专题: 高能重离子碰撞过程的自旋与手征效应

嘉当韦尔基下的非阿贝尔手征动理学方程*

罗晓丽 高建华†

(山东大学空间科学与物理学院, 山东省光学天文与日地空间环境重点实验室, 威海 264209)

(2022 年 12 月 31 日收到; 2023 年 4 月 10 日收到修改稿)

非阿贝尔规范场是构成标准模型的基本单元, 非阿贝尔手征动理学理论是描述标准模型在非平衡体系下手征费米子输运的重要理论工具. 在前期工作中, 我们将非阿贝尔手征动理学方程分解为色空间中的色单态和色多重态等不可约表示形式, 这种分解方式可以让手征动理学方程在色空间的规范变换下具有更简单的变换性质. 然而, 这种分解方式在微观描述色自由度的输运方面可能并不直观和方便. 为了描述色自由度具体输运和演化过程, 本文把前期得到的非阿贝尔手征动理学方程在嘉当韦尔基下进行展开. 本文中通过协变梯度展开的方法将非阿贝尔手征动理学方程展开到 1 阶, 在嘉当韦尔基下将规范场进行展开, 分布函数分解为对角元素部分和非对角元素部分. 结果显示 0 阶非对角元素分布函数可以诱导出 1 阶对角元素分布函数贡献, 0 阶对角元素分布函数也可以诱导出 1 阶非对角元素分布函数的贡献. 非对角元素分布函数之间以及非对角元素与对角元素之间一般都是耦合在一起, 但当规范场只存在对角元素时, 非对角元素与对角元素解耦.

关键词: 非阿贝尔场, 维格纳函数, 手征动理学方程

PACS: 25.75.Nq, 12.38.Mh **DOI:** 10.7498/aps.72.20222471

1 前 言

近年来, 在相对论重离子碰撞领域, 各种量子手征效应引起了学术界的广泛关注, 比如手征磁效应 [1–3]、手征涡旋效应 [4–7]、手征分离效应等 [8–10]. 这些效应本身和量子色动力学 (QCD) 的真空结构以及自然界中的 CP 破坏有着直接的联系, 所以对于它们的深入研究有极其重要的物理意义.

相对论重离子碰撞是一个快速演化的动态体系, 为了定量地描述相对论重离子碰撞中的手征效应, 必须考虑手征效应的动态演化规律, 为此人们建立并发展了手征动理学形式理论 [11–25] 以及数值模拟程序 [26–33]. 这一理论可以非常自洽地描述各种手征量子效应.

但是这些手征动理学方程大都是局限在阿贝尔规范场情形下的动理学方程, 只有很少部分讨论了非阿贝尔情形下的动理学方程 [34–39]. 在我们最近的工作 [38] 中, 从维格纳函数出发推导出了非阿贝尔规范场情形下的手征动理学方程. 我们把非阿贝尔的维格纳函数和动理学方程都在色空间进行了色单态和色多重态的分解, 这种分解方法对于计算最后的色单态算符或色多重态算符的期待值是最自然的分解方式. 但是这种分解方式可能对动理学理论的微观描述缺乏一定的直观性, 因为在动理学理论中, 可能习惯于问各种颜色夸克的转化过程, 在这种情形下, 选择嘉当韦尔基将是更加方便的分解方式. 本文的目标是把文献 [38] 中得到的手征动理学方程重新在嘉当韦尔基下进行展开. 为了避免发生混肴, 在下面的求和约定中, 对于时空指

* 国家自然科学基金 (批准号: 11890710, 11890713, 12175123) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: gaojh@sdu.edu.cn

标的希腊字母, 重复的上下指标表示求和, 而对色指标的罗马字母, 恢复了求和符号. 为了表述方便, 色指标有时是上指标, 有时是下指标, 它们之间是没有差别的.

2 维格纳函数与维格纳方程简介

20 世纪八十年代, 相对论重离子对撞机(RHIC)实验还没有开始运行, 人们为了以后能够描述相对论重离子碰撞中的非平衡演化过程, 建立和发展了基于量子场论的维格纳函数和维格纳方程[40−43]. 这些工作是我们当前工作的研究基础, 所以有必要简单回顾和介绍基于维格纳函数和维格纳方程的量子输运理论. 本文将局限于背景为非阿贝尔 $SU(N)$ 规范场情形下的夸克体系. 洛伦兹协变、规范协变的维格纳函数定义为密度矩阵算符傅里叶变换的系综平均值:

$$W(x,p)=\left\langle\int\frac{\mathrm{d}^4y}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot y}\rho\left(x+\frac{y}{2},x-\frac{y}{2}\right)\right\rangle. \quad (1)$$

密度矩阵算符的分量形式为

$$\begin{aligned}&\rho^{ij}_{\alpha\beta}\left(x+\frac{y}{2},x-\frac{y}{2}\right)\\&=\sum_{j',i'}\bar{\psi}^{j'}_{\beta}\left(x+\frac{y}{2}\right)U^{j'j}\left(x+\frac{y}{2},x\right)\\&\quad\times U^{ii'}\left(x,x-\frac{y}{2}\right)\psi^{i'}_{\alpha}\left(x-\frac{y}{2}\right),\end{aligned} \quad (2)$$

其中 α,β 表示旋量指标; i,i',j,j' 代表 $SU(N)$ 群基础表示的色指标; U 是保持算符规范协变性的规范链:

$$U(x,y)=P\exp\left(\frac{\mathrm{i}g}{\hbar}\int_y^x\mathrm{d}z^\mu A_\mu(z)\right). \quad (3)$$

规范链的路径沿连接时空点 x 和 y 的直线段, P 代表算符沿路径排序, 规范势 $A_\mu=\sum_a A^a_\mu t^a$, t^a 是 $SU(N)$ 群基础表示的产生子. 维格纳函数是旋量空间和色空间的普通矩阵. 从非阿贝尔规范场情形下的狄拉克方程出发, 可以得到维格纳函数满足的动理学方程——维格纳方程:

$$\begin{aligned}&4mW(x,p)=\\&\{\gamma^\mu,\{\Pi_\mu,W(x,p)\}\}+\mathrm{i}\left[\gamma^\mu,[G_\mu,W(x,p)]\right],\end{aligned} \quad (4)$$

$$0=[\gamma^\mu,\{\Pi_\mu,W(x,p)\}]+\mathrm{i}\{\gamma^\mu,[G_\mu,W(x,p)]\}, \quad (5)$$

其中 $[,]$ 代表对易关系, $\{,\}$ 代表反对易关系, m 是夸克的质量, 非定域的广义动量算符 Π_μ 和导数算符 G_μ 定义为

$$\begin{aligned}\Pi_\mu&=p_\mu+\frac{g}{2}\int_0^1\mathrm{d}s\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}s\Delta}F_{\mu\nu}(x)\right)\mathrm{i}s\partial^\nu_p,\\G_\mu&=D_\mu+\frac{g}{2}\int_0^1\mathrm{d}s\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}s\Delta}F_{\mu\nu}(x)\right)\partial^\nu_p,\end{aligned} \quad (6)$$

其中, $D_\mu(x)$ 就是基础表示中的协变导数:

$$D_\mu(x)=\partial_\mu-\frac{\mathrm{i}g}{\hbar}A_\mu(x), \quad (7)$$

$F_{\mu\nu}(x)$ 是非阿贝尔的张量场强:

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}(x)&\equiv\sum_a F^a_{\mu\nu}t^a=-\frac{\hbar}{\mathrm{i}g}\left[D_\mu,D_\nu\right]\\&=\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)-\frac{\mathrm{i}g}{\hbar}\left[A_\mu(x),A_\nu(x)\right].\end{aligned} \quad (8)$$

三角算符定义为 $\Delta\equiv\partial_p\cdot\mathscr{D}(x)$, 其中 $\mathscr{D}(x)$ 是作用在规范群伴随表示上的协变导数:

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_\mu(x)F_{\nu\lambda}&\equiv\left[D_\mu(x),F_{\nu\lambda}\right]\\&=\partial^x_\mu F_{\nu\lambda}-\frac{\mathrm{i}g}{\hbar}\left[A_\mu(x),F_{\nu\lambda}\right],\end{aligned} \quad (9)$$

在我们的维格纳方程中, 这个算符只作用在后面的场强张量 $F_{\mu\nu}$ 上, 不作用在维格纳函数 W 上. 除此之外, 对于含有动量导数的算符位于维格纳函数的右边时, 隐含了分部积分的负号关系:

$$W(x,p)\partial^{\nu_1}_p\cdots\partial^{\nu_k}_p\equiv(-1)^k\partial^{\nu_k}_p\cdots\partial^{\nu_1}_pW(x,p). \quad (10)$$

在旋量空间内, 可以把维格纳函数在 Clifford 代数下进行分解:

$$W=\frac{1}{4}\left[\mathscr{F}+\mathrm{i}\gamma^5\mathscr{P}+\gamma^\mu\mathscr{V}_\mu+\gamma^\mu\gamma^5\mathscr{A}_\mu+\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\mathscr{S}_{\mu\nu}\right], \quad (11)$$

展开系数 $\mathscr{F}$, $\mathscr{P}$, $\mathscr{V}_\mu$, $\mathscr{A}_\mu$, 和 $\mathscr{S}_{\mu\nu}$ 现在只是色空间的矩阵了.

在手征极限 $m=0$ 情形下, 可以引入一组更加方便的手征基矢:

$$\mathscr{J}^\mu_s=\frac{1}{2}\left(\mathscr{V}^\mu+s\mathscr{A}^\mu\right), \quad (12)$$

其中 $s=+1/-1$ 表示右手/左手分量. 这组手征维格纳函数在手征极限下将和其他维格纳函数 $\mathscr{F}$, $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{S}_{\mu\nu}$ 解耦, 左右手之间也相互解耦:

$$0=\{\Pi_\mu,\mathscr{J}^\mu\}, \quad (13)$$

$$0=[G_\mu,\mathscr{J}^\mu], \quad (14)$$

$$0=\{\Pi^\mu,\mathscr{J}^\nu\}-\{\Pi^\nu,\mathscr{J}^\mu\}+s\hbar\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left[G_\alpha,\mathscr{J}_\beta\right], \quad (15)$$

为了分析半经典展开, 这里恢复了$\hbar$系数. 因为左右手之间相互解耦, 也省去了手征指标 s.

3 非阿贝尔场情形下的手征动理学方程

上一节得到了手征极限下的维格纳函数 $\mathscr{J}^\mu$ 以及它所满足的维格纳方程 (13)—(15). 对于左手或右手的维格纳函数 $\mathscr{J}^\mu$包含 4 个分量, 它们满足 8 个方程, 所以维格纳方程是一组高度约束的方程组, 为了得到最终的动理学方程, 需要进一步对维格纳函数和维格纳方程约化. 文献 [38] 中利用半经典$\hbar$展开, 精确到$\hbar$的一阶近似下, 非局域算符 Π_μ和G_μ的零阶和一阶形式分别为

$$\Pi_\mu^{(0)} = p_\mu, \quad \Pi_\mu^{(1)} = \frac{\mathrm{i}g}{4} F_{\mu\nu}\partial_p^\nu, \tag{16}$$

$$G_\mu^{(0)} = D_\mu + \frac{g}{2} F_{\mu\nu}\partial_p^\nu, \quad G_\mu^{(1)} = -\frac{\mathrm{i}g}{8}\left[\left(\partial_p\cdot\mathscr{D}\right)F_{\mu\nu}\right]\partial_p^\nu. \tag{17}$$

维格纳函数 $\mathscr{J}^\mu$也展开到一阶近似下:

$$\mathscr{J}_\mu = \mathscr{J}_\mu^{(0)} + \hbar\mathscr{J}_\mu^{(1)} + \cdots. \tag{18}$$

在此基础上, 进一步把所有的时空指标在类时和类空的方向上进行分解, 为此引入一个类时常矢量 n^μ满足归一化$n^2=1$. 这样任意一个 X^μ总是可以分解为平行于和垂直于n^μ的部分之和:

$$\begin{aligned} &X^\mu = X_n n^\mu + \bar{X}^\mu, \quad X_n = X\cdot n, \\ &\bar{X}^\mu = \Delta^{\mu\nu}X_\nu, \quad \Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu. \end{aligned} \tag{19}$$

为了方便起见, 也引入类空反对称张量 $\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}n_\nu$. 在借助半经典展开和时空指标展开的操作下, 文献 [38] 发现, 先前的 4 个维格纳函数的分量只有沿n^μ方向的分量 $\mathscr{J}_n$是独立的, 以前的 8 个维格纳方程最后也约化为一个 $\mathscr{J}_n$满足的输运方程. 详细细节参见文献 [38], 这里直接给出精确到$\hbar$线性项的结果.

在零阶近似下, 独立维格纳函数 $\mathscr{J}_n^{(0)}$的一般形式为

$$\mathscr{J}_n^{(0)} = p_n f^{(0)}\delta(p^2), \tag{20}$$

这里引入了另一个分布函数 $f^{(0)}$, 它是把在壳狄拉克 δ 函数分离以后的部分, 其他分量可以从它直接得到:

$$\bar{\mathscr{J}}^{(0)\mu} = \bar{p}^\mu\frac{\mathscr{J}_n^{(0)}}{p_n} = \bar{p}^\mu f^{(0)}\delta(p^2). \tag{21}$$

$f^{(0)}$满足的动理学方程为

$$0 = \left[G_\mu^{(0)}, p^\mu f^{(0)}\delta(p^2)\right]. \tag{22}$$

在一阶近似下, 独立维格纳函数 $\mathscr{J}_n^{(1)}$ 的一般形式为

$$\begin{aligned} \mathscr{J}_n^{(1)} = {}& p_n f^{(1)}\delta(p^2) + \frac{s}{2}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}p_\mu\left\{\frac{g}{2}F_{\alpha\beta}, f^{(0)}\right\}\delta'(p^2) \\ &+ p_n\left\{\Pi_\mu^{(1)}, p^\mu f^{(0)}\right\}\delta'(p^2). \end{aligned} \tag{23}$$

类似于零阶的 $f^{(0)}$, (23) 式中又引入了一阶的 $f^{(1)}$, 空间分量的维格纳函数可以表示为

$$\bar{\mathscr{J}}^{(1)\mu} = \bar{p}^\mu\frac{\mathscr{J}_n^{(1)}}{p_n} + \frac{s}{2p_n}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}\left[G_\alpha^{(0)}, \bar{p}_\beta\frac{\mathscr{J}_n^{(0)}}{p_n}\right] + \frac{1}{2p_n}\left(\left\{\bar{\Pi}^{(1)\mu}, p_n\frac{\mathscr{J}_n^{(0)}}{p_n}\right\} - \left\{\Pi_n^{(1)}, \bar{p}^\mu\frac{\mathscr{J}_n^{(0)}}{p_n}\right\}\right). \tag{24}$$

一阶维格纳函数 $\mathscr{J}_n^{(1)}$或$f^{(1)}$满足维格纳方程:

$$\begin{aligned} \left[G_\mu^{(0)}, p^\mu\frac{\mathscr{J}_n^{(1)}}{p_n}\right] = {}& -\frac{s}{2}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}\left[\bar{G}_\mu^{(0)}, \frac{1}{p_n}\left[G_\alpha^{(0)}, \bar{p}_\beta\frac{\mathscr{J}_n^{(0)}}{p_n}\right]\right] - \left[G_\mu^{(1)}, p^\mu\frac{\mathscr{J}_n^{(0)}}{p_n}\right] \\ &- \frac{1}{2}\left[\bar{G}_\mu^{(0)}, \frac{1}{p_n}\left(\left\{\bar{\Pi}^{(1)\mu}, p_n\frac{\mathscr{J}_n^{(0)}}{p_n}\right\} - \left\{\Pi_n^{(1)}, \bar{p}^\mu\frac{\mathscr{J}_n^{(0)}}{p_n}\right\}\right)\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

与阿贝尔情形下的手征动理学理论不同, 非阿贝尔情形下的手征维格纳函数还需要满足限制方程:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\left[F_{\mu\nu}, \mathscr{J}_\alpha^{(0)}\right] = 0, \tag{26}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\left[F_{\mu\nu}, \mathscr{J}_\alpha^{(1)}\right] = -\frac{3}{32}\left[\left[\left(\varepsilon^{\lambda\alpha\mu\nu}\partial_p^\beta - \varepsilon^{\lambda\beta\mu\nu}\partial_p^\alpha\right)F_{\mu\nu}, F^{\lambda\kappa}\partial_\kappa^p\right], \mathscr{J}^{(0)\alpha}\right]. \tag{27}$$

文献 [38] 中进一步把约化后的分布函数及其满足的动理学方程在色空间进行分解:

$$\mathscr{J}_\mu = \mathscr{J}_\mu^I \mathbf{1} + \sum_a \mathscr{J}_\mu^a t^a, \quad \mathscr{J}_\mu^I = \frac{1}{N}\mathrm{tr}\,\mathscr{J}_\mu,$$
$$\mathscr{J}_\mu^a = 2\mathrm{tr}\,t^a\,\mathscr{J}_\mu. \tag{28}$$

这种分解方式保留了 $SU(N)$ 群的最大对称形式, 对于最后求解色单态或色多重态的物理学量非常方便, 但是从微观动理学角度而言, 有时需要描述每种颜色夸克的转换输运过程, 这个时候这种通常的分解方式缺少一些物理直观性, 在下一节里, 为了研究各种具体颜色夸克间的相互转化的输运过程, 将把分布函数和动理学方程在嘉当韦尔基下进行展开.

4 嘉当韦尔基下的手征动理学方程

规范群 $SU(N)$ 的嘉当韦尔基[44–46] 包括 $N-1$ 个无迹对角矩阵 $\boldsymbol{h}_i$, $N(N-1)$ 个非对角矩阵 $\boldsymbol{e}_{ij}, i,j=1,\cdots,N; i\neq j$. 其中 $\boldsymbol{h}_i$ 就是对角的 Gell-Mann 矩阵:

$$\boldsymbol{h}_i = [2i(i+1)]^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-i,0,\cdots,0), \tag{29}$$

$-i$ 出现在第 $(i+1)$ 列. 也可以把 $\boldsymbol{h}_i$ 的矩阵元素统一表示成如下形式:

$$(h_i)_{mn} = \frac{1}{\sqrt{2i\,(i+1)}}\left(\sum_{k=1}^{i}\delta_{mk}\delta_{nk} - i\delta_{m,i+1}\delta_{n,i+1}\right),$$
$$i=1,2,\cdots,N-1. \tag{30}$$

非对角矩阵 $\boldsymbol{e}_{ij}$ 与非对角的 Gell-Mann 矩阵是不同的, 矩阵元素可以表示成:

$$(e_{ij})_{mn} = \delta_{im}\delta_{jn}, \qquad i\neq j. \tag{31}$$

如果定义对角矩阵矢量

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = (\boldsymbol{h})_{ii} = ((h_1)_{ii},\cdots,(h_{N-1})_{ii}), \quad \boldsymbol{\eta}_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_j, \tag{32}$$

则 $\boldsymbol{h}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_{ij}$ 的对易关系可以表示如下[44–46]:

$$[\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{h}_j] = 0, \tag{33}$$

$$[\boldsymbol{h}_i, \boldsymbol{e}_{jk}] = (\boldsymbol{\eta}_{jk})_i \boldsymbol{e}_{jk}, \tag{34}$$

$$[\boldsymbol{e}_{ij}, \boldsymbol{e}_{jk}] = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_{ik}, \qquad i\neq j\neq k. \tag{35}$$

比如对于 QCD 的 $N=3$, 嘉当韦尔基矩阵为

$$\boldsymbol{h}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{h}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{32} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

在嘉当韦尔基下, 可以把规范势和规范场强分解为

$$A_\mu = \sum_m A_\mu^m h_m + \sum_{m,n} A_\mu^{mn} e_{mn}, \tag{36}$$

$$F_{\mu\nu} = \sum_m F_{\mu\nu}^m h_m + \sum_{m,n} F_{\mu\nu}^{mn} e_{mn}. \tag{37}$$

矩阵分量形式为

$$(A_\mu)_{ij} = \sum_m A_\mu^m (h_m)_{ij} + \sum_{m,n} A_\mu^{mn}(e_{mn})_{ij}$$
$$\equiv \mathsf{A}_\mu^i \delta_{ij} + \mathsf{A}_\mu^{ij}, \tag{38}$$

$$(F_{\mu\nu})_{ij} = \sum_m F_{\mu\nu}^m (h_m)_{ij} + \sum_{m,n} F_{\mu\nu}^{mn}(e_{mn})_{ij}$$
$$\equiv \mathsf{F}_{\mu\nu}^i \delta_{ij} + \mathsf{F}_{\mu\nu}^{ij}, \tag{39}$$

上式中, 利用单指标 A^i 和 F^i 表征对角元素, 双指标 A^{ij} 和 F^{ij} 表征非对角元素, 所以对于双指标 A^{ij} 和 F^{ij} 自动隐含 $i\neq j$, 或者 $\mathsf{A}^{ii}=0$ 和 $\mathsf{F}^{ii}=0$.

为了描述具体颜色夸克的输运过程, 对于维格纳函数直接利用色空间的矩阵分量. 在零阶近似 (20) 式和 (21) 式下, 维格纳函数的分量形式为

$$\frac{\mathscr{J}_{n,ij}^{(0)}}{p_n} = f_{ij}^{(0)}\delta(p^2), \tag{40}$$

$$\bar{\mathscr{J}}_{ij}^{(0)\mu} = \bar{p}^\mu f_{ij}^{(0)}\delta(p^2). \tag{41}$$

零阶手征动理学方程 (22) 的分量形式为:

$$0 = p^\mu\partial_\mu f_{ij}^{(0)}\delta(p^2) - \frac{\mathrm{i}g}{\hbar}p^\mu\left[\sum_m A_\mu^m h_m + \sum_{m,n} A_\mu^{mn} e_{mn}, f^{(0)}\right]_{ij}\delta(p^2) + \frac{g}{2}p^\mu\partial_p^\nu\left\{\sum_m F_{\mu\nu}^m h_m + \sum_{m,n} F_{\mu\nu}^{mn} e_{mn}, f^{(0)}\right\}_{ij}\delta(p^2), \tag{42}$$

利用A^i和F^i的定义, 上面动理学方程可以表示成

$$0=p^\mu\partial_\mu f_{ij}^{(0)}\delta(p^2)-\frac{\mathrm{i}g}{\hbar}p^\mu\left[\mathsf{A}_\mu^i f_{ij}^{(0)}-\mathsf{A}_\mu^j f_{ij}^{(0)}+\sum_k\left(\mathsf{A}_\mu^{ik}f_{kj}^{(0)}-\mathsf{A}_\mu^{kj}f_{ik}^{(0)}\right)\right]\delta(p^2)$$
$$+\frac{g}{2}p^\mu\partial_p^\nu\left[\mathsf{F}_{\mu\nu}^i f_{ij}^{(0)}+\mathsf{F}_{\mu\nu}^j f_{ij}^{(0)}+\sum_k\left(\mathsf{F}_{\mu\nu}^{ik}f_{kj}^{(0)}+\mathsf{F}_{\mu\nu}^{kj}f_{ik}^{(0)}\right)\right]\delta(p^2). \tag{43}$$

现在把分布函数$f_{ij}^{(0)}$也分解为对角部分和非对角部分:

$$\mathsf{f}_i^{(0)}\equiv f_{ij}^{(0)},\quad i=j;\qquad \mathsf{f}_{ij}^{(0)}\equiv f_{ij}^{(0)},\quad i\neq j, \tag{44}$$

这样就可以把维格纳函数和动理学方程的对角部分和非对角部分分别表示出来.

对于对角部分$i=j$的情形下:

$$\mathscr{J}_{n,ii}^{(0)}=p_n\mathsf{f}_i^{(0)}\delta(p^2), \tag{45}$$

$$\bar{\mathscr{J}}_{ii}^{(0)\mu}=\bar{p}^\mu\ \mathsf{f}_i^{(0)}\delta(p^2). \tag{46}$$

对角分布函数$\mathsf{f}_i^{(0)}$满足的动理学方程为

$$0=p^\mu\partial_\mu\mathsf{f}_i^{(0)}\delta(p^2)+gp^\mu\mathsf{F}_{\mu\nu}^i\partial_p^\nu\mathsf{f}_i^{(0)}\delta(p^2)-\frac{\mathrm{i}g}{\hbar}p^\mu\sum_k\left(\mathsf{A}_\mu^{ik}\mathsf{f}_{ki}^{(0)}-\mathsf{A}_\mu^{ki}\mathsf{f}_{ik}^{(0)}\right)\delta(p^2)+\frac{g}{2}p^\mu\partial_p^\nu\sum_k\left(\mathsf{F}_{\mu\nu}^{ik}\mathsf{f}_{ki}^{(0)}+\mathsf{F}_{\mu\nu}^{ki}\mathsf{f}_{ik}^{(0)}\right)\delta(p^2). \tag{47}$$

对于非对角部分$i\neq j$ 情形下:

$$\mathscr{J}_{n,ij}^{(0)}=p_n\mathsf{f}_{ij}^{(0)}\delta(p^2), \tag{48}$$

$$\bar{\mathscr{J}}_{ij}^{(0)\mu}=\bar{p}^\mu\ \mathsf{f}_{ij}^{(0)}\delta(p^2). \tag{49}$$

非对角分布函数$\mathsf{f}_{ij}^{(0)}$满足的动理学方程为

$$0=p^\mu\partial_\mu\mathsf{f}_{ij}^{(0)}\delta(p^2)-\frac{\mathrm{i}g}{\hbar}p^\mu\left[\mathsf{A}_\mu^i-\mathsf{A}_\mu^j\right]\mathsf{f}_{ij}^{(0)}\delta(p^2)+\frac{g}{2}p^\mu\left[\mathsf{F}_{\mu\nu}^i+\mathsf{F}_{\mu\nu}^j\right]\partial_p^\nu\mathsf{f}_{ij}^{(0)}\delta(p^2)$$
$$-\frac{\mathrm{i}g}{\hbar}p^\mu\left[\mathsf{A}_\mu^{ij}\left(\mathsf{f}_j^{(0)}-\mathsf{f}_i^{(0)}\right)+\sum_k\left(\mathsf{A}_\mu^{ik}\mathsf{f}_{kj}^{(0)}-\mathsf{A}_\mu^{kj}\mathsf{f}_{ik}^{(0)}\right)\right]\delta(p^2)$$
$$+\frac{g}{2}p^\mu\partial_p^\nu\left[\mathsf{F}_{\mu\nu}^{ij}\left(\mathsf{f}_j^{(0)}+\mathsf{f}_i^{(0)}\right)+\sum_k\left(\mathsf{F}_{\mu\nu}^{ik}\mathsf{f}_{kj}^{(0)}+\mathsf{F}_{\mu\nu}^{kj}\mathsf{f}_{ik}^{(0)}\right)\right]\delta(p^2). \tag{50}$$

以上是零阶分布函数和动理学方程在嘉当韦尔基下的表示形式, 我们发现当规范势或规范场强存在非对角分量时, 某种颜色夸克的分布函数$\mathsf{f}_i^{(0)}$的演化肯定是和非对角元素$\mathsf{f}_{ij}^{(0)}$耦合在一起的, 如果规范势或规范场强只存在对角元素, 某种颜色的分布函数与非对角元素解耦, 这种情形下, 对角元素$\mathsf{f}_i^{(0)}$的动理学方程退化为阿贝尔场情形下的形式.

现在继续处理一阶情形下的结果. 对于一阶的分布函数 (23) 式和 (24) 式, 色空间的分量形式为:

$$\mathscr{J}_{n,ij}^{(1)}=p_nf_{ij}^{(1)}\delta(p^2)-\frac{s}{2}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}p_\mu\left\{\frac{g}{2}F_{\alpha\beta},f^{(0)}\right\}_{ij}\delta'(p^2)+p_n\left\{\Pi_\mu^{(1)},p^\mu f^{(0)}\right\}_{ij}\delta'(p^2)$$
$$=p_nf_{ij}^{(1)}\delta(p^2)-\frac{sg}{4}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}p_\mu\left(\mathsf{F}_{\alpha\beta}^if_{ij}^{(0)}+\mathsf{F}_{\alpha\beta}^jf_{ij}^{(0)}+\sum_k\mathsf{F}_{\alpha\beta}^{ik}f_{kj}^{(0)}+\sum_k\mathsf{F}_{\alpha\beta}^{kj}f_{ik}^{(0)}\right)\delta'(p^2)$$
$$+\frac{\mathrm{i}g}{4}p_np^\mu\partial_p^\nu\left(\mathsf{F}_{\mu\nu}^if_{ij}^{(0)}-\mathsf{F}_{\mu\nu}^jf_{ij}^{(0)}+\sum_k\mathsf{F}_{\mu\nu}^{ik}f_{kj}^{(0)}-\sum_k\mathsf{F}_{\mu\nu}^{kj}f_{ik}^{(0)}\right)\delta'(p^2), \tag{51}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathscr{J}}_{ij}^{(1)\mu} &= \bar{p}^{\mu}\frac{\mathscr{J}_{n,ij}^{(1)}}{p_n} - \frac{s}{2p_n}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}\left[G_{\alpha}^{(0)},\bar{p}_{\beta}\frac{\mathscr{J}_{n}^{(0)}}{p_n}\right]_{ij} + \frac{1}{2p_n}\left(\left\{\bar{\Pi}^{(1)\mu},p_n\frac{\mathscr{J}_{n}^{(0)}}{p_n}\right\}_{ij} - \left\{\Pi_{n}^{(1)},\bar{p}^{\mu}\frac{\mathscr{J}_{n}^{(0)}}{p_n}\right\}_{ij}\right) \\
&= \bar{p}^{\mu}\frac{\mathscr{J}_{n,ij}^{(1)}}{p_n} - \frac{s}{2p_n}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}\bar{p}_{\beta}\partial_{\alpha}\left(\frac{\mathscr{J}_{n,ij}^{(0)}}{p_n}\right) + \frac{\mathrm{i}sg}{2p_n\hbar}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}\bar{p}_{\beta}\left(\mathsf{A}_{\alpha}^{i}\frac{\mathscr{J}_{n,ij}^{(0)}}{p_n} + \sum_{k}\mathsf{A}_{\alpha}^{ik}\frac{\mathscr{J}_{n,kj}^{(0)}}{p_n} - \mathsf{A}_{\alpha}^{j}\frac{\mathscr{J}_{n,ij}^{(0)}}{p_n} - \sum_{k}\mathsf{A}_{\alpha}^{kj}\frac{\mathscr{J}_{n,ik}^{(0)}}{p_n}\right) \\
&\quad - \frac{sg}{4p_n}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}\partial_{p}^{\lambda}\left[\bar{p}_{\beta}\left(\mathsf{F}_{\alpha\lambda}^{i}\frac{\mathscr{J}_{n,ij}^{(0)}}{p_n} + \sum_{k}\mathsf{F}_{\alpha\lambda}^{ik}\frac{\mathscr{J}_{n,kj}^{(0)}}{p_n} + \mathsf{F}_{\alpha\lambda}^{j}\frac{\mathscr{J}_{n,ij}^{(0)}}{p_n} + \sum_{k}\mathsf{F}_{\alpha\lambda}^{kj}\frac{\mathscr{J}_{n,ik}^{(0)}}{p_n}\right)\right] \\
&\quad + \frac{\mathrm{i}g}{8p_n}\partial_{\nu}^{p}\left[p_n\left(\mathsf{F}_{i}^{\bar{\mu}\nu}\frac{\mathscr{J}_{n,ij}^{(0)}}{p_n} + \sum_{k}\mathsf{F}_{ik}^{\bar{\mu}\nu}\frac{\mathscr{J}_{n,kj}^{(0)}}{p_n} - \mathsf{F}_{j}^{\bar{\mu}\nu}\frac{\mathscr{J}_{n,ij}^{(0)}}{p_n} - \sum_{k}\mathsf{F}_{kj}^{\bar{\mu}\nu}\frac{\mathscr{J}_{n,ik}^{(0)}}{p_n}\right)\right] \\
&\quad - \frac{ig}{8p_n}\partial_{\nu}^{p}\left[\bar{p}^{\mu}\left(\mathsf{F}_{i}^{n\nu}\frac{\mathscr{J}_{n,ij}^{(0)}}{p_n} + \sum_{k}\mathsf{F}_{ik}^{n\nu}\frac{\mathscr{J}_{n,kj}^{(0)}}{p_n} - \mathsf{F}_{j}^{n\nu}\frac{\mathscr{J}_{n,ij}^{(0)}}{p_n} - \sum_{k}\mathsf{F}_{kj}^{n\nu}\frac{\mathscr{J}_{n,ik}^{(0)}}{p_n}\right)\right].
\end{aligned} \tag{52}
$$

与零阶的约定一样, 重复指标 i 或 j 并不表示求和. 为了写出一阶动理学方程的分量形式, 需要先得到算符 $G_{\mu}^{(1)}$ 的分量形式:

$$
\begin{aligned}
G_{\mu,ij}^{(1)} &= -\frac{\mathrm{i}g}{8}\left[\left(\partial_p\cdot\mathscr{D}\right)F_{\mu\nu}\right]_{ij}\partial_p^{\nu} = -\frac{\mathrm{i}g}{8}\left(\partial_{\lambda}^{x}F_{\mu\nu} - \frac{\mathrm{i}g}{\hbar}\left[A_{\lambda},F_{\mu\nu}\right]\right)_{ij}\partial_p^{\nu}\partial_p^{\lambda} \\
&= -\frac{\mathrm{i}g}{8}\left\{\partial_{\lambda}^{x}\left(\mathsf{F}_{\mu\nu}^{i}\delta^{ij} + \mathsf{F}_{\mu\nu}^{ij}\right) - \frac{\mathrm{i}g}{\hbar}\left[\left(\mathsf{A}_{\lambda}^{i} - \mathsf{A}_{\lambda}^{j}\right)F_{\mu\nu}^{ij} + A_{\lambda}^{ij}\left(\mathsf{F}_{\mu\nu}^{j} - \mathsf{F}_{\mu\nu}^{i}\right) + \sum_{k}\left(A_{\lambda}^{ik}F_{\mu\nu}^{kj} - A_{\lambda}^{kj}F_{\mu\nu}^{ik}\right)\right]\right\}\partial_p^{\nu}\partial_p^{\lambda} \\
&= \mathsf{G}_{\mu\nu\lambda,i}^{(1)}\delta_{ij}\partial_p^{\nu}\partial_p^{\lambda} + \mathsf{G}_{\mu\nu\lambda,ij}^{(1)}\partial_p^{\nu}\partial_p^{\lambda},
\end{aligned} \tag{53}
$$

其中定义了单色指标对角元素因子 $(i=j)$:

$$
\mathsf{G}_{\mu\nu\lambda,i}^{(1)} = -\frac{\mathrm{i}g}{8}\left[\partial_{\lambda}^{x}\mathsf{F}_{\mu\nu}^{i} - \frac{\mathrm{i}g}{\hbar}\sum_{k}\left(A_{\lambda}^{ik}F_{\mu\nu}^{ki} - A_{\lambda}^{ki}F_{\mu\nu}^{ik}\right)\right], \tag{54}
$$

和双色指标非对角元素因子 $(i\neq j)$:

$$
\mathsf{G}_{\mu\nu\lambda,ij}^{(1)} = -\frac{\mathrm{i}g}{8}\left\{\partial_{\lambda}^{x}\mathsf{F}_{\mu\nu}^{ij} - \frac{\mathrm{i}g}{\hbar}\left[\left(\mathsf{A}_{\lambda}^{i} - \mathsf{A}_{\lambda}^{j}\right)F_{\mu\nu}^{ij} + A_{\lambda}^{ij}\left(\mathsf{F}_{\mu\nu}^{j} - \mathsf{F}_{\mu\nu}^{i}\right) + \sum_{k}\left(A_{\lambda}^{ik}F_{\mu\nu}^{kj} - A_{\lambda}^{kj}F_{\mu\nu}^{ik}\right)\right]\right\}. \tag{55}
$$

利用这些定义, 一阶手征动理学方程的分量形式可以表示为

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_{\mu}\mathscr{J}_{ij}^{(1)\mu} - \frac{\mathrm{i}g}{\hbar}\left[\left(\mathsf{A}_{\mu}^{i} - \mathsf{A}_{\mu}^{j}\right)\mathscr{J}_{ij}^{(1)\mu} + \sum_{k}\left(\mathsf{A}_{\mu}^{ik}\mathscr{J}_{kj}^{(1)\mu} - \mathsf{A}_{\mu}^{kj}\mathscr{J}_{ik}^{(1)\mu}\right)\right] \\
&\quad + \frac{g}{2}\partial_p^{\nu}\left[\left(\mathsf{F}_{\mu\nu}^{i} + \mathsf{F}_{\mu\nu}^{j}\right)\mathscr{J}_{ij}^{(1)\mu} + \sum_{k}\left(\mathsf{F}_{\mu\nu}^{ik}\mathscr{J}_{kj}^{(1)\mu} + \mathsf{F}_{\mu\nu}^{kj}\mathscr{J}_{ik}^{(1)\mu}\right)\right] \\
&\quad + \left(\mathsf{G}_{\mu\nu\lambda,i}^{(1)} - \mathsf{G}_{\mu\nu\lambda,j}^{(1)}\right)\partial_p^{\nu}\partial_p^{\lambda}\mathscr{J}_{ij}^{(0)\mu} + \sum_{k}\left(\mathsf{G}_{\mu\nu\lambda,ik}^{(1)}\partial_p^{\nu}\partial_p^{\lambda}\mathscr{J}_{kj}^{(0)\mu} - \mathsf{G}_{\mu\nu\lambda,kj}^{(1)}\partial_p^{\nu}\partial_p^{\lambda}\mathscr{J}_{ik}^{(0)\mu}\right).
\end{aligned} \tag{56}
$$

下面将从以上这些一阶结果里面分别提取出对角元素和非对角元素. 对于对角元素 $(i=j)$:

$$
\mathscr{J}_{n,ii}^{(1)} = p_n\,\mathsf{f}_{i}^{(1)}\delta(p^2) + p_n\Delta\mathsf{f}_{i}^{(1)}\delta'(p^2), \tag{57}
$$

$$
\bar{\mathscr{J}}_{ii}^{(1)\mu} = \bar{p}^{\mu}\left[\mathsf{f}_{i}^{(1)}\delta(p^2) + \Delta\mathsf{f}_{i}^{(1)}\delta'(p^2)\right] + \Delta J_{i}^{(1)\mu}. \tag{58}
$$

这里除了定义了一阶的分布函数 $\mathsf{f}_{i}^{(1)}$, 还定义了

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathsf{f}_i^{(1)} =& -\frac{sg}{2p_n}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}p_\mu \mathsf{F}^i_{\alpha\beta}\mathsf{f}_i^{(0)} - \frac{sg}{4p_n}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}p_\mu \sum_k \left(\mathsf{F}^{ik}_{\alpha\beta}\mathsf{f}^{(0)}_{ki} + \mathsf{F}^{ki}_{\alpha\beta}\mathsf{f}^{(0)}_{ik}\right) + \frac{\mathrm{i}g}{4}p^\mu\partial_p^\nu \sum_k \left(\mathsf{F}^{ik}_{\mu\nu}\mathsf{f}^{(0)}_{ki} - \mathsf{F}^{ki}_{\mu\nu}\mathsf{f}^{(0)}_{ik}\right), \\
\Delta J_i^{(1)\mu} =& -\frac{s}{2p_n}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}\bar{p}_\beta\partial_\alpha \mathsf{f}_i^{(0)}\delta(p^2) - \frac{sg}{2p_n}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}\partial_p^\lambda\left(\bar{p}_\beta\ \mathsf{F}^i_{\alpha\lambda}\mathsf{f}_i^{(0)}\right) \\
&+ \frac{\mathrm{i}sg}{2p_n\hbar}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}\bar{p}_\beta \sum_k \left(\mathsf{A}^{ik}_\alpha \mathsf{f}^{(0)}_{ki} - \mathsf{A}^{ki}_\alpha \mathsf{f}^{(0)}_{ik}\right)\delta(p^2) - \frac{sg}{4p_n}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}\partial_p^\lambda\left[\bar{p}_\beta \sum_k \left(\mathsf{F}^{ik}_{\alpha\lambda}\mathsf{f}^{(0)}_{ki} + \mathsf{F}^{ki}_{\alpha\lambda}\mathsf{f}^{(0)}_{ik}\right)\delta(p^2)\right] \\
&+ \frac{\mathrm{i}g}{8p_n}\partial_\nu^p\left[p_n \sum_k \left(\mathsf{F}^{\bar{\mu}\nu}_{ik}\mathsf{f}^{(0)}_{ki} - \mathsf{F}^{\bar{\mu}\nu}_{ki}\mathsf{f}^{(0)}_{ik}\right)\delta(p^2)\right] - \frac{\mathrm{i}g}{8p_n}\partial_\nu^p\left[\bar{p}^\mu \sum_k \left(\mathsf{F}^{n\nu}_{ik}\mathsf{f}^{(0)}_{ki} - \mathsf{F}^{n\nu}_{kj}\mathsf{f}^{(0)}_{ik}\right)\delta(p^2)\right].
\end{aligned} \tag{59}
$$

显而易见, 如果规范场的非对角元素 A^{ij}_α 和 $\mathsf{F}^{ij}_{\alpha\beta}$ 都是零, 上面的结果就回到阿贝尔情形的结果, 当这些非对角元素不为零, 零阶的非对角分布函数会诱导出一阶的对角维格纳函数的贡献, 这是非阿贝尔情形区别于阿贝尔情形的特别之处. 一阶动理学方程的对角元素为

$$
\begin{aligned}
0 =& \partial_\mu \mathscr{J}^{(1)\mu}_{ii} - \frac{\mathrm{i}g}{\hbar}\sum_k \left(\mathsf{A}^{ik}_\mu \mathscr{J}^{(1)\mu}_{ki} - \mathsf{A}^{ki}_\mu \mathscr{J}^{(1)\mu}_{ik}\right) + \frac{g}{2}\partial_p^\nu\left[2\mathsf{F}^i_{\mu\nu}\mathscr{J}^{(1)\mu}_{ii} + \sum_k \left(\mathsf{F}^{ik}_{\mu\nu}\mathscr{J}^{(1)\mu}_{ki} + \mathsf{F}^{ki}_{\mu\nu}\mathscr{J}^{(1)\mu}_{ik}\right)\right] \\
&+ \sum_k \left(\mathsf{G}^{(1)}_{\mu\nu\lambda,ik}\partial_p^\nu\partial_p^\lambda \mathscr{J}^{(0)\mu}_{ki} - \mathsf{G}^{(1)}_{\mu\nu\lambda,ki}\partial_p^\nu\partial_p^\lambda \mathscr{J}^{(0)\mu}_{ik}\right).
\end{aligned} \tag{60}
$$

为了让表达式看起来简洁, 这里没有把 (54) 式, (55) 式, (57) 式以及 (58) 式的结果直接代入 (60) 式. 展开后的这一方程比零阶的动理学方程 (47) 要复杂得多, 对角元素和非对角元素以更加复杂的形式耦合在一起. 但是与零阶动理学方程相似之处是: 当规范场只存在对角元素时, 某种颜色的分布函数与非对角元素解耦, 这种情形下, 对角元素 $\mathsf{f}_i^{(1)}$ 的动理学方程仍旧退化为阿贝尔场情形下的形式.

对于非对角元素 $(i \neq j)$, 有

$$
\mathscr{J}^{(1)}_{n,ij} = p_n \mathsf{f}^{(1)}_{ij}\delta(p^2) + p_n \Delta \mathsf{f}^{(1)}_{ij}\delta'(p^2), \tag{61}
$$

$$
\bar{\mathscr{J}}^{(1)\mu}_{ij} = \bar{p}^\mu\left[\mathsf{f}^{(1)}_{ij}\delta(p^2) + \Delta \mathsf{f}^{(1)}_{ij}\delta'(p^2)\right] + \Delta J^{(1)\mu}_{ij}, \tag{62}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathsf{f}^{(1)}_{ij} =& -\frac{sg}{4p_n}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}p_\mu\left(\mathsf{F}^i_{\alpha\beta} + \mathsf{F}^j_{\alpha\beta}\right)\mathsf{f}^{(0)}_{ij} + \frac{\mathrm{i}g}{4}p^\mu\partial_p^\nu\left(\mathsf{F}^i_{\alpha\beta} - \mathsf{F}^j_{\alpha\beta}\right)\mathsf{f}^{(0)}_{ij} \\
&- \frac{sg}{4p_n}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}p_\mu\left[\mathsf{F}^{ij}_{\alpha\beta}\left(\mathsf{f}^{(0)}_j + \mathsf{f}^{(0)}_i\right) + \sum_k \left(\mathsf{F}^{ik}_{\alpha\beta}\mathsf{f}^{(0)}_{kj} + \mathsf{F}^{kj}_{\alpha\beta}\mathsf{f}^{(0)}_{ik}\right)\right] \\
&+ \frac{\mathrm{i}g}{4}p^\mu\partial_p^\nu\left[\mathsf{F}^{ij}_{\mu\nu}\left(\mathsf{f}^{(0)}_j - \mathsf{f}^{(0)}_i\right) + \sum_k \left(\mathsf{F}^{ik}_{\mu\nu}\mathsf{f}^{(0)}_{kj} - \mathsf{F}^{kj}_{\mu\nu}\mathsf{f}^{(0)}_{ik}\right)\right],
\end{aligned} \tag{63}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta J^{(1)\mu}_{ij} =& -\frac{s}{2p_n}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}\bar{p}_\beta\partial_\alpha \mathsf{f}^{(0)}_{ij}\delta(p^2) + \frac{\mathrm{i}sg}{2p_n\hbar}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}\bar{p}_\beta\left[\left(\mathsf{A}^i_\alpha - \mathsf{A}^j_\alpha\right)\mathsf{f}^{(0)}_{ij} + \mathsf{A}^{ij}_\alpha\left(\mathsf{f}^{(0)}_j - \mathsf{f}^{(0)}_i\right) + \sum_k \left(\mathsf{A}^{ik}_\alpha\mathsf{f}^{(0)}_{kj} - \mathsf{A}^{kj}_\alpha\mathsf{f}^{(0)}_{ik}\right)\right]\delta(p^2) \\
&- \frac{sg}{4p_n}\bar{\varepsilon}^{\mu\alpha\beta}\partial_p^\lambda\left\{\bar{p}_\beta\left[\left(\mathsf{F}^i_{\alpha\lambda} + \mathsf{F}^j_{\alpha\lambda}\right)\mathsf{f}^{(0)}_{ij} + \mathsf{F}^{ij}_{\alpha\lambda}\left(\mathsf{f}^{(0)}_j + \mathsf{f}^{(0)}_i\right) + \sum_k \left(\mathsf{F}^{ik}_{\alpha\lambda}\mathsf{f}^{(0)}_{kj} + \mathsf{F}^{kj}_{\alpha\lambda}\mathsf{f}^{(0)}_{ik}\right)\right]\delta(p^2)\right\} \\
&+ \frac{\mathrm{i}g}{8p_n}\partial_\nu^p\left\{p_n\left[\left(\mathsf{F}^{\bar{\mu}\nu}_i - \mathsf{F}^{\bar{\mu}\nu}_j\right)\mathsf{f}^{(0)}_{ij} + \mathsf{F}^{\bar{\mu}\nu}_{ij}\left(\mathsf{f}^{(0)}_j - \mathsf{f}^{(0)}_i\right) + \sum_k \left(\mathsf{F}^{\bar{\mu}\nu}_{ik}\mathsf{f}^{(0)}_{kj} - \mathsf{F}^{\bar{\mu}\nu}_{kj}\mathsf{f}^{(0)}_{ik}\right)\right]\delta(p^2)\right\} \\
&- \frac{\mathrm{i}g}{8p_n}\partial_\nu^p\left\{\bar{p}^\mu\left[\left(\mathsf{F}^{n\nu}_i - \mathsf{F}^{n\nu}_j\right)\mathsf{f}^{(0)}_{ij} + \mathsf{F}^{n\nu}_{ij}\left(\mathsf{f}^{(0)}_j - \mathsf{f}^{(0)}_i\right) + \sum_k \left(\mathsf{F}^{n\nu}_{ik}\mathsf{f}^{(0)}_{kj} - \mathsf{F}^{n\nu}_{kj}\mathsf{f}^{(0)}_{ik}\right)\right]\delta(p^2)\right\}.
\end{aligned} \tag{64}
$$

一阶动理学方程的非对角元素 ($i \neq j$) 为

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \partial_\mu \mathscr{J}_{ij}^{(1)\mu} - \frac{\mathrm{i}g}{\hbar}\left[\left(\mathsf{A}_\mu^i - \mathsf{A}_\mu^j\right)\mathscr{J}_{ij}^{(1)\mu} + \mathsf{A}_\mu^{ij}\left(\mathscr{J}_{jj}^{(1)\mu} - \mathscr{J}_{ii}^{(1)\mu}\right) + \sum_k\left(\mathsf{A}_\mu^{ik}\mathscr{J}_{kj}^{(1)\mu} - \mathsf{A}_\mu^{kj}\mathscr{J}_{ik}^{(1)\mu}\right)\right] \\
& + \frac{g}{2}\partial_p^\nu\left[\left(\mathsf{F}_{\mu\nu}^i + \mathsf{F}_{\mu\nu}^j\right)\mathscr{J}_{ij}^{(1)\mu} + \mathsf{F}_{\mu\nu}^{ij}\left(\mathscr{J}_{jj}^{(1)\mu} + \mathscr{J}_{ii}^{(1)\mu}\right) + \sum_k\left(\mathsf{F}_{\mu\nu}^{ik}\mathscr{J}_{kj}^{(1)\mu} + \mathsf{F}_{\mu\nu}^{kj}\mathscr{J}_{ik}^{(1)\mu}\right)\right] \\
& + \left(\mathsf{G}_{\mu\nu\lambda,i}^{(1)} - \mathsf{G}_{\mu\nu\lambda,j}^{(1)}\right)\partial_p^\nu\partial_p^\lambda\mathscr{J}_{ij}^{(0)\mu} + \mathsf{G}_{\mu\nu\lambda,ij}^{(1)}\partial_p^\nu\partial_p^\lambda\left(\mathscr{J}_{jj}^{(0)\mu} - \mathscr{J}_{ii}^{(0)\mu}\right) \\
& + \sum_k\left(\mathsf{G}_{\mu\nu\lambda,ik}^{(1)}\partial_p^\nu\partial_p^\lambda\mathscr{J}_{kj}^{(0)\mu} - \mathsf{G}_{\mu\nu\lambda,kj}^{(1)}\partial_p^\nu\partial_p^\lambda\mathscr{J}_{ik}^{(0)\mu}\right).
\end{aligned}
\tag{65}
$$

这些表达式和方程具体给出了一阶非对角元素分布函数之间以及非对角元素与对角元素之间的依赖关系, 一般情形下都是耦合在一起的, 但是在规范场只存在对角元素时, 非对角元素与对角元素解耦.

5 总结与展望

本文首先回顾了维格纳函数的基本知识以及前期工作中非阿贝尔动理学方程的推导过程, 在此基础上, 非阿贝尔规范场下的手征动理学理论在嘉当韦尔基下被重新表述. 我们期望本工作能够在描述色自由度的动理学演化方面提供另一个直观形象的理论形式, 为讨论夸克在色相互作用下的非平衡输运问题提供帮助. 当然, 因为色禁闭的原因, 实验上很难甚至不可能去追踪某一个特定色自由度, 但是色的输运和转化可能影响强子化阶段的组合机制, 尤其在最近高能重离子碰撞领域刚刚兴起的对一些奇特强子态的研究, 不同的色链接可能导致不同的奇特强子态结构, 不同色结构的演化可能影响不同奇特强子态的产额. 在当前工作中, 只讨论了夸克的输运过程, 为了描述高能重离子碰撞中产生的夸克胶子等离子体的演化, 非阿贝尔场的胶子输运问题同样重要, 对于非阿贝尔规范场的输运, 可以推广文献 [47—49] 中处理阿贝尔规范场光子场的输运, 为了和夸克输运中嘉当韦尔基保持一致, 非规范场的维格纳函数也要在嘉当韦尔基下展开, 系统地考虑非阿贝尔规范场本身的输运问题是我们工作未来的重点之一.

参考文献

[1] Vilenkin A 1980 *Phys. Rev. D* **22** 3080
[2] Kharzeev D E, McLerran L D, Warringa H J 2008 *Nucl. Phys. A* **803** 227
[3] Fukushima K, Kharzeev D E, Warringa H J 2008 *Phys. Rev. D* **78** 074033
[4] Vilenkin A 1978 *Phys. Lett.* **80B** 150
[5] Kharzeev D, Zhitnitsky A 2007 *Nucl. Phys. A* **797** 67
[6] Erdmenger J, Haack M, Kaminski M, Yarom A 2009 *JHEP* **0901** 055
[7] Banerjee N, Bhattacharya J, Bhattacharyya S, Dutta S, Loganayagam R, Surowka P 2011 *JHEP* **1101** 094
[8] Son D T, Zhitnitsky A R 2004 *Phys. Rev. D* **70** 074018
[9] Metlitski M A, Zhitnitsky A R 2005 *Phys. Rev. D* **72** 045011
[10] Gao J H, Liang Z T, Pu S, Wang Q, Wang X N 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 232301
[11] Stephanov M A, Yin Y 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 162001
[12] Son D T, Yamamoto N 2013 *Phys. Rev. D* **87** 085016
[13] Chen J W, Pu S, Wang Q, Wang X N 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 262301
[14] Manuel C, Torres-Rincon J M 2014 *Phys. Rev. D* **89** 096002
[15] Manuel C, Torres-Rincon J M 2014 *Phys. Rev. D* **90** 076007
[16] Chen J Y, Son D T, Stephanov M A, Yee H U, Yin Y 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 182302
[17] Chen J Y, Son D T, Stephanov M A 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 021601
[18] Hidaka Y, Pu S, Yang D L 2017 *Phys. Rev. D* **95** 091901
[19] Mueller N, Venugopalan R 2018 *Phys. Rev. D* **97** 051901
[20] Huang A, Shi S, Jiang Y, Liao J, Zhuang P 2018 *Phys. Rev. D* **98** 036010
[21] Gao J H, Liang Z T, Wang Q, Wang X N 2018 *Phys. Rev. D* **98** 036019
[22] Liu Y C, Gao L L, Mameda K, Huang X G 2019 *Phys. Rev. D* **99** 085014
[23] Lin S, Shukla A 2019 *JHEP* **6** 060
[24] Gao L L, Huang X G 2022 *Chin. Phys. Lett.* **39** 021101
[25] Peng H H, Zhang J J, Sheng X L, Wang Q 2021 *Chin. Phys. Lett.* **38** 116701
[26] Sun Y, Ko C M, Li F 2016 *Phys. Rev. C* **94** 045204
[27] Sun Y, Ko C M 2017 *Phys. Rev. C* **95** 034909
[28] Sun Y, Ko C M 2017 *Phys. Rev. C* **96** 024906
[29] Sun Y, Ko C M 2018 *Phys. Rev. C* **98** 014911
[30] Sun Y, Ko C M 2019 *Phys. Rev. C* **99** 011903
[31] Zhou W H, Xu J 2018 *Phys. Rev. C* **98** 044904
[32] Zhou W H, Xu J 2019 *Phys. Lett. B* **798** 134932
[33] Liu S Y F, Sun Y, Ko C M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 062301
[34] Stone M, Dwivedi V 2013 *Phys. Rev. D* **88** 045012
[35] Akamatsu Y, Yamamoto N 2014 *Phys. Rev. D* **90** 125031
[36] Hayata T, Hidaka Y 2017 *PTEP* **2017** 073I01
[37] Mueller N, Venugopalan R 2019 *Phys. Rev. D* **99** 056003
[38] Luo X L, Gao J H 2021 *JHEP* **11** 115
[39] Yang D L 2022 *JHEP* **06** 140

[40] Heinz U W 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 351
[41] Elze H T, Gyulassy M, Vasak D 1986 *Phys. Lett. B* **177** 402
[42] Elze H T, Gyulassy M, Vasak D 1986 *Nucl. Phys. B* **276** 706
[43] Elze H T, Heinz U W 1989 *Phys. Rept.* **183** 81
[44] Ezawa Z F, Iwazaki A 1982 *Phys. Rev. D* **25** 2681
[45] Ezawa Z F, Iwazaki A 1982 *Phys. Rev. D* **26** 631
[46] Gyulassy M, Iwazaki A 1985 *Phys. Lett. B* **165** 157
[47] Huang X G, Mitkin P, Sadofyev A F, Speranza E 2020 *JHEP* **10** 117
[48] Hattori K, Hidaka Y, Yamamoto N, Yang D L 2021 *JHEP* **2** 1
[49] Lin S 2022 *Phys. Rev. D* **105** 076017

SPECIAL TOPIC—Spin and chiral effects in high energy heavy ion collisions

Non-Abelian chiral kinetic equations in the Cartan-Weyl basis*

Luo Xiao-Li Gao Jian-Hua †

(*Shandong Provincial Key Laboratory of Optical Astronomy and Solar-Terrestrial Environment*, *School of Space Science and Physics*, *Shandong University*, *Weihai* 264209, *China*)

(Received 31 December 2022; revised manuscript received 10 April 2023)

Abstract

Non-Abelian gauge field is the fundamental element of the standard model. Non-Abelian chiral kinetic theory can be used to describe how the chiral fermions in standard model transport in a non-equilibrium system.

In our previous work, we decomposed the non-Abelian chiral kinetic equations into color singlet and multiplet in the $SU(N)$ color space. In this formalism, the chiral kinetic equations preserve the gauge symmetry in a very apparent way. However, sometimes we need to describe the microscopic process of the specific color degree, e.g. the color connection in the hadronization stage. In order to describe such a process, it will be more convenient to decompose the non-Abelian chiral kinetic equations in the Cartan-Weyl basis.

In this work, we choose the matrix elements of the Wigner function in fundamental representation of color space as the direct variables and decompose the gauge field or strength tensor field in the Cartan-Weyl basis. By using the covariant gradient expansion, we decompose the non-Abelian chiral kinetic equations into the coupled kinetic equations for diagonal distribution function and non-diagonal distribution function up to the first order. When only diagonal elements exist in the gauge field with non-diagonal elements and diagonal elements decoupled, the non-Ableian chiral kinetic equation will be reduced to the form in the Abelian case. When the non-diagonal elements of the gauge field are present, the kinetic equations are totally tangled between diagonal distribution function and non-diagonal distribution function. Especially, the 0th-order non-diagonal distribution function could induce the 1st-order diagonal Wigner function, and the 0th-order diagonal distribution function could also induce the 1st-order non-diagonal Wigner function.

Keywords: non-Abelian field, Wigner function, chiral kinetic equation

PACS: 25.75.Nq, 12.38.Mh **DOI:** 10.7498/aps.72.20222471

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11890710, 11890713, 12175123).

† Corresponding author. E-mail: gaojh@sdu.edu.cn

物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

嘉当韦尔基下的非阿贝尔手征动理学方程

罗晓丽　高建华

Non-Abelian chiral kinetic equations in the Cartan-Weyl basis

Luo Xiao-Li　Gao Jian-Hua

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 72, 112503 (2023)　DOI: 10.7498/aps.72.20222471

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.72.20222471

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn
