

N 量子比特系统的纠缠判据*

谭维翰¹⁾ 赵超樱^{2)3)†} 郭奇志¹⁾¹⁾ (上海大学物理系, 上海 200444)²⁾ (杭州电子科技大学物理系, 杭州 310018)³⁾ (山西大学光电研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 太原 030006)

(2022 年 7 月 27 日收到; 2022 年 9 月 14 日收到修改稿)

在前文 (2019 *Int. J. Mod. Phys. B* **33** 1950197; 2020 *Int. J. Mod. Phys. B* **34** 2050022) 中, 我们提出了一种判断 2 量子比特系统纠缠的方法, 2 量子比特系统可分的充分必要条件是相关系数为正且主密度矩阵可分, 否则系统纠缠. 在本文中, 通过数值计算与讨论, 先将 2 量子比特系统纠缠判据的方法推广到 3 量子比特系统中去; 接着, 继续将 3 量子比特系统推广到 N 量子比特系统中去. 这是一个复杂而有趣的问题.

关键词: 玻恩几率密度, N 量子比特系统, 纠缠态**PACS:** 03.65.Ud, 42.50.Lc, 42.65.Yj**DOI:** 10.7498/aps.72.20221524

1 引言

自从上世纪三十年代 Schrödinger 提出量子纠缠态的概念以来, 有关量子纠缠态的研究就从未间断过. 量子纠缠态在量子密钥分配、量子密集编码、量子隐形传态、量子纠错码和量子计算等诸多领域有着重要的应用. 但是, 迄今为止, 仍有许多理论问题没有得到解决, 这些都制约着实验工作的进展. 量子纠缠理论的发展将为量子信息技术打开广阔的应用前景, 其研究是当前国际上量子信息论和量子光学等学科关注的前沿课题之一.

近年来, 纠缠态在量子计算、量子纠错等方面具有很大的应用前景^[1-3], 但是关于纠缠本质等的基本问题还没有解决, 一个非常引人注目的量子现象是复合量子系统的纠缠^[4-6]. Peres 的 PPT 判据和 Horodecki 的约化判据. Peres 和 Horodecki 等最早提出经 PPT 后系统特征值是否全为正来判别该系统为可分或纠缠. Peres 判据, 从物理本质上来看就是对两体中的任一单体做部分时间反演操

作. 对于 2×2 维和 2×3 维系统, 它是充要条件; 对于其他情况, 它是必要非充分条件. Horodecki 等采用约化判据对 2×4 维和 3×3 维系统做了详细的研究. 最近又有关于 $2 \times N$ 维和 $N \times N$ 维系统的报道, 计算相当繁琐. Werner^[7] 基于对局部隐变量模型的分析 and 翻转算子均值的正定性给出了一个判据. Horodecki 等^[8,9] 得到了一个关于所谓熵的不等式形式的判据. Peres^[10] 判据基于部分转置后密度算符的正定性. 由两个子系统组成的量子系统是可分的, 当且仅当密度矩阵可以写成两个子系统的密度矩阵, 其中, 权重满足为正条件时, 系统是可分的, 否则系统是纠缠的. Peres-Horodecki 准则是充要条件^[11-16].

由于非对角矩阵元的存在, 求密度矩阵 ρ 的解析解比获得 ρ 可分的充要条件要困难得多. 这是一个更为复杂和有趣的基础物理问题. 2019 年, 我们课题组采用标准矩阵法研究了任意 2×2 复合系统密度矩阵 ρ 的解析解. 该解可以表示成主密度矩阵和可分离密度矩阵 $\rho_1 - \rho_4$ 的和, 如果这些几率是全正的, 则密度矩阵 ρ 可分, 并且分离后的密度矩

* 教育部量子光学重点实验室 (批准号: KF202004, KF202205) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zchy49@163.com

阵也一并求出来了. 如果这些几率不是全正的, 则复合系统就是纠缠的. 可以很容易就验证出几个已知 2×2 系统的不可分判据与 PPT 判据一致 [17]. 2020 年, 我们研究任意 3×3 复合系统密度矩阵 ρ 的解析解. 将密度矩阵 ρ 分解为主密度矩阵 ρ_p 和六个约化密度矩阵 ρ_1 — ρ_6 的总和, 给出判断两个三量子态 $(0, 1, 2)$ 系统纠缠的充要条件, 并得出几率是全正的解 [18]. 在这篇文章中, 只讨论二量子态 $(0, 1)$, 即通常说的量子比特. 我们试图将前文 [17] 用方法推广到 N 量子比特系统. 第一步是 3 量子比特

系统; 第二步到 N 量子比特系统. 本文的安排是: 第 2 节对 2 量子比特系统纠缠判据的简介. 第 3 节将上述解决方案推广到 N 量子比特系统. 第 4 节是关于 2 量子比特和 3 量子比特系统的数值计算.

2 量子比特系统纠缠态解析解简介

对于一个单量子比特系统, 上能级 $|1\rangle$, 下能级 $|0\rangle$. 2 量子比特的基向量 $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ 是所有纠缠态的基. 一般的, 假设密度矩阵元素是实数, 2 量子比特系统的密度矩阵 ρ_{II} 具有如下的形式:

$$\rho_{II} = \begin{pmatrix} & 00 & 01 & 10 & 11 \\ a_0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & a_1 & \delta & \lambda \\ \beta & \delta & a_2 & \mu \\ \gamma & \lambda & \mu & a_3 \end{pmatrix}, \quad \rho_{II} = p_p \rho_p + \tilde{p}_1 \rho_1 + \tilde{p}_2 \rho_2 + \tilde{p}_3 \rho_3 + \tilde{p}_4 \rho_4, \\ \rho_p = \frac{1 - 2(x_1 + x_2) - x}{2} S_1 + \frac{1 - 2(x_1 + x_2) + x}{2} S_2 + x_1 S_3 + x_2 T_3 + (x_1 + x_2) S_4, \quad (1)$$

其中主密度矩阵 ρ_p 分解为 5 个可分密度 S_1, S_2, S_3, T_3, S_4 其系数为正时, ρ_p 是可分的, 否则 ρ_p 是纠缠的. 当 $\rho_p - \rho_4$ 是可分离密度矩阵, 而且 $p_p \geq 0$, $\tilde{p}_1 \geq 0$, $\tilde{p}_2 \geq 0$, $\tilde{p}_3 \geq 0$, $\tilde{p}_4 \geq 0$, 则密度矩阵 ρ_{II} 是可分离的. 否则, 它就是纠缠的. (关于分离的密度矩阵的形式见附录 A).

ρ_{II} 的对角矩阵元 $a_0 - a_3$ 满足如下关系 (见附录 A):

$$\begin{aligned} p_p \frac{1-x}{4} + p_1 \frac{1+x}{2} + p_1 \frac{1+x}{2} &= a_0, \\ p_p \frac{1+x}{4} + p_1 \frac{1-x}{2} + p_1 \frac{1-x}{2} &= a_1, \\ p_p \frac{1+x}{4} + p_2 \frac{1-x}{2} + p_2 \frac{1-x}{2} &= a_2, \\ p_p \frac{1-x}{4} + p_2 \frac{1+x}{2} + p_2 \frac{1+x}{2} &= a_3, \\ \rho_{II} &= p_p \rho_p + p_1 \rho_1 + p_2 \rho_2. \end{aligned} \quad (2)$$

四个参数 p_p, x, p_1, p_2 刚好对应 (2) 式的四个式子.

3 N 量子比特系统纠缠判据

3.1 3 量子比特系统纠缠判据

应用上方法研究了 3 量子比特的纠缠态问题. 这个方法包括写出基函数, 由此构成的可分离的密度矩阵, 进一步便是 3 量子系统主矩阵 (详细见

附录 B). 先按附录 A 导出 (2) 式的办法导出下面 3 量子系统的相应方程 (3). 这过程很复杂, 很难被推广到 N 量子比特系统. 但有趣且有用的是我们发现 3 量子系统主矩阵可表示为 2 量子系统的对角矩阵 (见附录 (B2) 式). 这就为下面推广到 N 量子比特系统成为可能:

$$\begin{aligned} p_p \frac{1-x}{8} + p_1 \frac{1+x}{4} + p_1 \frac{1+x}{4} &= a_0, \\ p_p \frac{1+x}{8} + p_1 \frac{1-x}{4} + p_1 \frac{1-x}{4} &= a_1, \\ p_p \frac{1+x}{8} + p_2 \frac{1-x}{4} + p_2 \frac{1-x}{4} &= a_2, \\ p_p \frac{1-x}{8} + p_2 \frac{1+x}{4} + p_2 \frac{1+x}{4} &= a_3, \\ p_p \frac{1-y}{8} + p_3 \frac{1+y}{4} + p_3 \frac{1+y}{4} &= a_4, \\ p_p \frac{1+y}{8} + p_3 \frac{1-y}{4} + p_3 \frac{1-y}{4} &= a_5, \\ p_p \frac{1+y}{8} + p_4 \frac{1-y}{4} + p_4 \frac{1-y}{4} &= a_6, \\ p_p \frac{1-y}{8} + p_4 \frac{1+y}{4} + p_4 \frac{1+y}{4} &= a_7, \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= \mu, a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 1 - \mu, \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 &= 1, \\ \rho_{III} &= p_p \rho_{3p} + p_1 \rho_1 + p_2 \rho_2 + p_3 \rho_3 + p_4 \rho_4. \end{aligned} \quad (3)$$

在给定对角元 a_0 — a_7 后 (3) 式中 $p_p, \mu, x, y, p_1, p_2, p_3, p_4$ 变量数恰等于方程数.

3.2 N 量子比特系统纠缠判据

一般来说, N 量子比特系统的密度矩阵可以由矩阵 $\rho_n = A_N$ 表示出来, 其秩为 $N = 2^n$. 对于

3 量子比特系统, 矩阵的秩为 $N = 2^3 = 8$. 假设密度矩阵元素是实数, 3 量子比特系统有如下形式^[19]:

其中

$$\rho_{\text{III}} = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha & \beta & \gamma & b_0 & \eta & \xi & \zeta \\ \alpha^* & a_1 & \delta & \lambda & \nu & b_1 & \vartheta & \sigma \\ \beta^* & \delta^* & a_2 & \mu & \theta & \tau & b_2 & v \\ \gamma^* & \lambda^* & \mu^* & a_3 & \chi & \omega & \kappa & b_3 \\ b_0^* & \nu^* & \theta^* & \chi^* & a_4 & o & \pi & \rho \\ \eta^* & b_1^* & \tau^* & \omega^* & o^* & a_5 & \varphi & \phi \\ \xi^* & \vartheta^* & b_2^* & \kappa & \pi^* & \varphi^* & a_6 & \varepsilon \\ \zeta^* & \sigma^* & v^* & b_3^* & \rho^* & \phi^* & \varepsilon^* & a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & D \\ \tilde{D}^* & B \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^* & a_1 & \delta & \lambda \\ \beta^* & \delta^* & a_2 & \mu \\ \gamma^* & \lambda^* & \mu^* & a_3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} c_0 & \eta & \xi & \zeta \\ \nu & c_1 & \vartheta & \sigma \\ \theta & \tau & c_2 & v \\ \chi & \omega & \kappa & c_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_4 & o & \pi & \rho \\ o^* & a_5 & \varphi & \phi \\ \pi^* & \varphi^* & a_6 & \varepsilon \\ \rho^* & \phi^* & \varepsilon^* & a_7 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

由式 (4) 可知, 对角矩阵元 A 对应前面 (1) 式的 2 量子比特系统. 对角矩阵元 B 也可以采用与前面 (1) 式相同的方法获得解析解. 除此之外, 还有非对角矩阵元 D 和 \tilde{D}^* 的存在, 使得 3 量子比特的纠缠判据变得更为复杂. 为此就要使 ρ_{III} 对角化 (下面虽仍就 ρ_{III} 进行讨论, 但所得结果很明显可推广到 $\rho_n = A_N$). 采用如下方法. 根据求本征函数和本征值的方法^[19], $C_D = [d_0, \dots, d_7]$, 其中 d_0, \dots, d_7 是本征函数, $b_0, \dots, -b_0$ 是 $\begin{pmatrix} 0 & D \\ \tilde{D}^* & 0 \end{pmatrix}$ 的本征值.

$$C_D^{-1} \begin{pmatrix} 0 & D \\ \tilde{D}^* & 0 \end{pmatrix} C_D = C_D^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & \eta & \xi & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & c_1 & \vartheta & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta & \tau & c_2 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi & \omega & \kappa & c_3 \\ c_0^* & \nu^* & \theta^* & \chi^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta^* & c_1^* & \tau^* & \omega^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi^* & \vartheta^* & c_2^* & \kappa^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta^* & \sigma^* & v^* & c_3^* & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C_D = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

我们得出一个分裂定理:

$$C_D^{-1} \rho_{\text{III}} C_D = C_D^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} C_D + \begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\tilde{A} = C_A^{-1} A C_A + \begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = C_B^{-1} B C_B + \begin{pmatrix} -b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_0 \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{C}_A = (d_0, d_1, d_2, d_3), \mathbf{C}_B = (d_4, d_5, d_6, d_7). \quad (7)$$

(7) 式显示对角密度矩阵 $\rho_{IIA} = \tilde{A}$, $\rho_{IIB} = \tilde{B}$, 其秩为 $N = 4$. 密度矩阵 $\mathbf{C}_D^{-1} \rho_{III} \mathbf{C}_D$ 的秩为 $N = 8$. $\mathbf{C}_D^{-1} \rho_{III} \mathbf{C}_D$ 可分裂成 (6) 式所表述的对角矩阵 $\rho_{IIA} = \tilde{A}$ 和 $\rho_{IIB} = \tilde{B}$. 同样一个 N 量子比特系统可以通过这种分裂成为一个 $(N-1)$ 量子比特系统. 这个分裂过程可以描述为 $\rho_n \rightarrow \rho_{n-1,A}, \rho_{n-1,B}$, 其中 ρ_n 是 2^n 秩的 N 量子比特系统的密度矩阵, $\rho_{n-1,A}, \rho_{n-1,B}$ 是 2^{n-1} 秩的 $(N-1)$ 量子比特系统的密度矩阵. 继续此过程, $\rho_n \rightarrow \rho_{n-1} \rightarrow \rho_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow \rho_{II}$. 下图 1 所示的 2^4 秩的整个分裂过程可以描述为 $\rho_4 \rightarrow \rho_{III,A}, \rho_{III,B} \rightarrow \rho_{II,AA}, \rho_{II,AB}; \rho_{II,BA}, \rho_{II,BB}$.

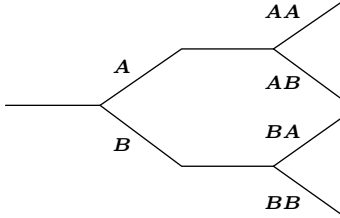


图 1 纠缠态的“ N -AB-tree 结构”
Fig. 1. 2^4 -AB-tree to four 2 qubit string.

3 量子比特密度矩阵的解析解可以由两个 2 量子比特系统密度矩阵表示. n 量子比特密度矩阵的解析解可以由两个 $n-1$ 量子比特系统密度矩阵表示. 即密度矩阵 ρ_n 的解析求解转化为 $\rho_{n-1,A}$,

$\rho_{n-1,B}$. 计算过程只需将 (7) 式的本征函数改写为 $\mathbf{C}_D = [d_0, \cdots, d_N]$, 本征值改写为 $(b_0, \cdots, b_{N/2}, b_{-N/2}, \cdots, b_0)$, 相应的 $\mathbf{C}_A = (d_0, \cdots, d_{N/2})$, $\mathbf{C}_B = (d_{N/2+1}, \cdots, d_N)$.

4 2 量子比特和 3 量子比特系统主纠缠态 p_p 的数值计算

对于 2 量子比特与 3 量子比特系统主纠缠态 p_p 的计算分别由图 2 和图 3—图 5 给出. (2) 式右端的系数分别表示为 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = r^2$, $a_0 = 0.5 \times (r \cos[\theta])^2 + \Delta$, $a_3 = 0.5(r \cos[\theta])^2 - \Delta$, $a_1 = (r \sin[\theta] \times \cos[\omega])^2$, $a_2 = (r \sin[\theta] \sin[\omega])^2$, 参照 (1) 式密度矩阵 ρ_{II} , a_0, a_1, a_2, a_3 分别表示对角矩阵元, 考虑到参量 a_0, a_3 分别为两个二能级原子分别同时取基态或激发态的几率. 故 $a_0 - a_3 = 2\Delta$ 就代表集居数的差. 这个差与驱动场的失谐有关 $\Delta\omega + i\gamma = (\omega_{21} - \omega) + i(1/T_1 + \gamma_c)$, T_1 即纵弛豫时间, γ_c 即碰撞系数^[20].

我们注意到上述表式中的参数 r . 对于 ρ_{II} , $r = 1$, 对于分裂后 $\rho_{III} = \begin{pmatrix} \rho_{IIA} & 0 \\ 0 & \rho_{IIB} \end{pmatrix}$, 其中 ρ_{IIA}, ρ_{IIB} 的对角矩阵元的和即权重分别为 $\xi = r_a^2$, $\eta = r_b^2$, $\xi + \eta = r_a^2 + r_b^2 = 1$.

1) 2 量子比特系统

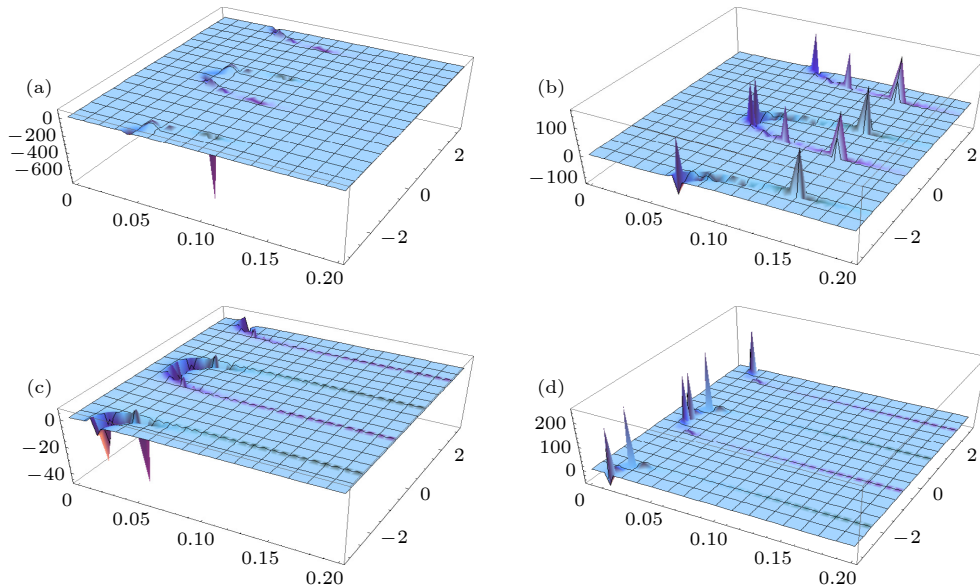


图 2 2 量子比特系统主密度矩阵系数 p_p 随 $\{\theta, 0, 0.2\}$, $\{w, -\pi, \pi\}$ 变化的三维曲线图, $r = 1$ (a) $\Delta = 0.002$; (b) $\Delta = 0.00103$; (c) $\Delta = 0.0002$; (d) $\Delta = 0.0001$

Fig. 2. Principal entangled state p_p of 2 qubit system with the parameters $\{\theta, 0, 0.2\}$, $\{w, -\pi, \pi\}$, $r = 1$: (a) $\Delta = 0.002$; (b) $\Delta = 0.00103$; (c) $\Delta = 0.0002$; (d) $\Delta = 0.0001$.

2) 3 量子比特系统

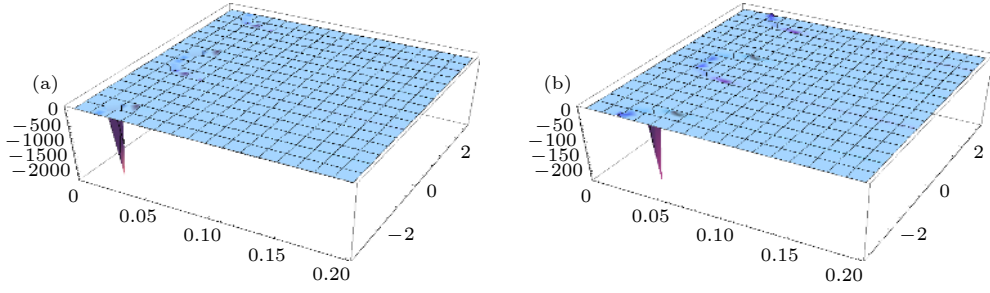


图 3 3 量子比特系统主密度矩阵系数 p_p 随 $\{\theta, 0, 0.2\}$, $\{w, -\pi, \pi\}$ 变化的三维曲线图 (a) $r_a = 0.867$, $\Delta = 0.0001$; (b) $r_b = 0.547$, $\Delta = 0.001$, $\xi + \eta = r_a^2 + r_b^2 = 1$

Fig. 3. Principal entangled state p_p of 3 qubit system with the parameters $\{\theta, 0, 0.2\}$, $\{w, -\pi, \pi\}$: (a) $r_a = 0.867$, $\Delta = 0.0001$; (b) $r_b = 0.547$, $\Delta = 0.001$, $\xi + \eta = r_a^2 + r_b^2 = 1$.

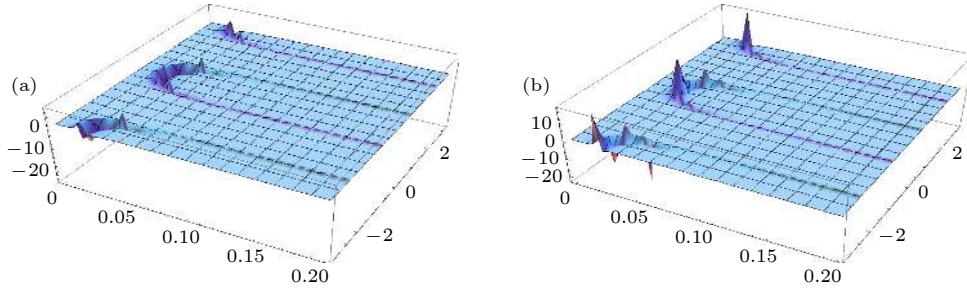


图 4 3 量子比特系统主密度矩阵系数 p_p 随 $\{\theta, 0, 0.2\}$, $\{w, -\pi, \pi\}$ 变化的三维曲线图 (a) $r_a = 0.724$, $\Delta = 0.0001$; (b) $r_b = 0.652$, $\Delta = 0.001$, $\xi + \eta = r_a^2 + r_b^2 = 1$

Fig. 4. Principal entangled state p_p of 3 qubit system with the parameters $\{\theta, 0, 0.2\}$, $\{w, -\pi, \pi\}$: (a) $r_a = 0.724$, $\Delta = 0.0001$; (b) $r_b = 0.652$, $\Delta = 0.001$, $\xi + \eta = r_a^2 + r_b^2 = 1$.

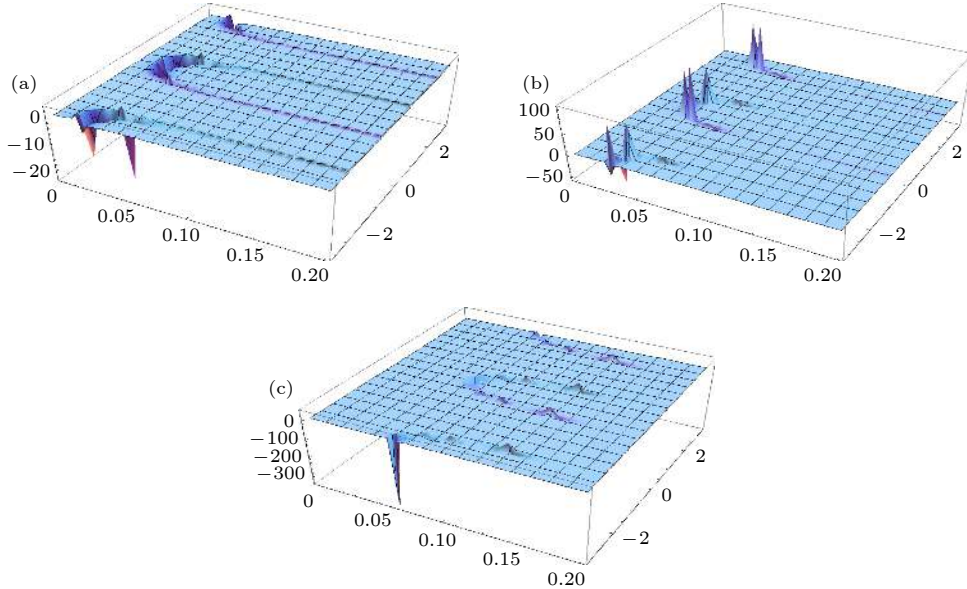


图 5 3 量子比特系统主密度矩阵系数 p_p 随 $\{\theta, 0, 0.2\}$, $\{w, -\pi, \pi\}$ 变化的三维曲线图, $r_a = r_b = 0.707$ (a) $\Delta = 0.0001$; (b) $\Delta = 0.0002$; (c) $\Delta = 0.00103$

Fig. 5. Principal entangled state p_p of 3 qubit system with the parameters $\{\theta, 0, 0.2\}$, $\{w, -\pi, \pi\}$, $r_a = r_b = 0.707$; (a) $\Delta = 0.0001$; (b) $\Delta = 0.0002$; (c) $\Delta = 0.00103$.

在图 2 和图 3—图 5 描述了 2 量子比特和 3 量子比特系统的主密度矩阵系数 p_p 的数值计算结果. 一般的, 存在两种类型的纠缠: 一个是浅纠缠, 处于初始阶段, 最大值从 10 到 100; 另一个是深度纠缠, 处于末了阶段, 最大值达到 1000. 拥有大量的深纠缠的 2 量子比特系统. 所谓深浅只是对纠缠程度一个唯象的描述, 并没严格定义. 纠缠对失谐参数的变化很敏感. 图 6 描绘出了图 2(b) 曲线的轮廓. 图 7 描绘出了图 5(c) 曲线的轮廓.

图 6 和图 7 的结果显示曲线的轮廓依赖于纠缠度. 在初始阶段, 纠缠度从 0 逐渐变到 100. 随后, 快速变化到 -600 (见图 6) 和 -1400 (见图 7). 最后, 突然返回 0. 从上面的关系可以获知:

1) 越大粒子量子比特系统会产生更深的纠缠度和更窄的轮廓带宽.

2) 曲线的轮廓与线性色散理论的线型相似^[20]. 使用拉普拉斯变换可以得到纠缠度将随时间 τ 衰减为 $\propto e^{-\gamma\tau}$, $\gamma = 1/T_1 + \gamma_c$ 为色散曲线的带宽. 产生大纠缠的物理条件是上下能级的集居数差即 2Δ 要求比较小, 但不要求反转.

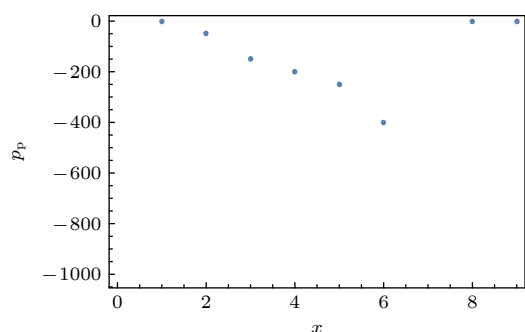


图 6 图 2(b) 曲线的轮廓.

Fig. 6. The profile of Fig. 2(b). p_p vs ($\Delta = 0.00102 + x \times 10^{-5}$).

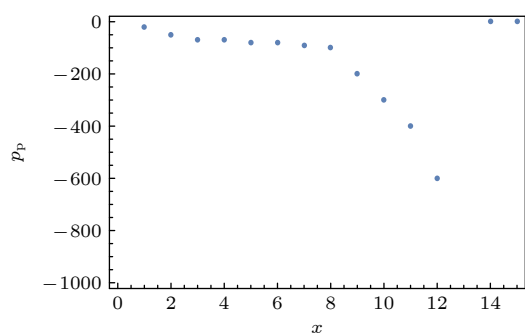


图 7 图 5(c) 曲线的轮廓.

Fig. 7. The profile of Fig. 5(c). p_p vs ($\Delta = 0.00102 + x \times 10^{-5}$).

5 结 论

1) 在前文的基础上, 我们用同样方法求得 3 量子比特系统的主密度矩阵, 并发现其结构恰是两个 2 量子比特系统的主密度矩阵的对角矩阵. 我们称此为 **A-B** 分裂. 并在这个基础上, 应用数学归纳法求得 n 量子比特系统的主密度矩阵解, 我们将其称之为“ 2^N -**AB**-树”.

2) 通过数值计算 2 量子比特和 3 量子比特揭示出存在 2 种类型的纠缠: 浅纠缠和深纠缠, 曲线的轮廓具有典型的洛伦兹线型^[20]. 经过对线型的拉普拉斯变换可得出: 1) 纠缠态的衰变时间反比于线型的宽度; 2) 线型的宽度又反比于 2^n , n 为参与纠缠的粒子数. 换句话说, 参与的粒子数 n 越大, 线型的宽度越窄纠缠态存在时间越长.

附录 A 关于 (2) 式的计算及分离态的矩阵形式

1) (2) 式的计算

(1) 式对角化元素相等, 有如下的方程:

$$\begin{aligned} p_p \frac{1-x}{4} + (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2) \frac{1+x}{4} &= a_0, \\ p_p \frac{1+x}{4} + (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_4) \frac{1-x}{4} &= a_1, \\ p_p \frac{1+x}{4} + (\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3) \frac{1-x}{4} &= a_2, \\ p_p \frac{1-x}{4} + (\tilde{p}_3 + \tilde{p}_4) \frac{1+x}{4} &= a_3, \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

令

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= p_1 - \delta/2, \quad \tilde{p}_2 = p_1 + \delta/2, \\ \tilde{p}_3 &= p_2 + \delta/2, \quad \tilde{p}_4 = p_2 - \delta/2. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

将 (A2) 式代入 (A1) 式, 有

$$\begin{aligned} p_p \frac{1-x}{4} + (p_1 + p_1) \frac{1+x}{4} &= a_0, \\ p_p \frac{1-x}{4} + (p_2 + p_2) \frac{1+x}{4} &= a_3, \\ p_p \frac{1+x}{4} + (p_1 + p_1) \frac{1-x}{4} + (p_2 - p_1 - \delta) \frac{1-x}{4} &= a_1, \\ p_p \frac{1+x}{4} + (p_2 + p_2) \frac{1-x}{4} - (p_2 - p_1 - \delta) \frac{1-x}{4} &= a_2. \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

若下面的方程成立:

$$(p_2 - p_1 - \delta) \frac{1-x}{4} = 0. \quad (\text{A4})$$

根据 (A1) 式—(A4) 式, 可以得到 (2) 式:

$$\begin{aligned}
 p_p \frac{1-x}{4} + (p_1 + p_1) \frac{1+x}{4} &= a_0, \\
 p_p \frac{1+x}{4} + (p_1 + p_1) \frac{1-x}{4} &= a_1, \\
 p_p \frac{1+x}{4} + (p_2 + p_2) \frac{1-x}{4} &= a_2, \\
 p_p \frac{1-x}{4} + (p_2 + p_2) \frac{1+x}{4} &= a_3.
 \end{aligned} \quad (A5)$$

(A4) 式包括两个解, 其中一个为特解:

$$1-x=0, \delta=0, \tilde{p}_1=p_1, \tilde{p}_2=p_1, \tilde{p}_3=p_2, \tilde{p}_4=p_2. \quad (A6)$$

另一个是通解:

$$\begin{aligned}
 1-x \neq 0, \delta &= p_2 - p_1, \tilde{p}_1 = p_1 - \frac{\delta}{2} = \frac{3p_1 - p_2}{2}, \\
 \tilde{p}_2 &= p_1 + \frac{\delta}{2} = \frac{p_1 + p_2}{2}, \tilde{p}_3 = p_2 + \frac{\delta}{2} = \frac{3p_2 - p_1}{2}, \\
 \tilde{p}_4 &= p_2 - \frac{\delta}{2} = \frac{p_2 + p_1}{2}.
 \end{aligned} \quad (A7)$$

根据 (A6) 式, 若 $p_1 > 0, p_2 > 0$, 则 $\tilde{p}_1 - \tilde{p}_4 > 0$. 然而, 根据 (A7) 式, 除了 $p_1 > 0, p_2 > 0$. 必须施加一个更加严格的要求 $3 > p_2/p_1 > 1/3$, 则必要条件 $\tilde{p}_1 - \tilde{p}_4 > 0$ 必须满足.

2) 分离态的矩阵形式

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 00 & 11 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 01 & 10 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 T_3 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 00 & 01 & 10 & 01 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 00 & 01 \\ \frac{1+x}{2} & \frac{y_1}{2} \\ \frac{y_1}{2} & \frac{1-x}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 00 & 10 \\ \frac{1+x}{2} & \frac{y_2}{2} \\ \frac{y_2}{2} & \frac{1-x}{2} \end{pmatrix}, \\
 \rho_3 &= \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ \frac{1-x}{2} & \frac{z_2}{2} \\ \frac{z_2}{2} & \frac{1+x}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_4 = \begin{pmatrix} 01 & 11 \\ \frac{1-x}{2} & \frac{z_1}{2} \\ \frac{z_1}{2} & \frac{1+x}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_p = \begin{pmatrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ (1-x)/4 & 0 & 0 & -x_1/2 \\ 0 & (1+x)/4 & -x_2/2 & 0 \\ 0 & -x_2/2 & (1+x)/4 & 0 \\ -x_1/2 & 0 & 0 & (1-x)/4 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

附录 B 3 量子系统的基函数, 可分离矩阵及主矩阵

1) 基函数 ($\omega^3 = 1$)

$$\begin{aligned}
 |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| &= \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle 000| + \langle 111|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\rho'_{000}\rho''_{000} + \rho'_{111}\rho''_{111} + \rho'_{000}\rho''_{111} + \rho'_{111}\rho''_{000}), \\
 |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| &= \frac{|000\rangle + \omega|111\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle 000| + \omega^2\langle 111|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\rho'_{000}\rho''_{000} + \rho'_{111}\rho''_{111} + \omega^2\rho'_{000}\rho''_{111} + \omega\rho'_{111}\rho''_{000}), \\
 |\varphi_3\rangle\langle\varphi_3| &= \frac{|000\rangle + \omega^2|111\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle 000| + \omega\langle 111|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\rho'_{000}\rho''_{000} + \rho'_{111}\rho''_{111} + \omega\rho'_{000}\rho''_{111} + \omega^2\rho'_{111}\rho''_{000}), \\
 |\phi_1\rangle\langle\phi_1| &= \frac{|010\rangle + |101\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle 010| + \langle 101|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\rho'_{010}\rho''_{010} + \rho'_{101}\rho''_{101} \pm \rho'_{010}\rho''_{101} \pm \rho'_{101}\rho''_{010}), \\
 |\phi_2\rangle\langle\phi_2| &= \frac{|010\rangle + \omega|101\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle 010| + \omega^2\langle 101|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\rho'_{010}\rho''_{010} + \rho'_{101}\rho''_{101} + \omega\rho'_{010}\rho''_{101} + \omega^2\rho'_{101}\rho''_{010}), \\
 |\phi_3\rangle\langle\phi_3| &= \frac{|010\rangle + \omega^2|101\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle 010| + \omega\langle 101|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\rho'_{010}\rho''_{010} + \rho'_{101}\rho''_{101} + \omega^2\rho'_{010}\rho''_{101} + \omega\rho'_{101}\rho''_{010}), \\
 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| &= \frac{|001\rangle + |110\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle 001| + \langle 110|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\rho'_{001}\rho''_{001} + \rho'_{110}\rho''_{110} + \rho'_{001}\rho''_{110} + \rho'_{110}\rho''_{001}), \\
 |\psi_2\rangle\langle\psi_2| &= \frac{|001\rangle + \omega|110\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle 001| + \omega^2\langle 110|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\rho'_{001}\rho''_{001} + \rho'_{110}\rho''_{110} + \omega^2\rho'_{001}\rho''_{110} + \omega\rho'_{110}\rho''_{001}), \\
 |\psi_3\rangle\langle\psi_3| &= \frac{|001\rangle + \omega^2|110\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle 001| + \omega\langle 110|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\rho'_{001}\rho''_{001} + \rho'_{110}\rho''_{110} + \omega\rho'_{001}\rho''_{110} + \omega^2\rho'_{110}\rho''_{001}).
 \end{aligned} \quad (B1)$$

2) 可分离矩阵 $\rho_1-\rho_4$ 及主矩阵 ρ_p

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{1}{3}(|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| + |\varphi_3\rangle\langle\varphi_3|) = \frac{1}{2}(\rho'_{000}\rho''_{000} + \rho'_{111}\rho''_{111}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 000 & 111 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
 S_2 &= \frac{1}{3}(|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2| + |\phi_3\rangle\langle\phi_3|) = \frac{1}{2}(\rho'_{001}\rho''_{001} + \rho'_{110}\rho''_{110}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 001 & 110 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
 S_3 &= \frac{1}{3}(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + |\psi_3\rangle\langle\psi_3|) = \frac{1}{2}(\rho'_{010}\rho''_{010} + \rho'_{101}\rho''_{101}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 010 & 101 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
 S_4 &= \frac{1}{3}(|\chi_1\rangle\langle\chi_1| + |\chi_2\rangle\langle\chi_2| + |\chi_3\rangle\langle\chi_3|) = \frac{1}{2}(\rho'_{100}\rho''_{100} + \rho'_{011}\rho''_{011}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 100 & 011 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
 S_5 &= \frac{1}{2}(|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| + |\varphi_3\rangle\langle\varphi_3|) = \frac{1}{2}(\rho'_{000}\rho''_{000} + \rho'_{111}\rho''_{111} - \rho'_{000}\rho''_{111} - \rho'_{111}\rho''_{000}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 000 & 111 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\
 S_6 &= \frac{1}{2}(|\psi_2\rangle\langle\psi_2| + |\psi_3\rangle\langle\psi_3|) = \frac{1}{2}(\rho'_{001}\rho''_{001} + \rho'_{110}\rho''_{110} - \rho'_{110}\rho''_{001} - \rho'_{001}\rho''_{110}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 001 & 110 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\
 S_7 &= \frac{1}{2}(|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + |\phi_3\rangle\langle\phi_3|) = \frac{1}{2}(\rho'_{010}\rho''_{010} + \rho'_{101}\rho''_{101} - \rho'_{101}\rho''_{010} - \rho'_{010}\rho''_{101}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 010 & 101 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\
 S_8 &= \frac{1}{2}(|\chi_2\rangle\langle\chi_2| + |\chi_3\rangle\langle\chi_3|) = \frac{1}{2}(\rho'_{100}\rho''_{100} + \rho'_{011}\rho''_{011} - \rho'_{100}\rho''_{011} - \rho'_{011}\rho''_{100}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 011 & 100 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\
 \rho_p &= \frac{1-2(x_1+x_2)-x}{4}S_1 + \frac{1-2(x_1+x_2)+x}{4}S_2 + \frac{1-2(x_3+x_4)-y}{4}S_3 + \frac{1-2(x_3+x_4)+y}{4}S_4 \\
 &\quad + \frac{x_1}{2}S_5 + \frac{x_2}{2}S_6 + \frac{x_3}{2}S_7 + \frac{x_4}{2}S_8, \\
 &= \begin{pmatrix} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ \frac{1-x}{8} & & & & & & & \frac{-x_1}{4} \\ & \frac{1+x}{8} & & & & & & \frac{-x_2}{4} \\ & & \frac{1-y}{8} & & & & & \frac{-x_3}{4} \\ & & & \frac{1+y}{8} & \frac{-x_4}{4} & & & \\ & & & \frac{-x_4}{4} & \frac{1+y}{8} & & & \\ & & & & & \frac{1-y}{8} & & \\ & & & & & & \frac{1+x}{8} & \\ \frac{-x_1}{4} & \frac{-x_2}{4} & & & & & & \frac{1-x}{8} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 000 & 001 & 110 & 111 & 010 & 011 & 100 & 101 \\ \frac{1-x}{8} & & & \frac{-x_1}{4} & & & & \\ & \frac{1+x}{8} & \frac{-x_2}{4} & & & & & \\ & \frac{-x_2}{4} & \frac{1+x}{8} & & & & & \\ \frac{-x_1}{4} & & & \frac{1-x}{8} & & & & \\ & & & & \frac{1-y}{8} & & & \\ & & & & & \frac{1+y}{8} & \frac{-x_4}{4} & \\ & & & & & \frac{-x_4}{4} & \frac{1+y}{8} & \\ & & & & \frac{-x_3}{4} & & & \frac{1-y}{8} \end{pmatrix}. \tag{B2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \rho'_0 \otimes \rho''_{y_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 00 & 01 \\ \frac{1-x}{2} & \frac{z_1}{2} \\ \frac{z_1}{2} & \frac{1+x}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 000 & 001 \\ \frac{1-x}{2} & \frac{y_1}{2} \\ \frac{y_1}{2} & \frac{1+x}{2} \end{pmatrix}, \\
 \rho_2 &= \rho'_0 \otimes \rho''_{y_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ \frac{1-y}{2} & \frac{z_2}{2} \\ \frac{z_2}{2} & \frac{1+y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 010 & 011 \\ \frac{1-y}{2} & \frac{y_1}{2} \\ \frac{y_1}{2} & \frac{1+y}{2} \end{pmatrix}, \\
 \rho_3 &= \rho'_0 \otimes \rho''_{y_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 00 & 01 \\ \frac{1+y}{2} & \frac{z_3}{2} \\ \frac{z_3}{2} & \frac{1-y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 101 \\ \frac{1+y}{2} & \frac{y_1}{2} \\ \frac{y_1}{2} & \frac{1-y}{2} \end{pmatrix}, \\
 \rho_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ \frac{1+x}{2} & \frac{z_4}{2} \\ \frac{z_4}{2} & \frac{1-x}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 111 \\ \frac{1+x}{2} & \frac{y_1}{2} \\ \frac{y_1}{2} & \frac{1-x}{2} \end{pmatrix}. \tag{B3}
 \end{aligned}$$

参考文献

- [1] Rossi R 2013 *Physica A* **392** 2615
- [2] Horst B, Bartkiewicz K, Miranowicz A 2013 *Phys. Rev. A* **87** 042108
- [3] Bartkiewicz K, Horst B, Lemr K, Miranowicz A 2013 *Phys. Rev. A* **88** 052105
- [4] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [5] Bennett C H, Wiesner S J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2881
- [6] Bennett C H, Brassard G, Crepeau C, Jozsa R, Peres A, Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [7] Werner R F 1989 *Phys. Rev. A* **40** 4277
- [8] Horodecki M, Horodecki P, Horodecki R 1996 *Phys. Lett. A* **223** 1
- [9] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, Horodecki K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 865
- [10] Peres A 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1413
- [11] Horodecki P 1997 *Phys. Lett. A* **232** 333
- [12] Duan L M, Giedke G, Cirac J I, Zoller P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2722
- [13] Simon R 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2726
- [14] Lewenstein M, Kraus B, Cirac J I, Horodecki P 2000 *Phys. Rev. A* **62** 052310
- [15] Samsonowicz J, Kuś M, Lewenstein M, 2007 *Phys. Rev. A* **76** 022314
- [16] Bennett C H, Bernstein H J, Popescu S, Schumacher B 1996 *Phys. Rev. A* **53** 2046
- [17] Zhao C Y, Guo Q Z, Tan W H 2019 *Int. J. Mod. Phys. B* **33** 1950197
- [18] Zhao C Y, Guo Q Z, Tan W H 2020 *Int. J. Mod. Phys. B* **34** 2050022
- [19] Schiff L I 1968 *Quantum Mechanics* (3rd Ed.) (NewYork: McGraw-Hill Book Company) pp8, 154
- [20] Boyd R W 2009 *Nonlinear Optics* (3rd Ed.) (NewYork: Academic Press) p130

Entanglement criterion of N qubit system^{*}

Tan Wei-Han¹⁾ Zhao Chao-Ying^{2)3)†} Guo Qi-Zhi¹⁾

1) (*Department of Physics, Shanghai University, Shanghai 200444, China*)

2) (*School of Science, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China*)

3) (*State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Institute of Opto-Electronics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

(Received 27 July 2022; revised manuscript received 14 September 2022)

Abstract

In previous paper (2019 *Int. J. Mod. Phys. B* **33** 1950197; 2020 *Int. J. Mod. Phys. B* **34** 2050022), we presented a method to judge the entanglement of 2-qubit system. The necessary and sufficient conditions for the 2qubit system being separable are that if the relevant coefficients is positive and the principal density matrix is separable, then the system is separable, otherwise it is entangled. Now in this paper, we try to generalize this criterion to a 3-qubit system, and then, we further generalize the criterion of 3-qubit system to an N -qubit system. This is a complicated and interesting issue.

Keywords: Born probability density, N qubit system, entangle states

PACS: 03.65.Ud,42.50.Lc,42.65.Yj

DOI: 10.7498/aps.72.20221524

^{*} Project supported by the Key Laboratory of Quantum Optics, Ministry of Education, China (Grant Nos. KF202004, KF202205).

[†] Corresponding author. E-mail: zchy49@163.com

N 量子比特系统的纠缠判据

谭维翰 赵超樱 郭奇志

Entanglement criterion of N qubit system

Tan Wei-Han Zhao Chao-Ying Guo Qi-Zhi

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 010301 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20221524

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20221524>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

纠缠态量子探测系统的恒虚警检测方法研究

Research on method of constant false alarm rate of entangled state quantum detection system

物理学报. 2022, 71(1): 010303 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211121>

借助弱测量和环境辅助测量的 N 量子比特状态退相干抑制

Decoherence suppression for N -qubit states via weak measurement and environment-assisted measurement

物理学报. 2022, 71(22): 220303 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220760>

三量子比特Dicke模型中的两体和三体纠缠动力学

The dynamics of the bipartite and tripartite entanglement in the three-qubit Dicke model

物理学报. 2021, 70(4): 040301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201602>

退相干条件下两比特纠缠态的量子非局域关联检验

Testing quantum nonlocality of two-qubit entangled states under decoherence

物理学报. 2022, 71(7): 070301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211453>

具有次近邻相互作用的五量子比特XXZ海森伯自旋链的热纠缠

Thermal entanglement in a five-qubit XXZ Heisenberg spin chain with the next nearest neighboring interaction

物理学报. 2018, 67(2): 020301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171641>

超强耦合电路量子电动力学系统中反旋波效应对量子比特频率移动的影响

Counter-rotating effect on frequency shift of flux qubit in ultrastrongly coupled circuit-quantum-electrodynamics system

物理学报. 2020, 69(12): 124204 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200474>