

## 蓝宝石谐振体内的回音壁模电磁场分布\*

范思晨<sup>1)2)3)</sup> 杨帆<sup>1)2)3)</sup> 阮军<sup>1)3)†</sup>

1) (中国科学院国家授时中心, 西安 710600)

2) (中国科学院大学, 北京 100049)

3) (中国科学院时间频率基准重点实验室, 西安 710600)

(2022 年 6 月 10 日收到; 2022 年 7 月 19 日收到修改稿)

蓝宝石谐振体内的电磁场为回音壁模式时具有极低的介质损耗. 本文采用径向-轴向模式匹配法, 理论分析了蓝宝石谐振体内的场模式分布, 分析了谐振频率与谐振体几何尺寸的关系; 其次, 基于有限元分析仿真了蓝宝石圆柱体内场分布情况; 研制了三维转动位移台, 采用磁环/探针耦合的方式激发蓝宝石谐振体内的回音壁电磁场, 测量了谐振体表面的  $S$  参数, 由此确定了谐振体内的回音壁模式参数, 得到谐振器的无载  $Q$  值为 94000. 利用该谐振体可制成低相位噪声的微波振荡器.

**关键词:** 蓝宝石谐振体, 回音壁模式, 相位噪声, 品质因数

**PACS:** 41.20.Jb, 06.30.Ft

**DOI:** 10.7498/aps.71.20221156

## 1 引言

蓝宝石谐振体内的电磁场为回音壁模式时具有极低的介质损耗<sup>[1]</sup>, 由此制成的振荡器具有超低相位噪声和较高中短期频率稳定度等特性<sup>[2,3]</sup>, 在原子频率标准<sup>[4–7]</sup>、暗物质探测<sup>[8,9]</sup>、量子计算<sup>[10,11]</sup>、甚长基线干涉仪<sup>[12,13]</sup>和深空探测<sup>[14,15]</sup>等领域有重要应用. 蓝宝石谐振体内的电磁场模式与振荡器品质因子  $Q$  存在确定的函数关系<sup>[16,17]</sup>, 直接影响着振荡器的相位噪声, 因此确定蓝宝石谐振体内的电磁场分布是实现高性能振荡器的先决条件. 由于回音壁模式的电磁场绝大部分分布在蓝宝石内部, 并不能直接利用探针测量其分布, 一般多采用模式匹配法<sup>[18–21]</sup>, 计算特定模式的谐振频率和蓝宝石内部的电磁场分布, 或者应用软件仿真方法来确定电磁场分布, 很少进行实验验证.

本文设计并研制了装配双端磁环/探针的精密转动位移台, 激励产生了蓝宝石谐振体内的回音壁模式电磁场, 同时获得了蓝宝石谐振体外的电磁场分布, 通过与模式匹配法理论计算和微波软件仿真结果进行比较, 从而确定了蓝宝石谐振体内的回音壁模式电磁场参数.

## 2 蓝宝石谐振体的电磁场模式结构

蓝宝石是各向异性的单晶体材料, 对于圆柱形蓝宝石, 它的晶轴 ( $C$  轴) 与  $z$  轴平行, 平行于晶轴方向的相对介电常数为  $\epsilon_{//}$ , 垂直于晶轴方向的相对介电常数为  $\epsilon_r$  和  $\epsilon_\theta$ . 实验中蓝宝石尺寸为直径 54.21 mm, 高 30.00 mm, 蓝宝石柱体的一端有一个直径 10.00 mm, 高 22.00 mm 的小圆柱体用于将蓝宝石固定在腔内. 在 292 K 时, 蓝宝石的相对介电常数  $\epsilon_\perp = 9.39$ ,  $\epsilon_{//} = 11.576$ .

\* 中国科学院西部青年学者项目 (批准号: XAB2018 A06) 和中国科学院重大科技基础设施维修改造项目 (批准号: DSS-WXGZ-2020-0005) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: ruanjun@ntsc.ac.cn

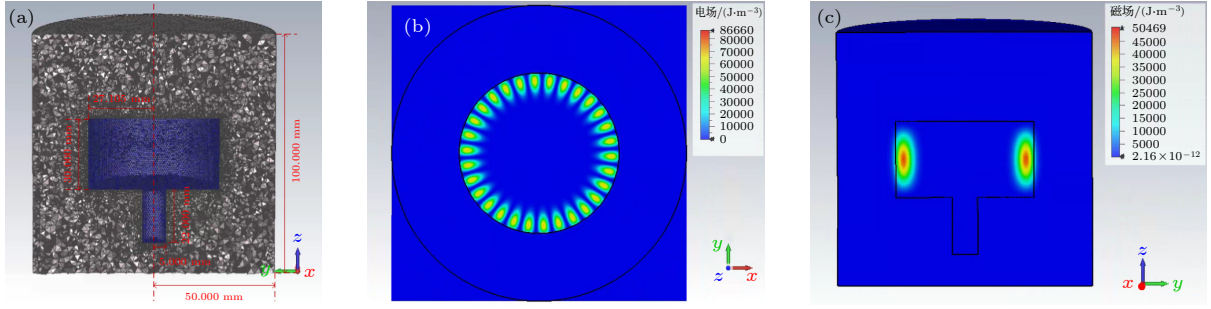

 图 1 WGH<sub>15,0,0</sub> 模式仿真 (a) 有限元模型网格填充剖面图; (b) 电场方位角向分布; (c) 磁场径向分布

Fig. 1. WGH<sub>15,0,0</sub>: (a) Mesh filling section of finite element model; (b) azimuth distribution of electric field; (c) radial distribution of the magnetic field.

## 2.1 理论研究

介质谐振体理论分析方法有介质波导法 [22]、径向模式匹配法 [23]、轴向模式匹配法 [24]，本文采用 Tabor 和 Mann [19] 提出的径向与轴向结合的模式匹配方法。

径向匹配得到以下超越方程 [25]:

$$\left( \frac{\varepsilon_r J'_m(x_E) x_E}{x_H^2 J_m(x_E)} + \frac{K'_m(y)}{y K_m(y)} \right) \left( \frac{J'_m(x_H)}{x_H J_m(x_H)} + \frac{K'_m(y)}{y K_m(y)} \right) = m^2 \frac{(x_H^2 + \varepsilon_r y^2)(x_H^2 + y^2)}{x_H^4 y^4}, \quad (1)$$

在这里,

$$x_E = \frac{k_E d}{2}, \quad x_H = \frac{k_H d}{2}, \quad y = \frac{k_{out} d}{2},$$

$$k_E^2 = \varepsilon_z k_0^2 - \beta^2 \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_r}, \quad k_H^2 = \varepsilon_r k_0^2 - \beta^2, \quad k_{out}^2 = \beta^2 - k_0^2,$$

其中,  $J_m$  为  $m$  阶第一类贝塞尔函数,  $K_m$  为  $m$  阶第二类修正贝塞尔函数,  $k_E$  是平行于  $c$  轴的介质传播常数,  $k_H$  是垂直于  $c$  轴的介质传播常数,  $\beta$  是轴向传播常数,  $k_{out}$  是外径向传播常数,  $k_0$  是自由空间波数。

轴向匹配可以得到:

$$\left( -\sqrt{-\beta^2 + (\varepsilon_r - 1)k_0^2} \varepsilon_r \cos(\beta z) + \beta \sin(\beta z) \right) \times \left( \sqrt{-\beta^2 + (\varepsilon_r - 1)k_0^2} \sin(\beta z) + \beta \cos(\beta z) \right) = 0, \quad (2)$$

利用上述两个方程即可求得蓝宝石谐振体工作在回音壁模式的谐振频率。

## 2.2 蓝宝石谐振体内的电磁场仿真分析

有限元方法可以仿真蓝宝石谐振体内的电磁场分布情况 [26–28]。利用三维电磁场仿真软件 CST

Studio Suite 建立仿真模型, 使用本征模求解器仿真蓝宝石晶体工作在回音壁模式下的场分布, 仿真模型如图 1(a) 所示。分别对蓝宝石谐振体和空气区域进行不同的网格剖分, 求解数值精度为  $10^{-9}$ , 迭代次数为 6。当蓝宝石介质工作在 WGH<sub>15,0,0</sub> 模式时, 电磁场的能量密度分布如图 1(b) 和图 1(c) 所示。图 1(b) 中, 圆柱体为蓝宝石柱, 外部为空气, 电磁能量被限制在蓝宝石晶体边界靠近空气的地方, 在方位角上呈现花瓣形状, 具有周期性。

## 2.3 蓝宝石谐振体的电磁场分布实验测量

通过近场探测的方法确定蓝宝石柱腔内的微波模式场分布, 测试装置如图 2 所示。

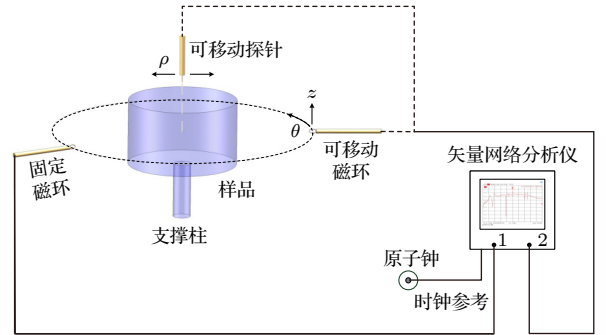


图 2 测量 WGH 模式共振频率装置示意图

Fig. 2. Schematic diagram of measuring WGH mode resonance frequency device.

矢量网络分析仪作为微波产生和探测的装置, 使用主动型氢钟作为其时钟参考。矢量网络分析仪端口 1 发射的微波通过固定的磁环耦合进样品, 在内部和表面形成回音壁模式的谐振器电磁场。用磁环或探针对样品表面电磁场进行探测, 磁环和探针天线通过精密位移台 (分辨率 0.01 mm) 和转动台 (分辨率 0.01°) 固定, 接收端可沿轴向 ( $z$ )、径向 ( $\rho$ )

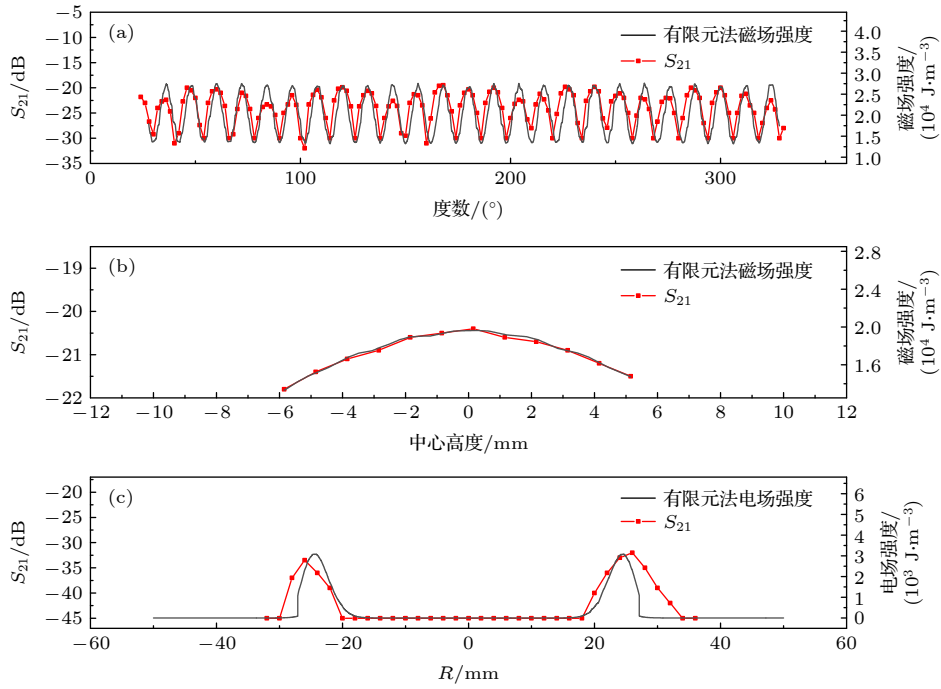


图 3 WGH<sub>15,0,0</sub> 模式电磁场强度 (a) 磁场强度方位角向分布; (b) 磁场强度轴向分布; (c) 电场强度径向分布

Fig. 3. Electromagnetic field intensity of WGH<sub>15,0,0</sub>: (a) Cross-section distribution of magnetic field intensity; (b) axial cross-section distribution of magnetic field intensity; (c) cross-section distribution of electric field intensity diameter.

和方位角 ( $\theta$ ) 方向调节. 可移动的磁环或天线连接到矢量网络分析仪端口 2 作为微波接收端, 测量  $S$  参数随空间的变化情况. 调节臂 2 的轴向高度, 可以确定 WGH 模式轴向数; 将臂 3 探针沿径向移动, 可以确定径向数; 将臂 2 绕蓝宝石样品旋转, 观测  $S_{21}$  变化的周期性变化, 可以确定方位角数.

### 3 结果分析和讨论

#### 3.1 蓝宝石谐振体回音壁模式分析

利用上述测量装置对 WGH<sub>15,0,0</sub> 模近场进行测量, 并与有限元仿真电磁场强度绝对值进行对比, 如图 3 所示, 其中黑线表示有限元仿真法电磁场强度绝对值, 红线表示实验测量  $S_{21}$  值. 图 3(a) 表示磁场强度方位角向分布, 磁环绕方位角方向  $S_{21}$  测量值和有限元法的磁场强度绝对值变化趋势基本符合, 在方位角上电磁场强度具有周期性, 每  $12^\circ$  为一个周期, 故  $m = 15$ . 图 3(b) 表示磁场强度轴向分布, 磁环位置在轴向上高度变化激励的  $S_{21}$  值与有限元法的磁场强度绝对值较一致, 在轴向上  $p = 0$ . 图 3(c) 表示电场强度径向分布, 探针位置在径向上变化激励的  $S_{21}$  值与有限元法的电场强度绝对值趋势一致, 在径向上电场强度具有对称性,  $n = 0$ .

#### 3.2 蓝宝石谐振体谐振频率分析

实验中, 采用磁耦合方式激发和探测. 图 4 中, 红线为通过模式匹配法计算出的 WGH <sub>$m,0,0$</sub>  模式谐振频率, 蓝线为有限元分析法得到的 WGH <sub>$m,0,0$</sub>  模式谐振频率, 绿线为实验测得的 WGH <sub>$m,0,0$</sub>  模式谐振频率. 理论计算、有限元法仿真和实际测量得到的频率值基本符合.

WGH <sub>$m,0,0$</sub>  模式测量的谐振频率与方位角模式数呈线性关系, 与理论计算值和有限元分析结果一致. 表 1 给出理论计算、有限元仿真和实验测量得到的谐振频率, 并且计算得到精度. 分析可得,

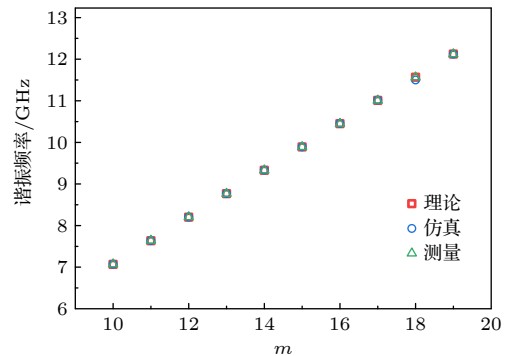


图 4 WGH <sub>$m,0,0$</sub>  模式理论频率和测量频率的比较

Fig. 4. Comparison of theoretical and measured frequencies of WGH <sub>$m,0,0$</sub>  models.

表 1  $m = 10-19$  的谐振频率  
Table 1. Resonant frequency of  $m = 10-19$ .

回音壁模式	$f/\text{GHz}$			$\Delta f_{\text{有限元-理论}}/f_{\text{理论}}$	$\Delta f_{\text{测量-理论}}/f_{\text{理论}}$
	理论计算	有限元法	实验测量		
WGH <sub>10,0,0</sub>	7.06686	7.07063	7.07181	0.053%	0.070%
WGH <sub>11,0,0</sub>	7.63521	7.63784	7.63925	0.035%	0.053%
WGH <sub>12,0,0</sub>	8.20160	8.20355	8.20443	0.024%	0.035%
WGH <sub>13,0,0</sub>	8.76613	8.76745	8.76761	0.015%	0.017%
WGH <sub>14,0,0</sub>	9.32905	9.33030	9.32983	0.013%	0.008%
WGH <sub>15,0,0</sub>	9.89051	9.89011	9.89062	-0.004%	0.001%
WGH <sub>16,0,0</sub>	10.45054	10.45390	10.45008	0.032%	-0.004%
WGH <sub>17,0,0</sub>	11.00933	11.01550	11.00863	0.056%	-0.006%
WGH <sub>18,0,0</sub>	11.56694	11.56940	11.56593	0.022%	-0.009%
WGH <sub>19,0,0</sub>	12.12345	12.12100	12.12218	-0.020%	-0.010%

有限元仿真得到的精度  $\Delta f/f < 0.06\%$ , 实验测量结果得到的精度  $\Delta f/f < 0.02\%$ .

图 5 中, 测量带宽为 300 MHz, 激发探头和探测磁环之间的夹角为  $180^\circ$ . WGH<sub>15,0,0</sub> 附近存在多个杂散模, 在形成振荡环路时, 容易跳频. 图 3 中, WGH<sub>15,0,0</sub> 在方位角方向上存在周期性, 当激发磁环和探测磁环之间的夹角为  $180^\circ$  时, 所有模式都被激发. 改变可移动磁环在方位角方向上的位置, 将其固定在 WGH<sub>15,0,0</sub> 最大场位置, 此时磁环沿谐振体轴旋转  $\frac{180^\circ}{m=15} = 12^\circ$ , 激发磁环和探测磁环之间的夹角为  $168^\circ$ , WGH<sub>15,0,0</sub> 模式不受影响, 且杂散模式被有效抑制, 测试结果如图 5 中绿线所示.

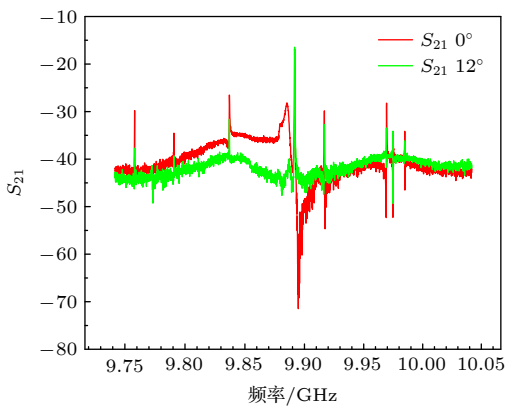


图 5 室温下 WGH<sub>15,0,0</sub> 模式磁环不同位置的  $S_{21}$  参数

Fig. 5.  $S_{21}$  at different positions of WGH<sub>15,0,0</sub> mode magnetic rings in samples at room temperature.

当激发磁环和探测磁环之间的夹角为  $168^\circ$  时, 利用矢量网络分析仪 ZVB14 对蓝宝石谐振

体的  $S$  参数进行测量, 结果如图 6 所示, 测量带宽为 2 MHz. 红线为  $S_{12}$ , 绿线为  $S_{21}$ , 其中  $f_0 = 9891754142$  Hz,  $\Delta f = 124041$  Hz, 根据  $Q_L = \frac{f_0}{\Delta f}$  可得,  $Q_L \approx 8 \times 10^4$ , 故  $Q_0 = \frac{Q_L}{1 - S_{21}} \approx 9.4 \times 10^4$ .

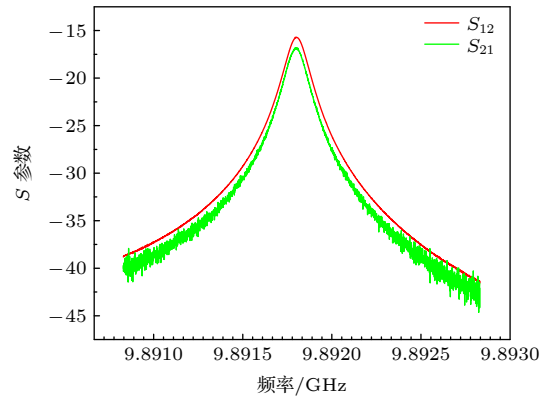


图 6 室温下样品的 WGH<sub>15,0,0</sub> 模式  $S$  参数

Fig. 6. WGH<sub>15,0,0</sub> mode  $S$  parameters of samples at room temperature.

### 3.3 谐振腔频率-温度敏感度分析

温度是影响蓝宝石谐振体的谐振频率的主要因素. 其频率-温度敏感度 (TCF)<sup>[29]</sup> 如下:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{1}{2} p_{e\perp} \alpha_{e\perp} - \frac{1}{2} p_{e//} \alpha_{e//} - p_D \alpha_D - p_L \alpha_L, \quad (3)$$

式中,

$$p_{e\perp} = 2 \left| \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{\perp}} \right| \frac{\varepsilon_{\perp}}{f}, \quad p_{e//} = 2 \left| \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{//}} \right| \frac{\varepsilon_{//}}{f}, \quad p_D = \frac{\partial f}{\partial D} \frac{D}{f},$$

$$p_L = \frac{\partial f}{\partial L} \frac{L}{f}, \quad \alpha_{e\perp} = \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \frac{\partial \varepsilon_{\perp}}{\partial T}, \quad \alpha_{e//} = \frac{1}{\varepsilon_{//}} \frac{\partial \varepsilon_{//}}{\partial T},$$

$$\alpha_D = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial T}, \alpha_L = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial T},$$

$p_{e\perp}$  和  $p_{e//}$  分别为垂直于晶轴方向和平行于晶轴方向的电场填充因子,  $p_D$  和  $p_L$  分别为回音壁模式谐振频率对蓝宝石柱直径和高度变化的敏感度,  $\alpha_{e\perp}$  和  $\alpha_{e//}$  分别为垂直于晶轴方向和平行于晶轴方向的介电常数温度系数,  $\alpha_D$  和  $\alpha_L$  分别为垂直于晶轴方向和平行于晶轴方向的热膨胀系数.

分别加入微扰  $\Delta D$  和  $\Delta L$ , 通过模式匹配法和有限元分析法分别求得此时的  $\Delta f$ . 图 7 给出蓝宝石谐振体直径 ( $D$ ) 和高度 ( $L$ ) 变化对回音壁模式  $WGH_{15,0,0}$  谐振频率的影响. 改变蓝宝石柱直径  $D$  (mm) 得到谐振频率随直径的变化关系, 根据  $p_D = \frac{\partial f}{\partial D} \frac{D}{f}$  可得,  $p_D \approx 0.973$ . 保持蓝宝石柱直径不变, 改变高度  $H$  (mm) 得到谐振频率随高度的变化关系, 根据  $p_L = \frac{\partial f}{\partial L} \frac{L}{f}$  可得,  $p_L \approx 0.027$ . 可以看

出谐振频率随直径变化的敏感度大于随高度变化的敏感度.

分别加入微扰  $\Delta \varepsilon_{\perp}$  和  $\Delta \varepsilon_{//}$ , 通过模式匹配法和有限元分析法分别求得此时的  $\Delta f$ . 图 8 给出了蓝宝石回音壁模式  $WGH_{15,0,0}$  谐振频率与相对介电常数的关系. 改变蓝宝石垂直于晶轴的相对介电常数得到谐振频率随  $\varepsilon_{\perp}$  的变化关系, 根据  $p_{e\perp} = 2 \left| \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{\perp}} \right| \frac{\varepsilon_{\perp}}{f}$  可得,  $p_{e\perp} \approx 0.032$ . 保持蓝宝石垂直于晶轴的相对介电常数不变, 改变平行于晶轴的相对介电常数, 得到谐振频率随  $\varepsilon_{//}$  的变化关系, 根据  $p_{e//} = 2 \left| \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{//}} \right| \frac{\varepsilon_{//}}{f}$  可得,  $p_{e//} \approx 0.96$ . 谐振频率随平行于晶轴的相对介电常数变化的敏感度大于随垂直于晶轴的相对介电常数变化的敏感度.

对于  $WGH_{15,0,0}$  模, TCF 近似为

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{1}{2} \alpha_{e//} - \alpha_D, \quad (4)$$

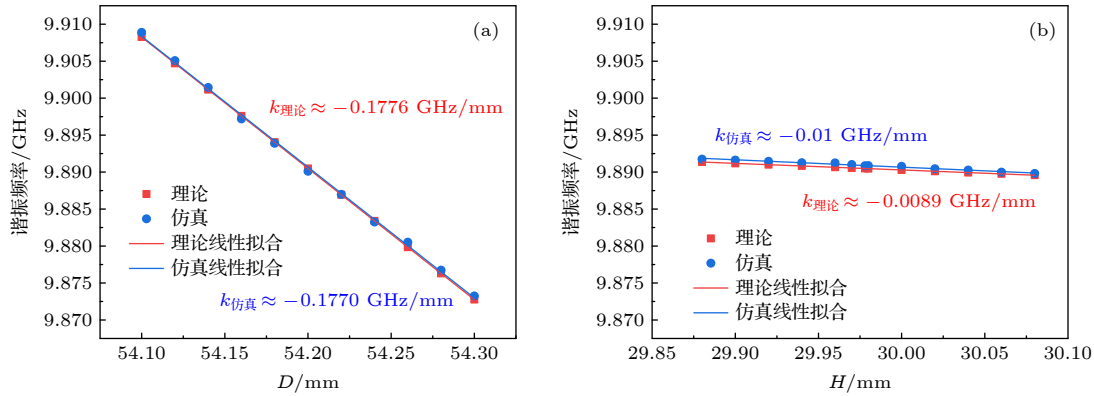


图 7  $WGH_{15,0,0}$  谐振频率与样品尺寸关系 (a) 谐振频率与直径变化的关系; (b) 谐振频率与高度变化的关系

Fig. 7. Relationship between resonant frequency and sample size: (a) Relation between resonant frequency and diameter change; (b) relation between resonant frequency and height variation.

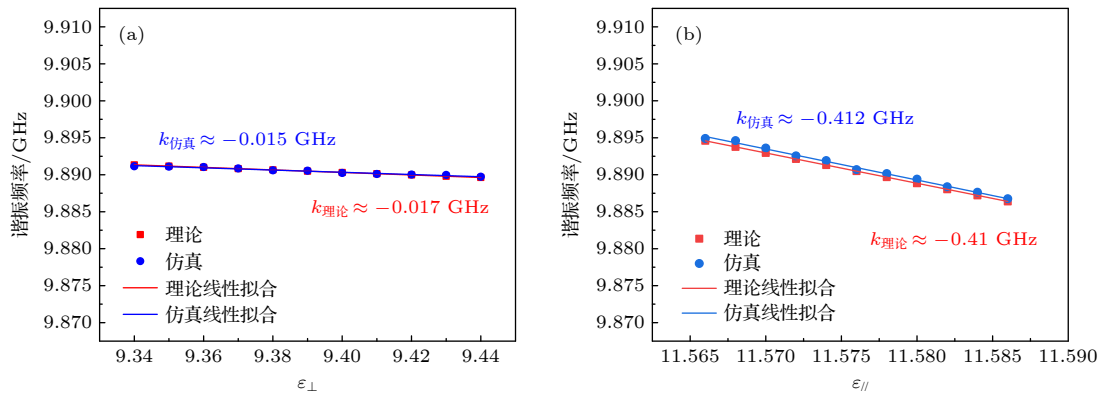


图 8  $WGH_{15,0,0}$  谐振频率与相对介电常数的关系 (a) 谐振频率与  $\varepsilon_{\perp}$  的关系; (b) 谐振频率与  $\varepsilon_{//}$  的关系

Fig. 8. Relation between resonant frequency and relative permittivity: (a) Relation between resonant frequency and  $\varepsilon_{\perp}$ ; (b) relation between resonant frequency and  $\varepsilon_{//}$ .

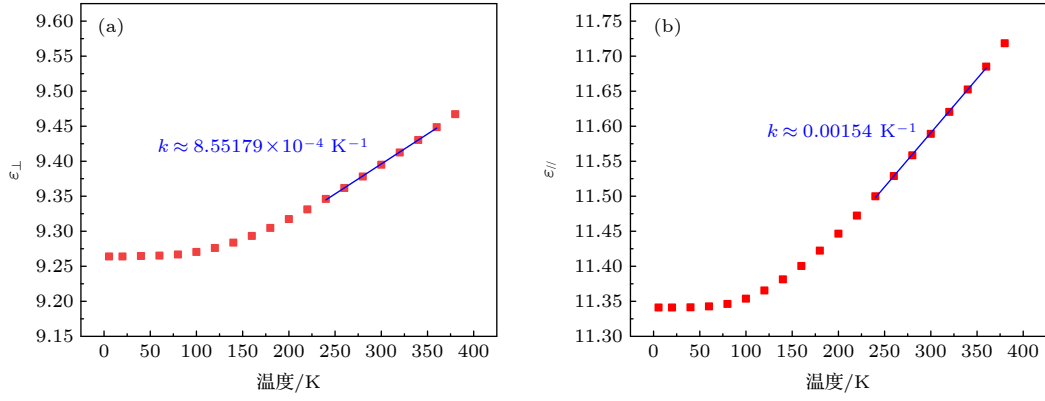
图 9 温度对相对介电常数的影响 (a)  $\varepsilon_{\perp}$  与温度的关系; (b)  $\varepsilon_{//}$  与温度的关系

Fig. 9. Influence of temperature and relative permittivity: (a) Relationship between  $\varepsilon_{\perp}$  and temperature; (b) relationship between  $\varepsilon_{//}$  and temperature.

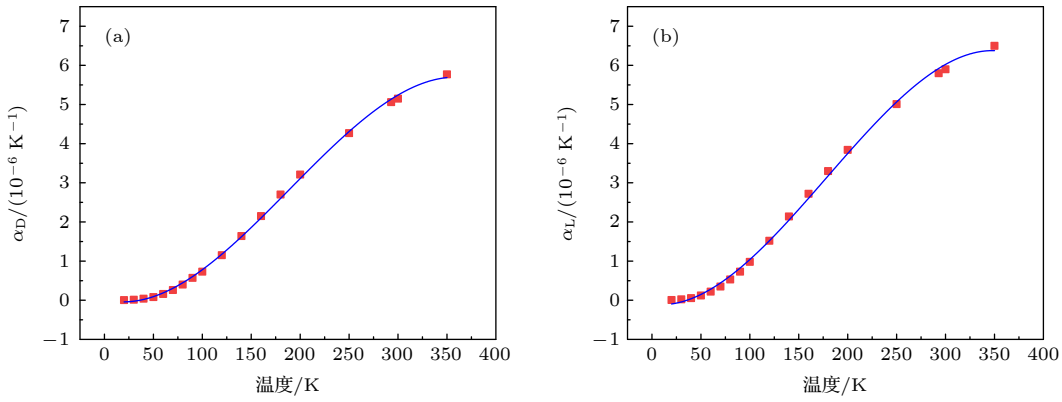
图 10 温度对热膨胀系数的影响 (a)  $\alpha_D$  与温度的关系; (b)  $\alpha_L$  与温度的关系

Fig. 10. Influence of temperature and thermal coefficient of expansion: (a) Relationship between  $\alpha_D$  and temperature; (b) relationship between  $\alpha_L$  and temperature.

结果表明, 蓝宝石谐振体工作在  $WGH_{15,0,0}$  回音壁模式的频率-温度敏感度主要与平行于晶轴方向的介电常数温度系数和垂直于晶轴方向的热膨胀系数有关。

图 9 给出垂直于晶轴的介电常数和垂直于晶轴的介电常数与温度的关系 [30]。在低温下, 介电常数对温度的敏感度小, 随温度的变化趋势较缓慢; 当温度升高到一定值时, 介电常数对温度的敏感度逐渐增大, 随温度的变化趋势较快。图 9 中蓝线表示当温度为 292 K 时加入微扰  $\Delta T$ , 分别求得此时的  $\Delta\varepsilon_{\perp}$  与  $\Delta\varepsilon_{//}$ 。改变温度得到介电常数随温度的变化关系。根据  $\alpha_{\varepsilon_{\perp}} = \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \frac{\partial \varepsilon_{\perp}}{\partial T}$  可得,  $\alpha_{\varepsilon_{\perp}} \approx 91.07 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ 。根据  $\alpha_{\varepsilon_{//}} = \frac{1}{\varepsilon_{//}} \frac{\partial \varepsilon_{//}}{\partial T}$  可得,  $\alpha_{\varepsilon_{//}} \approx 133.03 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ 。

图 10 给出垂直于晶轴的热膨胀系数和平行于晶轴的热膨胀系数与温度的关系 [31]。图中蓝线表

示在温度为 20—350 K 时, 垂直于晶轴的热膨胀系数和平行于晶轴的热膨胀系数与温度关系的拟合曲线:

$$\begin{aligned} \alpha_D &= 0.01423 - 0.006T + 1.65848 \times 10^{-4}T^2 \\ &\quad - 2.92527 \times 10^{-7}T^3, \\ \alpha_L &= -0.10269 - 0.00306T + 1.78122 \times 10^{-4}T^2 \\ &\quad - 3.32844 \times 10^{-7}T^3, \end{aligned} \quad (5)$$

当温度是 292 K 时, 根据 (5) 式可得,  $\alpha_D = 5.12 \times 10^{-6}$ ,  $\alpha_L = 5.90 \times 10^{-6}$ 。比较可知, 介电常数温度系数对温度的敏感度比热膨胀系数约大 10 倍, 因此, 蓝宝石谐振体工作在  $WGH$  回音壁模式时, 频率-温度敏感度主要与平行于晶轴方向的介电常数温度系数有关。根据 (4) 式可得, 当温度为 292 K 时, 蓝宝石谐振体工作在  $WGH$  回音壁模式的频率-温度敏感度约为  $71.64 \times 10^{-6}$ 。因此, 为了使蓝宝石谐振体有较高的中短期频率稳定度, 需要

采用精密的温控技术或者对频率-温度敏感度进行补偿.

## 4 结 论

本文以蓝宝石谐振体为基础, 通过理论分析和模拟仿真, 对蓝宝石谐振体工作在  $WGH_{15,0,0}$  模式下的尺寸、结构进行了优化设计. 理论计算了蓝宝石谐振体高度和直径以及相对介电常数对谐振频率的影响. 通过对蓝宝石谐振体进行耦合测试与调节, 最终实现了蓝宝石谐振体的谐振频率为 9.891 GHz, 无载  $Q$  值为 94000, 由此可制成具有低相位噪声特性的微波振荡器.

## 参考文献

- [1] Tobar M E, Krupka J, Ivanov E N, Woode R A 1997 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **30** 2770
- [2] Hartnett J G, Nand N R, Lu C 2012 *Appl. Phys. Lett.* **100** 183501
- [3] Calosso C E, Vernotte F, Giordano V, Fluhr C, Dubois B, Rubiola E 2019 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **66** 616
- [4] Santarelli G, Laurent Ph, Lemonde P, Clairon A, Mann A G, Chang S, Luiten A N, Salomon C 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4619
- [5] Takamizawa A, Yanagimachi S, Hagimoto K 2022 *Metrologia* **59** 035004
- [6] Wang Q, Wei R, Wang Y Z 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 163202 (in Chinese) [王倩, 魏荣, 王育竹 2018 物理学报 **67** 163202]
- [7] Guena J, Abgrall M, Clairon A, Bize S 2014 *Metro.* **51** 108
- [8] Thomson C A, McAllister B T, Goryachev M, Goryachev M, Ivanov E N, Tobar M E 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 081803
- [9] Campbell W M, McAllister B T, Goryachev M, Ivanov E N, Tobar M E 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 071301
- [10] Ball H, Oliver W D, Biercuk M J 2016 *npj Quantum Inf.* **2** 1
- [11] Sepiol M A, Hughes A C, Tarlton J E, Nadlinger D P, Balance T G, Balance C J, Harty T P, Steane A M, Goodwin J F, Lucas D M 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 110503
- [12] Nand N R, Hartnett J G, Ivanov E N, Santarelli G 2011 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **59** 2978
- [13] Doleman S, Mai T, Rogers A E E, Hartnett J G, Tobar M E, Nand N 2011 *PASP* **123** 582
- [14] Giordano V, Grop S, Dubois B, Bourgeois P Y, Kersalé Y, Haye G, Dolgovskiy V, Bucalovic N, Domenico G D, Schilt S, Chauvin J, Valat D, Rubiola E 2012 *Rev. Sci. Instrum.* **83** 085113
- [15] Grop S, Giordano V, Bourgeois P Y, Bazin N, Kersale Y, Oxborrow M, Marra G, Langham C, Rubiola E, DeVincente J 2009 *IEEE International Frequency Control Symp. Joint with the 22 nd European Frequency and Time Forum* 376
- [16] Le Floch J M, Fan Y, Humbert G, Shan Q X, Férachou D, Bara-Maillet R, Aubourg M, Hartnett J G, Madrangeas V, Cros D, Blondy J M, Krupka, Tobar M E 2014 *Rev. Sci. Instrum.* **85** 031301
- [17] Le Floch J M, Murphy C, Hartnett J G, Madrangeas V, Krupka J, Cros D, Tobar M E 2017 *J. Appl. Phys.* **121** 014102
- [18] Krupka J, Derzakowski K, Abramowicz A, Tobar M E 1999 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **47** 752
- [19] Tobar M E, Mann A G 1991 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **39** 2077
- [20] Di Monaco O 1997 *Ph. D. Dissertation* (Besançon: Université de Franche Comté)
- [21] Liang X P, Zaki K A 1993 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **41** 2174
- [22] Rayleigh L 1910 *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **20** 1001
- [23] Kobayashi Y, Tanaka S 1980 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **28** 1077
- [24] Zaki K A, Atia A E 1983 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **31** 1039
- [25] Peng H, Blair D G 1994 *Proceedings of IEEE 48th Annual Symposium on Frequency Control* 459
- [26] Aubourg M, Guillon P 1991 *JEWA* **5** 371
- [27] Strang G, Fix G J, Griffin D S 1974 *J. Appl. Mech.* **41** 62
- [28] Jin J M 2002 *The Finite Element Method in Electromagnetics* (2nd Ed. ) (NewYork: Wiley-IEEE Press)
- [29] Tobar M E, Krupka J, Ivanov E N, Woode R A 1996 *IEEE International Frequency Control Symp.* 799
- [30] Shelby R, Fontanella J, Andeen C 1980 *J. Phys. Chem. Solids* **41** 69
- [31] White G K 1993 *Thermochim. Acta* **218** 83

# Electromagnetic field distribution of whispering gallery mode in a sapphire resonator<sup>\*</sup>

Fan Si-Chen<sup>1)2)3)</sup> Yang Fan<sup>1)2)3)</sup> Ruan Jun<sup>1)3)</sup><sup>†</sup>

1) (*National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China*)

2) (*University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

3) (*Key Laboratory of Time and Frequency Primary Standards, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China*)

( Received 10 June 2022; revised manuscript received 19 July 2022 )

## Abstract

When the electromagnetic field in the sapphire resonator corresponds to the whispering gallery mode, it exhibits an extremely low dielectric loss. As result, sapphire oscillator has the characteristics of ultra-low phase noise and high short-term frequency stability. The distribution of electromagnetic field in the sapphire resonator is very important for realizing high-level oscillator. In this work, the radial-axial mode matching method is used to theoretically analyze the distribution of the field mode in the sapphire resonator, and the resonant frequency of the  $WGH_{m,0,0}$  mode is calculated. The field distribution of the sapphire resonator is simulated by the finite element analysis method. The gallery mode number of the sapphire resonator is studied and the electromagnetic field intensity distribution of the  $WGH_{15,0,0}$  mode in the azimuthal, axial and radial direction are obtained. Finally, a home-made gallery mode analyzer is used to measure the microwave field on the surface of sapphire resonator, which is composed of a three-dimensional rotating stage, the magnetic ring/probe coupling and a vector network analyzer. With the above theoretical analysis, the finite element analysis method and the experimental measurement, the working mode of the sapphire resonator and the resonant frequency of the  $WGH_{m,0,0}$  mode are determined. When the sapphire resonator works in  $WGH_{15,0,0}$  mode, the resonant frequency is 9.891 GHz, and the parameters of the whispering gallery mode in the resonator are obtained, and the unloaded  $Q$  value of the resonator is 94000. When the temperature is 292 K, the frequency-temperature sensitivity of the sapphire resonator working in the  $WGH_{m,0,0}$  whispering gallery mode is about  $71.64 \times 10^{-6}$ . The microwave oscillator consisting of the high  $Q$  sapphire resonator can be used to make an oscillator with ultra-low phase noise and high frequency stability.

**Keywords:** sapphire resonator, whispering gallery mode, phase noise, quality factor

**PACS:** 41.20.Jb, 06.30.Ft

**DOI:** 10.7498/aps.71.20221156

<sup>\*</sup> Project supported by the Foundation for Western Young Scholars, Chinese Academy of Sciences (Grant No. XAB2018A06) and the Large Research Infrastructures Improvement Funds of Chinese Academy of Sciences (Grant No. DSS-WXGZ-2020-0005).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [ruanjuan@ntsc.ac.cn](mailto:ruanjuan@ntsc.ac.cn)

## 蓝宝石谐振体内的回音壁模电磁场分布

范思晨 杨帆 阮军

## Electromagnetic field distribution of whispering gallery mode in a sapphire resonator

Fan Si-Chen Yang Fan Ruan Jun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 234101 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20221156

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221156>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### 扁长型微瓶腔中的回音壁模式选择及Fano谐振

Selection of whispering-gallery modes and Fano resonance of prolate microbottle resonators

物理学报. 2020, 69(23): 234203 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200817>

#### 结构改进的厘米尺寸谐振腔的磁场传感特性

Magnetic field sensing performance of centimeter-scale resonator with optimized structure

物理学报. 2021, 70(16): 160701 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210247>

#### 激光3D纳米打印温度敏感的微球激光器

Femtosecond laser 3D printing temperature sensitive microsphere lasers

物理学报. 2019, 68(19): 194204 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190298>

#### 一种新型光学微腔的理论分析

Theoretical analysis of new optical microcavity

物理学报. 2018, 67(14): 144201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180067>

#### 各向异性三维非对称双锥五模超材料的能带结构及品质因数

Phononic band structure and figure of merit of three-dimensional anisotropic asymmetric double-cone pentamode metamaterials

物理学报. 2020, 69(13): 134302 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200364>

#### 超稳光生微波源研究进展

Progresses of ultrastable optical-cavity-based microwave source

物理学报. 2018, 67(16): 160602 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180751>