, 保留到 γ_j 的一阶, 可得

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{W}}_H(t) = & \hat{\mathbf{W}}(t) + \int_0^t \sum_j \gamma_j \left(2 \hat{\mathbf{O}}_j^\dagger(t') \hat{\mathbf{W}}(t) \hat{\mathbf{O}}_j(t') \right. \\
 & \left. - \left\{ \hat{\mathbf{W}}(t), \hat{\mathbf{O}}_j^\dagger(t') \hat{\mathbf{O}}_j(t') \right\} \right) dt'. \quad (11)
 \end{aligned}$$

对系统做系综平均 ($\langle \dots \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}_0 \dots)$), 定义可观测量的响应 $\delta \mathbf{W}(t) \equiv \langle \hat{\mathbf{W}}_H(t) \rangle - \langle \hat{\mathbf{W}}(t) \rangle$, 则有

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{W}(t) = & 2 \int_0^t \sum_j \gamma_j \left\langle \hat{\mathbf{O}}_j^\dagger(t') \hat{\mathbf{W}}(t) \hat{\mathbf{O}}_j(t') \right. \\
 & \left. - \left\{ \hat{\mathbf{W}}(t), \hat{\mathbf{O}}_j^\dagger(t') \hat{\mathbf{O}}_j(t') \right\} \right\rangle dt', \quad (12)
 \end{aligned}$$

这就是非厄米线性响应公式 [14]. 尽管从形式上与厄米版本的线性响应公式有所不同, 但两者的本质相同, 即系统的响应都由系统的关联函数决定. 得到这一理论公式之后, 下面将把它应用在不同的物理系统中.

3 非厄米线性响应理论在量子多体系统中的应用

本节介绍非厄米线性响应理论在量子多体系

统中的应用, 包括二维 Bose-Hubbard 模型和一维相互作用量子气体.

3.1 二维 Bose-Hubbard 模型

2020 年, 法国巴黎高师的冷原子实验组测量了二维光晶格中 Bose-Hubbard 模型在两体耗散下的动量分布的耗散动力学演化, 观测到了非指数衰减和亚扩散现象. 针对其实验结果, 本文从如下的哈密顿量出发:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{BH}} + \sum_j \left(-i\gamma \hat{n}_j^2 + \hat{n}_j^\dagger \hat{\xi}_j + \hat{\xi}_j^\dagger \hat{n}_j \right), \quad (13)$$

其中 \hat{H}_{BH} 表示 Bose-Hubbard 模型的哈密顿量, 该模型从弱相互作用逐渐到强相互作用过程中会出现超流——Mott 绝缘体相变 [19]. 这里 $\hat{\mathbf{O}}_j = \hat{n}_j$, \hat{n}_j 代表格点 j 上的密度算符, 假设耗散强度在空间上是均匀的 $\gamma_j = \gamma$, 后面会看到这类耗散对应着系统被加热的过程. 根据非厄米线性响应理论的公式, 可以计算出动量分布 $n_{\mathbf{k}}(t)$ 的时间演化:

$$\begin{aligned}
 \delta n_{\mathbf{k}}(t) = & \gamma \sum_j \left[\int_0^t dt' 2 \left\langle \hat{n}_j^\dagger(t') \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) \hat{n}_j(t') \right\rangle \right. \\
 & - \int_0^t dt' \left\langle \hat{n}_j^\dagger(t') \hat{n}_j(t') \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) \right. \\
 & \left. \left. + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) \hat{n}_j^\dagger(t') \hat{n}_j(t') \right\rangle \right]. \quad (14)
 \end{aligned}$$

此时可以发现动量的响应由系统的多点关联函数决定. 通常量子多体系统中的多点关联函数是无法严格计算的, 为此采用维克分解 [20], 将多点关联函数分解为两点关联函数:

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \hat{n}_j^\dagger(t') \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) \hat{n}_j(t') \right\rangle \\
 \approx & \left\langle \overbrace{a_j^\dagger(t') \hat{a}_j(t') \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) \hat{a}_j^\dagger(t') \hat{a}_j(t')} \right\rangle + \left\langle \overbrace{\hat{a}_j^\dagger(t') \hat{a}_j(t') \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) \hat{a}_j^\dagger(t') \hat{a}_j(t')} \right\rangle \\
 & + \left\langle \overbrace{\hat{a}_j^\dagger(t') \hat{a}_j(t') \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) \hat{a}_j^\dagger(t') \hat{a}_j(t')} \right\rangle + \left\langle \overbrace{\hat{a}_j^\dagger(t') \hat{a}_j(t') \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) \hat{a}_j^\dagger(t') \hat{a}_j(t')} \right\rangle + \bar{n}^2 n_{\mathbf{k}} \\
 = & \bar{n} (iG_{\mathbf{k},j}^>(t-t') iG_{\mathbf{k},j}^<(t-t')) + \bar{n} (iG_{j,\mathbf{k}}^>(t'-t) iG_{j,\mathbf{k}}^<(t'-t)) + \bar{n}^2 n_{\mathbf{k}} \\
 & + \bar{n} (iG_{j,\mathbf{k}}^<(t'-t) iG_{\mathbf{k},j}^<(t-t')) + (1+\bar{n}) (iG_{j,\mathbf{k}}^>(t'-t) iG_{\mathbf{k},j}^>(t-t')),
 \end{aligned}$$

其中 $G_{\mathbf{k}}^>(t_1 - t_2) \equiv -i \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t_1) \hat{a}_{\mathbf{k}}(t_2) \rangle$, $G_{\mathbf{k}}^<(t_1 - t_2) \equiv -i \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}(t_1) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t_2) \rangle$, 以及平均占据数 $\langle n_i \rangle_\beta = \bar{n}$. 同样可计算出

$$\begin{aligned} & \langle \hat{n}_j^\dagger(t') \hat{n}_j(t') \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) \rangle \\ & \approx (2\bar{n} + 1 + 2\bar{n}) \left(iG_{j,\mathbf{k}}^>(t' - t) iG_{j,\mathbf{k}}^<(t' - t) \right) \\ & + \bar{n}^2 n_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k}}(t) \hat{n}_j^\dagger(t') \hat{n}_j(t') \rangle \\ & \approx (2\bar{n} + 1 + 2\bar{n}) \left(iG_{\mathbf{k},j}^>(t - t') iG_{\mathbf{k},j}^<(t - t') \right) \\ & + \bar{n}^2 n_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (17)$$

将 (15)–(17) 式代入 (14) 式, 可得

$$\begin{aligned} & \delta n_{\mathbf{k}}(t) \\ & \approx \gamma(2\bar{n} + 1) \int_0^t (iG_{\mathbf{k}}^<(t - t') - iG_{\mathbf{k}}^>(t' - t)) \\ & \times (iG_{\mathbf{k}}^>(t - t') - iG_{\mathbf{k}}^<(t' - t)) dt' \\ & + \gamma \int_0^t [iG_{\mathbf{k}}^>(t' - t) iG_{\mathbf{k}}^>(t - t') \\ & - iG_{\mathbf{k}}^<(t' - t) iG_{\mathbf{k}}^<(t - t')] dt' \\ & \approx -2\gamma(n_{\mathbf{k}}(0) - \bar{n}) \int_0^t g_{\mathbf{k}}(t') g_{\mathbf{k}}(-t') dt', \end{aligned} \quad (18)$$

这里 $g(\mathbf{k}, t) \equiv \int d\omega e^{i\omega t} \mathcal{A}_{\mathbf{k}}(\omega)$, $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}(\omega)$ 为谱函数. 在准静态近似下可以得到:

$$\frac{d\Delta n_{\mathbf{k}}}{dt} = -2\gamma f(\mathbf{k}, t) \Delta n_{\mathbf{k}}(t), \quad (19)$$

其中 $\Delta n_{\mathbf{k}} = n_{\mathbf{k}}(t) - \bar{n}$, $f(\mathbf{k}, t) = g(\mathbf{k}, t)g(\mathbf{k}, -t)$. 由此可得动量分布的演化:

$$n_{\mathbf{k}}(t) - n_{\mathbf{k}}(0) = - \left(1 - e^{-2\gamma \mathcal{F}(\mathbf{k}, t)} \right) \Delta n_{\mathbf{k}}(0), \quad (20)$$

其中 $\mathcal{F}(\mathbf{k}, t) = \int_0^t f(\mathbf{k}, t') dt'$. 可以看出系统动量分布的稳态是均匀分布 $n_{\mathbf{k}}(t \rightarrow \infty) = \bar{n}$, 意味着系统最终会被加热到无穷高温. 更重要的是, 动量分布的耗散动力学演化与系统的谱函数有关, 而谱函数的形式与系统所处的量子相有关. 对于二维 Bose-Hubbard 模型, 当系统处在超流相时, 系统具有良好定义的准粒子激发, 谱函数具有如下形式的洛伦兹型:

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k}}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_{\mathbf{k}}}{(\omega - \varepsilon_{\mathbf{k}})^2 + \Gamma_{\mathbf{k}}^2}, \quad (21)$$

其中 $1/\Gamma_{\mathbf{k}}$ 代表准粒子的寿命. 此时,

$$f(\mathbf{k}, t) = e^{-2t\Gamma_{\mathbf{k}}}, \quad \mathcal{F}(\mathbf{k}, t) = \frac{1 - e^{-2t\Gamma_{\mathbf{k}}}}{2\Gamma_{\mathbf{k}}}, \quad (22)$$

当准粒子寿命足够长时 $\Gamma_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$ ($1/\Gamma_{\mathbf{k}}$ 大于所有的时间尺度), 则 $\mathcal{A}(\omega) = \delta(\omega - \varepsilon_{\mathbf{k}})$, $\mathcal{F}(\mathbf{k}, t) = t$, 这将给出传统的指数衰减行为:

$$n_{\mathbf{k}}(t) = n_{\mathbf{k}}(0)e^{-2\gamma t} + \bar{n}(1 - e^{-2\gamma t}). \quad (23)$$

理论结果表明, 对于处在准粒子激发的系统, 其耗散动力学是指数衰减的, 这就解释了为什么指数衰减在自然界如此常见, 因为自然界中的绝大多数量子物态可以被准粒子激发描述, 如费米液体、玻色超流体等. 而冷原子实验已具备精确测量谱函数的技术条件^[21], 基于时间飞行 (time-of-flight) 测量和射频谱 (radiofrequency spectroscopy) 技术^[22–25], 实验可以精确测出动量和频率依赖的谱函数 $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}(\omega)$. 以此可从谱学测量上为我们的理论预言提供实验验证.

当系统处于量子临界相时^[26], 系统的激发不再是良好定义的准粒子激发, 而是集体激发, 谱函数的解析性质从极点变为割线^[27]:

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k}}(\omega) \propto \frac{\Theta(\omega - \varepsilon_{\mathbf{k}})}{(\omega - \varepsilon_{\mathbf{k}})^\eta}, \quad (24)$$

其中 $\Theta(x) = 1$, 当 $x > 0$ 时; $\Theta(x) = 0$, 当 $x < 0$ 时. η 代表系统在量子临界相的临界指数. 此时可得:

$$n_{\mathbf{k}}(t) = n_{\mathbf{k}}(0)e^{-(t/\tau_0)^{2\eta-1}} + \bar{n} \left[1 - e^{-(t/\tau_0)^{2\eta-1}} \right], \quad (25)$$

这种形式的衰减 ($e^{-(t/\tau_0)^{2\eta-1}}$) 称为伸展指数衰减 (stretched exponential decay), 广泛存在于经典玻璃系统中, 用来表征玻璃态中的长时间弛豫过程^[28,29]. 根据动量分布函数, 可以得出动量宽度随时间的演化行为 $\left(\langle k^2 \rangle_t = \int k^2 n_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} / \int n_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \right)$:

$$\langle k^2 \rangle_t - \langle k^2 \rangle_0 = \left(1 - e^{-2\gamma \mathcal{F}(t)} \right) (\langle k^2 \rangle_\infty - \langle k^2 \rangle_0). \quad (26)$$

基于上面相同的分析, 可以发现当系统处于超流相时, 动量宽度在短时区域属于正常的扩散行为: $\Delta \langle k^2 \rangle_t \sim \sqrt{t}$; 而在量子临界区域, 动量宽度的变化则出现反常的亚扩散行为: $\Delta \langle k^2 \rangle_t \sim t^{\eta - \frac{1}{2}}$. 我们即将看到, 这一理论可为实验结果提供一个统一的解释.

如图 1(a) 所示, 我们发现理论曲线无论是动量高度还是动量分布的宽度都与实验数据符合得很好, 并且高度和宽度可以被同一个函数描述.

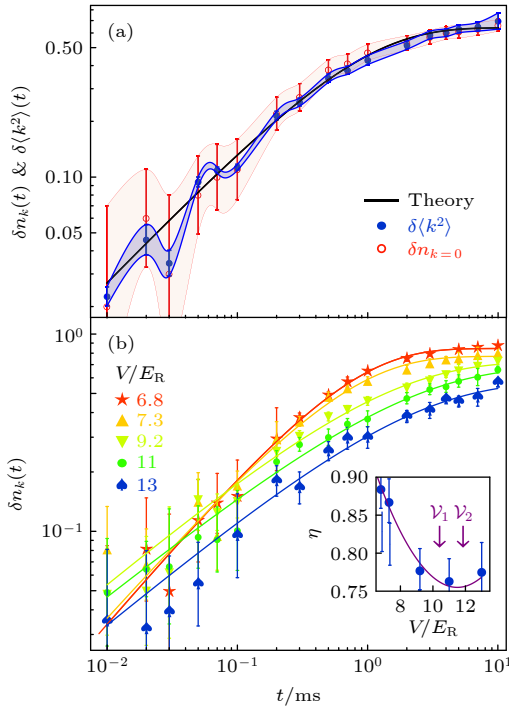


图 1 二维 Bose-Hubbard 模型耗散动力学实验^[13]和理论对比图 (a) 在固定光晶格势阱深度下的动量分布的峰值和宽度随时间的改变, 实线是理论公式拟合的结果; (b) 在不同光晶格势阱深度下的动量峰值随时间的演化图 (以 $\delta n_{\mathbf{k}=0}(0)$ 为单位). 实线是理论公式拟合结果, 插图画出了每条曲线对应不同的临界指数 η , 其中误差棒来源于标准的拟合误差 (95% 的置信区间). 两个箭头标注的分别是填充因子 $\nu=1$ 和 $\nu=2$ 的超流-Mott 绝缘体转变的临界值. 所有的实验数据 (包括误差棒) 均取自实验文章^[13]

Fig. 1. Experimental data reported in Ref. [13] versus theory on dissipative two-dimensional Bose-Hubbard Model: (a) Two sets of data $\delta n_{\mathbf{k}=0}(t)$ and $\delta \langle k^2 \rangle(t)$ perfectly coincide with each other by a properly chosen scaling factor. Solid line is fitting with our theory. (b) Fit experimental data of $\delta n_{\mathbf{k}=0}(t)$ (scaled by $\delta n_{\mathbf{k}=0}(0)$) at different lattice depths with our theory, which yields η for different lattice depths shown in the inset where the error bar comes from the standard fitting error (95% confidence interval). Two arrows label the critical value for superfluid-Mott insulator transition for filling number $\nu=1$ and $\nu=2$, respectively. All experimental data are taken from Ref. [13].

不仅如此, 在不同光晶格势阱深度下的实验数据可以估计出临界指数 η , 如图 1(b) 所示. 值得指出的是, 对于二维 Bose-Hubbard 模型, 理论上很难得到精确的 η 值^[27], 对于量子蒙特卡罗的计算也是一个挑战^[30]. 通过理论公式与实验数据的对比拟合, 我们发现随着势阱深度的增加, 系统从超流区域到 Mott 绝缘体转变的过程中临界区域 η 先减小后增大, 这一结果解释了实验在弱势阱区域观测到的指数衰减和正常扩散行为, 以及在深势阱区域观察到的非指数衰减和亚扩散现象. 而且临界指数

η 在超流-Mott 绝缘体转变的临界区域达到最低值 (约为 3/4), 此时系统动量分布以 $e^{-\sqrt{t}}$ 的形式衰减, 同时动量宽度出现 $t^{1/4}$ 形式的亚扩散. 这一结果也在实验中得到了验证.

因此, 基于理论对实验现象的诠释, 实验出现的非指数衰减和反常的亚扩散行为起源于系统在量子临界区域的集体激发. 更重要的是, 非厄米线性响应理论提供了一种通过耗散动力学在实验上区分正常物态 (准粒子激发) 和量子临界态 (集体激发) 的手段, 利用实验结果确定系统的临界指数, 对量子物态的实验测量具有重要意义.

3.2 一维相互作用量子气体

在 3.1 节可以看到非厄米线性响应理论在耗散二维 Bose-Hubbard 模型中的应用并很好地解释了实验结果. 但一个成功的理论不仅能够解释已有的实验, 还应该具有预言能力. 通过前面的讨论可以发现, 理论预言的反常动力学行为与系统的谱函数的奇异行为有关. 因此, 只要找到类似于 (25) 式的谱函数即可得到这种反常动力学. 我们知道, 一维相互作用系统中费米液体理论失效, 其低能激发不再是准粒子激发, 而是集体激发, 此时谱函数具有类似 (25) 式的幂律形式^[31]. 基于这一点, 我们将非厄米系统应用于严格可解的一维相互作用量子气体当中, 精确地计算出临界指数, 以此来预言此类系统动量分布的耗散动力学演化.

以一维相互作用玻色气体 (Lieb-Liniger 模型) 为例^[32], 系统的哈密顿量为

$$H_s = - \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + 2g \sum_{i,j} \delta(x_i - x_j), \quad (27)$$

其中 g 为相互作用强度, 这里令 $\hbar = 2m = 1$. 这一模型的低能物理可以被如下形式的有效哈密顿量描述:

$$H_{LL} = \int dx \left[\frac{\pi v_s K}{2} \Pi^2 + \frac{v_s}{2\pi K} (\partial_x \phi)^2 \right], \quad (28)$$

其中正则动量 Π 与相位 ϕ 满足标准的玻色对易关系; K 和 v_s 分别为 Luttinger 参数和声速, 刻画了系统低能和长波极限下的行为. 根据 Luttinger 液体理论, 一维 Bose 气体的谱函数一般写为如下形式^[33]:

$$A(k, \omega) \sim \frac{\theta(\omega - \xi_k)}{(\omega - \xi_k)^{1 - \frac{1}{4K}}}, \quad (29)$$

亦即 $\eta = 1 - 1/(4K)$. 这意味着一旦求出 Luttinger 参数, 就可以确定临界指数的大小, 而 K 的精确解

可以通过 Bethe ansatz 方法得到. 写出 Lieb-Liniger 玻色气体的 Bethe ansatz (BA) 方程^[34],

$$\rho(k) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dq \rho(q) \frac{2g}{g^2 + (k-q)^2} = \frac{1}{2\pi}, \quad (30)$$

其中 Λ 表示动量截断, $\rho(k)$ 为准动量的密度分布, 满足条件 $\int_{-\Lambda}^{\Lambda} dk \rho(k) = \frac{N}{L} = n$ (N 是总粒子数, L 为系统长度). 系统的基态能量为

$$E_0 = L \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dk \rho(k) k^2. \quad (31)$$

为方便起见, 对系统的参数进行无量纲化:

$$k = \Lambda x, \quad g = \Lambda \lambda, \quad \rho(\Lambda x) = \tilde{g}(x), \quad (32)$$

此时 BA 方程重新表示为

$$\tilde{g}(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 dy \tilde{g}(y) \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-y)^2} = \frac{1}{2\pi}, \quad (33)$$

同时满足 $\frac{g}{n} \int_{-1}^1 dx \tilde{g}(x) = \lambda$. 一旦将 BA 方程求解, 立即可得无量纲的基态能 $e(\gamma) \equiv \frac{E_0}{Nn^2} = \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\lambda}\right)^3 \int_{-1}^1 dy \tilde{g}(y) x^2$ 以及其他物理量作为无量纲相互作用参数 $\tilde{\gamma} = \frac{g}{n}$ 的函数, 其中 Luttinger 参数为^[35]

$$K = \frac{\pi}{\sqrt{3e(\tilde{\gamma}) - 2\tilde{\gamma} \frac{de(\tilde{\gamma})}{d\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^2 \frac{d^2e(\tilde{\gamma})}{d\tilde{\gamma}^2}}}. \quad (34)$$

由此可将得到的临界指数 η 代入动量分布的响应公式 (25), 从而得到动量分布在整个相互作用范围内的耗散动力学演化. 在精确求解 BA 方程之前, 先来看系统在强弱相互作用极限的行为. 在弱相互作用极限, 无量纲能量可展开为

$$e(\tilde{\gamma}) = \left(1 - \frac{4}{3\pi} \sqrt{\tilde{\gamma}} + O(\tilde{\gamma})\right), \quad \gamma \gg 1, \quad (35)$$

则 Luttinger 参数和临界指数的渐进行为是

$$K \approx \frac{\pi}{\sqrt{\tilde{\gamma}}} \left(1 - \frac{\sqrt{\tilde{\gamma}}}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\eta \approx 1 - \frac{\sqrt{\tilde{\gamma}}}{4\pi} + \frac{\tilde{\gamma}}{16\pi^2}, \quad \tilde{\gamma} \ll 1. \quad (36)$$

而在强排斥相互作用极限 (Tonks-Girardeau 极限) 下

$$e(\gamma) = \frac{\pi^2}{3} \left(1 - \frac{4}{\tilde{\gamma}} + \frac{12}{\tilde{\gamma}^2} + O(\tilde{\gamma}^{-3})\right), \quad \tilde{\gamma} \gg 1. \quad (37)$$

Luttinger 参数和临界指数的渐进形式是

$$K \approx 1 + \frac{4}{\tilde{\gamma}} + \frac{4}{\tilde{\gamma}^2}, \quad \eta \approx \frac{3}{4} + \frac{1}{\tilde{\gamma}} - \frac{3}{\tilde{\gamma}^2}, \quad \tilde{\gamma} \gg 1. \quad (38)$$

此时可以发现, 在 Tonks-Girardeau 极限下, 系统在两体耗散时的动量分布会以如下函数形式随时间演化:

$$n_{\mathbf{k}}(t) = n_{\mathbf{k}}(0) e^{-\sqrt{t/\tau_0}} + \bar{n} \left(1 - e^{-\sqrt{t/\tau_0}}\right). \quad (39)$$

并且给出 $t^{\frac{1}{4}}$ 形式的亚扩散行为. 进一步, 通过精确求解 BA 方程, 可以得到整个相互作用区间的临界指数, 如图 2 插图所示, 临界指数 η 随相互作用的增加而单调递减, 最终趋于 $3/4$.

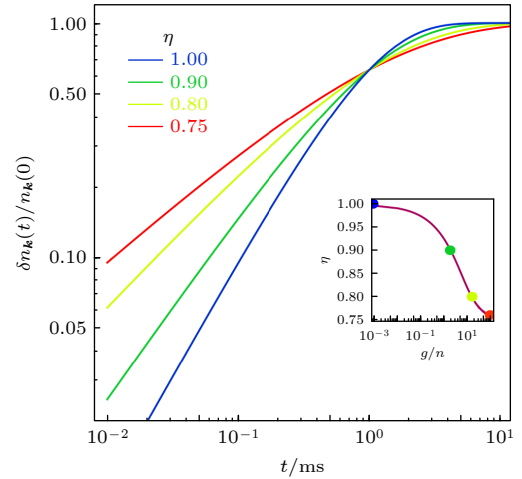


图 2 一维相互作用玻色气体 (Luttinger 液体) 中的动量分布 $\delta n_{\mathbf{k}}(t)$ 从弱相互作用极限 (蓝线) 到强相互作用极限 (红线) 的含时演化的理论预测. 这里所有的曲线均取 $\tau_0 = 1.0$ ms. 插图表示的是临界指数 η 随相互作用强度的变化曲线

Fig. 2. Prediction of $\delta n_{\mathbf{k}}(t)$ for a one-dimensional Bose gas (Luttinger liquid) from the weakly interacting limit (blue line) to the Tonks limit (red line). Here $\tau_0 = 1.0$ ms is fixed for all plots. The inset shows how η changes with the one-dimensional interaction parameter g/n .

图 2 给出了 4 个不同相互作用强度下的动量演化曲线, 可以看出随着相互作用的增强, 临界指数 η 逐渐下降, 使得动量分布的衰减逐渐减慢. 由于实验已经完成了关于 Lieb-Liniger 模型的临界行为的精确测量^[36], 因此这一结果提供了清晰的理论预言并可以用当今的超冷原子实验进行检验.

还可以将非厄米线性响应理论应用于一维费米气体当中, 对于无自旋或具有 $SU(2)$ 对称性的两分量费米气体, 临界指数 $\eta = 3/2 - 1/4(K + K^{-1})$ ^[37], 在强排斥极限下 ($K = 1/2$), $\eta = 7/8$, 此时系统将会出现 $e^{-(t/\tau)^{3/4}}$ 型的衰减和 $\Delta k \sim t^{3/8}$ 形式的亚扩散, 这种不同于玻色气体的指数可以作为实验验证费米系统耗散动力学的证据.

到此, 可以看到非厄米线性响应理论不仅成功地解释了实验, 还提出了进一步的理论预言. 读者可以很容易想到, 任何没有准粒子激发的非正常量子物态都可以出现非指数的耗散动力学行为, 如 Luttinger 液体、非费米液体等. 我们的非厄米线性响应理论最近受到一些理论研究者的关注, 并被推广到更一般的情况^[38], 同时也促使了关于非厄米 Luttinger 液体等非厄米量子多体理论的研究^[39–41]. 此外, 这一响应理论还被用来研究黑洞的信息丢失佯谬^[42,43].

4 时间反演对称性保护的量子系统

对称性是 20 世纪物理学的主旋律之一, 贯穿于现代物理学的各个领域. 根据著名的 Noether 定理, 如果 (经典) 系统有连续的对称性, 则一定有相对应的守恒量^①. 对称性在量子物理当中显示出了巨大的威力, 对称性决定相互作用, 对称性自发破缺等观念早已深入人心. 在凝聚态物理中, 对称性在相和相变中扮演着重要角色. 根据 Landau 理论, 物质的相可以用局域序参量来描述, 而局域序参量从零 (无序相) 变到非零 (有序相) 则对应于系统的对称性发生了自发破缺. 因此, 理论上可以用不同的对称群来区分不同的物相. 描述不同物相之间相变的 Ginzburg-Landau 理论对相和相变的描述是普适的, 只与系统的对称性有关, 而不依赖于其微观的细节. 这一点也显示出了对称性的巨大威力.

我们知道在量子力学中, 如果一个系统具有某种对称性, 那么系统的能级往往会具有简并. 如我们熟知的氢原子中的旋转对称性导致的能级简并, 费米子系统中的时间反演对称性导致的 Kramers 简并等. 如果对系统外加一个微扰, 假如微扰也具有导致能级简并的对称性, 那么能级仍是简并的; 假如微扰不具有这种对称性 (对称性更低), 那么相应的能级简并也会被破除. 这一基本的事实来源于 Schur 引理^[44]: 如果一个对称操作的矩阵表示与某个么正群的所有群元的不可约表示矩阵都对易, 那么该矩阵一定正比于单位矩阵.

根据量子力学中的 Wigner 定理, 量子系统的对称变换有两类, 一类是么正对称, 另一类是反么正对称. 对于反么正对称, 也有相应的 Schur 引理^[45]:

如果一个厄米矩阵与某个么正群的所有群元的不可约表示矩阵都对易, 那么该矩阵一定正比于单位矩阵. 也就是说, 对于反么正对称性导致的简并 (如时间反演对称性导致的 Kramers 简并), 如果能级简并不被外加微扰破除的话, 除了要求微扰具有该对称性之外还需要微扰算符必须是厄米的. 将会看到, 反么正对称性与么正对称性的这一差别在物理上会产生巨大的不同 (这一点最先由 McGinley 和 Cooper 在文献^[46]中指出).

本节以量子自旋霍尔效应和相互作用拓扑态为例, 将非厄米线性响应理论应用于具有时间反演对称性 (反么正对称性) 的系统当中.

4.1 非厄米线性响应理论在量子自旋霍尔效应中的应用

在传统的凝聚态物理中, 物质的属性主要由两个理论所描述: 其一是能带论和费米液体理论, 其二是相和相变的对称性破缺理论. 在 20 世纪 80 年代之前, 这两个理论几乎描述了所有的凝聚态物质. 前文提到, 物质的相及其分类可以由 Ginzburg-Landau 理论描述. 然而自 80 年代起, 伴随着整数霍尔效应、分数量子霍尔效应、铜氧化物高温超导现象的出现, 人们陆续发现了一系列超出 Landau 范式的量子物态, 这些奇异的量子物态的出现并没有伴随着对称性的自发破缺, 不能通过局域序参量来刻画. 如整数量子霍尔效应中的量子化电导平台由体态的拓扑数刻画, 当霍尔电导值从一个整数变到另一个整数时, 系统并没有发生对称性破缺, 而是伴随着拓扑数的改变. 而拓扑数的变化需要体态能隙的关闭, 因而量子霍尔电导平台具有鲁棒性, 不会被外界杂质、缺陷等因素所破坏. 随后, 在 1988 年, Haldane^[47] 提出了一个六角晶格模型 (Haldane 模型), 在没有外磁场的情况下也可以发生量子霍尔效应, 即量子反常霍尔效应. 与整数量子霍尔效应一样, 量子反常霍尔效应的出现同样破坏了时间反演对称性. 而时间反演对称性会导致重要的物理结果, 在 2005 年和 2006 年, Kane 和 Mele^[48] 以及 Bernevig 和张首晟^[49] 进一步考虑自旋轨道耦合效应, 独立地提出了实现量子自旋霍尔效应的模型. 量子自旋霍尔效应中量子化的电导受到时间反演对称性的保护. 理论研究表明, 在没有磁性杂质等

① 在量子力学层面上 Noether 定理可能会失效, 造成守恒被破坏的物理机制称为“量子反常”(quantum abnormal).

破坏时间反演对称性因素干扰的情况下, 实验可以在足够纯净的样品上观测到自旋霍尔效应的量子化电导平台. 然而, 事情远没有理论想象得那么简单. 图 3 是实验在 HgTe 量子阱中测量到的自旋霍尔电导的结果 [50], 可以看出在线性标度下电导的测量值并未明显地出现量子化的值 ($G = 2e/h^2$), 尽管实验样品具有很高的纯度和高迁移率. 而我们知道, 早在 20 世纪 80 年代实验就能够非常清晰地观测到量子霍尔效应的量子化电导了, 但是在半导体工艺发展二十多年之后, 实验并未观测到量子自旋霍尔效应中的量子化电导 (至少远未达到量子霍尔效应的精度), 这似乎造成了一个疑难, 本节试图从理论上解释这一疑难出现的物理原因.

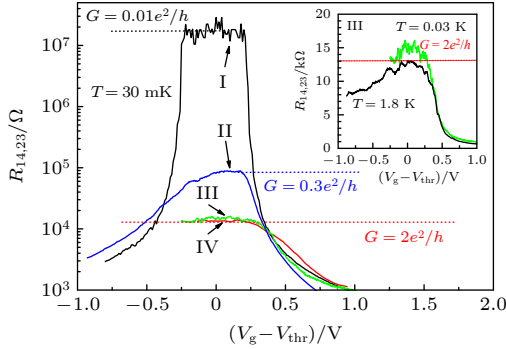


图 3 实验测量纵向四端电阻随门电压变化曲线 (对数坐标). 插图为线性坐标. 图片取自文献 [50]

Fig. 3. The longitudinal four-terminal resistance as a function of the gate voltage. The inset shows as a linear scale. The figure is copied from the Ref. [50].

首先, 需要指出的是, 与量子霍尔效应不同的是, 量子自旋霍尔效应的拓扑态是受时间反演对称保护的 Kramers 简并态, 而时间反演对称操作是反么正的, 这一点是理论解释的关键.

下面以著名的 Kane-Mele 模型为例来说明量子自旋霍尔效应的量子化电导为什么那么脆弱. Kane-Mele 模型是定义在二维蜂窝格子上的哈密顿量 [48]:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{KM}} = & J \sum_{\langle i,j \rangle, s} \hat{c}_{i,s}^\dagger \hat{c}_{j,s} + i\lambda_{\text{SO}} \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle, s, s'} \nu_{ij} \hat{c}_{i,s}^\dagger \sigma_{ss'}^z \hat{c}_{j,s'} \\ & + i\lambda_{\text{R}} \sum_{\langle i,j \rangle, s, s'} \hat{c}_{i,s}^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{d}_{ij})_{ss'}^z \hat{c}_{j,s'} \\ & + \lambda_{\nu} \sum_{i,s} \xi_i \hat{c}_{i,s}^\dagger \hat{c}_{i,s}, \end{aligned} \quad (40)$$

其中 i, j 是格点指标; s, s' 代表自旋指标; $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ 表示 Pauli 矩阵. 哈密顿量中第一项是

最近邻的跃迁项 (跃迁强度为 J); 第二项是次近邻的自旋轨道耦合项 (强度为 λ_{SO}), 其中 $\nu_{ij} = \pm 1$; 第三项是最近邻的 Rashba 耦合项 (强度为 λ_{R}), 其中 \mathbf{d}_{ij} 是从 i 格点到 j 格点的空间矢量; 最后一项是交错势 (强度为 λ_{ν} , 对于不同的子格 $\xi_i = \pm 1$). 为了更清楚地研究需要论述的物理, 我们将系统的参数区间选择在非平庸的拓扑绝缘态中, 并破坏掉镜像对称和反射对称等么正对称性, 使得能级的简并性仅来源于时间反演对称性.

然后, 问一个基本的问题, 由时间反演对称保护的拓扑态 (或更一般的 Kramers 简并态) 在外界耗散的影响下是否是稳定的? 容易想到, 如果与外界环境自由度耦合的系统算符也具有时间反演对称性, 那么由时间反演对称保护的拓扑态就应该不被破坏, 除非耦合的算符本身不再具有时间反演对称性. 换句话说, 只要在实验上尽量排除掉破坏系统时间反演对称性的因素 (如外加磁场、磁性杂质等), 那么实验就能观测到简并拓扑态带来的物理结果.

然而下面将会看到, 这一基于对称性分析的结论对于反么正对称性的情形并不成立. 设系统受到外界环境的影响, 按照前面的讨论, 其非厄米哈密顿量为

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{KM}} + \hat{H}_{\text{diss}}, \quad (41)$$

其中 \hat{H}_{diss} 是 Kane-Mele 哈密顿量, $\hat{H}_{\text{diss}} = \sum_m (-i\gamma_m \hat{\mathcal{O}}_m^\dagger \hat{\mathcal{O}}_m + \hat{\mathcal{O}}_m^\dagger \hat{\xi}_m + \hat{\xi}_m^\dagger \hat{\mathcal{O}}_m)$. 为方便起见, 在 y 方向上采用周期边界条件, 在 x 方向取开边界条件. 假设系统在边界上受到环境影响产生耗散, 即耗散耦合算符 $\hat{\mathcal{O}}_m$ 位于 x 方向的边界上, 如图 4 所示. 如前所述, 这里考虑最理想的情况, 即耗散耦合算符都是时间反演对称的. 不失一般性, 定义两种类型的局域耗散算符: 当 m 为偶数时, $\hat{\mathcal{O}}_m$ 定义在连接 (link) $\langle i_m, j_m \rangle$ 上:

$$\hat{\mathcal{O}}_m = \sum_s \hat{c}_{i_m, s}^\dagger \hat{c}_{j_m, s}, \quad (42)$$

其中, i_m 表示边界上的 B 子格 $x_{i_m} = N_x, y_{i_m} = m, j_m$ 表示边界上的 A 子格 $x_{j_m} = N_x, y_{j_m} = m + 1$. 当 m 为奇数时, $\hat{\mathcal{O}}_m$ 定义在格点 i_m 上:

$$\hat{\mathcal{O}}_m = \sum_{s, s'} i \hat{c}_{i_m, s}^\dagger \sigma_{ss'}^y \hat{c}_{i_m, s'}, \quad (43)$$

这里 i_m 代表边界上的 B 子格 $x_{i_m} = N_x, y_{i_m} = m + 1$. 容易看出上述耗散算符 $\hat{\mathcal{O}}_m$ 是时间反演对称的.

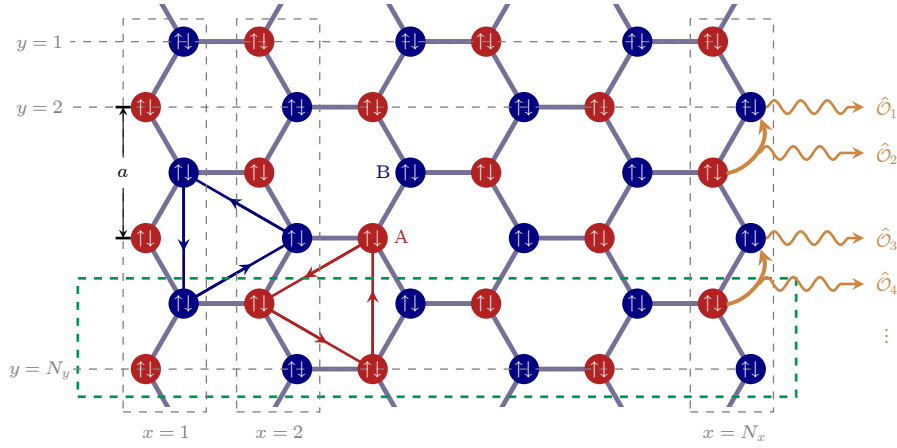


图 4 蜂窝格子上的 Kane-Mele 模型, 其中 x 方向取开边界条件, y 方向上取周期边界条件. 系统尺寸为 $N_x \times N_y$. 耗散耦合算符 $\hat{\mathcal{O}}_m$ 位于右边界, 奇偶分别作用在连接和格点上

Fig. 4. Honeycomb lattice of the tight-binding Kane-Mele model with open boundary condition along x -axis and with periodical boundary condition along y -axis. The sample size is $N_x \times N_y$. The coupling operators $\hat{\mathcal{O}}_m$ are located on the right edge, which are defined on links for odd m and defined on sites for even m .

有了以上这些定义就会看到, 即使系统与外界环境耦合的是时间反演对称的算符, 时间反演对称保护的简并拓扑态也是不稳定的, 以如下三个方面来论述这种不稳定性.

4.1.1 量子相干性的丢失

首先来看系统在时间反演对称保护拓扑态的子空间 (Kramers 空间) 内的相干性. 本文利用 von Neumann 熵刻画其子空间内相干性的变化. 为此要计算系统约化密度矩阵的响应. 在 Schrödinger

绘景下, 密度矩阵的含时演化为

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}_{\text{eff}}(t) \hat{\rho}_0(t) \hat{U}_{\text{eff}}^\dagger(t), \quad (44)$$

其中 $\hat{U}_{\text{eff}}(t) = \tilde{T} \exp \left[-i \int_0^t \hat{H}_{\text{diss}}(t') dt' \right]$, \tilde{T} 为反时序算符 (anti-time-ordered operator), $\hat{\rho}_0(t) = e^{-i\hat{H}_0 t} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}_0 t}$ 代表系统哈密顿量演化的密度矩阵, 这里取系统的哈密顿量为 Kane-Mele 哈密顿量 $\hat{H}_0 = \hat{H}_{\text{KM}}$. 与第 2 节类似, 将 \hat{H}_{diss} 作为微扰展开并对 Langevin 噪声做平均后可得密度矩阵为

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &\equiv \langle \hat{\rho}(t) \rangle_{\text{noise}} = \left\langle \hat{U}_{\text{eff}}(t) \hat{\rho}_0(t) \hat{U}_{\text{eff}}^\dagger(t) \right\rangle_{\text{noise}} \\ &= \left\langle \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_1 < \dots < t_n} \hat{H}_{\text{diss}}(t_1) \dots \hat{H}_{\text{diss}}(t_n) dt_1 \dots dt_n \right) \hat{\rho}_0(t) \right. \\ &\quad \times \left. \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n \int_{t_1 < \dots < t_n} \hat{H}_{\text{diss}}^\dagger(t_n) \dots \hat{H}_{\text{diss}}^\dagger(t_1) dt_1 \dots dt_n \right) \right\rangle_{\text{noise}} \\ &\approx \hat{\rho}_0(t) - \int_0^t dt' \sum_m \gamma_m \left\{ \hat{\mathcal{O}}_m^\dagger(t') \hat{\mathcal{O}}_m(t'), \hat{\rho}_0(t) \right\} + 2 \int_0^t dt' \sum_m \gamma_m \hat{\mathcal{O}}_m(t') \hat{\rho}_0(t) \hat{\mathcal{O}}_m^\dagger(t'), \end{aligned} \quad (45)$$

根据密度矩阵的响应 $\delta \hat{\rho}(t) \equiv \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_0(t)$, 可以得到 von Neumann 熵的变化, 以此来刻画相干性的丢失. 将密度矩阵投影到 Kramers 简并子空间 \mathcal{K} 中 $\hat{\rho}_{\mathcal{K}}(t) = \hat{\Pi}_{\mathcal{K}} \hat{\rho}(t) \hat{\Pi}_{\mathcal{K}}$ ($\hat{\rho}_{0,\mathcal{K}}(t) = \hat{\Pi}_{\mathcal{K}} \hat{\rho}_0(t) \hat{\Pi}_{\mathcal{K}}$), 其中 $\hat{\Pi}_{\mathcal{K}}$ 为 Kramers 空间的投影算子. 设初态的密度矩阵为 \mathcal{K} 空间中纯态, 则相应的 von Neumann 熵变化为

$$\begin{aligned} \delta S_v(t) &= S_v(t) - S_{0,v}(t) = -\text{Tr} \left[\frac{\hat{\rho}_{0,\mathcal{K}}(t) + \delta \hat{\rho}_{\mathcal{K}}(t)}{\text{Tr}(\hat{\rho}_{0,\mathcal{K}}(t) + \delta \hat{\rho}_{\mathcal{K}}(t))} \times \log \left(\frac{\hat{\rho}_{0,\mathcal{K}}(t) + \delta \hat{\rho}_{\mathcal{K}}(t)}{\text{Tr}(\hat{\rho}_{0,\mathcal{K}}(t) + \delta \hat{\rho}_{\mathcal{K}}(t))} \right) \right] + \text{Tr}[\hat{\rho}_{0,\mathcal{K}}(t) \log \hat{\rho}_{0,\mathcal{K}}(t)] \\ &= \text{Tr} \left[\hat{\rho}_{0,\mathcal{K}}(t) \log \hat{\rho}_{0,\mathcal{K}}(t) - (\delta \hat{\rho}_{0,\mathcal{K}}(t) / \text{Tr} \delta \hat{\rho}_{0,\mathcal{K}}(t)) \log \hat{\rho}_{0,\mathcal{K}}(t) \right] \text{Tr} \delta \hat{\rho}_{0,\mathcal{K}}(t). \end{aligned} \quad (46)$$

可以清楚地看出, 当 $\delta\hat{\rho}_K(t) \propto \hat{\rho}_{0,K}(t)$ (即 $\delta\hat{\rho}_K(t) = \hat{\rho}_{0,K}(t) \text{tr} \delta\hat{\rho}_K(t)$) 时, 则有 $\delta S_V(t) = 0$. 但是一旦 $\delta\hat{\rho}_K(t) \not\propto \hat{\rho}_{0,K}(t)$, von Neumann 熵变化不再为零, 即 $\delta S_V(t) \neq 0$. 根据密度矩阵的响应公式, 作用在密度矩阵上的算符有 3 项: $\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m \hat{\Pi}_K$, $\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^\dagger \hat{\Pi}_K$ 和 $\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^\dagger \hat{\mathcal{O}}_m \hat{\Pi}_K$. 根据反么正群的 Schur 引理, 对于厄米算符 $\hat{\mathcal{O}}_m$ ($\hat{\mathcal{O}}_m^\dagger$), 它的不可约表示矩阵不再正比于单位矩阵, 即 $\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m \hat{\Pi}_K \not\propto \hat{\Pi}_K$ ($\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^\dagger \hat{\Pi}_K \not\propto \hat{\Pi}_K$). 这将导致 $\delta\hat{\rho}_K(t) \not\propto \hat{\rho}_{0,K}(t)$. 也就是说, 由于耗散算符 $\hat{\mathcal{O}}_m$ 在不可约表示空间 (\mathcal{K} 空间) 不正比于单位阵, 导致了 von Neumann 熵的改变, 从而

造成系统初始态的退相干, 如图 5(a) 所示.

4.1.2 简并性的破坏

我们将看到, 由时间反演对称性导致的 Kramers 态的简并性也会被时间反演对称的算符所破坏. 定义推迟格林函数

$$\mathcal{G}_{ij}(t, 0) = -i\Theta(t) \left\langle \left\{ \hat{c}_i(t), \hat{c}_j^\dagger(0) \right\} \right\rangle, \quad (47)$$

其中 $\Theta(t)$ 为 Heaviside 阶跃函数, \hat{c}_j^\dagger (\hat{c}_i) 表示作用在本征态 $|\Psi_j\rangle$ ($|\Psi_i\rangle$) 上的产生 (湮灭) 算符, $\hat{c}_i(t) = e^{i\hat{H}^\dagger t} \hat{c}_i e^{-i\hat{H}t}$ 为 Heisenberg 绘景下的含时演化. 与前面的计算类似, 对格林函数做微扰展开, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ij}^{(0)} &= -i\Theta(t) \left\langle \left\{ \hat{c}_i^I(t), \hat{c}_j^{I\dagger}(0) \right\} \right\rangle, \mathcal{G}_{ij}^{(1)} \\ &= i \sum_m \gamma_m \int_0^t dt_1 \left\langle \hat{c}_i^I(t) \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \hat{c}_j^{I\dagger}(0) \right\rangle + i \sum_m \gamma_m \int_0^t dt_1 \left\langle \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \hat{c}_i^I(t) \hat{c}_j^{I\dagger}(0) \right\rangle \\ &\quad - 2i \sum_m \gamma_m \int_0^t dt_1 \left\langle \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{c}_i^I(t) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \hat{c}_j^{I\dagger}(0) \right\rangle - i \sum_m \gamma_m \int_0^t dt_1 \left\langle \hat{c}_j^{I\dagger}(0) \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \hat{c}_i^I(t) \right\rangle \\ &\quad - i \sum_m \gamma_m \int_0^t dt_1 \left\langle \hat{c}_j^{I\dagger}(0) \hat{c}_i^I(t) \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \right\rangle + 2i \sum_m \gamma_m \int_0^t dt_1 \left\langle \hat{c}_j^{I\dagger}(0) \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{c}_i^I(t) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \right\rangle. \end{aligned} \quad (48)$$

其中 $\hat{\mathcal{O}}_m^I(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{\mathcal{O}}_m e^{-i\hat{H}_0 t}$ 表示算符在 Kane-Mele 哈密顿量下的演化. 为了检验 Kramers 简并性的破坏, 将算符 $\hat{\mathcal{O}}_m^I$, $\hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}$, $\hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger} \hat{\mathcal{O}}_m^I$ 以及 $\mathcal{G}_{ij,K}^{(1)}$ 投影到 \mathcal{K} 空间中, 即

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ij,K}^{(1)} &= i \sum_m \gamma_m \left\{ \int_0^t dt_1 \left\langle \hat{c}_i^I(t) \left[\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \hat{\Pi}_K \right] \hat{c}_j^{I\dagger}(0) \right\rangle \right. \\ &\quad + \int_0^t dt_1 \left\langle \left[\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \hat{\Pi}_K \right] \hat{c}_i^I(t) \hat{c}_j^{I\dagger}(0) \right\rangle - 2 \int_0^t dt_1 \left\langle \left[\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{\Pi}_K \right] \hat{c}_i^I(t) \left[\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \hat{\Pi}_K \right] \hat{c}_j^{I\dagger}(0) \right\rangle \\ &\quad - \int_0^t dt_1 \left\langle \hat{c}_j^{I\dagger}(0) \hat{c}_i^I(t) \left[\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \hat{\Pi}_K \right] \right\rangle - \int_0^t dt_1 \left\langle \hat{c}_j^{I\dagger}(0) \left[\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \hat{\Pi}_K \right] \hat{c}_i^I(t) \right\rangle \\ &\quad \left. + 2 \int_0^t dt_1 \left\langle \hat{c}_j^{I\dagger}(0) \left[\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{\Pi}_K \right] \hat{c}_i^I(t) \left[\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \hat{\Pi}_K \right] \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (49)$$

如前所述, 由于 $\hat{\mathcal{O}}_m^I$ 与 $\hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}$ 具有时间反演对称性但不是厄米算符, 根据反么正群的 Schur 引理, 可知 $\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger} \hat{\Pi}_K \propto \hat{\Pi}_K$, $\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger} \hat{\Pi}_K \not\propto \hat{\Pi}_K$, $\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^I \hat{\Pi}_K \propto \hat{\Pi}_K$. 这会导致原本简并的谱函数出现劈裂. 将 Kane-Mele 模型和耗散算符代入格林函数然后做傅里叶变换可得:

$$\mathcal{G}(\omega) = \frac{1}{\omega - E_0 + i\hat{\mathcal{C}}}, \quad (50)$$

其中 $\hat{\mathcal{C}}$ 为 2×2 矩阵 (更多计算细节可参考文献 [51]). 将 $\mathcal{G}(\omega)$ 对角化

$$\hat{\mathcal{G}}(\omega) = U_g^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{\lambda_1}(\omega) & 0 \\ 0 & \mathcal{G}_{\lambda_2}(\omega) \end{pmatrix} U_g, \quad (51)$$

然后定义谱函数 $A_1(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} [\mathcal{G}_{\lambda_1}(\omega)]$, $A_2(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} [\mathcal{G}_{\lambda_2}(\omega)]$. 计算结果表明, 在耗散算符的影响下, 系统在 Kramers 空间的简并谱函数出现了劈裂, 如图 5(b) 所示. 也就是说, 由时间反演对称保护的简并性受到了破坏.

4.1.3 背散射的出现

除了上述相干性的丢失和简并性的破坏之外,

我们还将看到, 在破坏量子自旋霍尔效应的更重要的一个因素——背散射, 也会因为耗散的存在而出现, 即便耗散算符仍然是时间反演对称的。

首先来看杂质势在 Kramers 简并态之间的矩阵元

$$V_{ij}(t) = \langle \Psi_i | \hat{V}(t) | \Psi_j \rangle, \quad (52)$$

微扰展开并对 Langevin 噪声做平均后可得

$$\begin{aligned} V_{ij}(t) = & \langle \Psi_i | \hat{V}^I(t) | \Psi_j \rangle - \int_0^t dt_1 \sum_m \gamma_m \\ & \times \left[\langle \Psi_i | \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \hat{V}^I(t) | \Psi_j \rangle \right. \\ & + \langle \Psi_i | \hat{V}^I(t) \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) | \Psi_j \rangle \\ & \left. - 2 \langle \Psi_i | \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{V}^I(t) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) | \Psi_j \rangle \right]. \quad (53) \end{aligned}$$

由于 $|\Psi_i\rangle, |\Psi_j\rangle$ 是系统在 Kramers 简并空间的本征态, 那么在没有耗散的情况下自然有 $\langle \Psi_i | \hat{V}^I(t) | \Psi_j \rangle = V_0 \delta_{ij}$, 其中 V_0 是杂质强度. 而对于耗散带来的修正项, 由于 $\hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m \hat{\Pi}_K \propto \hat{\Pi}_K$, 杂质势会在两个不同 Kramers 简并态之间产生非零矩阵元, 如图 5(c) 所示。

$$\begin{aligned} V_{ij}(t) = & V_0 \delta_{ij} - \int_0^t dt_1 \sum_m \gamma_m \\ & \times \left[\langle \Psi_i | \hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \hat{V}^I(t) \hat{\Pi}_K | \Psi_j \rangle \right. \\ & + \langle \Psi_i | \hat{\Pi}_K \hat{V}^I(t) \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \hat{\Pi}_K | \Psi_j \rangle \\ & \left. - 2 \langle \Psi_i | \hat{\Pi}_K \hat{\mathcal{O}}_m^{I\dagger}(t_1) \hat{V}^I(t) \hat{\mathcal{O}}_m^I(t_1) \hat{\Pi}_K | \Psi_j \rangle \right]. \quad (54) \end{aligned}$$

这一结果也表明在量子霍尔效应中的拓扑边缘态会被散射到另一个边缘态, 即出现背散射, 导致自旋霍尔电导不再是量子化的。

系统在边缘态中的有效哈密顿量可写为

$$\hat{H}_{\text{edge}} = v \hat{k} |+\rangle \langle +| - v \hat{k} |-\rangle \langle -|, \quad (55)$$

其中 $v = \partial E(k)/\partial k$ 是边缘态的速度, $|+\rangle, |-\rangle$ 代表两个螺旋通道 (helical channels). 下面考虑边界上存在杂质, 其杂质势为 \hat{V} , 根据 Lippmann-Schwinger 方程, 散射态的形式解为 $\hat{H}_{\text{edge}} + \hat{V}$,

$$|\psi\rangle = |\varphi\rangle + \hat{G}_0(E) \hat{V} |\psi\rangle, \quad (56)$$

其中 $\hat{G}_0(E)$ 为自由格林函数 $\hat{G}_0(E) = (E - \hat{H}_{\text{edge}} + i0^+)^{-1}$. 将方程 (56) 写到坐标表象下:

$$\psi(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} \delta_{\sigma,+} + \psi_{\text{sc}}(x, \sigma), \quad (57)$$

其中 $\varphi(x, \sigma) = e^{ikx} \delta_{\sigma,+}/\sqrt{L}$ 为初态入射波函数, L 为系统尺寸, $\psi_{\text{sc}}(x, \sigma) = \langle x, \sigma | \hat{G}_0(E) \hat{V} | \psi \rangle$ 为散射波函数. 在一阶近似下,

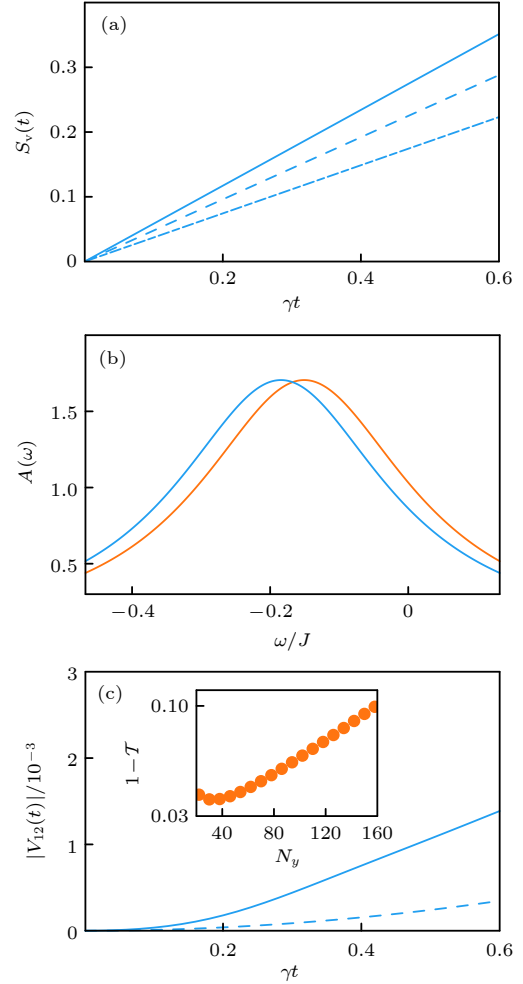


图 5 (a) von Neumann 熵随时间的变化, 三条曲线分别对应不同耗散耦合通道数目: $M = 20$ (实线), $M = 16$ (虚线) 和 $M = 12$ (点虚线); (b) Kramers 简并空间中的谱函数; (c) 杂质势的非对角元 $V_{12}(t)$ 随时间的变化, 实线包含所有态的贡献, 虚线仅包含边缘态的贡献 ($M = 20$). 插图表示反射率随样品尺寸的变化. 耗散强度 γ 大小为 $0.2J$ [51]

Fig. 5. (a) The von Neumann entropy $S_v(t)$ as a function of time. Here we choose the number of coupling operators as $M = 20$ (solid line), $M = 16$ (dashed line), and $M = 12$ (dotted dashed line), respectively. (b) The spectral function $A(\omega)$ for two Kramers degenerate states with dissipation, with $M = 20$. (c) Time evolution of the matrix element of the impurity potential $V_{12}(t)$ between two degenerate edge states with. The solid line includes contributions from all states and the dashed line only includes contributions from edge states. The inset shows the transmission coefficient as a function of N_y . The dissipation strength γ is taken as $0.2J$ [51].

$$\psi_{sc}(x, \sigma) = \begin{cases} -ie^{ikx} \frac{\sqrt{L}}{v} \langle k, + | \hat{V} | k, + \rangle, & \sigma = +, x \rightarrow L/2, \\ -ie^{-ikx} \frac{\sqrt{L}}{v} \langle -k, - | \hat{V} | k, + \rangle, & \sigma = -, x \rightarrow -L/2. \end{cases} \quad (58)$$

则反射率为

$$\mathcal{R} = \left| -\frac{L}{v} i \langle -k, - | \hat{V} | k, + \rangle \right|^2. \quad (59)$$

由此可得透射率 $\mathcal{T} = 1 - \mathcal{R}$. 将 $|V_{ij}(t)|$ 的展开式 (54) 式代入 $\langle -k, - | \hat{V} | k, + \rangle$ 并对杂质势做平均, 就能得到反射和透射率.

计算结果表明, 在耗散的作用下, 杂质确实会引起背散射 (透射率不等于 1), 如图 5(c) 中的插图所示. 不仅如此, 反射率的大小也会随着系统尺寸改变而变化, 结果表明系统样品的尺寸越大, 反射率越高. 这一结果与最近的实验观测到的结果 [52] 定性上是符合的, 如实验图 6 所示, 电导随着尺寸的增大逐渐偏离量子化的值, 尺寸的阈值约为 100 nm. 对于非量子化的电导, 之前有关的理论考虑了有限温度下非弹性散射 [53,54] 以及电磁噪声导致的散射带来的影响 [55]. 而我从理论上对于为什么实验上很难观测到精确的量子化电导 [50,52,56,57] 给出了另一种不同的物理诠释, 物理系统总是不可避免地受到外界环境的影响, 对于时间反演对称性保护的量子系统来说, 即便与环境耦合的算符也具有时间反

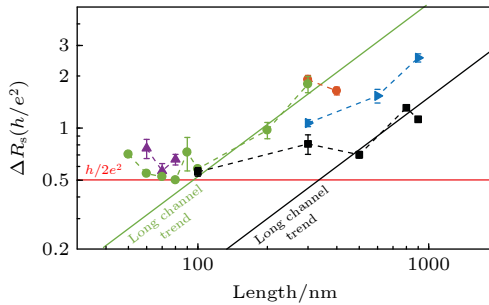


图 6 实验在 WTe_2 样品中测量的未掺杂通道电阻随样品尺寸的变化. 图片取自文献 [52]

Fig. 6. Length dependence of the undoped-channel resistance in WTe_2 sample. The figure is copied from the Ref. [52].

① 即便系统被耦合的耗散算符是厄米算符, 也不一定能保证这种稳定性. 原因是可以利用两个厄米算符构造出一个非厄米算符 $\gamma_1 \hat{\mathcal{O}}_1 \hat{\mathcal{O}}_2 + \gamma_2 \hat{\mathcal{O}}_2 \hat{\mathcal{O}}_1$ (在有限温度下, $\gamma_1 \neq \gamma_2$), 同样会导致 Kramers 简并态的不稳定性. 只有一种极特殊的情况才能保持稳定, 即系统只耦合一个算符且该算符是厄米算符.

② 在平均场近似下, $\mathbf{n} = \phi$ (ϕ 为标量), 此时于 $\mathcal{S}_0[\mathbf{n}]$ 将给出波动方程 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - v_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi = 0$, 所以此时系统的激发是无能隙的 ($\varepsilon(\mathbf{p}) \sim v_s |\mathbf{p}|$).

演对称性, 这种反么正对称性保护的物理也是不稳定的^①. 正是这种机制使得量子自旋霍尔效应中的背散射几乎不可避免, 导致电导量子化不再是精确的.

4.2 非厄米线性响应理论在相互作用拓扑态中的应用

除了量子霍尔效应以外, 我们利用非厄米线性响应理论来研究具有时间反演对称性的相互作用拓扑相的稳定性问题. 我们知道, 根据 Mermin-Wagner 定理 [58], 对于维数小于等于二维的系统, 不存在有限温度的长程序, 即不会出现对称性自发破缺. 如一维反铁磁 Heisenberg 模型:

$$\hat{H} = J \sum_i \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}, \quad (60)$$

无论自旋取半奇数还是整数, 系统的基态都没有长程反铁磁序. 但是, Haldane [59,60] 在 1983 年发现, 整数自旋的反铁磁 Heisenberg 模型的磁激发谱与半奇数有着巨大的区别, 即半奇数自旋的激发谱是无能隙的, 而整数自旋的激发谱却是有能隙的 (Haldane gap). 从场论角度出发, Haldane 将反铁磁自旋链的低能有效作用量写为正常的 $O(3)$ 非线性 σ -模型 ($O(3)$ nonlinear σ -model) 部分 $\mathcal{S}_0[\mathbf{n}]$ 与拓扑项 $\mathcal{S}_{\text{top}}[\mathbf{n}]$ (θ -term) 部分之和:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\mathbf{n}] &= \mathcal{S}_0[\mathbf{n}] + \mathcal{S}_{\text{top}}[\mathbf{n}] \\ &= \frac{1}{\lambda} \int d\tau dx \left(\frac{1}{v_s} (\partial_x \mathbf{n})^2 + v_s (\partial_\tau \mathbf{n})^2 \right) \\ &\quad + i\theta \int d\tau dx \mathbf{n} \cdot (\partial_x \mathbf{n} \times \partial_\tau \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (61)$$

其中 $\lambda = 4/S$, $\theta = S/2$. v_s 表示长波极限下自旋波激发的波速. 对于 $\mathcal{S}_0[\mathbf{n}]$ 部分, 在平均场近似下, 体系的低能激发是无能隙的^②. 而量子涨落将改变体系的激发谱, 使激发谱出现能隙. 对于拓扑项 $\mathcal{S}_{\text{top}}[\mathbf{n}]$, 为了看出这一项的影响, 我们将配分函数 ($\mathcal{Z} = \int D\mathbf{n} \exp(-\mathcal{S}[\mathbf{n}])$) 写为如下求和形式:

$$\mathcal{Z} = \sum_{W \in \mathbb{Z}} \int D\mathbf{n}_W e^{2\pi i S W} e^{-\mathcal{S}_0[\mathbf{n}_W]}, \quad (62)$$

其中 W 表示缠绕数 (winding number), \mathbf{n}_W 代表

缠绕数的场分布. 显然, 拓扑项的贡献只依赖于 $2S$ 的奇偶性. 对于整数自旋 ($2S$ 为偶数), 此时拓扑项的相位贡献全都是 2π 整数倍, 即 $\exp(2\pi i S W) = 1$, 这表明整数自旋的拓扑项对配分函数没有贡献 (与没有这一项的效果一样), 因此可以预期系统的能谱与 $S_0[n]$ 给出的能谱一致. 而对于半奇数自旋 ($2S$ 为奇数), $\exp(2\pi i S W) = (-1)^W$, 即缠绕数 W 为奇数时会贡献一个负号, 这一正负号交替会让相位在求和过程中相干相消, 使得量子涨落对平均场的影响受到抑制, 使系统的激发更接近平均场的无能隙激发. 事实上, 自旋 $1/2$ 反铁磁 Heisenberg 模型的 Bethe ansatz 严格解给出的低能激发确实是无能隙的. 因此 Haldane 提出, 所有整数自旋的反铁磁 Heisenberg 模型的激发谱都是无能隙的, 而整数自旋是有能隙的, 称为 Haldane conjecture. 不仅如此, 能隙是能够稳定存在的, 不受外界扰动或参数的变化 (如将系统改为各向异性的 XXZ 模型) 而消失. 这种有能隙且稳定存在的量子态构成一个非平庸的量子相 (其基态没有对称破缺, 但因为存在边界态, 而与平庸的有能隙的直积态有本质区别), 被称为 Haldane gap. Haldane gap 后来在 90 年代被密度矩阵重整化群的计算所验证^[61], 中子散射实验也观察到了这一能隙^[62]. Haldane 的这一发现毫无疑问是重要的, 也是令人惊奇的^①. 它使人们意识到, 在没有对称性自发破缺和长程序的系统中也可以有不同类别的物相, 这里即是对称性保护的拓扑物相 (Haldane phase). 而且, 事实上自旋的整数和半奇数的区别是量子力学的效应, 并没有经典对应, 这说明 Haldane phase 完全是量子效应在相互作用多体系统中的体现. 在 Haldane conjecture 提出之后, 1987 年由 Affleck, Kennedy, Lieb 和 Tasaki 四位物理学家提出了一个基态为 Haldane phase 并且可以严格求解的模型 (AKLT 模型)^[63], 其哈密顿量为

$$\begin{aligned}\hat{H} &= J \sum_{j=1}^{L-1} \left[\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j+1} + \frac{1}{3} (\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j+1})^2 + \frac{2}{3} \right] \\ &= J \sum_{j=1}^{L-1} \hat{P}_{j,j+1}^{S=2},\end{aligned}\quad (63)$$

① 这个结果令人惊奇的地方就在于, 一方面, 在大自旋极限下 ($S \gg 1$), 平均场的结果是越来越精确的, 给出无能系线性色散; 另一方面, 对于 $S = 1/2$, Bethe ansatz 的严格结果也给出无能隙的线性色散. 那么自然应该期待对于中间大小的自旋 $S > 1/2$, 都应该具有无能隙的激发才对. 但是, $S = 1$ 的系统却是有能隙的!

② 其基态没有对称自发破缺, 但是存在边界态, 这与平庸的有能隙的直积态本质上是不同的.

其中 $\mathbf{S}_j = (S_j^x, S_j^y, S_j^z)$ 表示自旋 1 的角动量算符, $\hat{P}_{j,j+1}^{S=2}$ 表示最近邻两个格点自旋 $S = 2$ 子空间上的投影算子, L 是系统的尺寸, J ($J > 0$) 为相互作用强度. 这里采用了开边界条件, 在这一边界条件下, 该模型的基态是零能的四重简并态. 因为每个投影算子都是正定的, 故基态可以通过排除所有临近两个格点的自旋为 2 的分量来得到, 可以用图 7 来形象地表示.

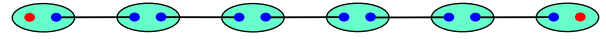


图 7 AKLT 模型基态示意图. 其中每个格点上的自旋 $S = 1$ (绿色椭圆) 被分解成两个自旋 $S = 1/2$ (蓝色圆点), 被黑色直线连接起来的两个蓝点表示两个自旋 $S = 1/2$ 形成的自旋单态. 左右边界上的红色圆点表示自由的自旋 $S = 1/2$.

Fig. 7. A schematic diagram for groundstate of the AKLT model. The spin $S = 1$ (green oval shape) at each site is split into two spin-half (blue dots), and two blue dots connected by black line represents the spin singlet formed by the two spin $S = 1/2$. The red dot at each boundary represents free spin-half.

将每个格点的自旋 $S = 1$ (图 7 中的黄色圆圈) 分解为两个自旋 $1/2$ 组成的自旋三重态, 则基态可视为临近两格点接触的自旋 $1/2$ 形成的自旋单态, 此时两个边界格点各有一个未配对的自由的 $1/2$ 自旋态, 所以基态是四重简并的零能态. 换句话说, 系统的基态在体内是自旋单态构成的直积态, 而左右边界上则各存有一个 $S = 1/2$ 的边界态. 系统的激发是有能隙的, 激发态需要打破自旋单态, 导致正比于 J 的有限能量增加. 与 Haldane phase 一样, AKLT 模型的基态是拓扑非平庸的^②, 它受时间反演对称和二面体群 D_2 (关于两个正交轴的 π 旋转) 的保护^[64].

本节的目的就是以 AKLT 模型为例, 通过退相干的出现和简并性的破坏, 来表明受时间反演保护的 Haldane phase 在耗散下的不稳定性. 为此, 先将其基态重新表示.

根据自旋算符的 Schwinger 玻色子表示,

$$\hat{S}_j^+ = \hat{a}_j^\dagger \hat{b}_j, \quad \hat{S}_j^- = \hat{b}_j^\dagger \hat{a}_j, \quad \hat{S}_j^z = \frac{1}{2} (\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j - \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j), \quad (64)$$

其中满足约束条件 $\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j = 2S = 2$. 此时简并的基态可表示为

$$\begin{aligned} |\phi_g^1\rangle &= \hat{a}_1^\dagger \prod_{j=1}^{L-1} \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{b}_{j+1}^\dagger - \hat{b}_j^\dagger \hat{a}_{j+1}^\dagger \right) \hat{a}_L^\dagger |0\rangle, \\ |\phi_g^2\rangle &= \hat{b}_1^\dagger \prod_{j=1}^{L-1} \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{b}_{j+1}^\dagger - \hat{b}_j^\dagger \hat{a}_{j+1}^\dagger \right) \hat{a}_L^\dagger |0\rangle, \\ |\phi_g^3\rangle &= \hat{a}_1^\dagger \prod_{j=1}^{L-1} \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{b}_{j+1}^\dagger - \hat{b}_j^\dagger \hat{a}_{j+1}^\dagger \right) \hat{b}_L^\dagger |0\rangle, \\ |\phi_g^4\rangle &= \hat{b}_1^\dagger \prod_{j=1}^{L-1} \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{b}_{j+1}^\dagger - \hat{b}_j^\dagger \hat{a}_{j+1}^\dagger \right) \hat{b}_L^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (65)$$

为了讨论这类对称性保护的基态在耗散影响下的稳定性, 从谱的简并性和基态空间的相干性两方面来讨论. 定义格林函数:

$$\mathcal{G}_{ij}(t) = -i\Theta(t) \sum_{\lambda=1}^4 \langle \phi_g^\lambda | \hat{c}_i^\dagger(t) \hat{c}_j | \phi_g^\lambda \rangle, \quad (66)$$

其中 $i, j = 1, 2$, 取 $\hat{c}_1 = \hat{S}_1^- - \frac{1}{2} \hat{S}_1^z$, $\hat{c}_2 = \hat{S}_1^+ + \frac{1}{2} \hat{S}_1^z$ 以满足条件 $\hat{c}_1 | \phi_g^1 \rangle = | \phi_g^2 \rangle$ 以及 $\hat{c}_2 | \phi_g^2 \rangle = | \phi_g^1 \rangle$. 含时算符 $\hat{c}_m(t) = e^{i\hat{H}_{\text{eff}}t} \hat{c}_m(0) e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t}$ 是在总哈密顿量

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_{\text{AKLT}} + \hat{H}_{\text{diss}} \quad (67)$$

下演化的, 其中 $\hat{H}_{\text{diss}} = (-i\gamma \hat{\mathcal{O}}_1^\dagger \hat{\mathcal{O}}_1 + \hat{\mathcal{O}}_1^\dagger \hat{\xi} + \hat{\xi}^\dagger \hat{\mathcal{O}}_1)$. 在无耗散的情况下 $\hat{H}_{\text{diss}} = 0$, 容易发现格林函数非对角矩阵元为零, $\mathcal{G}_{12}(t) = \mathcal{G}_{21}(t) = 0$, 且对角元相等 $\mathcal{G}_{11}(t) = \mathcal{G}_{22}(t)$. 与 Kane-Mele 模型类似, AKLT 模型基态的简并性除了时间反演对称保护以外还受到 $Z_2 \times Z_2$ 对称性的保护 [64]. 因此选取在边界上的耗散算符 $\hat{\mathcal{O}}_1 = (\hat{S}_1^z)^2 + i\alpha \cdot \hat{S}_1$, 以期能够破坏 $Z_2 \times Z_2$ 对称性但保持时间反演对称性, 其中 $\hat{S}_1 = (S_1^x, S_1^y, S_1^z)$, $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$. 与量子自旋霍尔效应类似, 此时耗散算符也会导致系统基态空间内的 von Neumann 熵的增长谱函数的劈裂, 如图 8 所示. AKLT 模型边缘态的不稳定性也被其他工作利用不同计算的方法所证实 [65,66].

事实上, 通过 Kane-Mele 模型和 AKLT 模型的计算过程可以发现, 耗散引起时间反演对称保护的量子系统的不稳定性是普适的, 并不依赖于具体的模型, 其背后的数学原因是反么正群的 Schur 引理. “光阴似箭, 岁月如梭”, 自人类文明起始以来, 时间可能是最神秘的概念. 我们知道, 宏观热力学系统的时间箭头起源于微观概率的最概然分布, 体

现在热力学熵的增加, 但是在微观上, 热力学系统中的单个原子的运动总是可逆的. 然而具有时间反演对称的量子系统中的时间箭头, 则是起源于时间反演对称的反么正性, 这里的不可逆性体现在 Kramers 简并空间中 von Neumann 熵的增加. 从物理上看, 这似乎提供了一种“时间箭头”的可能的微观起源, 即自然界的时间流逝总是单向的原因, 就是时间反演对称性是反么正的.

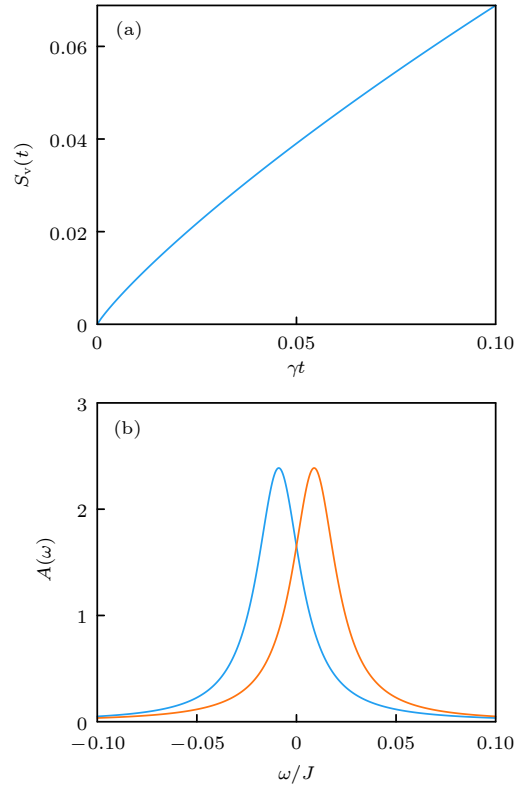


图 8 (a) AKLT 模型中的 von Neumann 熵随时间的变化; (b) 基态空间中的谱函数

Fig. 8. (a) The von Neumann entropy as a function of time in the AKLT model; (b) the spectral function in ground-state subspace.

5 总结与展望

本文简要地综述了非厄米线性响应理论以及该理论在具有耗散量子多体和具有时间反演对称保护的量子系统这两大方面的应用. 在耗散量子多体系统方面, 发现在二维 Bose-Hubbard 模型中, 当系统处于具有良好定义的准粒子激发状态时, 系统的耗散动力学出现正常的指数衰减和扩散行为; 而当系统处于量子临界状态时, 则会出现非指数衰减的耗散动力学和反常的亚扩散行为, 并且这些反常行为与系统在临界相的临界指数决定. 理论计算

的结果与冷原子实验观测数据高度符合. 另外还发现, 在一维量子气体中, 系统处于 Luttinger 液体态时也会出现类似的非指数和亚扩散行为. 这一理论的结果提供了一种通过实验测量耗散动力学来区分正常量子物态和临界量子物态的手段, 也为实验测量临界指数提供了新的方法. 在时间反演对称的量子系统方面, 以量子霍尔效应和相互作用拓扑态为例, 通过非厄米线性响应的计算, 发现了由时间反演这种反么正对称性保护的 Kramers 简并及其相关的物理性质在耗散的影响下并不是稳定的, 即便耗散算符也同样具有时间反演对称性. 理论预言了自旋霍尔电导不再是精确的量子化值, 且随实验样品尺寸的变化规律与实验结果定性一致. 从以上两方面的应用来看, 非厄米线性响应理论是成功的. 诚然, 正如前言所讲, 非平衡动力学过程原则上涉及系统所有的自由度, 理论上来说很难通过少数几个参数就能精确刻画多体系统动力学演化. 非厄米线性响应理论处理是系统在耗散影响下的准静态演化过程, 当系统的演化状态非准静态过程的时候, 还没有理论可以有效地处理. 一个具有重要意义的问题是, 非平衡动力学是否有类似于平衡态物理一样的普适性 (如量子相变的普适类)? 有趣的是, 实验在远离准静态的非平衡动力学中发现了一些普适的动力学行为, 验证了这种存在的可能性. 如远离平衡态的普适淬火动力学^[67], 以及最近在量子多体系统中观测到的著名的 Kardar-Parisi-Zhang 普适性^[68–70]. “平衡态系统都是相似的, 而非平衡系统却各有各的非平衡”. 我们相信, 自然界中的精彩很大程度上来自于非平衡物理. 伴随着实验技术尤其是冷原子实验的蓬勃发展, 我们有理由期待, 非平衡物理系统会带给我们越来越多的惊奇.

本文所介绍的非厄米线性响应理论是作者与多位合作者共同提出的. 借此机会, 作者要感谢清华大学高等研究院的翟荟教授, 正是翟荟教授对物理理论的独到见解以及对实验现象的真知灼见, 非厄米线性响应理论才得以诞生. 感谢中国工程物理研究院的陈宇研究员, 陈教授扎实深厚的物理功底和他那爽朗的笑声, 为本工作的进展过程增辉不少. 感谢清华大学高等研究院的陈鑫博士和邓天舒博士, 和他们的讨论亦使作者受益良多. 作者还要感谢中国科学院物理研究所的陈澍研究员和崔晓玲研究员, 在他们的指引下作者有幸进入了量子开放系统和非厄米物理这一蓬勃发展的领域.

参考文献

- [1] Barontini G, Labouvie R, Stubenrauch F, Vogler A, Guarrera V, Ott H 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 035302
- [2] Patil Y S, Chakram S, Vengalattore M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 140402
- [3] Labouvie R, Santra B, Heun S, Ott H 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 235302
- [4] Lüschen H P, Bordia P, Hodgman S S, Schreiber M, Sarkar S, Daley A J, Fischer M H, Altman E, Bloch I, Schneider U 2017 *Phys. Rev. X* **7** 011034
- [5] Tomita T, Nakajima S, Takasu Y, Takahashi Y 2019 *Phys. Rev. A* **99** 031601(R)
- [6] Tomita T, Nakajima S, Danshita S, Takasu S, Takahashi Y, 2017 *Sci. Adv.* **3** e1701513
- [7] Sponselee K, Freystatzky L, Abeln B, Diem M, Hundt B, Kochanek A, Ponath T, Santra B, Mathey L, Sengstock K, Becker C 2018 *Quantum Sci. Technol.* **4** 014002
- [8] Takasu Y, Yagami T, Ashida Y, Hamazaki R, Kuno Y, Takahashi Y 2020 *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020** 12A110
- [9] Yan B, Moses S A, Gadway B, Covey J P, Hazzard K R, Rey A M, Jin D S, Ye J 2013 *Nature* **501** 521
- [10] Schäfer F, Fukuhara T, Sugawa S, Takasu Y, Takahashi Y, 2020 *Nat. Rev. Phys.* **2** 411
- [11] Bergholtz E J, Budich J C, Kunst F K 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 015005
- [12] Ashida Y, Gong Z, Ueda M 2020 *Adv. Phys.* **69** 249
- [13] Bouganne R, Aguilera M B, Ghermaoui A, Beugnon J, Gerbier F 2020 *Nat. Phys.* **16** 21
- [14] Pan L, Chen X, Chen Y, Zhai H 2020 *Nat. Phys.* **16** 767
- [15] Mahan G D 1981 *Many Particle Physics* (New York and London: Plenum Press)
- [16] Coleman P 2015 *Introduction to Many-Body Physics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [17] Kamenev A 2011 *Field Theory for Non-equilibrium Systems* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [18] Dalla Torre E G, Diehl S, Lukin M D, Sachdev S, Strack P 2013 *Phys. Rev. A* **87** 023831
- [19] Zhai H 2021 *Ultracold Atomic Physics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [20] Purfath M 2014 *The Non-Equilibrium Green's Function Method for Nanoscale Device Simulation* (Verlag Wien: Springer Press)
- [21] Vale C J, Zwierlein M 2021 *Nat. Phys.* **17** 1305
- [22] Stewart J T, Gaebler J P, Jin D S 2008 *Nature* **454** 744
- [23] Dao T L, Georges A, Dalibard J, Salomon C, Carusotto I 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 240402
- [24] Koschorreck M, Pertot D, Vogt E, Fröhlich B, Feld M, Kröhl M 2012 *Nature* **485** 619
- [25] Brown P T, Guardado-Sanchez E, Spar B M, Huang E W, Devereaux T P, Bakr W S 2020 *Nat. Phys.* **16** 26
- [26] Sachdev S 2011 *Quantum Phase Transitions* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [27] Zinn-Justin J 2007 *Phase Transitions and Renormalisation Group* (Oxford: Oxford University Press)
- [28] Debenedetti P G, Stillinger F H 2001 *Nature* **410** 259
- [29] Dyre J C 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 953
- [30] Witczak-Krempa W, Sørensen E S, Sachdev S 2014 *Nat. Phys.* **10** 361
- [31] Giamarchi T 2004 *Quantum Physics in One Dimension* (New York: Oxford University Press)
- [32] Lieb E H, Liniger W 1963 *Phys. Rev.* **130** 1605
- [33] Imambekov A, Glazman L I 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 206805
- [34] Lieb E H 1963 *Phys. Rev.* **130** 1616
- [35] Jiang Y Z, Chen Y Y, Guan X W 2015 *Chin. Phys. B* **24** 050311

- [36] Yang B, Chen Y Y, Zheng Y G, Sun H, Dai H N, Guan X W, Yuan Z S, Pan J W 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 165701
- [37] Inambekov A, Schmidt T L, Glazman L I 2012 *Rev. Mod. Phys.* **84** 1253
- [38] Sticlet D, Dóra B, Moca C P 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 016802
- [39] Dóra B, Moca C P 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 136802
- [40] Bácsi Á, Moca C P, Dóra B 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 136401
- [41] Bernier J S, Tan R, Guo C, Kollath C, Poletti D 2020 *Phys. Rev. B* **102** 115156
- [42] Chen Y 2021 *J. High Energy Phys.* **04** 215
- [43] Su K, Zhang P, Zhai H 2021 *J. High Energy Phys.* **06** 156
- [44] Wigner E P 1959 *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (New York: Academic Press)
- [45] Dimmock J O 1963 *J. Math. Phys.* **4** 1307
- [46] McGinley M, Cooper N R 2020 *Nat. Phys.* **16** 1181
- [47] Haldane F D M 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 2015
- [48] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 146802
- [49] Bernevig B A, Zhang S C 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 106802
- [50] König M, Wiedmann S, Brüne C, Roth A, Buhmann H, Molenkamp L W, Qi X L, Zhang S C 2007 *Science* **318** 766
- [51] Deng T S, Pan L, Chen Y, Zhai H 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 086801
- [52] Wu S, Fatemi V, Gibson Q D, Watanabe K, Taniguchi T, Cava R J, Jarillo-Herrero P 2018 *Science* **359** 76
- [53] Schmidt T L, Rachel S, von Oppen F, Glazman L I 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 156402
- [54] Väyrynen J I, Goldstein M, Glazman L I 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 216402
- [55] Väyrynen J I, Pikulin D I, Alicea J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 106601
- [56] Roth A, Brüne C, Buhmann H, Molenkamp L W, Maciejko J, Qi X L, Zhang S C 2009 *Science* **325** 294
- [57] Du L, Knez I, Sullivan G, Du R R 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 096802
- [58] Mermin N D, Wagner H 1966 *Phys. Rev. Lett.* **17** 1133
- [59] Haldane F D M 1983 *Phys. Lett. A* **93** 464
- [60] Haldane F D M 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1153
- [61] White S R, Huse D A 1993 *Phys. Rev. B* **48** 3844
- [62] Kenzelmann M, Cowley R A, Buyers W J L, Tun Z, Coldea R, Enderle M 2002 *Phys. Rev. B* **66** 024407
- [63] Affleck I, Kennedy T, Lieb E H, Tasaki H 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 799
- [64] Pollmann F, Berg E, Turner A M, Oshikawa M 2012 *Phys. Rev. B* **85** 075125
- [65] Wang Z, Li Q, Li W, Cai Z 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 237201
- [66] Deng T S, Pan L 2021 *Phys. Rev. B* **104** 094306
- [67] Eigen C, Glidden J A, Lopes R, Cornell E A, Smith R P, Hadzibabic Z 2018 *Nature* **563** 221
- [68] Scheie A, Sherman N E, Dupont M, Nagler S E, Stone M B, Granroth G E, Moore J E, Tennant D A 2021 *Nat. Phys.* **17** 726
- [69] Jepsen P N, Amato-Grill J, Dimitrova I, Ho W W, Demler E, Ketterle W 2020 *Nature* **588** 403
- [70] David D, Rubio-Abadal A, Ye B, Machado F, Kemp J, Srakaew K, Simon Hollerith S, Rui J, Gopalakrishnan S, Yao N Y, Bloch I, Zeiher J 2022 *Science* **376** 716

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

Non-Hermitian linear response theory and its applications^{*}

Pan Lei[†]

(*Institute for Advanced Study, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

(Received 2 May 2022; revised manuscript received 19 June 2022)

Abstract

Linear response theory is the theoretical foundation of modern experiments. In particular, it plays a vital role in measuring quantum matters. Its main idea is to take the external probe signal of the physical system as a perturbation and use the correlation function in the unperturbed equilibrium state to depict the response to the observable in system. In recent half century, the linear response theory for the closed quantum system has achieved great success in experiments on quantum matters. In recent years, with the tremendous progress of the precise manipulation of the light-matter interaction, the ultracold atom experiments can precisely control dissipative quantum many-body systems. With the discovery of many novel phenomena, dissipative quantum systems and non-Hermitian physics have attracted extensive attention in theory and experiment. We developed a linear response theory, named non-Hermitian linear response theory, to deal with open quantum systems. This theory takes the non-Hermitian term and quantum noise, which are induced by dissipation, as an external perturbative input, to detect the properties of the quantum system, and relates the time evolution of the observable with the correlation function in the unperturbed state of the system. The non-Hermitian linear response theory provides a new method for distinguishing the exotic quantum phase from the normal phase. The theoretical predictions are highly consistent with the recent experimental results of cold atom systems. This paper will review the non-Hermitian linear response theory and discuss its applications in quantum many-body and time-reversal symmetric quantum systems.

Keywords: non-Hermitian, linear response theory, quantum many-body systems, time-reversal symmetry

PACS: 03.65.Yz, 03.65.Vf, 05.70.Jk, 31.15.xp

DOI: 10.7498/aps.71.20220862

^{*} Project supported by the Beijing Outstanding Young Scientist Program, China and the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. 2020M680496).

[†] Corresponding author. E-mail: panlei@mail.tsinghua.edu.cn

非厄米线性响应理论及其应用

潘磊

Non-Hermitian linear response theory and its applications

Pan Lei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 170305 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220862

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220862>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

广义布里渊区与非厄米能带理论

Generalized Brillouin zone and non-Hermitian band theory

物理学报. 2021, 70(23): 230307 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211908>

实验观测非厄米系统奇异点的手性翻转现象

Experimental observation of chiral inversion at exceptional points of non-Hermitian systems

物理学报. 2022, 71(13): 131101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220842>

耗散响应理论及其在开放系统中的应用

Dissipative linear response theory and its applications in open quantum systems

物理学报. 2021, 70(23): 230306 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211687>

非厄米局域拓扑指标的动力学特性

Dynamics of non-Hermitian local topological marker

物理学报. 2021, 70(23): 230309 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211576>

非厄米镶嵌型二聚化晶格

Non-Hermitian mosaic dimerized lattices

物理学报. 2022, 71(13): 130302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220890>

高维宇称-时间对称系统中的信息恢复与临界性

Information retrieval and criticality in high-dimensional parity-time-symmetric systems

物理学报. 2022, 71(13): 130301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220511>