

## 不确定性的定量描述和熵不确定关系\*

张诗琪 杨化通†

(东北师范大学物理学院, 长春 130024)

(2022 年 12 月 26 日收到; 2023 年 3 月 21 日收到修改稿)

不确定性是量子系统的一个基本特征. 长期以来量子力学中一直采用可观测量的标准偏差来刻画这种不确定性. 但近年来, 研究者们通过分析一些具体例子发现, 用可观测量的测量结果的 Shannon 熵来描述这种不确定性更为合适. 形式上, Shannon 熵也是一种更为一般的 Rényi 熵的极限形式. 本文从对未知态的测量结果的可重复概率的角度, 讨论了如何利用已有的测量结果预测新的测量结果, 以及可观测量的不确定度的定量表示的问题. 利用可观测量出现多次相同结果的概率定义了一种推广的 Rényi 熵, 并用这种推广的 Rényi 熵给出了 Maassen-Uffink 型熵不确定关系的一种简单证明.

**关键词:** 不确定性, 熵, 不确定关系**PACS:** 03.65.-w, 03.67.-a, 03.67.H**DOI:** 10.7498/aps.72.20222443

## 1 引言

量子力学和经典力学之间最显著的差别是经典力学原则上允许以任意的精度描写一个力学系统的所有力学量随时间的演化, 但量子力学却不允许同时给量子系统中所有可观测量都赋予一个确定值. 相反, 量子系统的各种可观测量通常存在一定的不确定性, 尤其是那些互不对易 (或不相容) 的可观测量的不确定程度之间存在着严格的制约关系, 称为不确定关系. 这类不确定关系最初来自 Heisenberg<sup>[1]</sup> 利用微观粒子的波粒二象性对用显微镜观测微观粒子位置的理想实验的分析. 他指出, 对粒子坐标的观测会不可避免地对其动量造成不可控制的扰动, 因而粒子的坐标和动量不可能被同时精确测量, 并给出了测量微观粒子的每个坐标和相应的动量的误差满足限制条件  $\Delta q \Delta p \geq h$ <sup>[2]</sup>.

最早根据量子力学严格证明这种不确定关系的是 Kennard<sup>[3]</sup>. 不久, Robertson<sup>[4]</sup>, Schrödinger<sup>[5]</sup> 先后对这种只适用于坐标和动量的不确定关系进

行极大的推广, 推广的不确定关系对任意一对可观测量的不确定度都给出了限制. 通常量子力学书籍中给出的正是这种 Robertson 型不确定关系<sup>[6]</sup>. 它表明, 任意一对不对易的可观测量  $\hat{A}, \hat{B}$  一般不可能同时具有精确值, 它们的标准差满足  $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_\rho|$ , 即它们的乘积大于某个通常和系统状态有关的最小值.

但近几十年来, 特别是由于发展量子信息理论和技术等需求的促进, 研究者们逐渐认识到这种被广泛采用的表达不确定关系的形式却存在着某些值得改进之处. 在传统的量子力学中可用可观测量的标准偏差定量描述其不确定度. 但通过分析一些具体的例子却发现这种描述方式并不是十分恰当, 因为在某些直观看来不确定性应该更大的情况下标准差却更小. 例如, 如果比较两个一维空间的概率密度:  $\rho(x) \propto \delta(x+a) + \delta(x-a)$  和  $\rho'(x) \propto \theta(x+a) \times \theta(a-x)$  的不确定程度.  $\rho(x)$  只在  $x = \pm a$  点各有 50% 概率的分布,  $\rho'(x)$  则是在区间  $(-a, a)$  均匀分布的概率. 显然, 满足分布  $\rho(x)$  的粒子比满足分布

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11875011) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yanght653@nenu.edu.cn

$\rho'(x)$  的粒子具有更加确定的坐标  $x$ . 但满足分布  $\rho(x)$  的粒子坐标  $x$  的标准偏差  $\Delta x = a$  却大于分布  $\rho'(x)$  给出的标准偏差  $\Delta x = a/\sqrt{3}$ . 为了克服用标准偏差表示不确定性的这种违反直觉的缺点, Everett<sup>[7]</sup> 曾猜想应该改用可观测量的熵来表示量子力学中的不确定关系. 这一想法被 Hirschman<sup>[8]</sup>, Beckner<sup>[9]</sup>, Białynicki-Birula<sup>[10]</sup> 实现, 他们先后证明了坐标和动量的熵之和总大于一个常数. 随后, 这种用可观测量的熵表达的不确定关系被以多种方式推广到了任意一对可观测量. 其中最为著名的是 Maassen 和 Uffink<sup>[11]</sup> 在 Deutsch<sup>[12]</sup> 的成果基础之上加以改进所得到的 Maassen-Uffink 熵不确定关系. 近年来, 研究者不仅给出了多种证明熵不确定关系的方法<sup>[13]</sup>, 并深入讨论了它们和基于标准偏差的不确定关系之间的联系, 还在此基础上对熵不确定关系进行了大量推广<sup>[14, 15]</sup> 和改进<sup>[16–23]</sup>. 本文则从实验上如何根据已经测得的测量结果预测未知的测量结果、或者连续多次观测到相同的测量结果的重复概率的观点出发, 以一种更加直观的方式推导出表示测量结果不确定度的熵度量, 并引入了一种含有两个参数的推广的 Rényi 熵, 且由此给出了一种 Maassen-Uffink 型熵不确定关系的简单证明.

## 2 确定性、不确定性的定量表示和熵

### 2.1 测量结果的可重复性和可预测性

为了考察如何定量刻画一组具有不确定性 (或者不可预测性) 的观测结果的不确定程度, 考虑某个具有离散本征值  $x_1, x_2, \dots, x_N$  的可观测量  $\hat{x}$ . 假定在某个未知的状态下, 这些本征值出现的概率  $p_i = p(x_i)$ . 设想在这个未知状态下 (因此并不预先知道各个本征值出现的概率), 对这个可观测量  $\hat{x}$  重复进行了  $r$  次观测, 并考虑如何表示这组观测结果的确定性或不确定性的程度. 需要强调的是, 对于量子系统, 由于测量操作会改变被测系统的状态, 使得每个特定系统都无法被重复使用, 因此重复观测必须是对多个处于同样状态的系统独立地进行的; 或者等价地, 使一个系统反复地抹去历史, 多次重复地回到同一个需要被测量的状态. 而这种抹去系统历史的操作也就使得所谓测量“同一个”系统完全失去了意义. 也就是说, 本质上本文讨论的重复测量必须是对大量相同系统组成的系综进行的.

一个极端的情况是, 如果对可观测量  $\hat{x}$  重复进行了无穷多次独立的测量, 即  $r \rightarrow \infty$ , 却总是得到某个完全相同的结果, 则显然可以根据这些重复出现的测量结果断定: 在这个未知状态下, 可观测量  $\hat{x}$  是完全确定的. 而在一般情况下, 可观测量  $\hat{x}$  具有不确定性的根本特征在于, 即使在同样状态下进行的重复测量, 也不可能总是得到相同的测量结果. 为了建立某种关于不确定程度的定量度量, 一个值得注意的性质是: 如果在同一个未知的状态下对可观测量  $\hat{x}$  重复进行了  $r$  次测量, 则连续  $r$  次获得相同观测结果的总概率为

$$P_x(r) \equiv P(\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r} | x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_r}\}) \\ = \sum_{i=1}^N p_i^r, \quad (1)$$

其总是次数  $r$  的非增函数. 将把概率  $P_x(r)$  称作  $\hat{x}$  的  $r$  次重复概率. 显然, 重复概率随次数  $r$  衰减越慢, 对于该未知状态下的  $x$  的值的预测 (方法是根据前面已经获得的测量结果“猜测”后面仍将获得相同的结果) 就会越肯定,  $x$  的不确定程度就应该越小; 相反, 如果这一重复概率随次数  $r$  衰减越快, 则这种预测就越不确定,  $x$  的不确定程度也就越大. 因此, 一种能够刻画重复概率随重复次数  $r$  的递减快慢的方法, 就是对可观测量  $\hat{x}$  的确定或不确定程度的一种定量描述.

### 2.2 香农 (Shannon) 熵、范数、Rényi 熵及推广的 Rényi 熵

刻画函数  $P_x(r)$  随参数  $r$  变化快慢的最直接方式, 显然是将  $P_x(r)$  看作  $r$  的连续函数, 则其导数:

$$\frac{d}{dr} P_x(r) = \sum_{i=1}^N p_i^r \ln p_i \quad (2)$$

反映了该函数随参数  $r$  的变化的快慢程度. 一个最常用的选择是取  $r = 1$  处的导数的负值 (重复概率为减函数, 导数总是负的). 事实上该点的变化率的负值正是分布的 Rényi 熵在  $r = 1$  处的值, 也是该分布的 Shannon 熵<sup>[24]</sup>:

$$H(P) = - \left. \frac{dP_x(r)}{dr} \right|_{r=1} = - \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i. \quad (3)$$

但是, 此处面临的困难在于: 导数  $\frac{dP_x(r)}{dr}$  仍是随次数  $r$  的剧烈变化的函数, 特别是在  $r = 1$  附近, 图 1

所示为某个典型的概率分布的重复概率函数及其导数. 因此, 一个特定点的导数值只能反映函数在该点附近的变化快慢, 但不能决定函数在更大范围的变化趋势.

另一种反应函数  $P_x(r)$  变化快慢的途径, 是注意到该函数随变量  $r$  具有近似指数衰减的特征, 因此可以把该函数改写成重复次数  $r$  的一个的形式上的“指数”函数的形式  $P_x(r) = q^r$ . 容易看出, 其中  $q$  是该概率分布  $P = (p_1, p_2, \dots, p_N)$  的  $r$ -范数:

$$q = \|P\|_r = \left( \sum_{i=1}^N p_i^r \right)^{1/r}. \quad (4)$$

于是有

$$P_x(r) = \|P\|_r^r. \quad (5)$$

概率分布的范数  $\|P\|_r$  仍然是  $r$  的函数, 特别是在  $r \sim 1$  附近,  $\|P\|_r$  是随  $r$  的快速变化的函数. 因此重复概率并不是  $r$  的一个真正的指数函数. 只有当  $r$  较大时, 如  $r \gg 1$  时,  $\|P\|_r$  才会趋向一个固定值  $\max(p_1, p_2, \dots, p_N)$ , 此时重复概率才会渐进地趋向一个真正的指数函数.

对重复概率更为普适的一种逼近形式, 是把这种渐进的指数函数  $P_x(r)$  改写成如下形式:

$$P_x(r) = e^{-(r-1)H_r}, \quad (6)$$

式中指数取作正比于  $r-1$  的形式, 是考虑到当  $r=1$  时, 总有  $P_x(1) = 1$ . 在这种形式下,  $P_x(r)$  衰减的快慢则由  $H_r$  的大小决定,  $H_r$  定义为

$$H_r(P) = -\frac{1}{r-1} \ln P_x(r) = -\frac{1}{r-1} \ln \sum_{i=1}^N p_i^r. \quad (7)$$

此处引入的函数  $H_r(P)$  一般称为概率分布  $P = (p_1, p_2, \dots, p_N)$  的 Rényi 熵<sup>[25]</sup>. 由于  $r=1$  时 (7) 式中的分母为零, 因此该式在  $r=1$  处的值只能定义为如下极限:

$$H_1(P) \equiv \lim_{r \rightarrow 1} H_r(P). \quad (8)$$

容易验证, 按该极限定义的 Rényi 熵在  $r=1$  处的值正是 Shannon 熵:

$$H(P) = H_1(P) = -\sum_{i=1}^N p_i \ln p_i. \quad (9)$$

尽管 Rényi 熵  $H_r$  依然是随  $r$  变化的函数, 但与导数  $\frac{dP_x(r)}{dr}$  相比,  $H_r$  的变化比较平缓, 因此更适于刻画重复概率的整体变化趋势. 图 2 给出了图 1 中的同一个概率分布  $P$  的 Rényi 熵  $H_r$ , 以及分别取不同  $r_0$  处的 Rényi 熵  $H_{r_0}$  给出的指数函数  $e^{-(r-1)H_{r_0}}$  与  $P_x(r)$  的比较. 由定义容易看出, 不同  $H_{r_0}$  给出的  $e^{-(r-1)H_{r_0}}$  仅在  $r_0$  处  $P_x(r_0)$  精确重合, 在其他  $r$  值处则会互相偏离.

由于范数  $\|P\|_r$  具有一些在下文讨论中起到关键作用的数学性质, 因此进一步把 Rényi 熵  $H_r$  用范数表示为

$$H_r(P) = -\ln \|P\|_r^{\frac{r}{r-1}}. \quad (10)$$

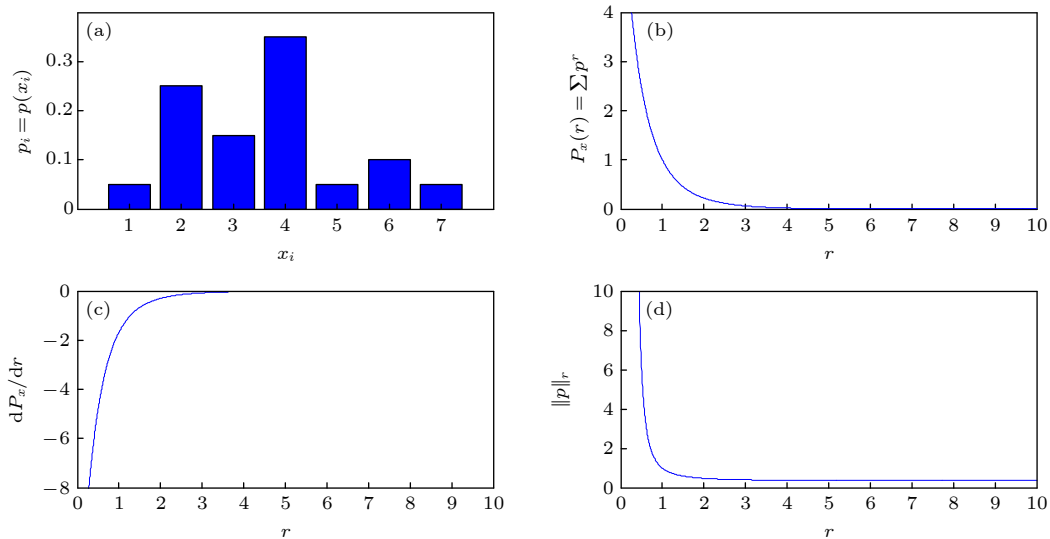


图 1 (a) 可观测量本征值的概率分布  $p_i$ ; (b) 可观测量的重复概率  $P_x(r)$ ; (c) 重复概率  $P_x(r)$  的导数; (d) 概率分布  $P$  的范数  $\|P\|_r$ .  
 Fig. 1. (a) Probability distribution  $p_i$  of the eigenvalues of an observable; (b) repeatable probability  $P_x(r)$  of the observable; (c) derivative of the repeatable probability  $P_x(r)$ ; (d) norm  $\|P\|_r$  of the probability distribution  $P$ .

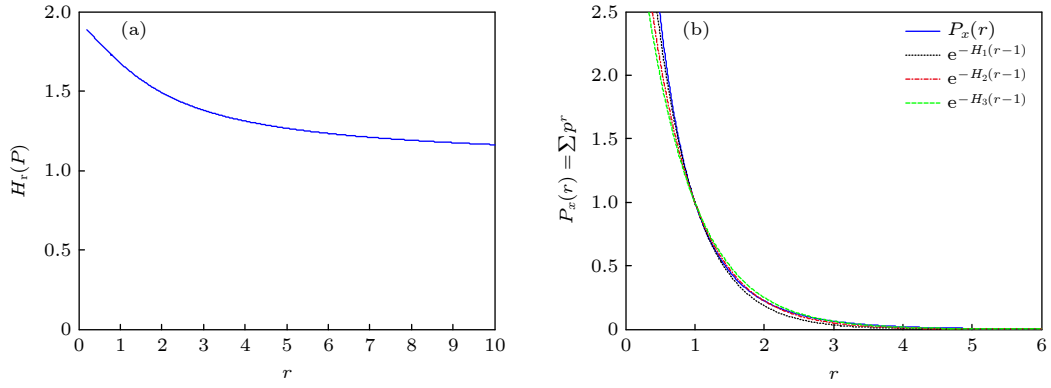

 图 2 (a) 概率分布  $P$  的 Rényi 熵  $H_r(P)$ ; (b)  $H_1, H_2, H_3$  给出的重复概率的拟合曲线

Fig. 2. (a) Rényi entropy  $H_r(P)$  of the probability distribution  $P$ ; (b) fitting curve of the repeatable probability given by  $H_1, H_2, H_3$ .

更一般地, 可以用范数  $\|P\|_r$  定义一种含有两个参数  $r, r'$  的推广的 Rényi 熵:

$$H_r^{r'}(P) \equiv -\ln \|P\|_r^{r'}. \quad (11)$$

这种推广的 Rényi 熵具有如下的关键性质: 当参数  $r, r'$  满足:

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = 1 \quad (12)$$

时, 该式就得出通常的 Rényi 熵, 即有  $H_r(P) = H_r^{r'}(P)$ . 满足这种关系的一对数  $r'$  和  $r$  通常称为相互 Hölder 共轭的.

下面将用 (11) 定义的推广的 Rényi 熵的范数表示形式, 证明量子系统的任意两个可观测量的熵满足的一个不等式, 即 Maassen-Uffink 熵不确定关系.

### 3 熵不确定关系

#### 3.1 线性算子的范数和 Riesz-Thorin 插值定理

为此, 需要通过定义在矢量或函数空间中的范数, 引入线性算子的范数. 设  $p, q \in [1, +\infty)$  是两个大于等于 1 的实数,  $L^p$  和  $L^q$  分别是定义了  $p$ -范数  $\|\cdot\|_p$  和  $q$ -范数  $\|\cdot\|_q$  的矢量空间. 对于算子  $T: L^p \rightarrow L^q$ , 如果存在  $c > 0$ , 使得对所有  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , 有  $\|T(f)\|_q \leq c\|f\|_p$ , 则把满足该不等式的最小常数  $c$  称作  $T$  的  $(p, q)$  范数, 记作  $\|T\|_{L^p \rightarrow L^q}$  或  $\|T\|_{(p, q)}$ .

设  $(X, \mu_1)$  和  $(Y, \mu_2)$  是两个测度空间, 且设  $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 < \infty$ , 如果线性映射:

$$T: L^{p_0}(\mu_1) + L^{p_1}(\mu_1) \rightarrow L^{q_0}(\mu_2) + L^{q_1}(\mu_2). \quad (13)$$

将  $L^{p_0}(\mu_1)$  有界地映射到  $L^{q_0}(\mu_2)$ 、 $L^{p_1}(\mu_1)$  有界地映射到  $L^{q_1}(\mu_2)$ , 则对任意  $0 \leq \theta \leq 1$ , 定义  $p, q$ :

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad (14)$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \quad (15)$$

则 Riesz-Thorin 插值定理 [26, 27] 要求:

$$\|T\|_{p \rightarrow q} \leq \|T\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{q_0}}^{1-\theta} \|T\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{q_1}}^{\theta}. \quad (16)$$

#### 3.2 Maassen-Uffink 熵不确定关系

考虑任意两个可观测量  $\hat{A}$  和  $\hat{B}$ . 设可观测量  $\hat{A}$  具有本征态  $|a_i\rangle (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $\hat{B}$  的本征态为  $|b_j\rangle, (j = 1, 2, \dots, n)$ . 为了简便, 将采用下面的记号  $x_i = \langle a_i | \psi \rangle, y_j = \langle b_j | \psi \rangle$  来标记一个态  $|\psi\rangle$  分别在基矢  $|a_i\rangle$  和  $|b_j\rangle$  下的分量. 考虑由表象变换矩阵  $T_{i,j} = \langle b_i | a_j \rangle$  定义的线性映射, 它有如下性质.

1) 因为  $\sum_i |\langle a_i | \psi \rangle|^2 = \sum_i |\langle b_i | \psi \rangle|^2$ , 所以

$$\sum_i |y_i|^2 = \sum_{i,j} |T_{i,j} x_j|^2. \quad (17)$$

根据线性映射的范数  $\|T\|_{L^p \rightarrow L_q}$  的定义, (17) 式表明  $\|T\|_{L_2 \rightarrow L_2} = 1$ .

2) 假设变换矩阵  $T$  满足  $\max_{(i,j)} |T_{i,j}| = c$ , 则有

$$\|y\|_{\infty} = \max_{(i)} |Tx|_i \leq c \sum_j |x_j|. \quad (18)$$

同样由线性映射的范数定义可得  $\|T\|_{L_1 \rightarrow L_{\infty}} = c$ .

根据 Riesz-Thorin 插值定理, 对于在点  $(p_0, q_0) = (2, 2)$  和点  $(p_1, q_1) = (1, \infty)$  中间的任意点  $(a_{\theta}, a'_{\theta})$ , 只要满足:

$$\frac{1}{a_{\theta}} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} = \frac{1+\theta}{2}, \quad (19)$$

$$\frac{1}{a'_{\theta}} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} = \frac{1-\theta}{2}, \quad (20)$$



则线性映射  $T$  的范数应满足如下限制:

$$\|T\|_{L_a \rightarrow L_{a'}} \leq \|T\|_{L_2 \rightarrow L_2}^{1-\theta} \|T\|_{L_1 \rightarrow L_\infty}^\theta = c^\theta. \quad (21)$$

由  $T$  的范数的定义, 矢量  $x$  和  $y$  的范数满足

$$\|y\|_{a'_\theta} = \|Tx\|_{a'_\theta} \leq c^\theta \|x\|_{a_\theta}. \quad (22)$$

根据量子力学的玻恩规则, 矢量  $x$  和  $y$  的范数可以改写为可观测量  $\hat{A}$  和  $\hat{B}$  取不同本征值的概率的范数:

$$\|x\|_a = \|P\|_{a/2}^{1/2}, \|y\|_a = \|Q\|_{a/2}^{1/2}, \quad (23)$$

其中  $P = (|x_1|^2, |x_2|^2, \dots, |x_n|^2)$ ,  $Q = (|y_1|^2, |y_2|^2, \dots, |y_n|^2)$ . 因此有

$$\|Q\|_{a'_\theta/2} \leq c^{2\theta} \|P\|_{a_\theta/2}. \quad (24)$$

(24) 式可以等价地写成:

$$\|P\|_{a_\theta/2}^{-1/\theta} \cdot \|Q\|_{a'_\theta/2}^{1/\theta} \leq c^2. \quad (25)$$

将 (25) 式两边同时取对数, 并考虑到推广的 Rényi 熵和概率的范数的关系:

$$H_{a_\theta/2}^{-1/\theta}(P) = -\ln\|P\|_{a_\theta/2}^{-1/\theta}, H_{a'_\theta/2}^{1/\theta}(Q) = -\ln\|Q\|_{a'_\theta/2}^{1/\theta}. \quad (26)$$

因此推广的 Rényi 满足如下不等式:

$$H_{a_\theta/2}^{-1/\theta}(P) + H_{a'_\theta/2}^{1/\theta}(Q) \geq -\ln c^2. \quad (27)$$

注意到:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_\theta} &= \frac{1+\theta}{2} \Rightarrow \frac{2}{a_\theta} - \theta = 1, \\ \frac{1}{a'_\theta} &= \frac{1-\theta}{2} \Rightarrow \frac{2}{a'_\theta} + \theta = 1, \end{aligned}$$

$a_\theta/2$  和  $-\theta$  以及  $a'_\theta/2$  和  $\theta$  分别是两对 Hölder 共轭数, 根据推广的 Rényi 熵和 Rényi 熵之间的关系, (27) 式表明任意两个可观测量的 Rényi 熵满足不确定关系:

$$H_{a_\theta/2}(P) + H_{a'_\theta/2}(Q) \geq -\ln c^2. \quad (28)$$

对 (28) 式取极限, 令  $\theta \rightarrow 0$ , 由于  $\lim_{\theta \rightarrow 0} a_\theta/2 = \lim_{\theta \rightarrow 0} a'_\theta/2 = 1$ , 得到:

$$H(P) + H(Q) \geq -\ln c^2. \quad (29)$$

该式是关于香农熵的 Maassen-Uffink 型不确定关系. 显然, 信息熵的定义很容易被推广到任意的混合态, 因此这种熵的不确定关系也容易被推广到更一般的混合态情况.

## 4 结 论

当对一个可观测量进行多次独立测量时, 测量

结果中重复出现相同结果的重复概率随重复次数的衰减特征反映了该可观测量的不确定程度. 当一个可观测量的不确定程度越大, 其测量结果中出现相同结果的重复概率随重复次数的衰减也越快; 反之, 不确定性越小, 则重复概率的衰减越慢. 可观测量的香农熵和 Rényi 熵都可以由其重复概率和重复次数之间的函数关系系统地给出, 它们可以被形式地看作重复概率随重复次数的“衰减指数”. 利用熵和重复概率之间的这种联系, 可以更直接地解释熵不确定关系的物理意义. 按着这种解释, 熵不确定关系限制了同时对两个不同的可观测量进行多次测量时, 两个量都出现相同结果的重复概率随次数的衰减特征. 两个可观测量的总熵的下界越大, 表明它们都出现相同结果的重复概率随重复次数的衰减越快, 也就是越不容易二者都重复出现相同结果. 反之, 总熵的下界越小, 重复概率衰减越慢, 越容易二者都重复出现相同的结果. 而原始的 Robertson 不确定关系则是限制的多次测量结果围绕其平均值的最小分散程度.

## 参考文献

- [1] Heisenberg W 1927 *Z. Phys.* **43** 172 (in German)
- [2] Heisenberg W (translated by Wang Z X, Li S G, Zhang Y) 2017 *The Physical Principles of the Quantum Theory* (Beijing: Higher Education Press) p11 (in Chinese) [海森堡 W (王正行, 李绍光, 张虞 译) 2017 量子论的物理原理 (北京: 高等教育出版社) 第11页]
- [3] Kennard E H 1927 *Z. Phys.* **44** 326 (in German)
- [4] Robertson H P 1929 *Phys. Rev.* **34** 163
- [5] Schrödinger E 1930 *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse* **14** 296
- [6] Zeng J Y 2013 *Quantum Mechanics* (Vol. 1) (Beijing: Science Press) p142 (in Chinese) [曾谨言 2013 量子力学(卷I) (北京: 科学出版社) 第142页]
- [7] Everett H 1957 *Rev. Mod. Phys.* **29** 454
- [8] Hirschman I I 1957 *Am. J. Math.* **79** 152
- [9] Beckner W 1975 *Ann. Math.* **102** 159
- [10] Białynicki-Birula I 1984 *Phys. Lett. A* **103** 253
- [11] Maassen H, Uffink J B M 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1103
- [12] Deutsch D 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 631
- [13] Coles P J, Colbeck R, Yu L, Zolowak M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 210405
- [14] Berta M, Christandl M, Colbeck R, Renes J M, Renner J 2010 *Nat. Phys.* **6** 659
- [15] Coles P J, Berta M, Tomamichel M, Wehner S 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 015002
- [16] Wang D, Ming F, Song X K, Ye L, Chen J L 2020 *Eur. Phys. J. C* **80** 800
- [17] Yang Y Y, Sun W Y, Shi W N, Ming F, Wang D, Ye L 2019 *Front. Phys.* **14** 31601
- [18] Chen M N, Wang D, Ye L 2019 *Phys. Lett. A* **383** 977
- [19] Wu L, Ye L, Wang D 2022 *Phys. Rev. A* **106** 062219

- [20] Xie B F, Ming F, Wang D, Ye L, Chen J L 2021 *Phys. Rev. A* **104** 062204
- [21] Ming F, Wang D, Fan X G, Shi W N, Ye L, Chen J L 2020 *Phys. Rev. A* **102** 012206
- [22] Wu L, Song X K, Ye L, Wang D 2022 *AAPPS Bull.* **32** 24
- [23] Li L J, Ming F, Song X K, Ye L, Wang D 2022 *Acta. Phys. Sin.* **71** 070302 (in Chinese) [李丽娟, 明飞, 宋学科, 叶柳, 王栋 2022 物理学报 **71** 070302]
- [24] Shannon C E 1948 *Bell Syst. Tech. J.* **27** 379
- [25] Rényi A 1961 *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Vol. 1): *Contributions to the Theory of Statistics* Berkeley, University of California Press, June 20–July 30, 1960, p547
- [26] Stein E M 1956 *Trans. Amer. Math. Soc.* **83** 482
- [27] Thorin G O 1948 *Ph. D. Dissertation* (Lund: Lunds University)

# Quantitative description of uncertainty and entropic uncertainty relation\*

Zhang Shi-Qi    Yang Hua-Tong<sup>†</sup>

(School of Physics, Northeast Normal University, Changchun 130024, China)

( Received 26 December 2022; revised manuscript received 21 March 2023 )

## Abstract

Uncertainty is a fundamental characteristic of quantum system. The degree of uncertainty of an observable has long been investigated by the standard deviation of the observable. In recent years, however, by analyzing some special examples, researchers have found that the Shannon entropy of the measurement outcomes of an observable is more suitable to quantify its uncertainty. Formally, Shannon entropy is a special limit of a more general Rényi entropy. In this paper, we discuss the problem of how to predict the measurement outcome of an observable by the existing measurement results of the observable, and how to quantitatively describe the uncertainty of the observable from the perspective of the repeatable probability of the measurement results of this observable in an unknown state. We will argue that if the same observable of different systems in the same state is repeatedly and independently measured many times, then the probability of obtaining an identical measurement result is a decaying function of the number of measurements of obtaining the same result, and the decay rate of the repeatable probability for obtaining the same measurement results and the repeatable number of measurements can represent the degree of uncertainty of the observable in this state. It means that the greater the uncertainty of an observable, the faster the repeatable probability decays with the number of repeatable measurements; conversely, the smaller the uncertainty, the slower the repeatable probability decays with the number of repeatable measurements. This observation enables us to give the Shannon entropy and the Rényi entropy of an observable uniformly by the functional relation between the repeatable probability and the number of repeatable measurements. We show that the Shannon entropy and the Rényi entropy can be formally regarded as the “decay index” of the repeatable probability with the number of repeatable measurements. In this way we also define a generalized Rényi entropy by the repeatable probability for consecutively observing identical results of an observable, and therefore we give a proof of the Maassen-Uffink type entropic uncertainty relation by using this generalized Rényi entropy. This method of defining entropy shows that entropic uncertainty relation is a quantitative limitation for the decay rate of the total probability for obtaining identical measurement results when we simultaneously measure two observables many times.

**Keywords:** uncertainty, entropy, uncertainty relation

**PACS:** 03.65.–w, 03.67.–a, 03.67.H

**DOI:** 10.7498/aps.72.20222443

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11875011).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: yanght653@nenu.edu.cn



## 不确定性的定量描述和熵不确定关系

张诗琪 杨化通

## Quantitative description of uncertainty and entropic uncertainty relation

Zhang Shi-Qi Yang Hua-Tong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 110303 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222443

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222443>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 大气边界层模式中随机参数的反演与不确定性分析

Retrieval and uncertainty analysis of stochastic parameter in atmospheric boundary layer model

物理学报. 2018, 67(19): 199201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181014>

#### 浅海波导环境不确定性对声源功率估计的影响

Influence of environmental uncertainty on source power estimation in shallow water waveguide

物理学报. 2021, 70(24): 244301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210852>

#### 熵不确定度关系综述

Review on entropic uncertainty relations

物理学报. 2022, 71(7): 070302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212197>

#### 光学反馈线性腔衰荡光谱技术不确定性

Uncertainty of optical feedback linear cavity ringdown spectroscopy

物理学报. 2022, 71(12): 124201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220186>

#### 一种不确定性捆扎线束电磁耦合效应的广义等效建模方法

A generalized simplified modeling method for electromagnetic coupling effects of uncertainty strapping cable harness

物理学报. 2021, 70(10): 100702 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201723>

#### 可搬运铷光晶格钟系统不确定度的评估

Evaluation of systematic uncertainty for transportable  $^{87}\text{Sr}$  optical lattice clock

物理学报. 2021, 70(3): 030601 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201204>