

专题: 非厄米物理前沿

非厄米临界动力学及其在量子多体系统中的应用*

张禧征¹⁾ 王鹏⁴⁾ 张坤亮²⁾ 杨学敏³⁾ 宋智^{2)†}

1) (天津师范大学物理与材料科学学院, 天津 300387)

2) (南开大学物理科学学院, 天津 300071)

3) (重庆邮电大学理学院, 重庆 400065)

4) (中国工程物理研究院研究生院, 北京 100193)

(2022 年 5 月 10 日收到; 2022 年 7 月 6 日收到修改稿)

近些年来, 非厄米与强关联两种元素开始融合并形成物理学中的一个重要研究领域, 相关理论与实验的进展重塑了人们对于物质的理解. 在该领域中, 研究对象并不局限于非厄米元素对多体系统能谱以及本征态性质的影响, 研究者们更加关注对量子态的操纵. 例外点作为非厄米量子力学区别于厄米量子力学中最显著的特征得到了大家广泛的关注. 除了围绕能谱例外点的非厄米拓扑能带理论以及量子探测等最新进展外, 本文重点阐述以能谱例外点为基础的临界动力学现象及其在量子多体系统中的应用. 当系统处于能谱例外点上时, 属于例外点合并子空间中的任意初始态都将投影到体系的合并态上. 基于量子态演化的方向性, 本文回顾了近年来本课题组在量子自旋系统所发现的外场诱导的动力学磁化、横场 Ising 模型中的有限温相变、中心-环境系统中的量子铸模以及非厄米强关联系统中的超导态制备等几个代表性工作, 着重讨论了与例外点相关的新的非平衡量子态制备方法以及探测方案.

关键词: 非厄米系统, 量子多体系统, 例外点**PACS:** 45.50.Jf, 71.10.Fd, 05.70.Jk, 61.20.Lc**DOI:** 10.7498/aps.71.20220914

1 引言

哈密顿量的厄米性是量子力学中的一个重要假设. 它确保了孤立量子系统的几率守恒以及力学可观测量的实数性. 然而, 由于人们所考虑的系统不可避免地与周围环境发生能量、粒子以及信息的交换, 因此人们所观测到的系统概率不守恒现象在自然界中普遍存在. 从历史上来看, 对此类开放系统的研究可以追溯到 Gamow^[1], Siegert^[2], Majorana^[3] 和 Feshbach^[4,5] 的早期工作. 他们考虑了核反应中的辐射衰变, 该衰变可以通过一个与量子态几率衰减相关的非厄米有效哈密顿量来描述, 他们从动力学的角度解释了流向核外的非零几率流. 沿

着这条主线发展起来的理论方法被称为 Feshbach 或 Cohen Tannoudji 投影方法, 其在后续介观物理以及原子和分子物理学研究领域得到了广泛的应用. 另一方面, 由于单粒子的量子力学与经典波动方程的数学形式等价^[6], 非厄米的描述可以被应用到不同的非保守经典物理系统中去. 这些非保守的经典系统提供了一个在不同物理领域中 (如光学、光子学、电子电路、机械系统、腔光力学系统、生物输运、声学以及流体) 研究非传统波动现象的理想平台. 由于波的本质以及方程的数学等价性, 固体物理中的能带理论可以被直接推广到具有周期性结构的经典系统中. 最近, 由于非厄米量子力学与经典系统的这种相关性, 传统凝聚态物理中的拓扑能带概念已经被扩展到非厄米体系中, 这直接

* 国家自然科学基金 (批准号: 11975166, 11874225, 12047547) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: songtc@nankai.edu.cn

导致了一系列超越厄米能带理论现象的发现^[7].

随着实验上量子相干控制技术的进步, 量子光学领域还发展出了一种处理开放量子系统的理论方法. 基于此, 人们可以在实验上高度可调的领域中探寻少体物理机理^[8]. 相比之下, 量子物理学中另一个非常有趣的现象是当系统中存在大量相互作用粒子时所展现出的集体动力学行为^[9]. 原子、分子和光学的最新实验进展已经使得人们能够在多体领域中探索量子开放系统. 从这个角度来看, 这些进展为曾经被认为只是出于基本理论建设以及学术兴趣的早期理论研究提供了新的视角, 如非么正量子场论中的李-杨奇点等^[10]. 从理论上来讲, 此类开放系统在马尔可夫近似下由主方程描述. 系统与环境之间耦合导致了与量子跳跃项 (quantum jump) 相关的 Lindblad 耗散算符的出现, 其代表在环境的影响下系统偏离自身的么正演化行为. 真正的非厄米量子系统恰是来源于系统与环境的相互作用. 当量子跳跃项发生作用的时间小于系统的特征时间时, 主方程中的量子跳跃项可以忽略, 此时主方程与薛定谔方程等价. 但是描述系统动力学的哈密顿量不再具有厄米性而具有非厄米性. 从算符的角度来讲, 算符的演化应当满足郎之万方程. 究其本质而言, 非厄米哈密顿量就是郎之万方程所对应的有效哈密顿量, 它是利用海森伯方程在 Weisskopf-Wigner 近似下推导郎之万方程的直接结果. 近些年来, 探究非厄米哈密顿量与开放系统之间的联系这一课题, 引起了很多国内外理论与实验组的重点关注^[11–22]. 另一方面, 对于系统的测量过程, 究其本质而言也是一个系统与环境的相互作用过程. 非么正的微扰也可以显著地改变系统潜在的动力学现象, 一个典型的例子就是所谓的连续量子芝诺效应^[23]. 在此现象中, 系统与测量仪器 (环境) 之间的耦合足够强以至于可以抑制量子态之间的隧穿概率 (即所谓的量子跃迁). 这种抑制机制背后的物理也可以通过分析有效非厄米哈密顿量的能谱特性来得到. 连续量子芝诺效应通常表现为其复本征值的虚部被抑制^[24–27]. 这一特征在量子少体以及多体系统中鲜有发现, 而后者可以导致更丰富的物理现象, 如粒子间关联的增强、量子临界点的移动^[28,29]、非阿贝尔规范场工程、晶格约束诱导的多带效应^[30,31]、以及非稳定量子态的长弛豫过程^[32–39].

近十年来, 从离散非厄米哈密顿量出发探究其

能谱及本征态的基本性质已经成为当下非厄米研究领域的前沿问题. 除了能谱结构的特殊性质, 非厄米系统还表现出许多在厄米系统中从未出现过的特殊动力学行为, 其中一个显著特征是临界动力学^[40–47]. 这种特殊动力学行为以非厄米系统中的例外点为基础^[47–54]. 所谓例外点是指非厄米系统中本征态的合并, 其导致系统希尔伯特空间的不完备. 因此, 非厄米哈密顿量在此时不能够被对角化. 这一非厄米所独有的行为显著区分于厄米系统中能级的简并现象, 简并不会导致希尔伯特空间的缺失. 狄拉克概率不守恒及例外点的存在造就了非厄米系统不同于厄米系统的特殊动力学行为. 虽然基于例外点的相关非平衡物理在单体系统中得到了深入的研究^[55,56], 但在多体系统中则较少涉及. 可以肯定的是非厄米性和相互作用之间的结合必定会产生新奇的量子多体效应, 并且可以显著地改变厄米物理中已经确立的宏观集体激发行为^[37].

本综述简要总结了近年来本课题组在非平衡量子多体物理方面的几个代表性工作, 着重讨论与非厄米例外点相联系的非平衡多体物态的制备. 本文涉及的非厄米哈密顿量不仅可以在短时间内很好地捕获非平衡系统的动力学特征, 而且可以很好地与量子跳跃项一起决定量子态演化的一条量子轨迹^[57]. 由于密度矩阵可以被视为纯态在经典概率下的叠加, 那么通过对所有可能的量子轨迹进行加权便可以得到密度矩阵在量子主方程下的演化. 因此研究非厄米哈密顿量在例外点附近的动力学特性为在开放系统中发现奇特的量子态有着重要的理论意义. 本文第 2 节首先基于厄米系统的简并子空间, 给出构建具有例外点的非厄米非平庸哈密顿量的一般方法. 以此为基础, 阐明非厄米系统在例外点时的一般演化规律, 并揭示具有不同阶数例外点下系统所独有的动力学规律. 第 3 节主要侧重于将第 2 节发展的非厄米临界动力学理论应用到具体的多体系统. 具体来讲: 第 3.1 节介绍自旋系统中由临界外场诱导的高阶例外点, 并探讨铁磁海森伯系统自发磁化过程以及在时间域上形成的磁滞回线^[58]. 第 3.2 节着重讨论横场伊辛模型对于非局域外场的动力学响应. 阐明在有限温下, 外场所诱导的能级合并现象是系统保持零温相图的关键^[59]. 第 3.3 节回顾了通过合理设置中心-环境系统的非厄米耦合形式, 以时间演化为基础, 在中心系统中制备非平庸拓扑物态的量子铸模方法^[60]. 第 3.4 节

讨论了非平衡多体系统中临界动力学演化框架下的 η 对态制备方案^[61]. 最后对非厄米临界动力学理论进行总结和展望.

2 非厄米临界理论

本节首先通过简并厄米模型给出具有例外点的非厄米模型的一般构建方法, 在此基础上探讨例外点系统中态的演化规律.

2.1 具有例外点的非厄米模型的构建

一般情况下, 一个处于例外点的系统可以通过调整非厄米参数 (如复数势、复数磁通、复数相互作用及不等幅跳跃) 得到. 在例外点附近的系统表现出能级排斥现象^[47]. 超越例外点时, 系统将经历实数能级向复数能级的转换. 参数临界值通常是某个超越方程的解, 并且例外点系统对复参数非常敏感. 因此, 在实验中使一个系统精确地位于例外点并不容易. 本节将提出一种基于能谱简并点建立例外点系统的一般性理论, 利用这种理论得到的例外点对非厄米参数的强弱程度不敏感.

考虑如下形式的非厄米哈密顿量:

$$H = H_0 + H', \quad (1)$$

该哈密顿量可以分成两部分, 即厄米部分和非厄米部分:

$$H_0 = (H_0)^\dagger, \quad H' \neq (H')^\dagger. \quad (2)$$

定理 当以下条件满足时, 哈密顿量 $H = H_0 + H'$ 的能谱中一定拥有例外点:

1) H_0 有二重简并态 $|A\rangle$ 与 $|B\rangle$, 其对应的能量为 E ;

2) $|A\rangle$ ($|B\rangle$) 是哈密顿量 $H(H^\dagger)$ 能量为 E 的非简并本征态.

证明 对于非厄米哈密顿量 H , 其本征态的正交性无法保证, 通常从数学上引入由 H 的本征态和 H^\dagger 的本征态组成的一组双正交基矢来对 H 做研究. 常规情况下, H 本征值为 E 的本征态与 H^\dagger 本征值为 E^* 的本征态可以被双正交归一化, 即它们的交叠可以被归一化为 1; 在例外点处, 这组本征态无法被双正交归一化, 它们的交叠为 0. 基于 $H(H^\dagger)$ 的假设, 对于两个态 $|A\rangle$ 和 $|B\rangle$:

$$H|A\rangle = E|A\rangle, \quad H^\dagger|B\rangle = E|B\rangle, \quad (3)$$

这意味着两个态 $|A\rangle$ 和 $|B\rangle$ 自发双正交, 其双正交模

为 $\langle B|A\rangle$. 条件 1) 表明 $\langle B|A\rangle = 0$. 根据非厄米量子力学的相关理论^[62], 如果 $\langle B|A\rangle = 0$, 则 $|A\rangle$ 是 H 的合并态, 即哈密顿量 H 拥有合并态为 $|A\rangle$ 的例外点. 这清楚地表明: 如果一个厄米系统 H_0 和一个非厄米系统 $H(H^\dagger)$ 具有共同本征态 $|A\rangle(|B\rangle)$, 对应能量都为 E , 并且 $|A\rangle(|B\rangle)$ 对于 H_0 简并但对于 $H(H^\dagger)$ 不简并, 则 H 具有例外点. 该定理有两个明显的优势: 首先, 定理对于 H_0 的具体形式没有任何要求, 对于非相对论和相对论、连续和离散的哈密顿量都成立, 不需要做矩阵的对角化就可以得到系统的例外点. 其次, 围绕例外点的动力学一般需要明确系统合并态的物理性质. 一般非厄米哈密顿量的合并本征态由于依赖系统非厄米元素的具体形式而变得非常复杂. 该定理则直接指明合并态为相关厄米系统的简并态, 这为后续通过非厄米临界动力学制备具有新奇性质的目标量子态提供了理论基础. 作为一个简单的特例, 将其应用于紧束缚模型, 根据上述两个条件, $H'|A\rangle = 0$, $(H')^\dagger|B\rangle = 0$, 就可以发现满足此条件的 H' 所具有的最简形式是非对称跳跃项, 即 $\kappa a_i^\dagger a_j$ ($i \neq j$), 这里 a_i 和 a_j 是费米子或玻色子算符. 当 $a_j|A\rangle = 0$ 且 $a_i|B\rangle = 0$ 时, 以上两个条件成立. 这意味着两个态 $|A\rangle$ 和 $|B\rangle$ 在格点 j 和 i 处有零点^[63].

2.2 例外点动力学

例外点的存在导致系统的哈密顿量矩阵不能被对角化, 但是总可以通过相似变换将其约化为一个具有相同本征值的约当块 (Jordan block). 考虑一个具有 2 阶例外点的非厄米矩阵:

$$H = \begin{pmatrix} i\gamma & \gamma \\ \gamma & -i\gamma \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其只具有一个能量 $E = 0$, 形式为 $|\psi\rangle = (i \ 1)^T$ 的合并本征态. 在相似变换

$$V = \begin{pmatrix} i & 1/\gamma \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

的作用下, 非厄米矩阵 H 可以变换为约当块的标准形式, 即

$$h = V^{-1}HV = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然对于一个含有 n 阶例外点的非厄米哈密顿量, 其必然可以通过相似变换转化为一个 n 阶的约当块形式. 因此, 系统在例外点上的动力学行为将主

要由约当块的阶数来决定. 研究一个定义在 N 维复数空间的约当块 \mathbf{M} , 其矩阵元为 $(\mathbf{M})_{i,j} = \lambda \delta_{i,j} + \delta_{i+1,j}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). 这里 $\delta_{i,j}$ 为克罗内克符号,

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (6)$$

该矩阵有且仅有 1 个能量为 λ 的合并本征态 ψ_c , 相应的矩阵元为 $(\psi_c)_{i,1} = \delta_{i,1}$. 该矩阵的时间演化算符可以写为 $\mathbf{U} = \exp\{-i\lambda t\} \exp\{-i\mathbf{D}t\}$, 其中 \mathbf{D} 为 N 阶幂零矩阵, 满足如下性质:

$$(\mathbf{D}^n)_{i,j} = \delta_{i+n,j}, \quad (7)$$

从 (7) 式可以看到, 当 $n > N - 1$ 时, \mathbf{D}^n 为零矩阵. 利用这一性质, 算符 \mathbf{U} 的矩阵元可以表示为

$$(\mathbf{U})_{p,q} = e^{-i\lambda t} \frac{(-it)^{q-p}}{(q-p)!} h(q-p), \quad (8)$$

其中

$$h(q-p) = \begin{cases} 1, & q \geq p \\ 0, & q < p \end{cases} \quad (9)$$

为阶跃函数. 考虑一个初始态列向量 ψ_0 , 其矩阵元为 $(\psi_0)_{i,1} = c_i$. 在时间演化算符 \mathbf{U} 的作用下, t 时刻的演化态的矩阵元可以表示为

$$(\psi_t)_{l,1} = \sum_{n=l}^N e^{-i\lambda t} \frac{(-it)^{n-l}}{(n-l)!} c_n, \quad (10)$$

容易看出, $c_N = 0$ 时, ψ_t 不含 t^{N-1} 项; $c_N = c_{N-1} = 0$ 时, ψ_t 不含 t^{N-1} 以及 t^{N-2} 项. 换言之, 对于初始态含有最高 c_n 不为 0 的态来说, ψ_t 含有的 t 的最高次幂为 $n-1$, 相应的狄拉克概率含有的 t 的最高次幂为 $2(n-1)$. 这说明无论初始态如何选取, 当考虑长时间演化时, $(\psi_t)_{l,1}$ 将始终含有 t 的最高次幂, 其成分在演化态中随着时间的推移将占据主导地位^[61]. 这同时表明在例外点上, 态的演化具有方向性, 即指向系统的合并本征态 ψ_c . 这里需要指出的是例外点动力学是一种特殊的非平衡动力学, 其最终稳态是非厄米系统的合并本征态, 这种非厄米方向演化性与非平衡动力学中的稳态有着本质的不同. 在非平衡动力学中, 稳态意味着物理可观测量在长时间平均下保持不变, 但是其随时间变化呈现出围绕某些定值的周期振荡行为, 而非厄米临界动力学在经过特定的弛豫时间后, 任意的初始态完全投影到合并态中, 相应的物理可观测量将保持定值. 本文的后半部分将利用此性质在不同的量子多体系统中, 发展临界量子态操控的方法, 以及探

究其背后有趣的物理图像.

3 非厄米临界理论在多体系统中的应用

本节将回顾本课题组基于非厄米临界动力学演化规律在多体系统中发展的一些新理论与新方法. 主要围绕非厄米局域外场下量子自旋模型中的动力学磁化、有限温量子相变探测、中心-环境系统中多体拓扑物态制备以及 Hubbard 系统中超导对态制备 4 个方面展开论述.

3.1 非厄米自旋模型中的动力学磁化

海森伯模型作为描述 Hubbard 模型在半满填充时基态以及低能激发态行为的有效模型在量子磁性理论中取得了巨大的成功. 随着冷原子实验及单格点分辨技术的进展, 人们已经可以在光晶格超冷原子实验中模拟海森伯模型并成功实现了对系统磁性的操纵. 另一方面, 量子模拟实验中所涉及到的系统基本上都是耗散系统, 描述其动力学行为的有效哈密顿量都不再具备厄米特性. 系统的耗散不可避免地导致量子态的退相干行为. 然而最近的研究表明, 人们可以通过有效的耗散去实现对量子态的测量以及操纵、制备. 这些新的思想为耗散系统中操纵量子态奠定了重要基础^[29,64,65]. 受此启发, 我们详细研究了外场下自旋系统的动力学行为, 其核心在于临界外场可以诱导单个自旋的磁化. 如果系统不存在相互作用, 那么一个全局的复数磁场可以诱导所有的自旋沿着特定的取向. 当系统存在相互作用时, 局域磁场与相互作用之间的协作可以诱导系统中所有的自旋以集体运动的形式激发, 其基本机制可由图 1 表示. 这一现象与厄米外场有着重要的区别, 在厄米系统中, 磁场只会导致自旋沿着布洛赫球做周期性的旋转.

具体来讲, 考虑局域复数外场下的自旋系统, 其哈密顿量为

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1, \quad (11)$$

$$\mathbf{H}_0 = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j, \quad (12)$$

$$\mathbf{H}_1 = g_1 \mathbf{h} \cdot \mathbf{s}_1, \quad (13)$$

其中 $\mathbf{s}_i = (s_i^x, s_i^y, s_i^z)$ 是定义在第 i 个格点上的自旋算符, 复数磁场为 $\mathbf{h} = (1, -i\gamma, 0)$ 以及 $J_{ij} > 0$. 此时, \mathbf{H}_0 代表铁磁海森伯哈密顿量. 由于 \mathbf{H}_0 具有

$SU(2)$ 对称性, 即 $[\mathbf{H}_0, \mathbf{s}^2] = [\mathbf{H}_0, \mathbf{s}_z] = 0$, 那么它的基态是 $N+1$ 重简并. 基态 $\{|G_n\rangle\}$ 可以通过 \mathbf{s}^- 算符作用在铁磁态 $|\uparrow\rangle$ (代表系统所有自旋都向沿着 $+z$ 的方向) 上来得到, 即 $|G_n\rangle = \left(\sum_i \mathbf{s}_i^-\right)^{n-1} |\uparrow\rangle$, ($n=1, 2, \dots, N+1$). \mathbf{H}_1 的存在破坏了 \mathbf{H}_0 的 $SU(2)$ 对称性进而使得相应的简并能级退简并. 为了后续讨论的简化, 给出 \mathbf{H}_1 在 $s=N/2$ 子空间 $\{|G_n\rangle\}$ 上的矩阵表示:

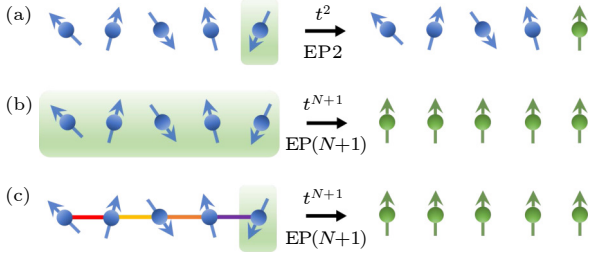


图 1 自旋在 (a) 局域复数磁场、(b) 各向同性全局复数磁场及 (c) 粒子与粒子相互作用与局域复数磁场共同作用下的动力学演化示意图. 复数磁场通过绿色阴影部分标注. 自旋与自旋的非各项同性相互作用 J_{ij} 通过不同的颜色来区分. 根据非厄米临界动力学的理论, 图 (a) 中含有一个二阶例外点, 对应两个简并态合并. 图 (b) 和图 (c) 有 N 个简并态合并对应 N 阶例外点. 从图中可以看到, 局域的复数磁场可以通过与相互作用的协作来影响系统自旋的整体取向. Fig. 1. Schematics of spins subjected to (a) a local complex field, (b) a global complex field, and (c) a local complex field and interaction. The complex magnetic field is shaded green. The couplings between different spins are denoted by different colors representing inhomogeneous coupling J_{ij} . Two states coalesce in panel (a) and N states coalesce in panels (b) and (c). Local complex field only affects local spin without interaction, but can affect globally with interaction.

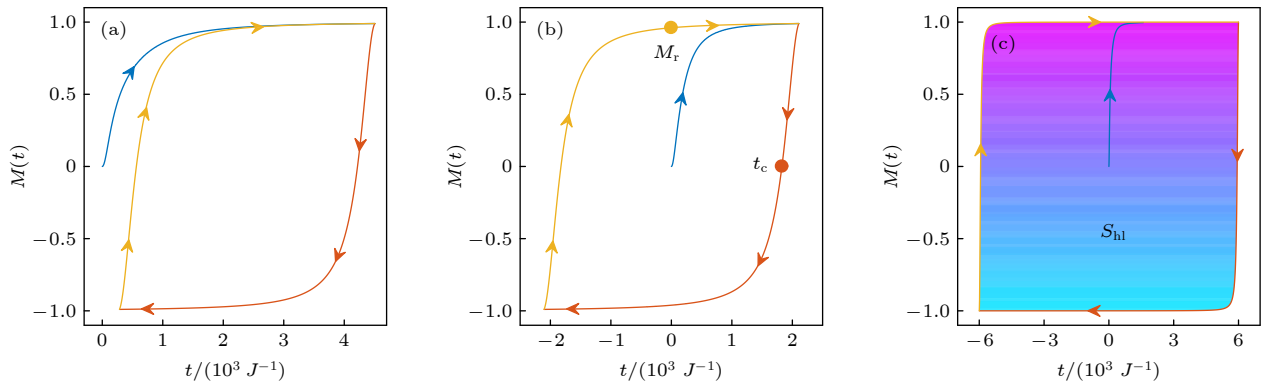


图 2 (a) 对于初始态 $|\Psi_I(0)\rangle$ 在时间域上的磁滞回线; (b), (c) 对于初始态 $|\Psi_{II}(0)\rangle$ 的磁滞回线. 这里局域的复数外场被施加到格点 1 上. 其强度在图 (a) 中为 0.02, 在图 (b) 和图 (c) 中为 0.1. 弛豫时间分别为 (a), (b) $t_f = 2 \times 10^3 J^{-1}$ 及 (c) $t_f = 3 \times 10^3 J^{-1}$

Fig. 2. Hysteresis loops for the initial state $|\Psi_I(0)\rangle$ in (a) and $|\Psi_{II}(0)\rangle$ in (b), (c). The critical local complex field g_1 is 0.02 in panels (a) and (b), and 0.1 in panel (c). The relaxation time is $t_f = 2 \times 10^3 J^{-1}$ in panels (a) and (b), and $t_f = 3 \times 10^3 J^{-1}$ in panel (c).

$$W_{m,n} = g_j \sqrt{(N+1-m)m} [(1+\gamma)\delta_{m+1,n} + (1-\gamma)\delta_{m,n+1}] / (2N). \quad (14)$$

根据文献 [58], 这在数学上与非厄米超对称立方体结构等价. 当 $|\gamma| = 1$ 时, 系统的所有简并态合并为 $|\uparrow\rangle$, 形成 $N+1$ 阶的高阶例外点. 在子空间 $\{|G_n\rangle\}$ 中, 对于任意的初始态 $\sum_n c_n(0) |G_n\rangle$, 振幅 $c_m(t)$ 可以表示为

$$c_m(t) = c_m(0) + \sum_{n \neq m} (-it/N)^{n-m} (n-m)! h(n-m) \times \left[\prod_{p=m}^{m-1} p(N+1-p) \right]^{1/2} c_n(0). \quad (15)$$

从 (15) 式可以看出, 无论初始态系数 $c_n(0)$ 如何选择, 系统的演化末态中 $c_1(t)$ 的成分最大, 保证了演化的方向性, 即经过一定的弛豫时间, 系统演化到合并态上.

利用这一特性, 通过不同的初始态, $|\Psi_I(0)\rangle = |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow\rangle$ 及 $|\Psi_{II}(0)\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$, 在时间域上实现了磁滞回线, 磁滞回线的高度、宽度、面积等性质可以客观地反映系统的耗散等特征量, 如图 2 所示. 除此之外, 磁滞回线的构型对初始态的选择也非常敏感, 这一事实为在开放系统中的量子探测提供了一种可能的理论方案.

3.2 非零温横场 Ising 模型中的量子相变

量子相变是指系统在零温时的相变现象, 是由量子涨落而非热涨落驱动. 量子相变的发生一般代表着量子多体系统中基态的性质随参数变化发

生突变. 然而, 在实验上系统不可能冷却至零温, 因而在有限温下探测量子相变成为了研究者们长期追求的目标. 基于非厄米临界动力学现象, 在有限温度下, 我们提出利用非厄米非局域外场探测量子相变的动力学方案. 在不同的物质相内, 热态对于非厄米外场的响应不同, 其可以通过施密特回波 (Loschmidt echoes) 的动力学行为来刻画. 该动力学特性对于有限温系统依然成立, 这一发现不仅为有限温下的体边对应原则提供了依据, 而且为人们理解非零温下量子自旋系统中的相变提供了新的动力学视角.

这里简要地介绍一下该工作涉及的开放边界条件下量子自旋系统的能谱及其在非厄米外场下的临界动力学现象. 考虑如下的横场 Ising 模型, 其哈密顿量为

$$\mathbf{H} = -J \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + g \sum_{j=1}^N \sigma_j^z, \quad (16)$$

其中 σ_j^α ($\alpha = x, y, z$) 是格点 j 上的泡利算符, 非负的参数 g 代表横场强度. 为了简明起见, 在下面的讨论中耦合强度取为 $J = 1$. 该模型存在两种对称性: 第一种是宇称对称性, 即 $[p, \mathbf{H}] = 0$, 其中 $p = \prod_{j=1}^N (-\sigma_j^z)$. 在周期边界条件下, 即 $\sigma_j^z = \sigma_{j+N}^z$, 系统可以精确求解. 在零温时, 系统在 $g = 1$ 的地方经历了铁磁到顺磁相的量子相变. 一般来说, 在热力学极限下, 模型的性质对边界条件不敏感. 然而当考虑开放边界条件的时候, 模型会在铁磁相 $g < 1$ 的地方涌现出另一种新的对称性. 为了清楚起见, 定义非局域算符

$$D = \frac{1}{2} \sqrt{1 - g^2} \sum_{j=1}^N g^{j-1} D_j, \quad (17)$$

其中

$$D_j = \prod_{l < j} (-\sigma_l^z) \sigma_j^x - i \prod_{l < N-j+1} (-\sigma_l^z) \sigma_{N-j+1}^y. \quad (18)$$

在热力学极限下, 其满足对易关系 $[D, \mathbf{H}] = [D^\dagger, \mathbf{H}] = 0$. 从这个角度来讲, 系统在 $g < 1$ 的相中满足另一种对称性. 除此之外, D 算符满足费米子算符的对易关系, 即 $\{D, D^\dagger\} = 1$ 及 $D^2 = (D^\dagger)^2 = 0$, 且通过 Jordan-Wigner 变换可以和 Kitaev 链中的边缘模算符相联系 [66]:

$$D \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{1 - g^2} \sum_{j=1}^N \left[(g^{j-1} + g^{N-j}) c_j^\dagger + (g^{j-1} - g^{N-j}) c_j \right]. \quad (19)$$

这里需要指出的是, 算符 D 是关于 g 的函数, 因此依赖于模型. D 与 \mathbf{H} 的对易关系保证了简并子空间的存在. 在 $g < 1$ 的区域, 定义能量为 E_n 的简并态 $\{|\psi_n^+\rangle, |\psi_n^-\rangle\}$ (这里 \pm 代表宇称算符的本征值, 即 $p|\psi_n^\pm\rangle = \pm|\psi_n^\pm\rangle$), 在 D 算符的作用下我们有如下结论:

$$D|\psi_n^+\rangle = |\psi_n^-\rangle, D^\dagger|\psi_n^-\rangle = |\psi_n^+\rangle, \quad (20)$$

$$D^\dagger|\psi_n^+\rangle = D|\psi_n^-\rangle = 0. \quad (21)$$

由于这种简并满足下面两个条件: i) 二重简并存在于全能谱 (如图 3 所示); ii) 在外场 g 存在无序的时候依然存在, 代价是 D 算符的具体形式需要重新定义. 我们将其称为拓扑的类 Kramers 简并. 如果将 D 算符当作非厄米外场, 那么其将会使得 $0 < g < 1$ 区域中包含基态在内的所有的二重简并能级合并. 具体来说, 考虑非厄米哈密顿量 $\mathcal{H} = \mathbf{H} + \kappa D$. 在铁磁相 $0 < g < 1$ 的区域, 任何一对能量为 E_n 的简并态 $\{|\psi_n^+\rangle, |\psi_n^-\rangle\}$ 所张成的子空间中, 哈密顿量的矩阵表示为

$$\mathcal{H}_n = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ \kappa & E_n \end{pmatrix}. \quad (22)$$

显然这是一个约当块的结构, 其合并态为 $|\psi_n^-\rangle$. 按照第 2 节中关于例外点动力学的理论, 在铁磁相中的动力学由以下时间演化算符主导:

$$U(t) = e^{-i\mathcal{H}t} = \prod_n U_n(t), \quad (23)$$

$$U_n(t) = e^{-iE_n t} [1 - i(\mathcal{H}_n - E_n)t], \quad (24)$$

因此在时间演化算符的长时间作用下, 任意一个初始态投影到分量 $|\psi_n^-\rangle$. 当系统处在顺磁相中 $g > 1$ 的区域中时, 系统不存在这种类 Kramers 简并结构, 因此外场不会诱导合并本征态进而系统的演化态只会在低能激发态附近振荡. 由于这种简并性涉及到系统的全能谱范围中, 所以即使是考虑有限温下的动力学演化, 其依然成立. 系统在不同量子相中的显异动力学行为可以被用来在有限温度下探测量子相变, 为了达成这一目的, 引入施密特回波:

$$L(t) = \left[\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho(0)} \rho(t) \sqrt{\rho(0)}} \right], \quad (25)$$

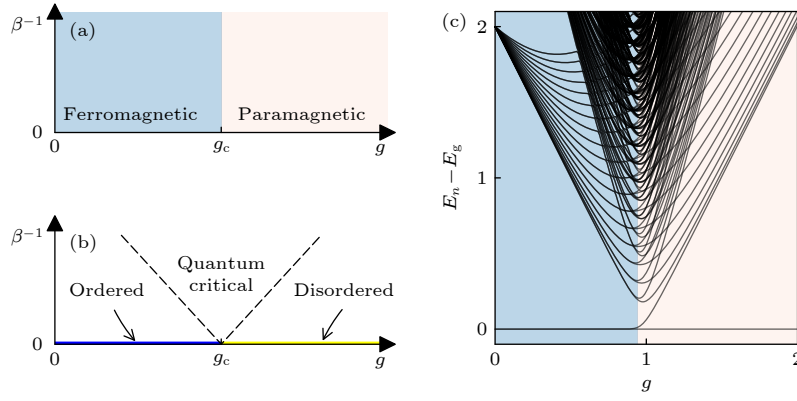


图 3 (a) 通过施密特回波所给出的相图; (b) 关联函数所给出的相图, 这里 β^{-1} 是温度, g_c 是量子相变点; (c) 有限横场 Ising 模型低能激发谱随着参数 g 的变化. E_g 代表基态能量. 其他系统参数为 $N = 50$ 和 $J = 1$. 系统的不同相通过两种不同颜色来区分. 通过图 (c) 可以发现, 当 $g < 1$ 时, 系统的能谱都变为二重简并

Fig. 3. (a) Phase diagram detected from the Loschmidt echoes in this work. (b) Phase diagram studied in term of correlation function in the work of Sachdev et al. Here β^{-1} is the temperature and g_c is the quantum critical point. (c) Spectrum of the low-lying states for a finite quantum Ising chain as a function of g , obtained numerically through exact diagonalization. E_g is the ground-state energy. System parameters: $N = 50$ and $J = 1$. The energy gap closes at a quasicritical point, indicated by the boundary of the two shaded areas. Notably, all energy levels become twofold degeneracy simultaneously at one point, protected by the symmetry of the quasi-zero-mode operator D .

其中, $\rho(t) = e^{-i\mathcal{H}t}\rho(0)e^{i\mathcal{H}^\dagger t}$. 考虑初始态为热态 $\rho(0) = e^{-\beta H}/\text{Tr}(e^{-\beta H})$, 可以证明^[59]: 经过比较长的时间演化后, 当系统处于顺磁相时, $L(t) \approx 1$; 当系统处于铁磁相时, $L(t) \approx 0.5$. 这一结果对于初始温度不敏感 (如图 4 所示), 因此该非厄米探测方案为理解与探测有限温相变提供了新的理论视角.

3.3 基于非厄米临界动力学的量子铸模

本节提出的量子铸模方案, 即通过平庸初始态的淬火演化来按需制备特殊量子态. 淬火动力学将原系统的基态在新的哈密顿量下进行演化, 通过施加驱动场或者将能量和粒子从外部储库泵浦到系统等方式使系统处于非平衡状态, 是一类非常典型的远离平衡态的过程, 并具有非常广阔的应用场景.

基于中心-环境系统 (如图 5 所示), 利用非厄米临界动力学中演化的单向性, 铸造一个稳定的非平庸量子态是本方案的核心内容. 我们考虑含时的非厄米哈密顿量

$$H = H_c + H_s + H_{\text{in}}, \quad (26)$$

其中

$$H_c = \sum_{i,j=1}^N \left(T_{ij} a_i^\dagger b_j + A_{ij} a_i^\dagger a_j + B_{ij} b_i^\dagger b_j + \text{H.c.} \right), \quad (27)$$

以及

$$H_s = \mu(t) \sum_{j=1}^N d_j^\dagger d_j, H_{\text{in}} = \gamma \sum_{j=1}^N b_j^\dagger d_j, \quad (28)$$

这里 a_j , b_j 以及 d_j 是费米子算符, $\mu(t) = \mu_0 + \frac{W}{2} \times \cos(\omega t)$ 是周期性驱动的化学势. 参数 $\{T_{ij}, A_{ij}, B_{ij}\}$

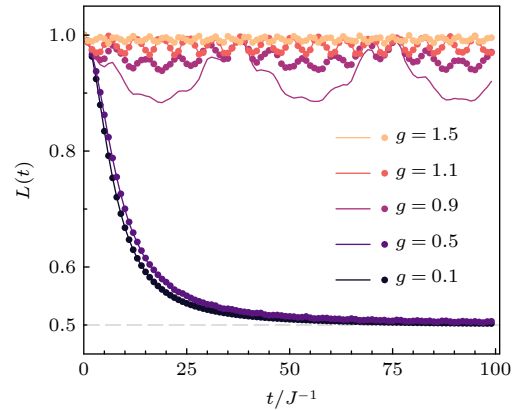


图 4 施密特回波随时间变化曲线. 线和点分别代表不同的温度, 即 $\beta = 5$ 和 $\beta = 10$. 其他系统参数为 $N = 10$, $\kappa = 0.1$ 及 $J = 1$. 施密特回波在不同物质相内的动力学行为不同, 最终趋近于 1.0 和 0.5 两个定值. 需要注意的是这个结果独立于初始热态的温度. 因为 D 依赖于参数 g , 并且其在 $g > 1$ 时发散, 所以在这里的数值模拟中, 非厄米外场只取 D 的主导项, 即 $\mathcal{H} = H + \kappa D_1$

Fig. 4. Loschmidt echoes of different g values. The lines and dots represent the Loschmidt echoes for $\beta = 5$ and $\beta = 10$, respectively. Other parameters: $N = 10$, $\kappa = 0.1$, and $J = 1$. The profiles of the Loschmidt echoes in the two regions are distinct, independent of the temperature of the initial thermal states, and converge to 1.0 and 0.5, respectively.

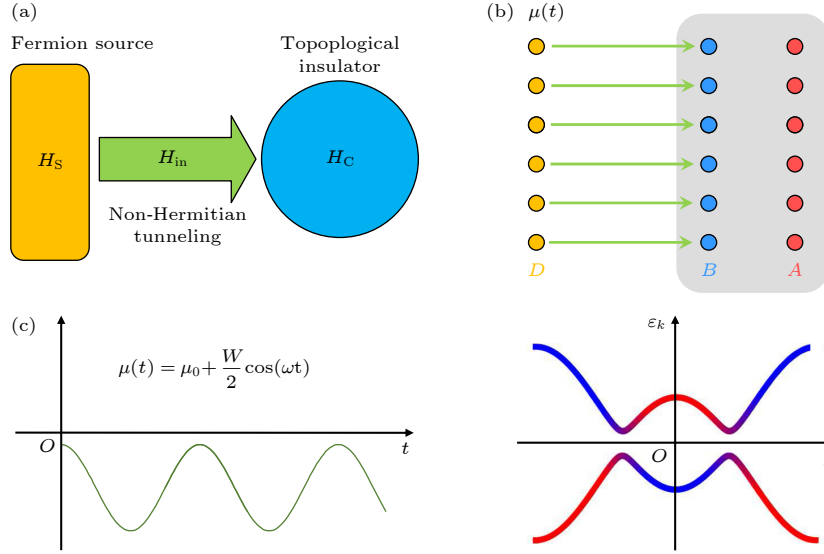


图 5 量子铸模系统示意图 (a) 系统由两部分组成, 中心系统 H_C 和源系统 H_S . H_{in} 为非厄米项, 表示 H_C 和 H_S 之间的连接, 并承担从 H_S 向 H_C 单向传输费米子的任务. (b) 该方案的紧束缚模型, 包含三种格点 A , B 和 D . 嵌入阴影区域的晶格 A 和 B (红色和蓝色实心圆) 是拓扑绝缘体, 而晶格 D (黄色实心圆) 是一个无跳跃的平带系统, 但具有振荡的化学势. 绿色箭头表示从 D 点到 B 点的单向跳跃. 本工作的目的是通过时间演化实现以下过程: 初始时刻 D 格点填满粒子, 而 A 和 B 格点无粒子; 最终末态是 H_C 半满填充的基态. (c) 动力学过程的基本机制. 在瞬时 t_k , H_S 的化学势和 H_C 的能级共振导致例外点. 相应的例外点动力学允许费米子在简并能级之间完全转移, 并且在长时间极限下, 这样的动力学过程发生在每个 \mathbf{k} 子空间. H_C 的能带颜色表示能带反转, 说明能带可以是拓扑绝缘带. 预计 H_C 的下带可以完全填充

Fig. 5. Schematics for the system and process of quantum mold casting: (a) The system consists of two parts, central system H_C and source system H_S . The target state is the ground state of H_C , which can be topologically non-trivial or not. H_S is a topologically trivial system, providing the supply of fermions. Both H_C and H_S are Hermitian, while H_{in} is non-Hermitian, representing the connection between H_C and H_S , and taking the role to transport fermions unidirectionally from H_S to H_C . (b) A tight-binding model for the scheme, which contains three sets, A , B , and D . Lattices A and B (red and blue filled circles) embedded in the shadow area is topological insulator, while lattice D (yellow filled circle) is a flat-band (hopping-free) system but with oscillating chemical potential. Green arrows represent unidirectional hopping from D to B lattices. The aim of this work is to realize the following process via time evolution. Initially, D lattice is fully filled, while A and B are empty. The final state is expected to a half-filled ground state of H_C . (c) The underlying mechanism of the dynamic process. At instant t_k , the chemical potential and energy levels of H_C are resonant, leading to exceptional points. The corresponding (EP) dynamics allows a complete transfer of fermions between the degenerate energy levels. In the long-time limit, such dynamics occurs at each \mathbf{k} sector again and again. The band color of H_C illustrates the band inversion, indicating that the energy band can be topological insulating band. It is expected the lower band of H_C can be completely filled.

依赖于中心系统 H_C 的构型. 系统的非厄米性来源于中心系统与环境的耦合 H_{in} . 在 Nambu 基矢 $(a_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{k}}^\dagger, d_{\mathbf{k}}^\dagger)$ 下, 系统的布洛赫哈密顿量可以表示为 $H = \sum_{\mathbf{k}} H_{\mathbf{k}}$, 其中

$$H_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}}^\dagger & b_{\mathbf{k}}^\dagger & d_{\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} h_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}} \\ b_{\mathbf{k}} \\ d_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

以及

$$h_{\mathbf{k}} = |\mathbf{B}(\mathbf{k})| \begin{pmatrix} \cos \theta_{\mathbf{k}} & \sin \theta_{\mathbf{k}} e^{-i\varphi_{\mathbf{k}}} & 0 \\ \sin \theta_{\mathbf{k}} e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} & -\cos \theta_{\mathbf{k}} & \gamma_{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & \Delta_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

矢量 $\mathbf{B}(\mathbf{k})$ 可以通过系统参数 $\{T_{ij}, A_{ij}, B_{ij}\}$ 待定,

矩阵元中的其他参数被定义为

$$\cos \theta_{\mathbf{k}} = \frac{B_z(\mathbf{k})}{|\mathbf{B}(\mathbf{k})|}, \quad \tan \varphi_{\mathbf{k}} = \frac{B_y(\mathbf{k})}{B_x(\mathbf{k})},$$

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \gamma/\varepsilon_{\mathbf{k}}, \quad \Delta_{\mathbf{k}} = \mu/\varepsilon_{\mathbf{k}}, \quad \varepsilon_{\mathbf{k}} = |\mathbf{B}(\mathbf{k})|. \quad (31)$$

由于 $\gamma_{\mathbf{k}}$ 的存在, $h_{\mathbf{k}}$ 是一个非厄米矩阵, 其本征态为

$$|\psi_{\mathbf{k}}^+\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_{\mathbf{k}}}{2} \\ e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} \sin \frac{\theta_{\mathbf{k}}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_{\mathbf{k}}^-\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta_{\mathbf{k}}}{2} \\ e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} \cos \frac{\theta_{\mathbf{k}}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|\psi_{\mathbf{k}}^\Delta\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \gamma_{\mathbf{k}} e^{-i\varphi_{\mathbf{k}}} \sin \theta_{\mathbf{k}} \\ \gamma_{\mathbf{k}} (\Delta_{\mathbf{k}} - \cos \theta_{\mathbf{k}}) \\ \Delta_{\mathbf{k}}^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

以及相应的本征能量为

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{\pm} = \pm \varepsilon_{\mathbf{k}}, \quad \varepsilon_{\mathbf{k}}^{\Delta} = \Delta_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}. \quad (33)$$

$\Lambda = \Delta_{\mathbf{k}}^4 + \Delta_{\mathbf{k}}^2 \gamma_{\mathbf{k}}^2 - 2\Delta_{\mathbf{k}}^2 - 2\Delta_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}}^2 \cos \theta_{\mathbf{k}} + \gamma_{\mathbf{k}}^2 + 1$ 是狄拉克内积的归一化系数. 当 $\Delta_{\mathbf{k}} = \pm 1$ (令该时刻 $t = t_{\mathbf{k}}$), $h_{\mathbf{k}}^{\text{EP}}$ 具有例外点, 相应的合并本征态为 $|\psi_{\mathbf{k}}^{\Delta}\rangle = |\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}\rangle$. 考虑系统的时间演化算符

$$U(t) = \exp(-iHt) = \prod_{\mathbf{k}} U_{\mathbf{k}}(t), \quad (34)$$

其中

$$U_{\mathbf{k}}(t) = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_0^t H_{\mathbf{k}}(t') dt' \right], \quad (35)$$

\mathcal{T} 是编时算符. 可以证明 $t = t_{\mathbf{k}}$ 时刻的演化算符 $U_{\mathbf{k}}(t_{\mathbf{k}})$ 在时间演化中起主导作用^[60], 此时

$$U_{\mathbf{k}}(t) \approx \exp[-iH_{\mathbf{k}}(t_{\mathbf{k}})t], \quad (36)$$

其中具有例外点的布洛赫哈密顿量为

$$h_{\mathbf{k}}^{\text{EP}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} \cos \theta_{\mathbf{k}} & \sin \theta_{\mathbf{k}} e^{-i\varphi_{\mathbf{k}}} & 0 \\ \sin \theta_{\mathbf{k}} e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} & -\cos \theta_{\mathbf{k}} & \gamma_{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

可以通过相似变换将其变为标准的约当块形式并满足

$$h_{\mathbf{k}}^{\text{EP}} |\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}\rangle = \pm \varepsilon_{\mathbf{k}} |\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}\rangle, \quad (38)$$

$$A |\psi_{\mathbf{k}}^{\text{a}}\rangle = |\psi_{\mathbf{k}}^{-}\rangle, \quad (39)$$

矩阵

$$A = \left(\frac{h_{\mathbf{k}}^{\text{EP}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} \right)^2 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \frac{\theta_{\mathbf{k}}}{2} \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} \cos \frac{\theta_{\mathbf{k}}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

考虑初始态 $|\psi_{\mathbf{k}}^{\text{a}}\rangle = (0, 0, 1)^T$, 通过临界动力学可以求得相应的演化态为

$$\begin{aligned} |\psi_{\mathbf{k}}^{\text{EP}}(t)\rangle &= \exp(-i h_{\mathbf{k}}^{\text{EP}} t) |\psi_{\mathbf{k}}^{\text{a}}\rangle \\ &= -\frac{\gamma_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} t}{2} [\sin(\varepsilon_{\mathbf{k}} t) + i(1 + 2 \sin^2 \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} t}{2})] |\psi_{\mathbf{k}}^{-}\rangle \\ &\quad + \cos(\varepsilon_{\mathbf{k}} t) |\psi_{\mathbf{k}}^{\text{a}}\rangle \\ &\quad - i \sin(\varepsilon_{\mathbf{k}} t) \left(\frac{h_{\mathbf{k}}^{\text{EP}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} |\psi_{\mathbf{k}}^{\text{a}}\rangle + \frac{\gamma_{\mathbf{k}}}{2} |\psi_{\mathbf{k}}^{-}\rangle \right). \end{aligned} \quad (41)$$

这个结果说明位于源的初始态 $d_{\mathbf{k}}^{\dagger} |0\rangle_{\mathbf{k}}$ ($|0\rangle_{\mathbf{k}}$ 是费米子算符 $a_{\mathbf{k}}$, $b_{\mathbf{k}}$, 以及 $d_{\mathbf{k}}$ 的真空态) 在经过长时间演化后, 由于时间的线性依赖关系, 趋近于合并态 $|\psi_{\mathbf{k}}^{-}\rangle$. 演化算符 $U_{\mathbf{k}}(t)$ 的作用是将位于该子空间中的任意初始纯态投影到 $|\psi_{\mathbf{k}}^{-}\rangle$ 上, 该动力学过程意

味着费米子从环境源到中心系统的完全输运.

基于单向共振接口和例外点动力学这两个核心机制, 如果将具有特殊性质的目标量子态, 设计为复合系统的合并态, 那么对于任意初始态, 在淬灭动力学的作用下, 演化末态都将变为计划制备的目标态. 基于这一理解, 我们在工作^[60]中, 提出了利用非厄米临界动力学在拓扑绝缘体中制备出拓扑绝缘态以及边界态的方案. 相关研究内容丰富了量子态制备方案, 并为单向量子器件的制造带来一些启示.

3.4 Hubbard 模型中局域磁场所诱导的非对角长程序稳态

Hubbard 模型作为描述巡游电子磁性的有效模型在传统凝聚态领域得到了广泛关注, 特别是随着近些年来冷原子实验的进展, Hubbard 模型已经可以通过量子系统进行模拟, 并在实验高度可调的范围内去探讨传统凝聚态领域所未关注的量子态特性. 然而, 冷原子实验中系统不可避免地与外界环境交换能量与信息. 这导致量子态随时间演化的概率不再是一个守恒量, 因此描述该相互作用体系的哈密顿量不再具有厄米性. 为了有效地描述量子态随时间的演化, 人们除了利用主方程的方法去处理该问题以外, 还从非厄米量子力学出发, 基于非厄米的哈密顿量去探讨非厄米性的引入会在多大程度上影响系统的动力学特性. 研究组在 2017 年就对该问题进行了深入的探讨, 特别是对冷原子气体的研究, 我们揭示了该系统中可能存在的碰撞湮灭动力学等特征^[67]. 随着单格点分辨技术的进步, 人们已经可以利用量子气显微镜来探测原子的磁性、超导等特性. 特别是近些年来, 研究者们发展了一系列非平衡态物理的处理办法, 基于 Hubbard 系统中的绝缘态来实现超导. 受此启发, 我们利用系统的 $SO(4)$ 对称性, 基于 η 算符与系统哈密顿量的对易, 发展了一套外场诱导产生 η 对态的动力学方案. 该方案的核心是基于 η 算符的简并子空间, 将临界外场当作微扰, 通过高阶例外点的演化生成 η 对态. 考虑复数外场下的费米 Hubbard 模型, 其哈密顿量为

$$H = H_0 + H_1, \quad (42)$$

$$H_0 = - \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} J_{ij} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + \text{H.c.} \\ + U \sum_{j=1}^{2N} \left(n_{j,\uparrow} - \frac{1}{2} \right) \left(n_{j,\downarrow} - \frac{1}{2} \right), \quad (43)$$

$$H_1 = \sum_j \mathbf{h}_j \cdot \boldsymbol{\eta}_j, \quad (44)$$

其中复数外场 $\mathbf{h}_j = g_j (\lambda/2, \lambda/2, i\gamma)$, 这里 $\{g_j\}$ 代表系统的各项异性. 这里 $\boldsymbol{\eta}_j = (+, -, z)$ 而非 (x, y, z) . $\boldsymbol{\eta}$ 算符遵循李代数, 即 $[\eta_j^+, \eta_j^-] = 2\eta_j^z$ 和 $[\eta_j^z, \eta_j^\pm] = \pm\eta_j^\pm$. 具体形式为

$$\eta_j^+ = \eta_j^x + i\eta_j^y = (-1)^j c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\downarrow}, \quad (45)$$

$$\eta_j^- = \eta_j^x - i\eta_j^y = (-1)^j c_{j,\downarrow} c_{j,\uparrow}, \quad (46)$$

$$\eta_j^z = \frac{1}{2} (n_{j,\uparrow} + n_{j,\downarrow} - 1), \quad (47)$$

由于 $[H_0, \eta_j^\pm] = [H_0, \eta_j^z] = 0$, 因此 $\boldsymbol{\eta}$ 算符的本征值可以作为好量子数将 H_0 划分为不同的子空间. 我们

关注 $\boldsymbol{\eta}$ 配对态所张的子空间 $\{|\psi_{N_\eta}\rangle\}$. 这里 $|\psi_{N_\eta}\rangle = \Omega^{-1} (\eta^+)^{N_\eta} |V_{\text{vac}}\rangle$, 其中 $|V_{\text{vac}}\rangle$ 是费米子算符 $c_{j,\sigma}$ 的真空态, N_η 代表态中 $\boldsymbol{\eta}$ 配对的个数. 为了清楚起见, 重新定义 $\{|N, l\rangle\}$ 为所研究子空间的态矢量, 这里 $|N, l\rangle = \Omega^{-1} (\eta^+)^{N+l} |V_{\text{vac}}\rangle$ 和 $\Omega = \sqrt{C_{2N}^{N+l}}$, 其中 N 与 l 通过下面等式与算符 $\boldsymbol{\eta}^2$ 和 $\boldsymbol{\eta}^z$ 建立起联系:

$$\boldsymbol{\eta}^2 |N, l\rangle = N(N+1) |N, l\rangle, \quad (48)$$

$$\boldsymbol{\eta}^z |N, l\rangle = l |N, l\rangle, \quad l \in [-N, N]. \quad (49)$$

考虑大 U 极限以及 $|\gamma| \rightarrow |\lambda|$ 的条件, 可以将各向同性的外磁场在此空间中表示为

$$H_d = \frac{\lambda G}{4N} \sum_{l=-N}^{N-1} J_l |N, l\rangle \langle N, l+1| + \text{H.c.} \\ + \sum_{l=-N}^N \left(\frac{i\gamma l G}{2N} + \frac{NU}{2} \right) |N, l\rangle \langle N, l|, \quad (50)$$

其中 $G = \sum_j g_j$ 以及 $1/(2N)$ 来源于 $\boldsymbol{\eta}$ 配对态的平移对称性. 当 $|\lambda| = |\gamma|$ 时, 无论局域外场在空间中如

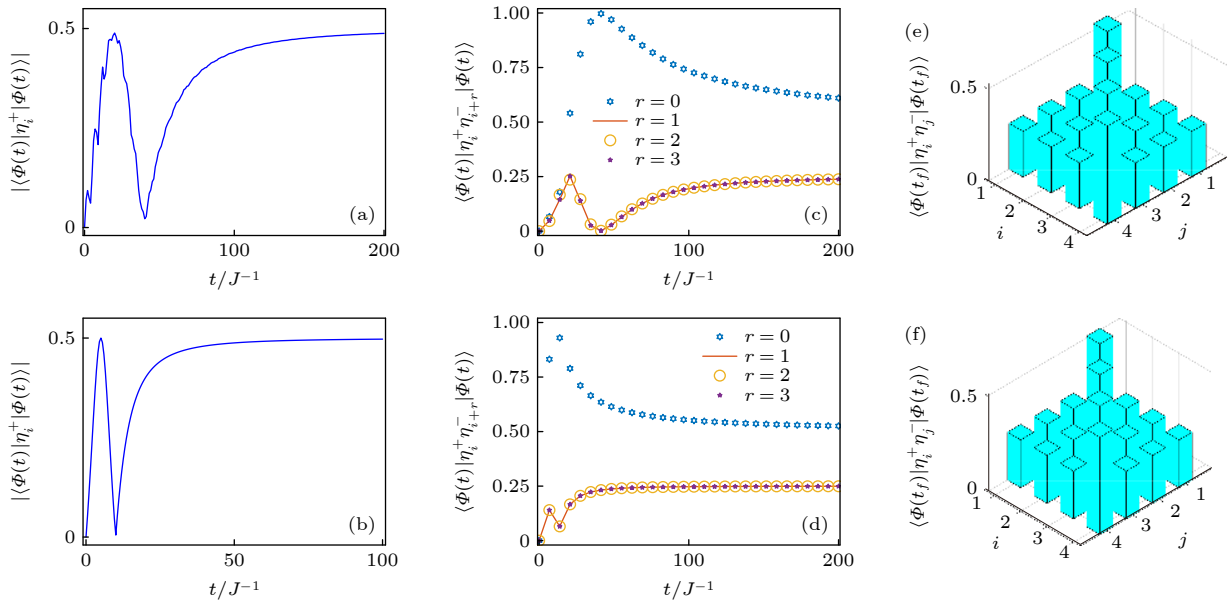


图 6 (a)–(d) 4 格点 Hubbard 模型中关联函数 $|\langle \Phi(t) | \eta_i^+ | \Phi(t) \rangle|$ 以及 $\langle \Phi(t) | \eta_i^+ \eta_{i+r}^- | \Phi(t) \rangle$ 随时间的变化图. 初始态被制备在 H_0 的真空态 $|V_{\text{vac}}\rangle$ 中, 其相互作用强度 $U = 2J$. 随后其运动由外加局域虚数磁场来驱动. 对于图 (a) 和图 (c), 局域虚数磁场为 $g_1 = g = 0.2J$; 对于图 (b) 和图 (d), 系统受到一个各向同性的磁场驱动, 其强度为 $g_j = g = 0.2J$ ($j = 1, \dots, N$). 需要注意的是此时外场 H_1 处于例外点上. (e), (f) 稳态关联函数与相对距离之间的函数曲线. 对于图 (e), 弛豫时间为 $t_f = 400/J$, 而对于图 (f), $t_f = 100/J$. 从图中可以看到当 $i \neq j$ 时, $\langle \Psi(t_f) | \eta_i^+ \eta_j^- | \Psi(t_f) \rangle = 1/4$; 当 $i = j$ 时, $\langle \Psi(t_f) | \eta_i^+ \eta_j^- | \Psi(t_f) \rangle = 1/2$, 与正文中的结论一致 Fig. 6. (a)–(d) Evolution of the correlators $|\langle \Phi(t) | \eta_i^+ | \Phi(t) \rangle|$ and $\langle \Phi(t) | \eta_i^+ \eta_{i+r}^- | \Phi(t) \rangle$, averaged over all sites for the 4-site Hubbard model. The initial state is prepared in vacuum state $|V_{\text{vac}}\rangle$ of H_0 with interaction $U = 2J$, and then it is driven by the system with the local imaginary field $g_1 = g = 0.2J$ for panels (a) and (c), and homogeneous dissipation $g_j = g = 0.2J$ ($j = 1, \dots, N$) for panels (b) and (d), respectively. Notice that H_1 is at EP such that $\lambda/\gamma = 1$. (e), (f) The correlation values of steady state for different relative distance ($\langle \Psi(t_f) | \eta_i^+ \eta_j^- | \Psi(t_f) \rangle$) at relaxation time $t_f = 400/J$ for panel (e) and $t_f = 100/J$ for panel (f). It is shown that $\langle \Psi(t_f) | \eta_i^+ \eta_j^- | \Psi(t_f) \rangle = 1/4$ for $i \neq j$ and $\langle \Psi(t_f) | \eta_i^+ \eta_j^- | \Psi(t_f) \rangle = 1/2$ for $i = j$, which confirms the understanding in the main text.

何分布, 系统都会存在一个 $2N + 1$ 阶的例外点, 相应的合并态为

$$|\Phi_c\rangle = \left(\frac{i}{2}\right)^N \sum_{l=-N}^N \sqrt{C_{2N+l}^{N+l}} (i)^l |N, l\rangle. \quad (51)$$

根据第 1 节中的理论, 令局域外场只在 $j = 1$ 的格点上有作用, 并令 $\lambda = \gamma$. 如果考虑此空间中的任意初态 $|\Phi(0)\rangle = \sum_l c_l(0) |N, A_l\rangle$, 那么演化态振幅 $c_m(t)$ 可以表示为

$$c_m(t) = \sum_l \frac{(-itg_1/2N)^{l-m}}{(l-m)!} h(l-m) c_l(0). \quad (52)$$

经过一定的弛豫时间

$$t_r = \frac{N}{g_1} (f_c - 1)^{-1/2}, \quad (53)$$

其中 $f_c = (0.99)^{-1/2N}$ [61], 演化态将变为合并态 $|\Phi_c\rangle$ (如图 6 所示). 可以证明 η 算符的关联函数为

$$\langle \Phi_c | \eta_i^+ \eta_j^- | \Phi_c \rangle = \begin{cases} 1/4, & i \neq j, \\ 1/2, & i = j. \end{cases} \quad (54)$$

这说明最终的演化稳态具有与相对距离无关的非对角长程序, 因此可以认为系统处在稳定的非平衡超导相中.

该方案的好处是此过程只是一个动力学演化的结果, 其并不依赖于外界额外的操作. 另一方面该方案只要求系统具有 $SO(4)$ 对称性, 对于临界外场的位置、强度均不作特定的限制. 系统的演化末态对一些无序的微扰来说也并不敏感. 这些特性为在实验上制备 η 对态并实现稳定的非平衡超导相提供了一种有效非厄米临界动力学方案.

4 总结与展望

本文综述了非厄米临界动力学在非厄米多体系统中的应用与发展. 除了从非厄米量子力学角度阐述这一动力学规律以外, 该理论还适用于遵循马尔可夫近似下量子开放系统中的短时动力学描述. 文中通过厄米系统的简并子空间给出了构造具有例外点非厄米哈密顿量的普适方法. 当非厄米系统处于例外点时, 它的矩阵表示必然等价于一个约当块的矩阵形式, 其维度依赖于例外点的阶数. 在此约当块所涉及到的子空间中, 任意的初态在狄拉克几率归一化下都将演化至系统的合并态. 利用非厄米哈密顿量的这一临界动力学特性, 分别在量子自

旋系统中观察到了局域外场所诱导的动力学磁化、横场 Ising 模型中的有限温相变、中心-环境系统中的量子铸模以及费米 Hubbard 模型中临界外场所诱导的非平衡超导相等一系列新奇的动力学现象. 该临界动力学思想的提出, 不仅仅丰富了动力学操控量子态的手段, 更为在开放系统中非平衡地调控物相提供了重要的理论基础. 未来, 高分辨显微技术以及单原子操控技术的进步势必会令研究者在多体系统中更加关注量子态的特性. 我们期待本文涉及的非厄米调控机制会在不同的开放量子体系下得到检验, 并在不同的物理分支上得到进一步发展. 由于具有独特而有趣的物理性质, 非厄米临界动力学对于理解各种物理平台下的多体耗散动力学机制势必会有新的帮助.

参考文献

- [1] Gamow G 1928 *Z. Phys.* **51** 204
- [2] Siegert A J F 1939 *Phys. Rev.* **56** 750
- [3] Majorana E 2006 *EJTP* **3** 293
- [4] Feshbach H 1958 *Ann. Phys.* **5** 357
- [5] Feshbach H 1958 *Ann. Phys.* **19** 287
- [6] Schrödinger E 1926 *Ann. Phys.* **384** 489
- [7] Ashida Y, Gong Z P, Ueda M 2020 *Adv. Phys.* **69** 249
- [8] Cohen-Tannoudji C, Dupont-Roc J, Grynberg G 1998 *Atom-photon Interactions: Basic Processes and Applications* (Berlin: Wiley-VCH)
- [9] Anderson P W 1972 *Science* **177** 393
- [10] Lee T D, Yang C N 1952 *Phys. Rev.* **87** 410
- [11] Zhou Y H, Shen H Z, Yi X X 2018 *Phys. Rev. A* **97** 043819
- [12] Song F, Yao S Y, Wang Z 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 170401
- [13] Pan L, Chen X, Chen Y, Zhai H 2020 *Nat. Phys.* **1** 6
- [14] Longhi S 2020 *Phys. Rev. B* **102** 201103
- [15] Liu T, He J J, Yoshida T, Xiang Z L, Nori F 2020 *Phys. Rev. B* **102** 235151
- [16] Xu Z H, Chen S 2020 *Phys. Rev. B* **102** 035153
- [17] Tang L Z, Zhang G Q, Zhang L F, Zhang D W 2021 *Phys. Rev. A* **103** 033325
- [18] Mao L, Deng T S, Zhang P F 2021 *Phys. Rev. B* **104** 125435
- [19] Li J X, Xu L, Zhao Y H, He Z, Wang Q 2021 *Laser Phys.* **31** 075202
- [20] Ohlsson T, Zhou S 2021 *Phys. Rev. A* **103** 022218
- [21] Pan J S, Li L H, Gong JB 2021 *Phys. Rev. B* **103** 205425
- [22] Xue W T, Hu Y M, Song F, Wang Z 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 120401
- [23] Barontini G, Labouvie R, Stubenrauch F, Vogler A, Guarrera V, Ott H 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 035302
- [24] Beige A, Braun D, Tregenna B, Knight P L 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 1762
- [25] Zanardi P, Campos Venuti L 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 240406
- [26] Militello B, Napoli A 2020 *Phys. Lett. A* **384** 126355
- [27] Gong Z, Yoshioka N, Shibata N, Hamazaki R 2020 *Phys. Rev. A* **101** 052122
- [28] Ashida Y, Furukawa S, Ueda M 2016 *Phys. Rev. A* **94** 053615

- [29] Tomita T, Nakajima S, Danshita I, Takasu Y, Takahashi Y 2017 *Sci. Adv.* **3** 1701513
- [30] Yan B, Moses A S, Gadway B, Covey J P, Hazzard K R, Rey A M, Jin D S, Ye J 2013 *Nature* **501** 521
- [31] Zhu B, Gadway B, Foss-Feig M, Schachenmayer J, Wall M L, Hazzard K R A, Yan B, Moses S A, Covey J P, Jin D S, Ye J, Holland M, Rey A M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 070404
- [32] Daley A J, Taylor J M, Diehl S, Baranov M, Zoller P 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 040402
- [33] Paredes B, Keilmann T, Cirac J I 2007 *Phys. Rev. A* **75** 053611
- [34] Diehl S, Baranov M, Daley A J, Zoller P 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 165301
- [35] Moroz S, Schmidt R 2010 *Ann. Phys.* **325** 491
- [36] Zhou Z, Wang Z, Zhong H, Luo Y, Chen H, Tan J 2020 *Phys. Lett. A* **384** 126197
- [37] Nakagawa M, Tsuji N, Kawakami N, Ueda M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 147203
- [38] Buca B, Booker C, Medenjak M, Jaksch D 2020 *New J. Phys.* **22** 123040
- [39] Pan L, Wang X, Cui X, Chen S 2020 *Phys. Rev. A* **102** 023306
- [40] Berry M V 2004 *Czech. J. Phys.* **54** 1039
- [41] Rotter I 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 153001
- [42] Zhang X Z, Jin L, Song Z 2012 *Phys. Rev. A* **85** 042116
- [43] Mostafazadeh A 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 220402
- [44] Longhi S 2010 *Phys. Rev. A* **81** 022102
- [45] Guo C X, Wang X R, Wang C, Kou S P 2020 *Phys. Rev. B* **101** 144439
- [46] Sun G Y, Tang J C, Kou S P 2022 *Front. Phys.* **17** 33502
- [47] Heiss W D 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 444016
- [48] Jin L, Song Z 2009 *Phys. Rev. A* **81** 032109
- [49] Jin L, Song Z 2009 *Phys. Rev. A* **80** 052107
- [50] Jin L, Song Z 2013 *Ann. Phys.* **330** 142
- [51] Jin L 2018 *Phys. Rev. A* **97** 012121
- [52] Zhang S M, Zhang X Z, Jin L, Song Z 2020 *Phys. Rev. A* **101** 033820
- [53] Jin L, Wang P, Song Z 2017 *Sci. Rep.* **7** 5903
- [54] Lin S, Jin L, Song Z 2019 *Phys. Rev. B* **99** 165148
- [55] Zhang X Z, Jin L, Song Z 2012 *Phys. Rev. A* **85** 012106
- [56] Wang P, Jin L, Zhang G, Song Z 2016 *Phys. Rev. A* **94** 012106
- [57] Daley A J 2014 *Adv. Phys.* **6** 3
- [58] Zhang X Z, Jin L, Song Z 2020 *Phys. Rev. B* **101** 224301
- [59] Zhang K L, Song Z 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 116401
- [60] Yang X M, Song Z 2021 *Phys. Rev. B* **103** 094307
- [61] Zhang X Z, Song Z 2020 *Phys. Rev. B* **102** 174303
- [62] Mostafazadeh A 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 125303
- [63] Wang P, Zhang K L, Song Z 2021 *Phys. Rev. B* **104** 245406
- [64] Eismann U, Khaykovich L, Laurent S, Ferrier-Barbut I, Rem B S, Grier A T, Delehaye M, Chevy F, Salomon C, Ha L C, Chin C 2016 *Phys. Rev. X* **6** 021025
- [65] Patil Y S, Chakram S, Vengalattore M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 140402
- [66] Kitaev A Y 2001 *Phys. Usp.* **44** 131
- [67] Zhang X Z, Jin L, Song Z 2017 *Phys. Rev. A* **95** 052122

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

Non-Hermitian critical dynamics and its application to quantum many-body systems^{*}

Zhang Xi-Zheng¹⁾ Wang Peng⁴⁾ Zhang Kun-Liang²⁾
Yang Xue-Min³⁾ Song Zhi²⁾[†]

1) (*College of Physics and Materials Science, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China*)

2) (*School of Physics, Nankai University, Tianjin 300071, China*)

3) (*School of Science, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China*)

4) (*Graduate School of China Academy of Engineering Physics, Beijing 100193, China*)

(Received 10 May 2022; revised manuscript received 6 July 2022)

Abstract

In recent years, two independent research fields, i.e. non-Hermitian and strongly correlated systems have been merged, forming an important research field in physics. The progress of relevant theories and experiments has reshaped our understanding of matter. In this field, the research object is not limited to the influence of non-Hermiticity on the energy spectrum and the eigenstate properties of many-body systems. Researchers have paid more attention to the manipulation of quantum states. It is universally received that the exceptional point is the most significant feature that distinguishes non-Hermitian quantum mechanics from Hermitian quantum mechanics. In addition to the recent advances in non-Hermitian topological band theory and quantum sensing around the exceptional points, this paper concentrates on the non-Hermitian critical dynamical phenomenon and its application to the quantum many-body system. When the system has an exceptional point, an arbitrary initial state belonging to the coalescent subspace will be projected on the coalescent state. Based on the directionality of the evolved quantum state, this paper reviews our several representative researches in recent years, including local-field-induced dynamical magnetization, quantum phase transition in transverse field, Ising model at non-zero temperature, quantum mold casting in the center-environment system, as well as superconducting state preparation in the non-Hermitian strongly correlated system. We also focus on the new preparation methods and detection schemes of non-equilibrium quantum states related to exception points.

Keywords: non-Hermitian system, quantum many-body system, exceptional point

PACS: 45.50.Jf, 71.10.Fd, 05.70.Jk, 61.20.Lc

DOI: 10.7498/aps.71.20220914

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11975166, 11874225, 12047547).

[†] Corresponding author. E-mail: songtc@nankai.edu.cn

非厄米临界动力学及其在量子多体系统中的应用

张禧征 王鹏 张坤亮 杨学敏 宋智

Non-Hermitian critical dynamics and its application to quantum many-body systems

Zhang Xi-Zheng Wang Peng Zhang Kun-Liang Yang Xue-Min Song Zhi

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 174501 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220914

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220914>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

实验观测非厄米系统奇异点的手性翻转现象

Experimental observation of chiral inversion at exceptional points of non-Hermitian systems

物理学报. 2022, 71(13): 131101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220842>

非厄米镶嵌型二聚化晶格

Non-Hermitian mosaic dimerized lattices

物理学报. 2022, 71(13): 130302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220890>

两量子比特系统中相互作用对高阶奇异点的影响

High-order exceptional point in a quantum system of two qubits with interaction

物理学报. 2022, 71(13): 130303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220716>

腔光子-自旋波量子耦合系统中各向异性奇异点的实验研究

Observation of the anisotropic exceptional point in cavity magnonics system

物理学报. 2020, 69(4): 047103 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191632>

非厄米局域拓扑指标的动力学特性

Dynamics of non-Hermitian local topological marker

物理学报. 2021, 70(23): 230309 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211576>

广义布里渊区与非厄米能带理论

Generalized Brillouin zone and non-Hermitian band theory

物理学报. 2021, 70(23): 230307 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211908>