

基于能量守恒框架下的波动力学理论研究

王秀明¹⁾²⁾³⁾ 周吟秋¹⁾²⁾³⁾†

1) (中国科学院声学研究所声场与声信息国家重点实验室, 北京 100190)

2) (中国科学院大学物理学院, 北京 100149)

3) (北京市海洋深部钻探测量工程技术研究中心, 北京 100190)

(2021 年 12 月 7 日收到; 2022 年 2 月 6 日收到修改稿)

基于波动力学的基本概念, 提出了在能量守恒框架下建立波动力学方程的新思路与方法. 首先, 回顾了用牛顿第二定律推导波动力学方程, 同时回顾并分析了利用 Hamilton 变分原理, 推导了在连续介质中的 Lagrange 方程、Hamilton 正则方程, 以及相应的波动力学方程; 其次, 在能量守恒的框架下, 建立了连续介质的 Lagrange 方程、Hamilton 正则方程和波动力学方程, 并证明其结果与利用经典力学推导的结果的一致性, 特别地, 澄清了用 Hamilton 变分原理建立保守系统下连续介质的 Lagrange 方程和 Hamilton 正则方程时在边界条件应用时的一些模糊认识. 在能量守恒框架下建立一系列动力学方程, 为我们在不涉及泛函求极值的变分原理等基础上刻画和表述复杂介质中波动现象的演化规律提供了另一种途径, 也深入探讨了最小作用原理的物理本质. 最后, 在能量守恒的框架下给出了建立黏弹性介质中的波动力学微分方程的应用.

关键词: 波动力学方程, Hamilton 变分原理, Lagrange 方程, 能量守恒**PACS:** 45.20.-d, 45.20.Jj, 45.20.dh**DOI:** 10.7498/aps.72.20212272

1 引言

一般认为, 连续介质的动力学方程 (如 Cauchy 运动方程) 来自于离散的经典力学在连续介质的推广和应用. 自从 Lagrange 力学和 Hamilton 力学建立以来, Hamilton 变分原理或最小作用原理在物理学研究方面发挥着极其重要的作用^[1-4], 从而占据了物理学的中心. 诸多学者似乎不再注重最小作用原理的实质, 直接寻找满足动力学方程和边界条件的泛函, 然后利用变分原理来建立弱形式的动力学方程^[5]. 然而, 正如张海澜^[6]和沈惠川等^[7]所指出的, 这在确定 Lagrange 量会出现模糊的认识^[6,7], 例如 EerNisse 等^[8]定义的 Lagrange 函数等问题. 人们在研究多物理场中的“动能”和“势能”密度函数时, 对于电磁场中的 Lagrange 量等^[7,9]也有不少

困惑, 关于电场能、磁场能和热能等是“动能”还是“势能”的公开讨论也不少见, 直到近来有关如何确定 Lagrange 量还成为一重要研究课题^[10-12]. 此外, 不同学者利用 Hamilton 变分原理来研究连续介质动力学问题时却得出了不同结论, 如 Moiseiwitsch^[13]给出的连续介质的 Hamilton 正则方程与 Cline^[14]给出的结果并不一致, 而唐立民^[15]的结论与 Cline^[14]的结论也不尽一致. 此外, 在用 Hamilton 变分原理建立波动力学方程时, 有些学者^[2,4]取边界上的虚位移为任意值, 而另一些学者^[3,7,13,14]取虚位移为 0 等, 这些问题也有必要进一步澄清和说明.

伴随着 Lagrange 和 Hamilton 力学体系的不断丰富和完善, 人们对 Lagrange 量的物理意义和 Hamilton 变分原理本质的讨论也一直存在. 诸多文献指出, 从 Lagrange 提出“Lagrange 量”这个概念起, 它似乎就被认为不要求有物理意义^[16-19].

† 通信作者. E-mail: zhouyinqiu@mail.ioa.ac.cn

Lagrange 量, 即动能与势能之差, 由此推导出的 Lagrange 方程和 Hamilton 变分原理或最小作用原理无疑是正确而有效的, 但是它究竟具有什么样的物理意义? 为什么 Lagrange 量对于时间积分定义的作用量或泛函取极值确定的状态是真实状态? 为什么要选择一个物理意义不甚明确, 而又不唯一的变量来支撑力学理论框架, 一直是存在人们心中的疑问 [20]. 尽管 Landau [16] 对 Lagrange 函数对时间积分的作用量做了很好的数学阐述, 包括近来的一些工作 [20], 但在 Hamilton 变分原理的背后是否有更深层次的规律, 似乎还有进一步探究的必要. 近来有关变分原理统一表述的一系列研究 [21–24] 结果表明, 包括 Hamilton 变分原理在内的所有变分原理实际上是得失相等的因果定律的推论. 这些研究不仅提出了得失因果原理和变分原理的关系, 并进一步指出了变分原理的一些深层次问题, 如双极值对系统运动刻画等问题. 这些问题的讨论都是很有意义的探索. 还有近来一些学者对 Hamilton 变分原理的有效性 [25], 以及 Lagrange 量的确定问题等做了较深入的讨论和说明 [13]. 例如, 在由 Hamilton 变分原理确定 Lagrange 方程时, 必须在时间的端点和空间的表面上虚位移为零 [3,7,13,14,26], 但这不能考虑给定的初始条件或边界条件. 另外, 诸多相关文献认为 Hamilton 力学适用于 Hamilton 量不是时间的显式的情况 [16–19,26–28]. 对于非保守系统, Hamilton 变分原理必须根据情况进行修正. 当有非保守力时, Hamilton 变分原理需考虑非保守力所做的功附加项 [2,4].

必须指出的是, Hamilton 力学的核心是以能量为中心, 但它并非是以能量守恒为基础建立起来, 而能量守恒公式恰恰是从 Hamilton 变分原理“推导”出来的, 更严格地说, 它遵守能量守恒. 近年来, 也有用能量守恒原理建立动力学方程的零散报道 [29–31], 这些文献都利用能量守恒原理推导了弹簧振子的振动方程等. 特别是在早期的相关研究中, 有利用能量守恒定律来建立 Bernoulli 方程的诸多教科书和文献等 [32]. 但是, 到目前为止尚未见到有关利用能量守恒定律直接建立连续介质中 Lagrange 方程和 Hamilton 正则方程, 以及动力学方程的系统报道.

针对以上问题, 基于波动力学的基本概念, 提出从能量守恒的角度来直接研究一个力学系统的运动状态的思路. 对于能否直接从能量守恒定律出

发, 建立弹性连续介质中的 Lagrange 方程、Hamilton 正则方程和波动力学方程等问题的可行性进行研究. 为了保持一致性和完整性, 首先回顾利用 Newton 第二定律、Lagrange 方程和 Hamilton 变分原理建立波动力学方程的过程, 然后分别给出利用能量守恒原理确定动力学方程的思路和具体推导, 包括基于能量守恒框架下连续的保守系统中的 Lagrange 方程和 Hamilton 的正则方程的推导等, 并将这些结果与从 Hamilton 原理推导的结果进行对比, 分析用能量守恒原理建立波动力学方程的优点, 并给出用能量守恒原理确定黏弹性介质中波动力学方程的应用.

2 Newton 力学和 Hamilton 力学框架下的波动力学方程

2.1 物理模型

假设在直角坐标系 $x_i, i = 1, 2, 3$ 中有一无限大非均质各向异性弹性介质, 其密度为 $\rho = \rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$. 其中 \mathbf{e}_i 为三个坐标方向的单位矢量, 如图 1 所示. 在无限大非均匀介质中, 任取一表面为 $\partial\Omega$ 的体积 Ω , 并在其中任取一表面微元为 ds 外法线方向单位矢量为 $\mathbf{l}_i, i = 1, 2, 3$ 的微体积分元 dv . 假设表面微元 ds 的外表面所受的外法向的应力为 \mathbf{T}_i , dv 中的体力记为 $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, t)$ [3], 则根据某一面上的应力和一点的应力状态的应力分量的关系, $\mathbf{T}_i = T_{ij} \mathbf{l}_j, i, j = 1, 2, 3$.

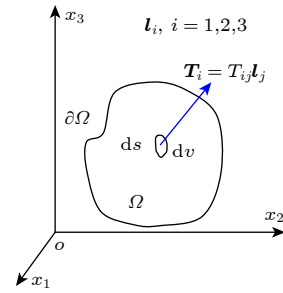


图 1 物理模型示意图

Fig. 1. Schematic diagram of physical model.

假如介质中存在波动现象, 则其动能和势能的密度函数可分别表述为 [3]

$$K_\rho = \rho \dot{q}_i \dot{q}_i / 2, \quad (1a)$$

$$U_\rho = T_{ij} q_{i,j} / 2, \quad (1b)$$

其中 q_i 为质点的振动位移, $\dot{q}_i = dq_i/dt$ 为质点的振

动速度, 应变为

$$q_{i,j} = (\partial q_i / \partial x_j + \partial q_j / \partial x_i) / 2, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1c)$$

根据 Lagrange 密度函数和 Hamilton 密度函数的定义, 分别表述为^[3]

$$L_\rho = \rho \dot{q}_i \dot{q}_i / 2 - T_{ij} q_{i,j} / 2, \quad (2a)$$

$$H_\rho = p_i \dot{q}_i - L_\rho. \quad (2b)$$

(2b) 式中广义动量密度定义为 $p_i = \partial L_\rho / \partial \dot{q}_i = \rho \dot{q}_i$. 而 $H_\rho = p_i \dot{q}_i - L_\rho$ 为 Legendre 变换^[16,33-35]. 在数学上, Hamilton 密度函数和 Lagrange 密度函数可以用 Legendre 变换建立其对应关系, 它把位形空间的广义速度变量转换为相空间的广义动量密度变量, 从而实现了位形空间的 (q_i, \dot{q}_i, t) 坐标到相空间的 (q_i, p_i, t) 坐标的变换; 物理上, 通过这种变换, 将以 Lagrange 力学理论体系研究转换到以 Hamilton 力学理论体系研究中, 为 Hamilton 力学向量子力学拓展提供了基础. Hamilton 函数的物理意义是在 Lagrange 函数不是时间的显式函数的情况下, 它代表系统的总能量, 即动能与势能之和^[14,16]. 设想将此情况推广到连续介质, Hamilton 的密度函数相应的为系统的总能量密度, 即动能密度与势能密度之和. 有关 Hamilton 量和总能量关系的详细讨论可以参见 Cline 等^[14] 的工作.

2.2 Newton 力学框架下的波动力学方程

根据 Newton 第二定律, 作用于被面积为 ds 的曲面包围的微体积元 dv 上的合外力等于小体积元的动量对时间的变化率, 即^[3]

$$T_i ds + f_i dv = \dot{P}_i, \quad (3a)$$

式中动量 $P_i = \rho \dot{q}_i dv$. 根据我们的模型假定, 考虑到 $\dot{P}_i = \rho \ddot{q}_i dv$, 则在整个 Ω 体积域, 有

$$\iiint_{\Omega} f_i dv + \oint_{\partial\Omega} T_i ds = \iiint_{\Omega} \rho \ddot{q}_i dv. \quad (3b)$$

根据 Gauss 定理, $\oint_{\partial\Omega} T_i ds = \iiint_{\Omega} T_{ij,j} dv$ 及 $T_i = T_{ij} l_j$, 则 (3b) 式可简化为

$$\iiint_{\Omega} (T_{ij,j} + f_i - \rho \ddot{q}_i) dv = 0. \quad (3c)$$

因为所取的体积 Ω 是任意的, 要使得上式在任意体积域中都成立, 则必有

$$\rho \ddot{q}_i - T_{ij,j} - f_i = 0. \quad (4)$$

(4) 式为在 Newton 力学框架下建立的一般的非均匀各向异性弹性介质中的波动力学方程或 Cauchy

第一运动方程.

2.3 Hamilton 变分原理框架下的波动力学方程

Hamilton 变分原理, 又称最小作用原理^[16,26], 其数学表述为

$$\delta \int_{t_0}^t L dt = 0, \quad (5a)$$

其中, L 为 Lagrange 函数, 是 Lagrange 密度函数对某一体积上的空间积分. 但是, (5a) 式给出的 Hamilton 变分原理只适用于保守系统^[16]. 对于非保守系统, 如有非保守体力或者损耗力时, 必须做出修正. 一般有两种思路: 一是利用 Lagrange 数乘法推导出非保守系统下的变分原理表达式; 二是利用 d'Alembert 原理, 引入虚位移和虚功的概念建立非保守系统下的 Hamilton 变分原理, 此时称之为 Hamilton 广义变分原理, 其具体表达式为^[16,26,33]

$$\int_{t_0}^t \delta L dt + \int_{t_0}^t \delta W dt = 0, \quad (5b)$$

式中 δW 为非保守力产生虚位移 δu_i 时所做的虚功, 或广义力做的虚功. 如果修改 L 的定义, 推广到势能包括非保守力等所做的功的情况^[26], 则可回到 (5a) 式, 但是此时的广义动量密度定义也必须拓展, 这将另行讨论. 张海澜^[6] 给出的变分表达式实际上是 (5b) 式给出的, 具体为

$$\int_{t_0}^t \delta(U - W - K) dt = 0.$$

下面回顾并分析在连续的保守系统中 Lagrange 方程的建立, 以便从 Lagrange 力学的角度, 建立连续介质中的波动力学方程. 不妨假定 Ω 的表面 $\partial\Omega$ 上满足应力自由的边界条件, 即表面上满足的边界条件为 $T_i = 0, i = 1, 2, 3$, 以使得所研究的区域为保守系统. 此时, Lagrange 密度函数可写为 $L_\rho = L_\rho(q_i, \dot{q}_i, q_{i,j}, t)$, 其中 $q_i, \dot{q}_i, q_{i,j}$ 分别为广义坐标、广义速度和广义应变自变量, 分别对应连续系统中某点的位移、速度和应变^[3,4,13,14,19]. 根据变分原理^[34]

$$\begin{aligned} \delta L_\rho = & (\partial L_\rho / \partial q_i) \delta q_i + (\partial L_\rho / \partial \dot{q}_i) \delta \dot{q}_i \\ & + (\partial L_\rho / \partial q_{i,j}) \delta q_{i,j} + (\partial L_\rho / \partial t) \delta t, \end{aligned} \quad (5c)$$

在该情况下讨论连续的保守系统, Lagrange 密度函数不是时间的显式函数, $\partial L_\rho / \partial t = 0$. 其实, 对时间的变分也为零, 所以,

$$\delta L_\rho = \left(\frac{\partial L_\rho}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\frac{\partial L_\rho}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta \dot{q}_i + \left(\frac{\partial L_\rho}{\partial q_{i,j}} \right) \delta q_{i,j}, \quad (6a)$$

且

$$\delta L = \iiint_\Omega \delta L_\rho dv = \iiint_\Omega \delta (K_\rho - U_\rho) dv. \quad (6b)$$

根据 Hamilton 变分原理, (5a) 式、(6a) 式和 (6b) 式, 有

$$\int_{t_0}^t dt \iiint_\Omega \delta L_\rho dv = 0, \quad (6c)$$

或

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t dt \iiint_\Omega [(\partial L_\rho / \partial q_i) \delta q_i + (\partial L_\rho / \partial \dot{q}_i) \delta \dot{q}_i \\ + (\partial L_\rho / \partial q_{i,j}) \delta q_{i,j}] dv = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

显然

$$\begin{aligned} (\partial L_\rho / \partial q_{i,j}) \delta q_{i,j} \\ = [(\partial L_\rho / \partial q_{i,j}) \delta q_i]_{,j} - (\partial L_\rho / \partial q_{i,j})_{,j} \delta q_i, \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} (\partial L_\rho / \partial \dot{q}_i) \delta \dot{q}_i \\ = d[(\partial L_\rho / \partial \dot{q}_i) \delta q_i] / dt - \delta q_i d(\partial L_\rho / \partial \dot{q}_i) / dt. \end{aligned} \quad (8b)$$

将以上 (8a) 式和 (8b) 式代入 (7) 式, 整理得

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t dt \iiint_\Omega \left\{ [\partial L_\rho / \partial q_i - (\partial L_\rho / \partial q_{i,j})_{,j} \right. \\ \left. - d(\partial L_\rho / \partial \dot{q}_i) / dt] \delta q_i + d[(\partial L_\rho / \partial \dot{q}_i) \delta q_i] \right. \\ \left. / dt + [(\partial L_\rho / \partial q_{i,j}) \delta q_i]_{,j} \right\} dv = 0. \end{aligned} \quad (8c)$$

再利用 Gauss 定理, 可将 (8c) 式中的部分体积分转化成为面积分, 则有

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t dt \iiint_\Omega [\partial L_\rho / \partial q_i - (\partial L_\rho / \partial q_{i,j})_{,j} \\ - d(\partial L_\rho / \partial \dot{q}_i) / dt] \delta q_i dv \\ + \iiint_\Omega [(\partial L_\rho / \partial \dot{q}_i) \delta q_i]_{,j}^t dv \\ + \int_{t_0}^t dt \oint_{\partial\Omega} (\partial L_\rho / \partial q_{i,j}) \delta q_i l_j ds = 0. \end{aligned} \quad (8d)$$

根据变分原理, 考虑到虚位移在时间积分上下限为零, 而在给定的积分区域 Ω 和区域边界 $\partial\Omega$ 上虚位移为任意值, 则由 (8d) 式可得到波动力学方程的微分形式及边界条件, 即

$$\begin{aligned} d(\partial L_\rho / \partial \dot{q}_i) / dt + (\partial L_\rho / \partial q_{i,j})_{,j} - \partial L_\rho / \partial q_i = 0, \\ \text{(在整个积分域 } \Omega \text{ 中)} \end{aligned} \quad (8e)$$

$$(\partial L_\rho / \partial q_{i,j}) l_j = 0. \text{(在积分域 } \Omega \text{ 的表面 } \partial\Omega \text{ 上)} \quad (8f)$$

如果只考虑一维模型, 则 (8e) 式与 Morse^[26] 给出的一维弦的结果一致, 且与 Achenbach^[3] 给出的三维结果也相符. 另外, 由 (8f) 式可知, 此时 Hamilton 变分原理要求在积分区域边界上满足 $(\partial L_\rho / \partial q_{i,j}) l_j = T_i = 0$. 显然, 这是我们假定的边界条件. 该情况下用连续介质保守系统下的 Hamilton 变分原理确定 Lagrange 方程时利用了边界为应力自由的条件, 那就是对所研究系统的时间上下限要求虚位移为零, 以及在给定的积分区域空间的边界 $\partial\Omega$ 上应力自由, 只有这样才能使 (8d) 式中左数第二项和第三项为 0, 即

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega (\partial L_\rho / \partial \dot{q}_i) \delta q_i|_{t_0}^t dv \\ + \int_{t_0}^t dt \oint_{\partial\Omega} (\partial L_\rho / \partial q_{i,j}) \delta q_i l_j ds = 0. \end{aligned} \quad (8g)$$

如此, 在用 Hamilton 原理确定连续介质保守系统下 Lagrange 方程时, 用了应力自由边界条件. 这种条件恰恰说明所研究区域中的能量是守恒的. 因为应力自由边界条件致使在所研究的积分区域内的机械能与外界无交换. 有些学者在进行以上推导中取 $\partial\Omega$ 上的 δq_i 为零, 这虽然也可以得到 Lagrange 方程, 但是在实际中无法施加有实际约束的边界条件. 因此, 取边界虚位移为零这一做法^[3,13,26,27], 严格来说是不正确的, 而且 Hamilton 变分原理只求所研究时间的端点上虚位移为零, 并没有要求区域边界上的虚位移为零. 在后续的讨论中, 将会看到在能量守恒框架下确定的连续系统的 Lagrange 方程, 与利用 Newton 定律求解运动方程时类似, 不需要这样的边值约束.

下面由 (8e) 式推导波动力学方程. 将 Lagrange 函数密度表达式 (2a) 式代入 (8e) 式, 该方程式的第一项为 $(\partial L_\rho / \partial \dot{q}_i) / dt = \rho \ddot{q}_i$, 第二项为 $(\partial L_\rho / \partial q_{i,j})_{,j} = -T_{ij,j}$, 第三项为 0. 因此, Lagrange 微分方程 (8e) 给出了连续的保守系统下的波动力学方程, 即

$$\rho \ddot{q}_i - T_{ij,j} = 0. \quad (9a)$$

(9a) 式与 (4) 式中无体力存在时的情况是一致的. 对于非保守系统, 如非保守体力 $f_i = f_i(\vec{x}, t) \neq 0$, 由 Hamilton 广义变分原理 (5b) 式可得

$$(\partial L_\rho / \partial \dot{q}_i) / dt + (\partial L_\rho / \partial q_{i,j})_{,j} - \partial L_\rho / \partial q_i - f_i = 0. \quad (9b)$$

同样, 可以给出

$$\rho \ddot{q}_i - T_{ij,j} - f_i = 0. \quad (9c)$$

显然, (9c) 式与由 Newton 第二定律给出的结果 ((4) 式) 一致.

根据 (5a) 式也可以推导出连续的保守系统的 Hamilton 正则方程. 从 (2a) 式和 (2b) 式可知, 利用 Legendre 变换^[16,34,35]

$$L_\rho = \dot{q}_i p_i - H_\rho, \quad (9d)$$

其中, 广义动量密度 $p_i = \partial L_\rho / \partial \dot{q}_i$. 将 (6c) 式中的 Lagrange 密度函数用 Hamilton 密度函数代替, 即

$$\int_{t_0}^t dt \iiint_\Omega \delta(\dot{q}_i p_i - H_\rho) dv = 0. \quad (10a)$$

考虑到

$$\begin{aligned} & \delta(\dot{q}_i p_i - H_\rho) \\ &= \dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - (\partial H_\rho / \partial q_i) \delta q_i \\ & \quad - (\partial H_\rho / \partial p_i) \delta p_i - (\partial H_\rho / \partial q_{i,j}) \delta q_{i,j}, \end{aligned} \quad (10b)$$

且对于保守系统, $\partial L_\rho / \partial t = 0$, 以及 $\partial H_\rho / \partial t = 0$, 所以 (10a) 式可写为

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t dt \iiint_\Omega [(\dot{q}_i - \partial H_\rho / \partial p_i) \delta p_i \\ & \quad + p_i \delta \dot{q}_i - (\partial H_\rho / \partial q_i) \delta q_i \\ & \quad - (\partial H_\rho / \partial q_{i,j}) \delta q_{i,j}] dv = 0. \end{aligned} \quad (11a)$$

由于

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t dt \iiint_\Omega p_i \delta \dot{q}_i dv \\ &= \iiint_\Omega (p_i \delta q) \big|_{t_0}^t dv - \int_{t_0}^t dt \iiint_\Omega \dot{p}_i \delta q_i dv, \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} & (\partial H_\rho / \partial q_{i,j}) \delta q_{i,j} \\ &= [(\partial H_\rho / \partial q_{i,j}) \delta q_i]_{,j} - (\partial H_\rho / \partial q_{i,j})_{,j} \delta q_i, \end{aligned} \quad (11c)$$

分别将 (11b) 式和 (11c) 式代入 (11a) 式, 得

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t dt \iiint_\Omega \{(\dot{q}_i - \partial H_\rho / \partial p_i) \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i \\ & \quad - (\partial H_\rho / \partial q_i) \delta q_i - [(\partial H_\rho / \partial q_{i,j}) \delta q_i]_{,j} \\ & \quad + (\partial H_\rho / \partial q_{i,j})_{,j} \delta q_i\} dv \\ & \quad + \iiint_\Omega (p_i \delta q) \big|_{t_0}^t dv = 0. \end{aligned} \quad (11d)$$

利用 Gauss 定理, 可将 (11d) 式中的部分体积分 $\iiint_\Omega [(\partial H_\rho / \partial q_{i,j}) \delta q_i]_{,j} dv$ 转化成为面积分, 则有

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t dt \iiint_\Omega [(\dot{q}_i - \partial H_\rho / \partial p_i) \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i \\ & \quad - (\partial H_\rho / \partial q_i) \delta q_i + (\partial H_\rho / \partial q_{i,j})_{,j} \delta q_i] dv \\ & \quad - \int_{t_0}^t dt \oint_{\partial\Omega} (\partial H_\rho / \partial q_{i,j}) l_j \delta q_i ds \\ & \quad + \iiint_\Omega (p_i \delta q) \big|_{t_0}^t dv = 0. \end{aligned} \quad (11e)$$

且根据变分原理的时间边界条件, $\delta q(t_0) = \delta q(t) = 0$, 可知 $\iiint_\Omega (p_i \delta q) \big|_{t_0}^t dv = 0$. 这时, (11e) 式可写为

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t dt \iiint_\Omega \{(\dot{q}_i - \partial H_\rho / \partial p_i) \delta p_i \\ & \quad - [(\dot{p}_i + \partial H_\rho / \partial q_i - (\partial H_\rho / \partial q_{i,j})_{,j}) \delta q_i] \\ & \quad - \oint_{\partial\Omega} (\partial H_\rho / \partial q_{i,j}) l_j \delta q_i ds\} dv = 0. \end{aligned} \quad (11f)$$

显然, δq_i 和 δp_i 在所研究的时间区间上的体积域内取值是任意的, 相互独立, 而且 δq_i 在表面 $\partial\Omega$ 上取值也是任意的, 故 (11f) 式成立的必要条件是

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \partial H_\rho / \partial p_i, \\ \dot{p}_i = -\partial H_\rho / \partial q_i + (\partial H_\rho / \partial q_{i,j})_{,j}, \end{cases} \quad (\text{在 } \Omega \text{ 中}) \quad (12)$$

以及 $(\partial H_\rho / \partial q_{i,j}) l_j = T_{ij} l_j = T_i = 0$ (在 $\partial\Omega$ 上). 由于 Ω 的取值是任意的, 即 (12) 式除在 $\partial\Omega$ 之外的 Ω 中的任意一点都成立, 而在边界上应力是自由的, 这符合自由边界条件的假定. 这一假定与推导 Lagrange 方程时一样. 显然 (12) 式为保守的连续介质中的 Hamilton 正则方程, 如果考虑一维情况, 这与 Morse 等^[26] 给出的一维弦的结果一致, 而且 (12) 式与 Cline^[13] 给出的三维情况一致, 但与 Moiseiwitsch^[13] 的结果不一致. (12) 式中的广义速度与离散系统中的一致. 在连续系统中 (12) 式给出的广义动量密度, 比离散系统的广义动量密度多了一项, 这是由于连续系统的介质变形产生的贡献, 而在离散系统中不考虑物体的变形. 所以, 在连续介质中 Hamilton 正则方程是非齐次的. 必须指出, 我们这一结果与唐立民^[15] 给出的结果也不一致, 其给出的正则方程不含物体变形时的贡献. 此外在推导过程中, 由于边界 $\partial\Omega$ 上的虚位移任意, 其结果相当于界面上所受到的应力为零, 即自由边界情况. 如此, 在用 Hamilton 原理推导连续的保守系统的 Hamilton 正则方程时, 利用了应力自由边界条件, 或取边界上的虚位移为零, 其存在的问

题在推导 Lagrange 方程时的情况已做了说明, 在此不再赘述.

3 能量守恒框架下的波动力学方程

从能量守恒定律出发, 新建所研究的连续系统的 Lagrange 方程和 Hamilton 正则方程, 以及相应的波动力学方程. 根据 Hamilton 密度函数或 Lagrange 密度函数不是时间 t 的显式函数时的条件, 离散系统的 Hamilton 函数为系统的总能量, 即动能与势能之和. 这一结论可以推广到连续系统中, 即 Hamilton 密度函数为动能密度函数与势能密度函数之和. 由此根据能量守恒定律, 某一区域中的总能量对时间的变化率等于该区域所受的体力和面力所做功的总和对时间的变化率, 即 [3,26,36]

$$dH/dt = dW/dt. \quad (13a)$$

如果考虑保守系统, 如前所述, 可以假定所研究的体积域表面 $\partial\Omega$ 上的应力自由, 且无体力, 则 (13a) 式可写为

$$dH/dt = 0. \quad (13b)$$

$$dH/dt = d\left(\iiint_{\Omega} H_{\rho} dv\right)/dt. \quad (13c)$$

其中 $H_{\rho} = H_{\rho}(q_i, \dot{q}_i, q_{i,j}, t) = H_{\rho}(q_i, p_i, q_{i,j}, t)$, 分别为 Hamilton 密度函数在位形空间和相空间的表达式, 括号中的相关自变量, 其具体表达式已在前面给出, 且与前述一样, $q_i, \dot{q}_i, q_{i,j}$ 或 $q_i, p_i, q_{i,j}$ 分别为位形空间和相空间中的两组独立变量.

下面分析对某一运动体积 $\Omega = \Omega(t)$ 的 Hamilton 密度函数 H 的积分的全导数. 做变量代换, 设 Euler 坐标 x_i , 其中 $x_i = x_i(\xi_i, t)$, ξ_i 为时间为零时刻的坐标, 即 Lagrange 坐标. 将空间 (Euler) 表述转换到 Lagrange 表述, 有 [37]

$$\begin{aligned} & d\left(\iiint_{\Omega(t)} H_{\rho} dv\right)/dt \\ &= d\left[\iiint_{\Omega(0)} (H_{\rho} J) dv_0\right]/dt \\ &= \iiint_{\Omega(0)} [d(H_{\rho} J)/dt] dv_0, \end{aligned} \quad (13d)$$

其中, $dv = Jdv_0$, J 为在 $\Omega(t)$ 中的 Euler 坐标到 $\Omega(0)$ 的 Lagrange 坐标变换的雅可比 [37], (13d) 式可整理为

$$\begin{aligned} & d\left(\iiint_{\Omega(t)} H_{\rho} dv\right)/dt \\ &= \iiint_{\Omega(0)} [H_{\rho}(dJ/dt) + J(dH_{\rho}/dt)] dv_0. \end{aligned} \quad (13e)$$

由于 $\rho J = \rho_0$ [37], 且密度与时间无关, 那么 $dJ/dt = 0$. 代入 (13e) 式整理后, 再变回到 Euler 坐标表述, 即

$$\begin{aligned} dH/dt &= d\left(\iiint_{\Omega(t)} H_{\rho} dv\right)/dt \\ &= \iiint_{\Omega(0)} (dH_{\rho}/dt) J dv_0 \\ &= \iiint_{\Omega(t)} (dH_{\rho}/dt) dv. \end{aligned} \quad (13f)$$

后面的推导中, 不再区分 $\Omega(t)$ 和 Ω .

利用 Legendre 变换 (9d) 式, 以 Hamilton 量表示 Lagrange 量, 并代入 (13f) 式, 整理得

$$\frac{dH}{dt} = \iiint_{\Omega} [\dot{q}_i \dot{p}_i - (\partial L_{\rho}/\partial q_i) \dot{q}_i - (\partial L_{\rho}/\partial q_{i,j}) \dot{q}_{i,j}] dv. \quad (14)$$

另一方面, 面力在 dt 时间内在 ds 上所做的功为

$$dW_{\rho} = (T_{ij} l_j ds) \dot{q}_i dt. \quad (15a)$$

不妨取广义坐标 $q_i = u_i, i = 1, 2, 3$. 根据应变能密度函数的定义, $T_{ij} = \partial U_{\rho}/\partial q_{i,j}$, 代入 (15a) 式, 得

$$dW_{\rho} = [(\partial U_{\rho}/\partial q_{i,j}) l_j ds] \dot{q}_i dt. \quad (15b)$$

因此, 在 dt 时间内面力在表面 $\partial\Omega$ 上做的功为

$$dW = \iint_{\partial\Omega} (\partial U_{\rho}/\partial q_{i,j}) l_j \dot{q}_i ds dt. \quad (15c)$$

那么, 单位时间内面力在整个 $\partial\Omega$ 面上所做的功为

$$\begin{aligned} dW/dt &= \iint_{\partial\Omega} [(\partial U_{\rho}/\partial q_{i,j}) l_j \dot{q}_i] ds \\ &= \iiint_{\Omega} [(\partial U_{\rho}/\partial q_{i,j}) \dot{q}_i]_{,j} dv, \end{aligned} \quad (15d)$$

(15d) 式在整理过程中利用了将面积分转化为体积分的 Gauss 定理. 根据 Lagrange 密度函数的定义, (15d) 式可写为

$$\begin{aligned} dW/dt &= - \iiint_{\Omega} [(\partial L_{\rho}/\partial q_{i,j}) \dot{q}_i]_{,j} dv \\ &= - \iiint_{\Omega} [(\partial L_{\rho}/\partial q_{i,j})_{,j} \dot{q}_i \\ &\quad + (\partial L_{\rho}/\partial q_{i,j}) \dot{q}_{i,j}] dv. \end{aligned} \quad (15e)$$

将 (14) 式和 (15e) 式代入 (13b) 式, 整理得

$$\iiint_{\Omega} [\dot{p}_i - (\partial L_{\rho}/\partial q_i) + (\partial L_{\rho}/\partial q_{i,j})_{,j}] \dot{q}_i dv = 0. \quad (16a)$$

由于 (16a) 式在任意给定的积分区域 Ω 中都要成立, 根据前述的定义, \dot{q}_i 是 Lagrange 密度函数 $L = L(q_i, \dot{q}_i, q_{i,j}, t)$ 中的独立变量, 且不论其如何变化, 能量守恒要求 (16a) 式必需成立, 所以只能有

$$[\dot{p}_i - \partial L_{\rho}/\partial q_i + (\partial L_{\rho}/\partial q_{i,j})_{,j}] \dot{q}_i = 0. \quad (16b)$$

将 $\dot{q}_i = dq_i/dt$ 代入 (16b) 式, 利用 $dt \neq 0$, 整理得

$$[\dot{p}_i - \partial L_{\rho}/\partial q_i + (\partial L_{\rho}/\partial q_{i,j})_{,j}] dq_i = 0. \quad (16c)$$

又考虑到广义动量密度与 Lagrange 密度函数的关系, 即 $p_i = \partial L_{\rho}/\partial \dot{q}_i$, 代入 (16c) 式, 并考虑到 dq_i 独立性和任意性, 有

$$d(\partial L_{\rho}/\partial \dot{q}_i)/dt + (\partial L_{\rho}/\partial q_{i,j})_{,j} - \partial L_{\rho}/\partial q_i = 0. \quad (17a)$$

(17a) 式正好与 (8e) 式相同, 即用能量守恒原理可以直接推导出连续系统的 Lagrange 方程. 必须指出, 该情况下的推导过程并没有对边界条件施加约束, 这与 Hamilton 变分原理不同. 另外, 没有引入泛函和变分的概念, 这反映了用能量守恒建立动力学方程时, 不仅概念清晰、简单, 而且没有边界约束的要求.

如果考虑到非保守力的作用, 如具有与空间和时间相关的体力 $f_i(\mathbf{x}, t)$ [3], 只需在能量守恒方程式中增加单位时间内非保守体力做功项即可. 需要注意的是, 由于功与能量可以相互转化, 因此考虑一种形式的势能时, 其对应的力做功就不考虑, 以保证 (13a) 式两边平衡, 如考虑重力势能时就不再考虑重力做功项. 此时 (15d) 式可表示为

$$dW/dt = \iiint_{\Omega} \{f_i \dot{q}_i + [(\partial U_{\rho}/\partial q_{i,j}) \dot{q}_i]_{,j}\} dv. \quad (17b)$$

将 (14) 式和 (17b) 式代入 (13a) 式, 仿照处理保守系统的步骤可得

$$d(\partial L_{\rho}/\partial \dot{q}_i)/dt + (\partial L_{\rho}/\partial q_{i,j})_{,j} - \partial L_{\rho}/\partial q_i - f_i = 0, \quad (17c)$$

刚好与 (9b) 式一致. 这再次表明在非保守的连续系统中, 从能量守恒和 Hamilton 原理都可以直接给出 Lagrange 方程. 同样在推导 (17c) 式时, 与 Hamilton 原理不同, 我们既没有对时间边界施加约束, 也没有对空间边界施加约束.

下面从能量守恒定律出发, 直接推出连续的保守系统中的 Hamilton 正则方程. 利用类似 (5c) 式的变分公式及 (14) 式, 有

$$dH/dt = \iiint_{\Omega} [(\partial H_{\rho}/\partial q_i) \dot{q}_i + (\partial H_{\rho}/\partial p_i) \dot{p}_i + (\partial H_{\rho}/\partial q_{i,j}) \dot{q}_{i,j} + \partial H_{\rho}/\partial t] dv. \quad (18a)$$

若只考虑保守系统, 则 $\partial H_{\rho}/\partial t = 0$, 且根据 Hamilton 密度函数的定义, 有 $\partial U_{\rho}/\partial q_{i,j} = \partial H_{\rho}/\partial q_{i,j}$. 因此在不考虑非保守体力时, (17b) 式可写为

$$\begin{aligned} dW/dt &= \iiint_{\Omega} [(\partial H_{\rho}/\partial q_{i,j}) \dot{q}_i]_{,j} dv \\ &= \iiint_{\Omega} [\dot{q}_i (\partial H_{\rho}/\partial q_{i,j})_{,j} + \dot{q}_{i,j} (\partial H_{\rho}/\partial q_{i,j})] dv. \end{aligned} \quad (18b)$$

将 (18a) 式和 (18b) 式代入能量守恒公式 (13b) 式, 整理得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \{[(\partial H_{\rho}/\partial q_i) - (\partial H_{\rho}/\partial q_{i,j})_{,j}] \dot{q}_i \\ + (\partial H_{\rho}/\partial p_i) \dot{p}_i\} dv = 0. \end{aligned} \quad (18c)$$

利用 Legendre 变换 (9d) 式, 用 Hamilton 密度函数代替 Lagrange 密度函数, 则 (14a) 式可写为

$$\begin{aligned} dH/dt &= d \iiint_{\Omega} (\dot{q}_i p_i - L) dv/dt \\ &= \iiint_{\Omega} [\ddot{q}_i p_i + \dot{q}_i \dot{p}_i - (\partial L_{\rho}/\partial q_i) \dot{q}_i \\ &\quad - (\partial L_{\rho}/\partial \dot{q}_i) \ddot{q}_i - (\partial L_{\rho}/\partial q_{i,j}) \dot{q}_{i,j}] dv. \end{aligned} \quad (19a)$$

根据 $p_i = \partial L_{\rho}/\partial \dot{q}_i$, (19a) 式可简化为

$$\begin{aligned} dH/dt &= \iiint_{\Omega} [\dot{q}_i \dot{p}_i - (\partial L_{\rho}/\partial q_i) \dot{q}_i \\ &\quad - (\partial L_{\rho}/\partial q_{i,j}) \dot{q}_{i,j}] dv. \end{aligned} \quad (19b)$$

将 (15e) 式和 (19b) 式分别代入 (13b) 式, 整理得

$$\iiint_{\Omega} [\dot{p}_i - \partial L_{\rho}/\partial q_i + (\partial L_{\rho}/\partial q_{i,j})_{,j}] \dot{q}_i dv = 0. \quad (20)$$

由 (20) 式可知, 因为该式的积分区域 Ω 中 \dot{q}_i 为独立变量, 可以任意取值,

$$[\dot{p}_i - \partial L_{\rho}/\partial q_i + (\partial L_{\rho}/\partial q_{i,j})_{,j}] \dot{q}_i = 0.$$

所以, 仿照以前的做法, 只能有

$$\dot{p}_i = -(\partial L_{\rho}/\partial q_{i,j})_{,j} + \partial L_{\rho}/\partial q_i. \quad (21)$$

显然, 根据 Lagrange 和 Hamilton 密度函数的关系, 可以将上式写为

$$\dot{p}_i = -\partial H_{\rho}/\partial q_i + (\partial H_{\rho}/\partial q_{i,j})_{,j}. \quad (22a)$$

将 (22a) 式代入 (18c) 式, 得

$$\iiint_{\Omega} [-\dot{q}_i + (\partial H_{\rho}/\partial p_i)] \dot{p}_i dv = 0. \quad (22b)$$

显然, 由于 (22b) 式的积分区域 Ω 是任意可取的, 则有

$$[-\dot{q}_i + (\partial H_\rho / \partial p_i)] \dot{p}_i = 0. \quad (22c)$$

或者

$$[\dot{q}_i - (\partial H_\rho / \partial p_i)] dp_i = 0. \quad (22d)$$

这里, p_i 和 dp_i 也是独立变量, 可以任意取值, 于是得到了 Hamilton 正则方程的另一个公式, 即

$$\dot{q}_i = \partial H_\rho / \partial p_i. \quad (22e)$$

这样, 从能量守恒定律方程 (13) 出发, 直接推导出了 (22a) 式和 (22e) 式, 将它们整理在一起, 即有

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \partial H_\rho / \partial p_i, \\ \dot{p}_i = -\partial H_\rho / \partial q_i + (\partial H_\rho / \partial q_{i,j})_{,j}. \end{cases} \quad (23)$$

这一对方程刚好是保守的连续系统中的 Hamilton 正则方程 (12). 至此, 直接从能量守恒定律出发, 推导出了保守的连续系统中的 Lagrange 方程 (17c) 和 Hamilton 正则方程 (23). 需要指出的是, 在推导这些方程时, 也没有涉及到较为复杂的基于泛函求极值的变分原理, 推导过程只是将广义坐标选为实际的质点位移. 与 Hamilton 变分原理不同的是, 这里没有边界条件限制.

另外, 对于非保守的连续系统, 也可以直接从能量守恒方程 (13a) 出发, 建立波动力学方程. 假设此时存在非保守体力 f_i , 这时的能量守恒定律方程可写为

$$dW/dt = \iiint_{\Omega} [(T_{ij}\dot{q}_i)_{,j} + f_i\dot{q}_i] dv, \quad (24a)$$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} (dH_\rho/dt) dv \\ &= \iiint_{\Omega} f_i\dot{q}_i dv + \iiint_{\Omega} [(\partial U_\rho / \partial q_{i,j})\dot{q}_i]_{,j} dv, \\ & \iiint_{\Omega} \{\dot{K}_\rho + \dot{U}_\rho - f_i\dot{q}_i - [(\partial U_\rho / \partial q_{i,j})\dot{q}_i]_{,j}\} dv = 0. \end{aligned} \quad (24b)$$

利用动能和势能密度函数的定义, 将 (1a) 式和 (1b) 式代入 (24b) 式, 整理得

$$\iiint_{\Omega} [(\rho\ddot{q}_i - T_{ij,j} - f_i)\dot{q}_i + [(\dot{U}_\rho - T_{ij}\dot{q}_{i,j})]] dv = 0. \quad (24c)$$

根据弹性势能的定义 (2b) 式可知, $\dot{U}_\rho = T_{ij}\dot{q}_{i,j}$, 代入 (24c) 式, 整理得

$$\iiint_{\Omega} (\rho\ddot{q}_i - T_{ij,j} - f_i)\dot{q}_i dv = 0. \quad (24d)$$

考虑到在所取的体积 Ω 是任意的, 且 \dot{q}_i 是独立变量, 仿照以前的处理方法, 则由 (24d) 式可得

$$\rho\ddot{q}_i - T_{ij,j} - f_i = 0. \quad (25)$$

(25) 式正是我们从能量守恒定律出发推导的波动力学方程, 即 Cauchy 第一运动方程, 且与 Newton 第二定律给出的 (4) 式和 Hamilton 原理给出的 (9c) 式完全一样.

至此, 仅从能量守恒定律出发, 建立了 Lagrange 方程, Hamilton 正则方程以及波动力学方程. 而且从中可知在用能量守恒定律建立这些方程时, 并不像 Hamilton 原理那样, 要引入泛函求极值相关概念, 也不需要对时间区间和边界上施加约束条件, 而且物理意义更清晰、更明确. 值得注意的是, 如果将能量守恒作为第一性原理, 那么由此确定的波动力学中涉及的“牛顿第二定律”、“Lagrange 方程”和“Hamilton 正则方程”, 都是能量守恒方程的推论和必然结果. 需要注意的是, 在以上公式推导中, 假设条件是 Hamilton 或 Lagrange 密度函数不是时间变量 t 的显式函数, 即 $\partial H_\rho / \partial t = -\partial L_\rho / \partial t = 0$. 只有在这种情况下, 某一体积的 Hamilton 函数才为系统的总能量, 即势能与动能之和; 否则, Hamilton 量并不等于总的机械能, 它本身也不守恒. 显然, 这一条件在绝大部分力学系统中都是成立的, 如弹性动力学和流体力学等.

4 黏弹性介质中的波动力学方程

作为我们提出的方法的实际应用, 下面讨论黏弹性介质中波动力学方程的建立问题. 实际情况的黏弹性模型比较复杂, 这儿只讨论线性黏弹性问题. 相关问题更细致的介绍可以参见 Maxwell 等^[38]的工作. 在线性黏弹性介质中, 应力与应变的历史有关, 可以用 Boltzmann 定律来表述. 利用 Carcione 等^[39,40]给出的黏弹性模型, 其应变能密度函数可写为

$$\begin{aligned} U_\rho(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t-\tau, t-\gamma) [\partial e_{ij}(\tau) / \partial \tau] \\ &\quad \times [\partial e_{kl}(\gamma) / \partial \gamma] d\tau d\gamma, \end{aligned} \quad (26a)$$

其中, $e_{ij} = (q_{i,j} + q_{j,i})/2$, $i, j = 1, 2, 3$, τ, γ 是时间积分变量. 对应变能密度函数做对时间求偏导, 可以得到^[39]

$$\begin{aligned} \partial U_\rho / \partial t = \partial e_{ij} / \partial t \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t-\gamma, 0) [\partial e_{kl}(\gamma) / \partial \gamma] d\gamma \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t [\partial G_{ijkl}(t-\tau, t-\gamma) / \partial t] \\ \times [\partial e_{ij}(\tau) / \partial \tau] [\partial e_{kl}(\gamma) / \partial \gamma] d\tau d\gamma. \end{aligned} \quad (26b)$$

定义应力应变关系为^[39]

$$T_{ij} = \psi_{ijkl} * \partial e_{kl} / \partial t, \quad (27)$$

(27) 式中符号“*”表示应力和应变的时间变化率的褶积关系, 其中 $\psi_{ijkl}(t) = G_{ijkl}(t, 0)H(t)$ 为弛豫张量, $H(t)$ 为阶跃函数, 那么

$$\int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t-\gamma, 0) [\partial e_{kl}(\gamma) / \partial \gamma] d\gamma = T_{ij}, \quad (28a)$$

(26b) 式可变为

$$T_{ij} \dot{e}_{ij} = \dot{U}_\rho + \dot{D}_\rho, \quad (28b)$$

其中 $\dot{D}_\rho = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t [\partial G_{ijkl}(t-\tau, t-\gamma) / \partial t] \times [\partial e_{ij}(\tau) / \partial \tau] [\partial e_{kl}(\gamma) / \partial \gamma] d\tau d\gamma$ 是单位时间内的损耗能密度. 假设 $G_{ijkl}(t, \tau) = \hat{\psi}_{ijkl}(t+\tau)$, 则 $\psi_{ijkl}(t) = \hat{\psi}_{ijkl}(t)H(t)$, 这时可以确定 G_{ijkl} , 且

$$\begin{aligned} U_\rho(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \psi_{ijkl}(2t-\tau-\gamma) [\partial e_{ij}(\tau) / \partial \tau] \\ \times [\partial e_{kl}(\gamma) / \partial \gamma] d\tau d\gamma, \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} \dot{D}_\rho(t) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t [\partial \psi_{ijkl}(2t-\tau-\gamma) / \partial t] \\ \times [\partial e_{ij}(\tau) / \partial \tau] [\partial e_{kl}(\gamma) / \partial \gamma] d\tau d\gamma. \end{aligned} \quad (29b)$$

由广义 Hooke 定律可知

$$T_{ij} = \dot{C}_{ijkl} * e_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (30)$$

在非均匀黏弹性介质中 C_{ijkl} 不仅与空间位置有关, 而且与时间也有关系, Hamilton 力学不再适用, 因为此时 Hamilton 密度函数是时间的函数, 时间是显式, 另外这是一个典型的非保守系统. 但是能量守恒定律仍然适用, 其具体能量守恒表达式为

$$\iiint_{\Omega} (dH_\rho / dt) dv = \iiint_{\Omega} f_i \dot{q}_i dv + \iiint_{\Omega} (T_{ij} \dot{q}_i)_{,j} dv, \quad (31)$$

(31) 式等号左边为介质中所储存的能量 (动能、势能和损耗能之和) 对时间的变化率, 右边分别为单位时间内体力和面力所做的功. 将能量密度对时间的变化率的表达式代入 (31) 式, 整理得

$$\iiint_{\Omega} [\dot{K}_\rho + \dot{U}_\rho + \dot{D}_\rho - f_i \dot{q}_i - (T_{ij} \dot{q}_i)_{,j}] dv = 0, \quad (32a)$$

即

$$\iiint_{\Omega} [(\rho \ddot{q}_i - T_{ij,j} - f_i) \dot{q}_i + (\dot{U}_\rho + \dot{D}_\rho - T_{ij} \dot{q}_{i,j})] dv = 0. \quad (32b)$$

由 (28b) 式可知 $\dot{U}_\rho + \dot{D}_\rho - T_{ij} \dot{q}_{i,j} = 0$, 仿照前述的做法, 可得到

$$\begin{cases} \rho \ddot{q}_i - T_{ij,j} - f_i = 0, \\ \dot{U}_\rho + \dot{D}_\rho - T_{ij} \dot{q}_{i,j} = 0. \end{cases} \quad (33)$$

显然, (33) 式的第一个方程为黏弹性介质中的波动力学方程, 第二个方程是黏弹性介质中应力应变的本构方程对时间的求导. 将 (30) 式代入 (33) 式, 利用应变和位移关系的几何方程, 第一个方程变为

$$\rho \ddot{q}_i - (\dot{C}_{ijkl} * q_{k,l})_{,j} - f_i = 0. \quad (34)$$

(34) 式即为黏弹性介质中的波动力学方程^[39].

从以上分析可知, 理论上如果能写出一个系统的动能、势能和作用于该系统的外力所做的功的表达式 (与最小作用原理所要求的求解条件一样), 就可以利用能量守恒定律建立系统总能量和外力所做的功对时间的变化率的关系式, 建立系统的动力学方程. 如果 Hamilton 量为系统的总能量, 这一方法可用于复杂的非线性弹性动力学系统, 也可用于声、电、光、磁、热等能量转换和守恒系统中. 对于 Hamilton 量不等于系统的总能量时, 也可以用广义能量守恒定理^[14]来建立相关方程, 有关问题将另行研究.

5 结 论

本文提出了在能量守恒的框架下建立弹性介质 Lagrange 方程、Hamilton 正则方程以及波动力学方程的新思路与新方法, 并分析了在 Lagrange 力学、Hamilton 力学和能量守恒等框架下建立波动力学方程的过程. 特别地, 还在这些框架下建立了连续介质的 Lagrange 方程、Hamilton 正则方程和波动力学方程, 并证明了它们之间的一致性. 在利用能量守恒定律建立波动力学方程时, 不必涉及泛函求极值的变分原理等知识, 且物理意义明确, 这为刻画和表述各种复杂介质中的波动现象规律提供了另一种途径. 另外, 还澄清了以往用 Hamilton 原理建立其正则方程时的一些模糊认识. 在利用

Hamilton 变分原理推导波动力学中的 Lagrange 方程和 Hamilton 正则方程时, 除时间上下界必须考虑虚位移为零外, 为了保证其系统是保守的, 需在空间边界上给以约束条件, 如应力自由的边界条件等. 与此不同, 在利用 Newton 第二定律和能量守恒原理建立连续介质的 Lagrange 方程、Hamilton 正则方程和波动力学方程时, 则不需要考虑这些边值约束, 不需要涉及泛函和变分等概念.

参考文献

- [1] Gurtin M E 1964 *Arch. Rational Mech. Anal.* **16** 34
- [2] Tiersten H F 1969 *Linear Piezoelectric Plate Vibrations* (New York: Plenum Press) pp33–35, pp43–46
- [3] Achenbach J D 1975 *Wave Propagation in Elastic Solids* (Netherlands: Elsevier) pp51–65
- [4] Babich V M, Kiselev A P 2015 *Elastic Waves High Frequency Theory* (Boca Raton: CRC Press) pp8–10
- [5] Shtrikman Z S 1962 *J. Mech. Phys. Solids* **10** 335
- [6] Zhang H L 1985 *Acta Acustica* **10** 223 (in Chinese) [张海澜 1985 声学学报 **10** 223]
- [7] Shen H C, Li S M 2006 *Classical Mechanics* (Hefei: University of Science and Technology of China Press) pp233, 240 (in Chinese) [沈惠川, 李书明 2006 经典力学(合肥: 中国科学技术大学出版社) 第233, 240页]
- [8] EerNisse E P, Holland R 1967 *Proceedings of the IEEE* p1524
- [9] Luan P 2018 *J. Phys. Commun.* **2** 075016
- [10] Civelek C, Bechteler T F 2008 *Int. J. Eng. Sci.* **46** 1218
- [11] Luan P 2020 *Crystals* **10** 863
- [12] Gueorguiev V G, Maeder A 2021 *Symmetry* **13** 522
- [13] Moiseiwitsch B L 2004 *Variational Principles* (New York: Dover Publications) pp82–83
- [14] Cline D 2019 *Variational Principles in Classic Mechanics* (Rochester: University of Rochester) pp181–184, 443
- [15] Tang L M 1991 *Chin. J. Comput. Mech.* **8** 343 (in Chinese) [唐立民 1991 计算结构力学及其应用 **8** 343]
- [16] Landau L D, Lifshitz E M 1976 *Mechanics* (Oxford: Butterworth-Heinemann) p14, 131
- [17] Lanczos C 1986 *The Variational Principles of Mechanics* (4th Ed.) (New York: Dover) pp120–122
- [18] Arnold I V 1997 *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (2nd Ed.) (New York: Springer) pp59–60
- [19] Goldstein H, Poole C P, Safko J L 2013 *Classical Mechanics* (3rd Ed.) (Essex: Pearson Education Limited) p35
- [20] Morita S 2016 *World J. Mech.* **6** 84
- [21] Huang Y C 2003 *Mech. Res. Commun.* **30** 567
- [22] Huang Y C 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 3473 (in Chinese) [黄永畅 2005 物理学报 **54** 3473]
- [23] Huang Y C, Lee X G, Shao M X 2006 *Mod. Phys. Lett. A* **21** 1107
- [24] Huang C and Huang Y C 2020 doi: [10.20944/preprints202008.0334.v3](https://doi.org/10.20944/preprints202008.0334.v3)
- [25] Bondar D I, Cabrera R, Lompay R R, Ivanov M Y, Rabitz H A 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 190403
- [26] Morse P M, Feshbach H 1953 *Methods of Theoretical Physics* (York: The Maple Press Company) pp151, 280–304
- [27] Kim J, Dargush G F, Ju Y K 2013 *Int. J. Solids Struct.* **50** 3418
- [28] Riewe F 1996 *Phys. Rev. E* **53** 1890
- [29] Lin X S 2002 *J. Shantou Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **17** 63 (in Chinese) [林旭升 2002 汕头大学学报(自然科学版) **17** 63]
- [30] Zhang H L 2012 *Theoretical Acoustics* (Beijing: Higher Education Press) p12 (in Chinese) [张海澜 2012 理论声学(修订版)(北京: 高等教育出版社) 第12页]
- [31] Zhou P 2015 arXiv: 1512.04487 [physics. gen-ph]
- [32] Lindsay G A 1952 *Am. J. Phys.* **20** 86
- [33] Courant R, Hilbert D 1953 *Methods of Mathematical Physics* (Vol. 1) (New York: Interscience) pp208–211
- [34] Gelfand I M, Fomin S V 1963 *Calculus of Variations* (Englewood Cliffs: Prentice-Hall) p42, 71
- [35] Zia R K P, Redish E F, McKay S R 2009 *Am. J. Phys.* **77** 614
- [36] Ansermet J P, Brechet S 2018 *Principles of Thermodynamics* (New York: Cambridge University Press) p3
- [37] Ruderman M S 2019 *Fluid Dynamics and Linear Elasticity-A First Course in Continuum Mechanics* (Cham: Springer) pp40, 58, 61–62
- [38] Maxwell J C 1867 *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **157** 49
- [39] Carcione J 2015 *Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic Porous and Electromagnetic Media* (Netherlands: Elsevier) p66
- [40] Wang X M, Dodds K, Zhao H B 2006 *Explor. Geophys.* **37** 160

Research on elastodynamic theory based on the framework of energy conservation

Wang Xiu-Ming¹⁾²⁾³⁾ Zhou Yin-Qiu^{1)2)3)†}

1) (*National Lab. of Acoustics, Institute of Acoustics in Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

2) (*School of Physics Sciences, the University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100149, China*)

3) (*Beijing Engineering Research Center for Offshore Drilling Exploration and Measurement, Beijing 100190, China*)

(Received 7 December 2021; revised manuscript received 6 February 2022)

Abstract

Based on the analysis of establishing dynamic equations by using Newton's mechanics, Lagrange's, and Hamilton's mechanics, a new idea of establishing elastodynamic equations under the framework of energy conservation is proposed. Firstly, Newton's second law is used to derive wave equations of motion. Secondly, Lagrange's equation, Hamilton's canonical equations, and the corresponding dynamical equations in a continuum medium are derived by using Hamilton's variational principle. Thirdly, under the framework of energy conservation, Lagrange's equation, Hamilton's canonical equations, and the acoustic dynamic equations of the continuum are established, and the results are proved to be consistent with those derived from classical mechanics. Some fuzzy understandings when using Hamilton's variational principle to establish Lagrange's equation and Hamilton's canonical equation, are clarified. A series of dynamical equations established under the framework of energy conservation provides an alternative way to characterize and represent the propagation characteristics of wave motions in various complex media without involving the variational principle of functional extremum. Finally, as an application example, the differential equation of elastodynamics in a viscoelastic medium is given under the framework of energy conservation.

Keywords: dynamical equation, Hamilton variational principle, Lagrange equation, law of conservation of energy

PACS: 45.20.-d, 45.20.Jj, 45.20.dh

DOI: 10.7498/aps.72.20212272

† Corresponding author. E-mail: zhouyinqiu@mail.ioa.ac.cn

基于能量守恒框架下的波动力学理论研究

王秀明 周吟秋

Research on elastodynamic theory based on the framework of energy conservation

Wang Xiu-Ming Zhou Yin-Qiu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 074501 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20212272

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20212272>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于广义交替数值通量的局部间断Galerkin方法求解二维波动方程

Two-dimensional wave equation solved by generalized alternating flux based local discontinuous Galerkin method

物理学报. 2020, 69(2): 020202 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20190613>

基于层状 WS_2 调制激光泵浦的光学参量振荡中红外运转特性

Operation characteristics of mid-infrared optical parametric oscillation pumped by layered WS_2 modulated laser

物理学报. 2022, 71(2): 024204 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211409>

修正的变分迭代法在四阶Cahn–Hilliard方程和BBM–Burgers方程中的应用

Application of the modified variational iteration method in the fourth-order Cahn–Hilliard equation BBM–Burgers equation

物理学报. 2021, 70(19): 190202 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202147>

抗磁悬浮振动能量采集器动力学响应的仿真分析

Simulation analysis of dynamic response of the energy harvester based on diamagnetic levitation

物理学报. 2018, 67(1): 018501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171551>

非线性薛定谔方程的高阶分裂改进光滑粒子动力学算法

Numerical study of nonlinear Schrödinger equation with high-order split-step corrected smoothed particle hydrodynamics method

物理学报. 2019, 68(9): 090203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190169>

双光腔光机械系统的动力学相变和选择性能量交换

Dynamical phase transition and selective energy exchange in dual-cavity optomechanical systems

物理学报. 2021, 70(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210178>