

## 专题: 高能重离子碰撞过程的自旋与手征效应

## 引力形状因子的介质修正\*

林树† 田家源

(中山大学物理与天文学院, 珠海 519082)

(2022 年 12 月 31 日收到; 2023 年 2 月 21 日收到修改稿)

将引力形状因子推广到了手征费米子的情形, 并由此给出了熟知的自旋-涡旋耦合. 计算了量子电动力学等离子体中引力形状因子的辐射修正. 发现形状因子中存在两个结构对费米子在涡旋场中的散射振幅有贡献, 其中之一来自于费米子的自能修正, 指向介质中自旋-涡旋耦合的压低; 另一结构来自于对引力子-费米子顶点的修正, 这一修正不能解释为势能, 而是对应初末态的跃迁矩阵元. 两个结构均对手征涡旋效应产生贡献. 辐射修正总的效果是对手征涡旋效应的增强. 本文的结果从形状因子的角度澄清了自旋-涡旋耦合以及手征涡旋效应的联系和区别. 另外, 讨论了上述结果在量子色动力学等离子体中的应用, 结果暗示辐射修正可能对重离子碰撞的自旋极化现象有一定效应.

**关键词:** 引力形状因子, 自旋-涡旋耦合, 辐射修正, 重离子碰撞**PACS:** 12.38.Mh, 11.10.Wx**DOI:** 10.7498/aps.72.20222473

## 1 引言

最近十几年的重离子碰撞实验发现末态粒子存在自旋极化现象<sup>[1]</sup>, 确认了非对心重离子碰撞的轨道角动量可以转化成末态粒子的自旋角动量的理论预言<sup>[2,3]</sup>. 特别地,  $\Lambda$  超子的自旋整体极化被基于自旋-涡旋耦合的热模型很好地描述<sup>[4-6]</sup>, 被认为是夸克胶子等离子体存在高速转动的证据, 参见综述文章<sup>[7-11]</sup>. 然而基于同样的图像对  $\Lambda$  超子局域极化的预言<sup>[12-14]</sup> 与实验结果几乎相差了一个符号<sup>[15]</sup>. 这使得人们开始考虑涡旋以外的贡献. 最近的研究表明, 粒子自旋和所有的流体梯度都存在耦合, 并在不同的理论框架中得到确认<sup>[16-18]</sup>, 为解决这一疑难提供了新的思路. 不同研究组的唯象研究均指向了与实验结果一致的趋势, 然而定量上的符合尚没有定论<sup>[19-23]</sup>. 最新的研究也表明, 除涡旋以外的流体梯度会导致粒子在动量空间分布的改变, 进而会在同一阶上给出对自旋极化的额外贡献<sup>[24]</sup>. 而

文献<sup>[25]</sup>也指出, 不同能动张量的选择可能导致对自旋极化的贡献不同.

本文将讨论对自旋极化的另一可能修正. 一般认为自旋-涡旋存在固定的形式:  $\Delta H = -\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}$ , 其中  $\mathbf{S}$  和  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$  分别表示自旋和涡旋. 这里的系数不因为相互作用而改变, 即不存在引力反常磁矩, 是爱因斯坦等效原理的一个具体体现<sup>[26,27]</sup>. 但在介质中, 洛伦兹协变性被破坏, 等效原理不再成立. 早期的研究表明, 引力质量与惯性质量不再相等<sup>[28,29]</sup>, 并且反常引力磁矩也是被允许的, 即自旋-涡旋作用中的系数不再被保护. 文献<sup>[30]</sup>的计算表明, 对于有质量的费米子, 反常引力磁矩为负, 即介质修正会压低自旋-涡旋的耦合. 有趣的是, 由于手征流来自于自旋极化的动量积分, 自旋-涡旋耦合与手征涡旋效应密切相关, 对于零质量的费米子, 文献<sup>[31]</sup>的结果指向介质修正对手征涡旋效应的增强. 本文将计算费米子质量为零的极限下介质对自旋-涡旋的修正效应. 一方面, 这将帮助理解自旋-涡旋耦合和手征涡旋效应的内在联系; 另一方

\* 国家自然科学基金 (批准号: 2075328, 1735007) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [linshu8@mail.sysu.edu.cn](mailto:linshu8@mail.sysu.edu.cn)

面,也将为自旋极化的唯象研究提供新的思路.

本文分为以下几部分:第2节将研究费米子在扰动度规场中的散射问题,并以此建立起引力形状因子和自旋-涡旋耦合的联系;第3节将计算引力形状因子的一圈辐射修正,特别地,在硬热圈近似下保留依赖于介质部分的修正.可以发现介质对散射振幅的修正来自于两个结构:其中一个费米子的自能修正,指向介质对自旋-涡旋耦合的压低效应;另一个是对引力子-费米子的顶点修正.这一修正不能解释为势能,而是对应初末态的跃迁矩阵元.两个结构都对手征涡旋效应有贡献.这从形状因子的角度澄清了自旋-涡旋耦合和手征涡旋效应的联系与区别.本文的结果在引力子动量趋于零时存在红外发散.在考虑介质的屏蔽效应后得到了红外安全的结果,发现辐射修正指向对手征流的增强效应;第4节是本文的总结和展望.

## 2 引力形状因子和自旋-涡旋耦合

考虑费米子在背景度规场中的散射.费米子与背景度规场的相互作用顶点可由引力形状因子描述.对于有质量的费米子,引力形状因子可定义为<sup>[32]</sup>

$$\begin{aligned} \langle P_2 | T^{\mu\nu}(Q) | P_1 \rangle \\ = \bar{u}(P_2) \left[ A(Q^2) \frac{P^\mu P^\nu}{m} + B(Q^2) \frac{iP^{\{\mu} \sigma^{\nu\} \rho} Q_\rho}{m} \right. \\ \left. + D(Q^2) \frac{Q^\mu Q^\nu - g^{\mu\nu} Q^2}{4m} \right] u(P_1), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $P_1$ 和 $P_2$ 分别为粒子入射和出射的动量(不失一般性,本文只讨论正粒子). $u(P_1)$ 和 $\bar{u}(P_2)$ 分别为入射和出射粒子对应的波函数.动量 $P$ 和 $Q$ 定义为 $P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$ ,  $Q = P_2 - P_1$ .指标对称化运算 $\{\}$ 定义为 $a^{\{\mu} b^{\nu\}} = \frac{1}{2}(a^\mu b^\nu + a^\nu b^\mu)$ . $A$ ,  $B$ ,  $D$ 为三个形状因子,其中 $A$ 和 $B$ 描述了粒子的质量和自旋与度规的耦合, $D$ 只存在于有内部结构的粒子.后面只讨论基本粒子,故可不考虑 $D$ 项.由于零质量费米子缺少了质量标度,上述形状因子的定义不再适用,需要引入新的定义:

$$\begin{aligned} \langle P_2 | T^{\mu\nu}(Q) | P_1 \rangle = \bar{u}(P_2) \left[ A(Q^2) \frac{P^\mu P^\nu}{P \cdot n} \right. \\ \left. \pm B(Q^2) \frac{-iP^{\{\mu} \epsilon^{\nu\} \lambda \sigma \rho} \gamma_\lambda n_\sigma Q_\rho}{P \cdot n} \right] u(P_1). \end{aligned} \quad (2)$$

在这个定义中, $\pm$ 分别对应右旋和左旋的费米子. $A$ 和 $B$ 是形状因子,分别描述质量和自旋与度规

的耦合.引入一个类时的参考系矢量 $n$ ,类似于手征动理论中的参考系矢量<sup>[33,34]</sup>.虽然两部分形状因子分别依赖于 $n$ ,但求和以后对应的能-动张量不依赖于 $n$ .在树图层次上, $T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \bar{\psi} (\gamma^{\{\mu} \partial^{\nu\}} - \gamma^{\{\mu} \overleftarrow{\partial}^{\nu\}}) \psi$ . $A$ 和 $B$ 可通过匹配(2)式两边确定.为明确起见,下面的讨论取右旋费米子.我们感兴趣的是 $Q \rightarrow 0$ 的极限,即度规场在时空中是缓变的.可以通过对 $Q$ 的展开容易地定出形状因子.利用 $i\partial^\mu \rightarrow P_1^\mu$ ,  $-i\overleftarrow{\partial}^\mu \rightarrow P_2^\mu$ ,可以得到在 $O(q^0)$

$$\bar{u}(P) \gamma^{\{\mu} P^{\nu\}} u(P) = \bar{u}(P) A \frac{P^\mu P^\nu}{P \cdot n} u(P). \quad (3)$$

取伽马矩阵的外尔表示,对于右旋费米子可做替换 $\gamma^\mu \rightarrow \sigma^\mu$ ,这自然地对应 $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ .由(3)式可得 $A = 1$ . $B$ 的确定需要展开(2)式到 $O(q)$ .这里采用下列显式的波函数来做展开:

$$\begin{aligned} \bar{u}(P_2) &= \frac{1}{\sqrt{2p_2}} (2p_2 \xi_2^\dagger, 0), \\ u(P_1) &= \frac{1}{\sqrt{2p_1}} (0, 2p_1 \xi_1)^T, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $p_{1,2}$ 为对应3-动量的模, $\xi_{1,2}$ 为 $2 \times 1$ 的矩阵.由(4)式可得下列关系式<sup>[35]</sup>:

$$\begin{aligned} \bar{u}(P_2) u(P_1) &= \xi_2^\dagger \xi_1 (4p_1 p_2)^{1/2}, \\ \bar{u}(P_2) \sigma^i u(P_1) &= \xi_2^\dagger \xi_1 (4p_1 p_2)^{1/2} \\ &\times \frac{p_1 p_{2i} + p_{1i} p_2 - i \epsilon^{ijk} p_{2j} p_{1k}}{p_1 p_2 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

这里不对(2)式两边共有的 $\xi_2^\dagger \xi_1 (4p_1 p_2)^{1/2}$ 作展开.注意到 $p_1 p_2 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = 2p^2 + O(q^2)$ ,  $p_1 p_{2i} + p_{1i} p_2 = 2p p_i + O(q^2)$ , (2)式左边唯一的 $O(q)$ 的项来自于 $\epsilon^{ijk} p_{2j} p_{1k} = -\epsilon^{ijk} p_j p_k$ .而(2)式右边的 $O(q)$ 项来自于系数 $B$ .当取 $\mu = 0i$ ,  $\mu\nu = ij$ 时,可以得出 $B = -1/2$ .

下面证明 $B$ 项能给出正确的自旋-涡旋耦合.考虑处于热平衡态的流体,并取参考系矢量 $n^\mu$ 与流体参考系矢量 $u^\mu$ 相同,即 $n^\mu = u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ .然后引入特定的度规场扰动 $h_{0i}(t, x) = v_i(t, x)$ ,这一扰动导致了等效的流体涡旋:

$$\omega^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} u_\nu \nabla_\rho u_\sigma \rightarrow \omega^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \partial_j v_k + O(v^2). \quad (6)$$

通过选择合适的度规扰动,可以模拟任何流体中的涡旋.注意到能-动张量和度规场的耦合 $\frac{1}{2} T^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ ,右旋费米子在上述度规场中的散射振幅可表示为

$$i\mathcal{M} = i\bar{u}(P_2) \left[ Ap_i - \frac{B}{2} i\epsilon^{ijk} \sigma^j q_k \right] u(P_1) h_{0i}(Q), \quad (7)$$

其中  $A$  项和  $B$  项分别对应动量和自旋与度规的耦合.  $A$  项对应度规扰动引起的色散关系的变化  $p_0 \rightarrow p_0 + \delta p_0$ , 满足

$$(P^\mu + \delta p_0 \delta^{\mu 0})(P^\nu + \delta p_0 \delta^{\nu 0})(g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = 0 \rightarrow \delta p_0 = -p_i v_i. \quad (8)$$

另一方面, 注意到 (6) 式的傅里叶变换给出  $\tilde{\omega}^j = -\frac{i}{2} \epsilon^{ijk} q_k \tilde{v}_i$  (这里用带下标的量表示动量空间的量), 并且  $S^i = \xi_2^\dagger \frac{\sigma^i}{2} \xi_1$  (在  $O(q)$  可以忽略  $\xi_2$  和  $\xi_1$  的差别), 因此  $B$  项可以给出自旋与涡旋耦合的势能:  $-\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}$ , 这是大家熟知的自旋-涡旋耦合的形式. 左旋费米子的情况与之类似, 会得到相同的结论.

对于有质量的费米子, 我们知道  $A(Q^2 = 0) = 1$ ,  $B(Q^2 = 0) = 1/2$ , 并且这一结果不会被辐射修正改变 [26,27], 即等效原理成立. 另一方面, 描述有质量费米子的自旋动理论框架能够连续地取到零质量的极限 [36–40]. 因此我们有理由相信, 同样的结论对零质量的费米子仍有效. 等效原理的成立依赖于洛伦兹不变性. 在介质中, 洛伦兹不变性将被破坏, 因此我们预期费米子与介质的相互作用将改变引力形状因子的上述结果. 下一节将研究介质中引力形状因子的辐射修正.

### 3 引力形状因子的介质修正

要考虑引力形状因子在有限温度介质中的推广, 则面临一个概念上的问题: 介质中的耗散效应会让定义形状因子采用的散射图像不再有效. 真空中散射振幅可以由 LSZ 约化公式等价地由外动量在壳极限下的关联函数表示. 而关联函数在介质中仍是良好定义的. 因此本文以关联函数作为形状因子在介质中定义的推广. 引力形状因子的修正最终可以归结为费米子和引力子的顶点修正, 即截肢了的三点关联函数. 另一个额外的复杂之处在于, 真空中只需采用编时的三点关联函数, 而有限温度介质中需要指定恰当的算符排序. 这里采用有限温度场论的实时形式, 并选取 ra 基底. 以度规场为例, ra 基底下的场和 Schwinger-Keldysh 回路上的场关系如下:  $h_{\mu\nu,r} = \frac{1}{2}(h_{\mu\nu,1} + h_{\mu\nu,2})$ ,  $h_{\mu\nu,a} = h_{\mu\nu,1} - h_{\mu\nu,2}$ , 这里 r 场和 a 场分别代表背景场和涨落场. 取外线

的算符为  $\bar{\psi}_r(P_1)$ ,  $\psi_a(P_2)$  和  $h_{\mu\nu,r}(Q)$ , 并记相应截肢关联函数为  $\delta\Gamma^{\mu\nu}$ . 选取  $h_{\mu\nu,r}$  保证了度规场可以作为背景场, 而费米子算符的取法并不唯一. 采用上述取法可以把  $\delta\Gamma^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$  理解为背景度规场中费米子获得的超前自能 (advanced self-energy).

下面以量子电动力学等离子体介质为例计算  $\delta\Gamma^{\mu\nu}$ . 在介质中,  $\delta\Gamma^{\mu\nu}$  不仅包含实部还包含虚部. 实部可以被解释成势能, 虚部对应的是介质的耗散效应. 由于我们关心的自旋-涡旋耦合属于势能, 因此在计算中只保留实部. 以下内容将分为 4 部分阐述: 第 3.1 小节将列举主要的计算步骤, 并展示结果的结构; 第 3.2 小节会展示潜在的共线发散及其抵消; 第 3.3 小节将做相空间积分并将结果转化成形状因子; 第 3.4 小节将基于形状因子的结果讨论介质对自旋-涡旋耦合的修正, 并澄清它和手征涡旋效应的联系和区别. 另外还将讨论结果中的红外发散及其在介质中的正规化.

#### 3.1 形状因子的结构

首先画出一圈层次上对  $\delta\Gamma^{\mu\nu}$  有贡献的三类图, 其中图 1—图 3 分别涉及费米子-光子-引力子顶点、费米子-引力子顶点和光子-引力子顶点. 但没有包含费米子自能修正的图, 这部分贡献会在最后单独处理. 为简化计算, 考虑费米子动量远小于介质温度:  $P_{1,2} \ll T$ , 并取硬热圈近似, 即在结果中只保留随温度增长最快的贡献. 虽然上述运动学限制条件不具有普遍性, 但这使得我们能够清晰地展示介质对自旋-涡旋耦合的修正效应. 我们需要下列 ra 基底之下的传播子 [41]:

$$\begin{aligned} S_{ra}(P) &= \frac{i\not{P}}{P^2 + i\epsilon \operatorname{sgn}(p_0)}, \\ S_{ar}(P) &= \frac{i\not{P}}{P^2 - i\epsilon \operatorname{sgn}(p_0)}, \\ S_{rr}(P) &= \not{P} 2\pi\epsilon(p_0) \left( \frac{1}{2} - \tilde{f}(p_0) \right) \delta(P^2), \\ D_{ra}^{\mu\nu}(Q) &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{Q^2 + i\epsilon \operatorname{sgn}(q_0)}, \\ D_{ar}^{\mu\nu}(Q) &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{Q^2 - i\epsilon \operatorname{sgn}(q_0)}, \\ D_{rr}^{\mu\nu}(Q) &= -2\pi\epsilon(q_0) \left( \frac{1}{2} + f(q_0) \right) g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (9)$$

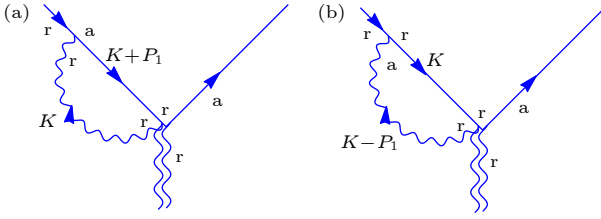


图 1 包含引力子-光子-费米子顶点的辐射修正图, 箭头方向表示动量方向. 类似的两幅光子传播子连接到另一外线的图未画出

Fig. 1. Radiative correction diagrams containing graviton-photon-fermion vertex, with arrows indicating direction of momenta. Two similar diagrams with photon propagator connecting to the other external leg not shown.

图 1—图 3 中涉及引力子的顶点有:

$$\begin{aligned} \frac{\delta T^{\mu\nu}}{\delta\bar{\psi}(K_1)\delta\psi(K_2)} &= \frac{\gamma^{\{\mu}(K_1 - K_2)^{\nu\}}}{2}, \\ \frac{\delta T^{\mu\nu}}{\delta\bar{\psi}(K_1)\delta\psi(K_2)\delta A_\rho(Q)} &= -e\gamma^{\{\mu}g^{\nu\}\rho}, \\ \frac{\delta T^{\mu\nu}}{\delta A_\rho(K_1)\delta A_\sigma(K_2)} &= \left[ K_1^\mu K_2^\nu g_{\rho\sigma} \right. \\ &\quad - K_1^\mu K_{2\rho}\delta_\sigma^\nu - K_{1\sigma}K_2^\nu\delta_\rho^\mu + K_1 \cdot K_2\delta_\rho^\mu\delta_\sigma^\nu \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(K_1 \cdot K_2 g_{\rho\sigma} - K_{1\sigma}K_{2\rho}) + (\mu \leftrightarrow \nu) \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

这里的场动量对应流入顶点的动量. 取费米子所带电荷为  $-e$ . 注意此处没有指定场在  $ra$  基底之下的指标, (10) 式中的顶点适用于所有只含一个  $a$  指标

的顶点. 例如, (10) 式中的第一个顶点适用于下列情况:  $h_{\mu\nu}^r\bar{\psi}^a\psi^r$ ,  $h_{\mu\nu}^r\bar{\psi}^r\psi^a$ ,  $h_{\mu\nu}^a\bar{\psi}^r\psi^r$ .

先考虑图 1 的贡献, 图 1(a) 的贡献可写为

$$\begin{aligned} &\int_K (-e\gamma^{\{\mu}g^{\nu\}\rho}) \frac{i(\not{K} + \not{P}_1)}{(K + P_1)^2} (-ie\gamma^\sigma) 2\pi\delta(K^2)f(k_0) \\ &\approx e^2 \int_K 2\pi\delta(K^2) \left( 2K^{\{\mu}\gamma^{\nu\}} - \not{K}g^{\mu\nu} \right) \frac{1}{2K \cdot P_1} f(k_0), \quad (11) \end{aligned}$$

其中在分子中用了硬热圈近似  $\not{K} + \not{P}_1 \approx \not{K}$ , 并利用了壳条件  $P_1^2 = 0$  化简了分母. 注意在分母中省略了  $i\epsilon$ , 此处并不影响结果. 原因是  $i\epsilon$  只在分母趋于零时起作用. 而在下一小节将看到, 这一分母给出的共线发散被完全抵消了. 图 1(b) 的贡献可类似地写出. 唯一的区别是分布函数的替换  $f(k_0) \rightarrow \tilde{f}(k_0)$ <sup>①</sup>. 除了图 1 中画出的两张费曼图外, 光子传播子也可以连接到动量为  $P_2$  的外线. 对应的贡献可在上述贡献中由替换  $P_1 \rightarrow P_2$  得到. 综合上述贡献可以得到:

$$\begin{aligned} &e^2 \int_K \left( 2K^{\{\mu}\gamma^{\nu\}} - \not{K}g^{\mu\nu} \right) 2\pi\delta(K^2) \\ &\times \left( \frac{1}{2K \cdot P_1} + \frac{1}{2K \cdot P_2} \right) \left( f(k_0) + \tilde{f}(k_0) \right). \quad (12) \end{aligned}$$

注意到 (12) 式的  $\delta(K^2)$  表明, 积分来自于  $k_0 = \pm k$  两部分贡献. 利用变量替换  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$  容易证明, 这

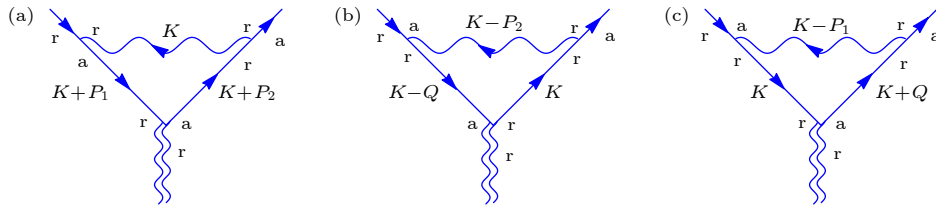


图 2 包含引力子-费米子顶点的辐射修正图, 箭头方向表示动量方向

Fig. 2. Radiative correction diagrams containing graviton-fermion vertex, with arrows indicating direction of momenta.

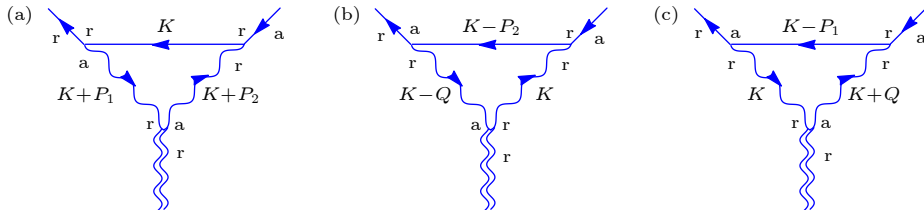


图 3 包含引力子-光子顶点的辐射修正图, 箭头方向表示动量方向

Fig. 3. Radiative correction diagrams containing graviton-photon vertex, with arrows indicating direction of momenta.

① 来自于传播子的分布函数给出如下替换:  $f(k_0) \rightarrow -\tilde{f}(k_0)$ . 此处的负号被  $\frac{1}{(K - P_1)^2} = -\frac{1}{2K \cdot P_1}$  中的负号抵消.



两部分贡献完全相同. 因此在后面的具体计算时只需要考虑两倍的  $k_0 = k$  的贡献. 简单的数幂次可以看出硬圈给出的贡献为  $\int_K \delta(K^2) \sim O(K^2)$ .

接下来考虑图 2 的贡献. 图 2(a) 对应圈内光子在壳的情况, 图 2(b) 和图 2(c) 分别对应圈内的其中一个费米子在壳的情况. 为方便计算, 选择让

在壳粒子携带动量为  $K$ . 简单的数幂次我们发现领头阶的贡献为  $\int_K \delta(K^2) K \sim O(K^3)$ . 由于领头阶是  $K$  的奇函数, 利用前面提到的变量替换  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$  不难发现,  $k_0 = \pm k$  在领头阶的贡献完全相消. 因此必须考虑次领头阶的贡献. 分别保留三张图的次领头阶的贡献, 图 2(a) 的贡献为

$$\begin{aligned} & \int_K (-ie\gamma^\rho) \frac{i(K + P_2)}{(K + P_2)^2} \gamma^{\{\mu} (K + P)^{\nu\}} \frac{i(K + P_1)}{(K + P_1)^2} (-ie\gamma^\sigma) (-g_{\rho\sigma}) 2\pi\delta(K^2) f(k_0) \\ & \approx e^2 \int_K 2\pi\delta(K^2) (2P_1 \gamma^{\{\mu} K^{\nu\}} + 2K \gamma^{\{\mu} P_2^{\nu\}} + 2K \gamma^{\{\mu} K^{\nu\}} P_2) \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{1}{2K \cdot P_2} f(k_0). \end{aligned} \quad (13)$$

利用下列等式:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho = \gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho} + \gamma^\rho g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^5 \gamma_\sigma, \quad (14)$$

可以将 (13) 式化简成

$$e^2 \int_K 2\pi\delta(K^2) (8P^{\{\mu} K^{\nu\}} K - 4K \cdot P \gamma^{\{\mu} K^{\nu\}} - 2i\epsilon^{\alpha\beta\lambda\{\mu} \gamma^5 \gamma_\lambda K_\alpha Q_\beta K^{\nu\}}) \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{1}{2K \cdot P_2} f(k_0). \quad (15)$$

图 2(b) 的贡献为

$$\begin{aligned} & \int_K (-ie\gamma^\rho) K \gamma^{\{\mu} \left(K - \frac{Q}{2}\right)^{\nu\}} \frac{i(K - Q)}{(K - Q)^2} (-ie\gamma^\sigma) \frac{-ig_{\rho\sigma}}{(K - P_2)^2} 2\pi\delta(K^2) (-\tilde{f}(k_0)) \\ & \approx e^2 \int_K 2\pi\delta(K^2) \tilde{f}(k_0) \left[ (4Q^{\{\mu} K^{\nu\}} K - 2\gamma^{\{\mu} K^{\nu\}} K \cdot Q + 2i\epsilon^{\alpha\beta\lambda\{\mu} \gamma^5 \gamma_\lambda K_\alpha Q_\beta K^{\nu\}}) \frac{1}{2K \cdot P_2} \frac{1}{2K \cdot Q} \right. \\ & \quad \left. - 4K^\mu K^\nu K \frac{1}{2K \cdot P_2} \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

其中方括号中的两项分别来自于对分母  $-2K \cdot Q + Q^2$  展开的领头和次领头项. 图 2(c) 的贡献类似可得:

$$\begin{aligned} & \int_K (-ie\gamma^\rho) \frac{i(K + Q)}{(K + Q)^2} \gamma^{\{\mu} \left(K + \frac{Q}{2}\right)^{\nu\}} K (-ie\gamma^\sigma) \frac{-ig_{\rho\sigma}}{(K - P_1)^2} 2\pi\delta(K^2) (-\tilde{f}(k_0)) \\ & \approx e^2 \int_K 2\pi\delta(K^2) \tilde{f}(k_0) \left[ (4Q^{\{\mu} K^{\nu\}} K - 2\gamma^{\{\mu} K^{\nu\}} K \cdot Q - 2i\epsilon^{\alpha\beta\lambda\{\mu} \gamma^5 \gamma_\lambda K_\alpha Q_\beta K^{\nu\}}) \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{1}{2K \cdot Q} \right. \\ & \quad \left. - 4K^\mu K^\nu K \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

(15)–(17) 式求和可得:

$$\begin{aligned} & e^2 \int_K 2\pi\delta(K^2) \left[ (8P^{\{\mu} K^{\nu\}} K - 4K \cdot P \gamma^{\{\mu} K^{\nu\}} - 2i\epsilon^{\alpha\beta\lambda\{\mu} \gamma^5 \gamma_\lambda K_\alpha Q_\beta K^{\nu\}}) \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{1}{2K \cdot P_2} f(k_0) \right. \\ & \quad + (4Q^{\{\mu} K^{\nu\}} K - 2\gamma^{\{\mu} K^{\nu\}} K \cdot Q) \left( \frac{1}{2K \cdot P_1} + \frac{1}{2K \cdot P_2} \right) \frac{1}{2K \cdot Q} \tilde{f}(k_0) \\ & \quad \left. - 2i\epsilon^{\alpha\beta\lambda\{\mu} \gamma^5 \gamma_\lambda K_\alpha Q_\beta K^{\nu\}} \left( \frac{1}{2K \cdot P_2} \frac{1}{2K \cdot P_2} \right) \tilde{f}(k_0) - 4K^\mu K^\nu K \left( \frac{1}{2K \cdot P_1} + \frac{1}{2K \cdot P_2} \right) \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} \tilde{f}(k_0) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

(18) 式中出现的狄拉克结构并不完全独立. 下面推导它们之间的关系. 由运动方程可知, 下列因子出现在形状因子中时恒为零  $(K \gamma^\mu P_1 + P_2 \gamma^\mu K) = 0$ . 因此可以写出下面的等式:

$$\frac{1}{2} [(P_1 \gamma^\mu K + K \gamma^\mu P_2) + (K \gamma^\mu P_1 + P_2 \gamma^\mu K)] = \frac{1}{2} [(P_1 \gamma^\mu K + K \gamma^\mu P_2) - (K \gamma^\mu P_1 + P_2 \gamma^\mu K)]. \quad (19)$$

利用 (14) 式可得:

$$-2K \cdot P\gamma^\mu + 2\cancel{K}P^\mu = i\epsilon^{\mu\alpha\beta\lambda}\gamma^5\gamma_\lambda K_\alpha Q_\beta. \quad (20)$$

两边同乘以  $K^\nu$  并对称化指标可以得到:

$$-2K \cdot P\gamma^{\{\mu}K^{\nu\}} + 2\cancel{K}P^{\{\mu}K^{\nu\}} = iK^{\{\nu}\epsilon^{\mu\}\alpha\beta\lambda}\gamma^5\gamma_\lambda K_\alpha Q_\beta. \quad (21)$$

利用 (21) 式, 可将 (18) 式进一步化简为

$$\begin{aligned} e^2 \int_K 2\pi\delta(K^2) \left\{ \left[ -2\gamma^{\{\mu}K^{\nu\}} \left( \frac{1}{2K \cdot P_1} + \frac{1}{2K \cdot P_2} \right) + 4P^{\{\mu}K^{\nu\}}\cancel{K} \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{1}{2K \cdot P_2} \right] (f(k_0) + \tilde{f}(k_0)) \right. \\ \left. + \left[ 4Q^{\{\mu}K^{\nu\}}\cancel{K} \left( \frac{1}{2K \cdot P_1} + \frac{1}{2K \cdot P_2} \right) \frac{1}{2K \cdot Q} + 8P^{\{\mu}K^{\nu\}}\cancel{K} \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{1}{2K \cdot P_2} \right. \right. \\ \left. \left. - 4K^\mu K^\nu \cancel{K} \left( \frac{1}{2K \cdot P_1} + \frac{1}{2K \cdot P_2} \right) \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} \right] \tilde{f}(k_0) \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

最后看图 3 的贡献. 类似于图 2 的分析可得, 来自于  $k_0 = \pm k$  的贡献在领头阶同样完全抵消, 需要保留到次领头阶. 图 3(a) 的贡献为

$$\begin{aligned} \int_K (-ie\gamma_\beta)(-\cancel{K})(-ie\gamma_\alpha) \frac{-ig^{\alpha\rho}}{(K+P_2)^2} \frac{-ig^{\beta\sigma}}{(K+P_1)^2} V_{\rho\sigma}^{\mu\nu}(k_1 \rightarrow K+P_1, k_2 \rightarrow -(K+P_2)) 2\pi\delta(K^2)(-\tilde{f}(k_0)) \\ \approx e^2 \int_K 2\pi\delta(K^2) \left[ 8K^{\{\mu}P^{\nu\}}\cancel{K} - 4iK^{\{\mu}\epsilon^{\nu\}\alpha\beta\lambda}K_\alpha Q_\beta - 8P \cdot K K^{\{\mu}\gamma^{\nu\}} \right] \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{1}{2K \cdot P_2} \tilde{f}(k_0) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

此处用  $V_{\rho\sigma}^{\mu\nu}(k_1, k_2)$  表示 (10) 式中的光子-引力子顶点. 在最后一步用到了 (21) 式. 图 3(b) 的贡献为

$$\begin{aligned} \int_K (-ie\gamma_\beta) \frac{-i(\cancel{K} - \cancel{P}_2)}{(K - P_2)^2} (-ie\gamma_\alpha) \frac{-ig^{\alpha\rho}}{(K - Q)^2} (-g^{\beta\sigma}) V_{\rho\sigma}^{\mu\nu}(k_1 \rightarrow K - Q, k_2 \rightarrow -K) 2\pi\delta(K^2)f(k_0) \\ \approx e^2 \int_K 2\pi\delta(K^2)f(k_0) \left\{ -4 \left( -K^{\{\mu}P_2^{\nu\}}\cancel{K} - K^{\{\nu}\gamma^{\mu\}}K \cdot P_2 + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}K \cdot P_2\cancel{K} \right) \frac{1}{2K \cdot P_2} \frac{1}{2K \cdot Q} \right. \\ \left. - 4K^\mu K^\nu \cancel{K} \frac{1}{2K \cdot P_2} \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} - 2 \left( -Q^{\{\mu}K^{\nu\}}\cancel{K} + iK^{\{\nu}\epsilon^{\mu\}\alpha\beta\lambda}\gamma^5\gamma_\lambda Q_\alpha K_\beta + K^{\{\nu}\gamma^{\mu\}}K \cdot Q \right) \frac{1}{2K \cdot P_2} \frac{1}{2K \cdot Q} \right\} \\ = e^2 \int_K 2\pi\delta(K^2) \left[ \left( 8K^{\{\mu}P^{\nu\}}\cancel{K} + 4K^{\{\mu}Q^{\nu\}}\cancel{K} - 2g^{\mu\nu}K \cdot P_2\cancel{K} \right) \frac{1}{2K \cdot P_2} \frac{1}{2K \cdot Q} f(k_0) \right. \\ \left. - 4K^\mu K^\nu \cancel{K} \frac{1}{2K \cdot P_2} \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} f(k_0) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

图 3(c) 的贡献类似可得:

$$\begin{aligned} \int_K (-ie\gamma_\beta) \frac{-i(\cancel{K} - \cancel{P}_1)}{(K - P_1)^2} (-ie\gamma_\alpha) (-g^{\alpha\rho}) \frac{-ig^{\beta\sigma}}{(K + Q)^2} V_{\rho\sigma}^{\mu\nu}(k_1 \rightarrow K, k_2 \rightarrow -(K + Q)) 2\pi\delta(K^2)f(k_0) \\ \approx e^2 \int_K 2\pi\delta(K^2) \left\{ \left( -8K^{\{\mu}P^{\nu\}}\cancel{K} + 4K^{\{\mu}Q^{\nu\}}\cancel{K} + 2g^{\mu\nu}K \cdot P_1\cancel{K} \right) \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{1}{2K \cdot Q} f(k_0) \right. \\ \left. - 4K^\mu K^\nu \cancel{K} \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} f(k_0) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

(23)–(25) 式求和可得:

$$\begin{aligned} e^2 \int_K 2\pi\delta(K^2) \left\{ -8K^{\{\mu}P^{\nu\}}\cancel{K} \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{1}{2K \cdot P_2} + 4K^{\{\mu}Q^{\nu\}}\cancel{K} \left( \frac{1}{2K \cdot P_1} + \frac{1}{2K \cdot P_2} \right) \frac{1}{2K \cdot Q} \right. \\ \left. - 4K^\mu K^\nu \cancel{K} \left( \frac{1}{2K \cdot P_1} + \frac{1}{2K \cdot P_2} \right) \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} \right\} f(k_0). \end{aligned} \quad (26)$$

### 3.2 共线发散的抵消

由于  $K$ ,  $P_1$  和  $P_2$  均为类光动量, 3.1 小节得到的被积函数中的因子  $\frac{1}{2K \cdot P_1}$  和  $\frac{1}{2K \cdot P_2}$  均会导致发散. 以前者为例, 取  $\vec{k}$  和  $\vec{p}_1$  的夹角为  $\theta$ , 则  $\theta$  的积分可写为

$$\int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{1}{2K \cdot P_1} = \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{1}{2kp_1(1-\cos\theta)}. \quad (27)$$

当  $\cos\theta \rightarrow 1$  时, (27) 式出现对数发散. 这一发散发生在  $K$  和  $P_1$  趋于平行时, 我们称之为共线发散. 如果保留 (27) 式中舍弃的  $i\epsilon$ , 得到的结果将变为  $\ln\epsilon$ ,

仍无法处理这一发散. 考虑到介质中光子和费米子均会获得热质量, 热质量的存在能够有效地截断贡献发散. 事实上, 这里并不需要引入热质量. 我们将证明, 所有的共线发散最后完全抵消, 并不会对引力形状因子产生贡献.

首先, 注意到 3.1 小节出现了如下的狄拉克结构:  $K^{\{\mu\gamma\nu\}}$ ,  $Kg^{\mu\nu}$ ,  $KK^{\{\mu P\nu\}}$ ,  $KK^{\{\mu P\nu\}}$  和  $KK^{\mu}K^{\nu}$ . 其中第一个结构在 (12) 式和 (22) 式求和后完全抵消, 后四个结构均包含  $K$ . 由于共线发散发生时  $K$  与  $P_{1,2}$  平行, 而此时  $K \propto P_{1,2}$ . 由运动方程可知后者对形状因子不产生贡献.

下面将剩余的项按狄拉克结构归类化简为:

$$\begin{aligned} \text{I: } & \int_K 2\pi\delta(K^2)(-K^{\mu\nu}) \left( \frac{1}{2K \cdot P_1} + \frac{1}{2K \cdot P_2} \right) (f(k_0) + \tilde{f}(k_0)), \\ \text{II: } & \int_K 2\pi\delta(K^2) 4P^{\{\mu}K^{\nu\}} K \left( \frac{1}{2K \cdot P_1} - \frac{1}{2K \cdot P_2} \right) \frac{1}{2K \cdot Q} (f(k_0) + \tilde{f}(k_0)), \\ \text{III: } & \int_K 2\pi\delta(K^2) 4Q^{\{\mu}K^{\nu\}} K \left( \frac{1}{2K \cdot P_1} + \frac{1}{2K \cdot P_2} \right) \frac{1}{2K \cdot Q} (f(k_0) + \tilde{f}(k_0)), \\ \text{IV: } & \int_K 2\pi\delta(K^2) (-4K^{\mu}K^{\nu}) K \left( \frac{1}{2K \cdot P_1} + \frac{1}{2K \cdot P_2} \right) \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} (f(k_0) + \tilde{f}(k_0)). \end{aligned} \quad (28)$$

有趣的是上述结果有一个共同的因子  $f(k_0) + \tilde{f}(k_0)$ . 同样的因子也贡献到费米子的热质量.

### 3.3 形状因子的介质修正

本小节将对相空间做积分并得到形状因子的表达式. 由于我们感兴趣的是自旋和静态涡旋的耦合, 进一步要求  $q_0 = 0$ , 即在介质参考系费米子与引力子不交换能量, 只改变动量方向. 在这种情况下, 在介质参考系对各个动量的空间分量作如下的参数化:

$$\mathbf{p}_1 = \left(0, -\frac{q}{2}, p\right), \quad \mathbf{p}_2 = \left(0, \frac{q}{2}, p\right), \quad \mathbf{q} = (0, q, 0), \quad \mathbf{k} = k(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta). \quad (29)$$

注意当  $q_0 = 0$  时, 有  $P \cdot Q = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$ . 因此不失一般性, 可以让  $p$  和  $q$  分别指向  $z$  和  $y$  方向. 下面分别计算 (28) 式中的 I—IV. 首先化简 I 的被积函数:

$$\text{I: } (-K^{\mu\nu}) \left( \frac{1}{2K \cdot P_1} + \frac{1}{2K \cdot P_2} \right) (f(k_0) + \tilde{f}(k_0)) = -\gamma_{\lambda} g^{\mu\nu} \left( K^{\lambda} - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^{\lambda} \right) \frac{1}{2K \cdot P_1} (f(k_0) + \tilde{f}(k_0)) + (P_1 \rightarrow P_2), \quad (30)$$

这里  $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$  是介质的参考系矢量. 在第二行减去了正比于  $P_1$  的贡献, 这一项对形状因子不产生贡献, 但能有效地去除共线发散. 注意到  $u_{\lambda} \left( K^{\lambda} - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^{\lambda} \right) = 0$ , 因此  $\lambda$  只能取空间指标. 根据对动量的参数化和转动对称性,  $\lambda$  只能取  $z$  和  $y$ . 又由运动方程  $P_{1,2}^2 = 0$ , 两者相减得  $Q = 0$ . 注意到  $Q = (0, 0, q, 0)$ , 由此可得  $\lambda = y$  也不贡献到形状因子. 当  $\lambda = z$  时, (30) 式的积分可计算如下:

$$\begin{aligned} & \int_K 2\pi\delta(K^2) \left( K^{\lambda} - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^{\lambda} \right) \frac{1}{2K \cdot P_1} (f(k_0) + \tilde{f}(k_0)) \\ &= a \int d\cos\theta d\varphi \left[ \cos\theta - \frac{p}{(p^2 + q^2/4)^{1/2}} \right] \left\{ \frac{1}{2[(p^2 + q^2/4)^{1/2} - p\cos\theta]} \right\} = -4\pi a \frac{1}{2p}, \end{aligned} \quad (31)$$

其中  $a = e^2 \int \frac{k dk}{(2\pi)^3} (f(k_0) + \tilde{f}(k_0))$ . 在结果中只保留了  $q \rightarrow 0$  极限下的主导项. 类似地, 可以得到来自于  $(P_1 \rightarrow P_2)$  的结果与上面的结果完全相同. 综合两部分结果, 可以将结果写成协变的形式:

$$I = 4\pi a \gamma \cdot \hat{p} g^{\mu\nu} \frac{1}{p}. \quad (32)$$

接下来考虑 II. 类似于 I 的处理方法, 先将 II 的被积函数写成

$$\begin{aligned} & 4P^{\{\mu} K^{\nu\}} K \left( \frac{1}{2K \cdot P_1} - \frac{1}{2K \cdot P_2} \right) \frac{1}{2K \cdot Q} (f(k_0) + \tilde{f}(k_0)) \\ &= 4\gamma_\lambda \left[ \left( K^\lambda - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\lambda \right) \left( P^{\{\mu} K^{\nu\}} - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P^{\{\mu} P_1^{\nu\}} \right) + \left( K^\lambda - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\lambda \right) \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P^{\{\mu} P_1^{\nu\}} \right] \\ & \quad \times \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{1}{2K \cdot Q} (f(k_0) + \tilde{f}(k_0)) - (P_1 \rightarrow P_2) \end{aligned} \quad (33)$$

式中, 方括号中的第一项和第二项分别是  $K$  的张量和矢量. 第一项的指标  $\lambda\nu$  只能取空间分量. 根据转动对称性,  $\lambda\nu$  可被分解到如下的张量结构:  $\delta_{ij}$ ,  $\hat{p}_i \hat{p}_j$ ,  $\hat{q}_i \hat{q}_j$  以及  $(\hat{p}_i \hat{q}_j + \hat{q}_i \hat{p}_j)$ . 由于前述的原因,  $\hat{q}_i \hat{q}_j$  不贡献到形状因子. 为方便后面的计算, 定义  $\hat{l}_i = \epsilon^{ijk} \hat{q}_j \hat{p}_k$ , 并采用  $\hat{l}_i \hat{l}_j$  来替换  $\delta_{ij}$ . 这使得我们有简单的对应关系:  $\hat{l}_i \hat{l}_j = xx$ ,  $\hat{p}_i \hat{p}_j = zz$ ,  $(\hat{p}_i \hat{q}_j + \hat{q}_i \hat{p}_j) = yz$ . 下面列出 (33) 式的第一项涉及到的积分<sup>①</sup>:

$$\int_K 2\pi\delta(K^2) \left( K^\lambda - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\lambda \right) \left( K^\nu - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\nu \right) \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{1}{2K \cdot Q} (f(k_0) + \tilde{f}(k_0)) = \begin{cases} 4\pi a \frac{\ln \frac{2p}{q}}{8p^2}, & \lambda\nu = xx \\ 4\pi a \frac{1}{8p^2}, & \lambda\nu = zz \\ 4\pi a \frac{1}{pq}, & \lambda\nu = zy \end{cases} \quad (34)$$

同样只保留了  $q \rightarrow 0$  时的主导项. 第二项的计算与 I 类似, 可以确定  $\lambda = z$ , 而在  $q \rightarrow 0$  的极限保留主导项意味着  $\nu = 0$  或  $z$ , 两种情况有如下的相同结果:

$$\int_K 2\pi\delta(K^2) \left( K^\lambda - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\lambda \right) \left( \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\nu \right) \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{1}{2K \cdot Q} (f(k_0) + \tilde{f}(k_0)) = 4\pi a \frac{-\ln \frac{2p}{q}}{8p^2}. \quad (35)$$

另一部分贡献  $-(P_1 \rightarrow P_2)$  对于  $\lambda\nu = xx$  和  $\lambda\nu = zz$  给出相同的贡献, 而对于  $\lambda\nu = yz$  给出相反的贡献. 综合上述, 可以得到

$$\text{II} = 4\pi a \left( \gamma \cdot \hat{l} P^{\{\mu} \hat{l}^{\nu\}} \frac{\ln \frac{2p}{q}}{p^2} + \gamma \cdot \hat{p} P^{\{\mu} \hat{p}^{\nu\}} \frac{1}{p^2} - \gamma \cdot \hat{p} P^\mu P^\nu \frac{\ln \frac{2p}{q}}{p^3} \right). \quad (36)$$

III 不需要额外的计算, 利用 (34) 式中的现成的结果并注意到此时  $(P_1 \rightarrow P_2)$  给出相同的贡献, 可以得到

$$\text{III} = 4\pi a \left[ 2 \left( \gamma \cdot \hat{p} \hat{q}^\mu \hat{q}^\nu + \gamma \cdot \hat{q} \hat{q}^{\{\mu} \hat{p}^{\nu\}} \right) \frac{1}{p} \right]. \quad (37)$$

IV 的计算略为复杂, 仿照前面的做法将被积函数改写成

① 注意被积函数包含  $\frac{1}{2K \cdot Q} = \frac{1}{-2kq \sin \theta \sin \varphi}$ , 表面上看这一因子在  $\varphi \rightarrow 0$  时存在不可积的发散, 但这一发散在对  $\varphi$  和  $\varphi + \pi$  的贡献求和后消去.



$$\begin{aligned}
 & -4K^\mu K^\nu K^\lambda \left( \frac{1}{2K \cdot P_2} + \frac{1}{2K \cdot P_1} \right) \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} \left( f(k_0) + \tilde{f}(k_0) \right) \\
 = & -4\gamma_\lambda \left( K^\lambda - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\lambda \right) \left( K^\mu - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\mu \right) \left( K^\nu - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\nu \right) \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} \left( f(k_0) + \tilde{f}(k_0) \right) \\
 & -4\gamma_\lambda \left( K^\lambda - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\lambda \right) \left[ \left( K^\mu - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\mu \right) \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\nu + (\mu \rightarrow \nu) \right] \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} \left( f(k_0) + \tilde{f}(k_0) \right) \\
 & -4\gamma_\lambda \left( K^\lambda - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\lambda \right) \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\mu \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\nu \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} \left( f(k_0) + \tilde{f}(k_0) \right) + (P_1 \rightarrow P_2). \quad (38)
 \end{aligned}$$

类似于前面的分析, 三阶张量指标可取为  $\lambda\mu\nu = zzz, zxx, yxx, zyy, zzy$ , 二阶张量指标可取为  $\lambda\mu = zz, xx, zy$ , 而矢量的指标取为  $\lambda = z$ . 剩余的指标在  $q \rightarrow 0$  的极限下只能取 0 或  $z$ . (38) 式的每一项都含有  $\frac{1}{(2K \cdot Q)^2} = \frac{1}{4k^2 q^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}$ . 此时, 发现  $\varphi$  的积分存在发散, 必须保留  $i\epsilon$  以正规化这一发散. 正规化的结果既包含实部又包含虚部. 虚部描述的是介质的耗散效应. 我们关心的自旋-涡旋耦合势来自于实部. 因此本文只讨论实部的结果. 计算细节在附录中详述, 这里列出主要结果, (38) 式右侧第一项涉及到下列积分:

$$\begin{aligned}
 & \int_K 2\pi\delta(K^2) \left( K^\lambda - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\lambda \right) \left( K^\mu - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\mu \right) \left( K^\nu - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\nu \right) \\
 & \times \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} \left( f(k_0) + \tilde{f}(k_0) \right) = \begin{cases} -4\pi a \frac{1}{4p}, & \lambda\mu\nu = zzz, \\ -4\pi a \frac{1}{8p}, & \lambda\mu\nu = zxx, \\ 4\pi a \frac{1}{8p}, & \lambda\mu\nu = zyy, \end{cases} \quad (39)
 \end{aligned}$$

其余结构在  $q \rightarrow 0$  的极限下均被压低. (38) 式右侧第二项涉及到下列积分 (只保留未被压低的指标取法):

$$\begin{aligned}
 & \int_K 2\pi\delta(K^2) \left( K^\lambda - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\lambda \right) \left[ \left( K^\mu - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\mu \right) \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\nu + (\mu \rightarrow \nu) \right] \\
 & \times \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} \left( f(k_0) + \tilde{f}(k_0) \right) = \begin{cases} 4\pi a \frac{1}{4p}, & \lambda\mu\nu = zzz, \\ 4\pi a \frac{\ln(2p/q)}{8p}, & \lambda\mu\nu = xzx, \end{cases} \quad (40)
 \end{aligned}$$

$\nu = 0$  结果与 (40) 式相同. (38) 式右侧第三项只涉及下列积分:

$$\int_K 2\pi\delta(K^2) \left( K^\lambda - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\lambda \right) \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\mu \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\nu \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} \left( f(k_0) + \tilde{f}(k_0) \right) = -4\pi a \frac{1}{8p}, \quad \lambda\mu\nu = zzz. \quad (41)$$

$\mu\nu = 0z$  和  $00$  的结果与上面相同. IV 的结果可写成下列协变的形式:

$$\begin{aligned}
 \text{IV} = & 4\pi a \left[ \left( \gamma \cdot \hat{p} \hat{l}^\mu \hat{l}^\nu + 2\gamma \cdot \hat{l} \hat{l}^{\{\mu} \hat{p}^{\nu\}} \right) \frac{1}{p} - \left( \gamma \cdot \hat{p} \hat{q}^\mu \hat{q}^\nu + 2\gamma \cdot \hat{q} \hat{p}^{\{\mu} \hat{q}^{\nu\}} \right) \frac{1}{p} - 2\gamma \cdot \hat{p} \hat{p}^{\{\mu} u^{\nu\}} \right. \\
 & \left. - 2\gamma \cdot \hat{l} \hat{l}^{\{\mu} P^{\nu\}} \frac{\ln(2p/q)}{p^2} + \gamma \cdot \hat{p} P^\mu P^\nu \frac{1}{p^3} \right]. \quad (42)
 \end{aligned}$$

最后, 对 (32) 式、(36) 式、(37) 式和 (42) 式求和并注意到  $4\pi a = e^2 T^2 / 8 = m_f^2$  可得:

$$\delta\Gamma^{\mu\nu} = m_f^2 \left[ -\gamma \cdot \hat{p} P^\mu P^\nu \frac{\ln(2p/q)}{p^3} - \gamma \cdot \hat{l} P^{\{\mu} \hat{l}^{\nu\}} \frac{\ln(2p/q)}{p^2} + \gamma \cdot \hat{p} \left( 2u^\mu u^\nu + u^{\{\mu} \hat{p}^{\nu\}} + \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu \right) \frac{1}{p} + 2\gamma \cdot \hat{l} \hat{l}^{\{\mu} \hat{p}^{\nu\}} \right]. \quad (43)$$

尚需考虑费米子的自能修正 (图 4). 类似于真空的情况, 自能图的效应在于改变费米子的在壳条件, 并引入场强重整化因子. 在介质中, 自能重求和后的费米子的传播子变为<sup>[42]</sup>

$$S^{\text{ra}}(P) = \frac{i}{2} \Delta_+(P)(\gamma^0 - \gamma \cdot \hat{p}) + \frac{i}{2} \Delta_-(P)(\gamma^0 + \gamma \cdot \hat{p}), \quad (44)$$

其中

$$\Delta_{\pm}(P) = \left( p_0 \mp p - \frac{m_f^2}{2p} \left[ \left( 1 \mp \frac{p_0}{p} \right) \ln \frac{p_0 + p}{p_0 - p} \pm 2 \right] \right)^{-1},$$

这里  $\Delta_+$  的极点对应介质修正后的费米子能量, 而  $\Delta_-$  对应的模式是介质特有的衍生模式. 由于我们关心的是介质对真空费米子自旋-涡旋耦合的修正, 因此只考虑  $\Delta_+$ . 这里的自能修正形式上和真空的情况一样, 完全来自于场强重整化因子

$$\delta\Gamma^{\mu\nu} = \delta Z_+ \gamma^{\{\mu} P^{\nu\}}. \quad (45)$$

在  $p \gg m_f$  的极限下, 场强重整化因子有简单的表达式<sup>[42]</sup>:

$$\delta Z_+ = \frac{m_f^2}{2p^2} \left( 1 - \ln \frac{2p^2}{m_f^2} \right). \quad (46)$$

注意此时仍有  $p \ll T$ . (43) 式与 (45) 式之和是本文得到的引力形状因子的介质修正.

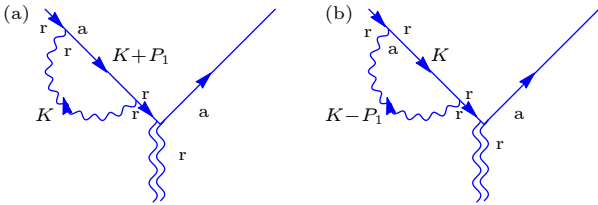


图 4 费米子外线的辐射修正图, 箭头方向表示动量方向. 类似的两幅另一条外线的修正图未画出.

Fig. 4. Diagrams for radiative correction to external fermion leg, with arrows indicating direction of momenta. Similar diagrams for correction to the other external leg not shown.

### 3.4 结果与讨论

下面对引力形状因子的结果加以讨论. 考虑 (43) 式和 (45) 式对自旋-涡旋耦合的修正. 为讨论方便, 按照 3.3 小节的做法, 让  $p$  和  $q$  分别指向  $z$  和  $y$ . 对于零质量的费米子, 自旋方向近似指向  $z$  方向, 此时需要引入  $0x$  分量的度规扰动以产生

$z$  方向的涡旋. 可能的自旋-涡旋耦合来自于相互作用顶点  $h_{\mu\nu} \delta\Gamma^{\mu\nu}$ , 只有  $\delta\Gamma^{\mu\nu}$  中的  $0x$  分量能产生非零贡献. 先考虑 (45) 式的贡献. (45) 式与真空的引力形状因子仅差一个常数因子  $\delta Z_+$ . 由 (2) 式的右边第二项可得它对散射振幅的贡献为

$$i\mathcal{M} = i\bar{u}(P_2) \frac{\sigma^3}{2} q \frac{\tilde{v}}{2} u(P_1) \delta Z_+ \approx 2p \frac{i\tilde{\omega}}{2} \frac{m_f^2}{2p^2} \left( 1 - \ln \frac{2p^2}{m_f^2} \right). \quad (47)$$

其中  $\tilde{\omega} = -\frac{i}{2} q \tilde{v}$ . 前因子  $2p$  来自于相对论旋量的归一化. 另一方面, (43) 式的第二项对散射振幅的贡献如下:

$$i\mathcal{M} = i\bar{u}(P_2)(-\sigma^1)u(P_1) \frac{\tilde{v}}{2} m_f^2 \frac{-\ln(2p/q)}{p} \approx 2p \frac{i\tilde{\omega}}{2} \frac{m_f^2}{p^2} \ln \frac{2p}{q}, \quad (48)$$

这里用到了 (5) 式. 需要指出的是, 虽然 (47) 式和 (48) 式给出了相似的贡献, 但它们的物理解释不同. 先将散射振幅的表示展开到度规扰动的一阶:

$i\mathcal{M} \sim \langle P_2 | -i \int dt H | P_1 \rangle$ , 其中  $H \sim \bar{\psi} \delta\Gamma^{\mu\nu} \psi h_{\mu\nu}$ . 注意到在计算  $\delta\Gamma^{\mu\nu}$  时取了  $q_0 = 0$  的限制, 应用到散射问题实际上要求取不含时的  $h_{\mu\nu}$ , 只有这样  $\int dt$  才能给出  $\delta(q_0)$  因子, 而剩下的部分是能量算符的跃迁矩阵元. 下面说明只有 (47) 式对应势能: 在 (47) 式中, 忽略了初末态的区别, 于是  $\bar{u}(P_2) \frac{\sigma^3}{2} u(P_1)$  可看成是同一个态的自旋. 由于涡旋场同样不含时, (47) 式自然可以解释成势能, 即介质对自旋-涡旋耦合的修正. 而 (48) 式中的  $q$  来自于  $\bar{u}(P_2) \sigma^1 u(P_1)$ . 此时忽略初末态的区别将得到零结果, 因此 (48) 式不能被理解为同一个态的能量, 而是初末态之间的跃迁矩阵元. 事实上  $\langle P_2 | \delta\Gamma^{\mu\nu} | P_1 \rangle$  的各分量均可一般地理解为能动张量密度算符在初末态之间的跃迁矩阵元. 只有特定分量的跃迁矩阵元具有简单的势能解释.

虽然两者的物理解释不同, 但均能对手征涡旋效应产生贡献. 下面简要说如下:  $\delta\Gamma^{\mu\nu}$  是包含引力子-费米子顶点修正和费米子自能修正在内的有效的顶点修正. 它可以给出如下形式的手征流的辐射修正:

$$J_5^p \sim \int_P \text{tr} [\gamma^5 \gamma^\rho \not{P}_1 \delta \Gamma^{\mu\nu} \not{P}_2] \frac{h_{\mu\nu}}{2}. \quad (49)$$

按照上述动量和度规扰动的取法, 容易得到 (45) 式和 (43) 式均能导致  $z$  方向的手征流:

$$\begin{aligned} & \text{tr} [\gamma^5 \gamma^3 \not{P}_1 \gamma^{\{\mu} P^{\nu\}} \not{P}_2] h_{\mu\nu} \\ &= \text{tr} [\gamma^5 \gamma^3 \not{P}_1 (-\gamma \cdot \hat{l} P^{\{\mu} \hat{l}^{\nu\}}) \not{P}_2] h_{\mu\nu} \\ &\propto i p^2 q v \sim p^2 \omega. \end{aligned} \quad (50)$$

最后, 再分析 (43) 式中的对数项在  $q \rightarrow 0$  时的红外发散. 这一发散只在 II 和 IV 中出现. 如果进一步只考虑与涡旋存在耦合的红外发散项, 即  $\mu\nu = 0x$  的项. 它唯一地来自于 IV, 并可以被锁定到 (40) 式中  $\lambda_{\mu\nu} = xxz$  的情况. 这种情况在附录中单独作了讨论, 并可最终归结为 (69) 式的积分. 在  $q \rightarrow 0$  的极限下, 可以发现被积函数在  $\cos \theta \rightarrow 1$  存在不可积的共线发散<sup>①</sup>.  $q \neq 0$  将这一不可积的发散转化成对数发散. 这一对数发散可被介质的屏蔽效应截断: 在介质中费米子和光子将获得热质量使得相应的动量不再是类光的, 足以截断共线发散. 当  $q$  远小于热质量时, 不难想象热质量将代替  $q$  成为红外截断. 基于这一预期, 可以推断 (47) 式和 (48) 式的结果会部分地抵消. 下面具体地考虑介质的屏蔽效应.

先写下给出对数发散的结构 IV:

$$\begin{aligned} & -4K^\mu K^\nu \not{K} \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} (f(k_0) + \tilde{f}(k_0)) \\ & + (P_1 \rightarrow P_2). \end{aligned} \quad (51)$$

可以看到介质的屏蔽效应将使结果在  $q \rightarrow 0$  的极限是红外安全的, 因此下面的讨论中用  $P$  代替  $P_1$  和  $P_2$ . 在 (51) 式中, 分布函数  $\tilde{f}(k_0)$  和  $f(k_0)$  分别来自于图 2 和图 3. 导致红外发散的因子  $1/(2K \cdot P)$  在图 2 和图 3 中分别来自于费米子传播子和光子传播子. 考虑介质的屏蔽效应需要将其相应地替换成重求和的传播子. 重求和的费米子传播子已在 (44) 式中给出. 我们需要的是  $P \rightarrow L = K - P$  的情况. 考虑到  $K \gg P$ , 可对  $\Delta_\pm$  作展开得到:

$$\Delta_+ \approx \left( -p + p \cdot \hat{k} - \frac{m_f^2}{k} \right)^{-1}, \quad \Delta_- \approx (2k)^{-1}. \quad (52)$$

注意到  $\Delta_- \ll \Delta_+$ , 因此可以只保留  $\Delta_+$  分量, 并用  $\hat{l} \approx \hat{k}$  将传播子近似为

$$\begin{aligned} S^{\text{ra}} &\approx \frac{i}{2(-p + p \cdot \hat{k} - m_f^2/k)} (\gamma^0 - \gamma \cdot \hat{k}) \\ &= \frac{i \not{K}}{-2(K \cdot P + m_f^2)}. \end{aligned} \quad (53)$$

这相当于对来自于费米子传播子的共线因子做了如下的替换:

$$\frac{1}{2K \cdot P} \rightarrow \frac{1}{2K \cdot P + m_f^2}. \quad (54)$$

对于共线因子来自于光子传播子的情况, 选取库仑规范下的重求和的光子传播子<sup>[42]</sup>:

$$D_{\mu\nu}^{\text{ra}}(L) = \frac{i}{L^2 - \Pi_T^R} P_{\mu\nu}^T(L) + \frac{i}{l^2 - \Pi_L^R} u_\mu u_\nu, \quad (55)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_T^R &= m_\gamma^2 \frac{l_0}{l} \left[ \left( 1 - \frac{l_0^2}{l^2} \right) Q_0 \left( \frac{l_0}{l} \right) + \frac{l_0}{l} \right], \\ \Pi_L^R &= -\frac{l^2}{L^2} 2(m_\gamma^2 - \Pi_T^R). \end{aligned} \quad (56)$$

注意到  $L = K - P$  并且  $K \gg P$ , 容易发现纵向的传播子分量可忽略, 剩下的横向分量可近似成

$$D_{\mu\nu}^{\text{ra}} \approx \frac{i}{-2K \cdot P - m_\gamma^2} P_{\mu\nu}^T(K), \quad (57)$$

这里除了共线因子的替换

$$\frac{1}{2K \cdot P} \rightarrow \frac{1}{2K \cdot P + m_\gamma^2} \quad (58)$$

外, 还伴随着极化张量的变化  $g_{\mu\nu} \rightarrow -P_{\mu\nu}^T$ . 事实上利用横向投影算符  $P_{\mu\nu}^T(K)$  的性质很容易证明, 极化张量的变化并不改变最终的狄拉克结构. 因此, 介质屏蔽效应带来的改变仅仅是 (54) 式和 (58) 式中的替换, 其中  $P$  可以是  $P_1$  或  $P_2$ .

上述替换可以通过在 (69) 式中令  $a = (p^2 + q^2/4)^{1/2} - p \cos \theta + m^2/k$  来实现. 取决于对应传播子的类型,  $m^2$  可取为  $m_f^2$  或  $m_\gamma^2$ . 当  $q \ll m^2/k \sim e^2 T$  时, 作如下近似  $a \approx p - p \cos \theta + m^2/k$ . 此时可以忽略 (69) 式中的  $b$  以得到下列结果:

$$\begin{aligned} & \int d\cos \theta \sin^2 \theta \frac{-2\pi}{ac^2} \\ &= -\frac{2\pi \ln(1 + 2pk/m^2)}{pq^2} \approx -\frac{2\pi \ln(2pk/m^2)}{pq^2}. \end{aligned} \quad (59)$$

热质量正规化的效果等价于在 (43) 式中对  $-\gamma \cdot \hat{l} P^{\{\mu} \hat{l}^{\nu\}} (1/p^2)$  的系数作如下的替换:

① 事实上这一共线发散和前面讨论中被抵消的共线发散略有区别, 此时  $K$  与  $P_{1,2}$  共线和  $K \cdot Q \rightarrow 0$  同时发生.

$$\begin{aligned}
 & 4\pi e^2 \int \frac{k dk}{(2\pi)^2} \ln \frac{2p}{q} \left( \tilde{f}(k_0) + f(k_0) \right) \\
 & \rightarrow 2\pi e^2 \int \frac{k dk}{(2\pi)^2} \left( \ln \frac{2pk}{m_\gamma^2} \tilde{f}(k_0) + \ln \frac{2pk}{m_f^2} f(k_0) \right), \\
 & \Rightarrow m_f^2 \ln \frac{2p}{q} \rightarrow \frac{m_f^2}{2} \left[ \frac{1}{3} \ln \frac{2p}{m_\gamma^2} + \frac{2}{3} \ln \frac{2p}{m_f^2} + 1 \right. \\
 & \quad \left. - 12 \ln A + \frac{1}{3} \ln(16\pi^3 T^3) \right], \quad (60)
 \end{aligned}$$

其中  $A \approx 1.282$  为 Glaisher 常数.

在前面的分析中可以看到, 虽然狄拉克结构  $-\gamma \cdot \hat{P} \{ \mu \hat{l}^\nu \}$  不能被解释成对自旋-涡旋耦合的修正, 但它仍对手征涡旋效应产生贡献. 特别地, (50) 式中的等号表明, 它对手征流的贡献与狄拉克结构  $\gamma^{\{\mu P^\nu\}}$  等同. 因此可以对两个结构的系数直接求和:

$$\begin{aligned}
 & \frac{m_f^2}{2p^2} \left( 1 - \ln \frac{2p^2}{m_f^2} \right) + \frac{m_f^2}{2p^2} \left( \frac{1}{3} \ln \frac{2p}{m_\gamma^2} + \frac{2}{3} \ln \frac{2p}{m_f^2} \right) \\
 & + 1 - 12 \ln A + \frac{1}{3} \ln(16\pi^3 T^3) \\
 & = \frac{m_f^2}{p^2} \left[ 1 - 6 \ln A + \frac{1}{6} \ln(16\pi^3) \right] \\
 & + \frac{m_f^2}{2p^2} \ln \frac{T}{p} + \frac{m_f^2}{6p^2} \ln \frac{m_f^2}{m_\gamma^2}. \quad (61)
 \end{aligned}$$

我们指出上述结果的两个有趣的性质: 1) 费米子和光子的热质量以比值的形式在对数中出现. 引用具体结果  $m_f^2 = \frac{1}{8}e^2 T^2$ ,  $m_\gamma^2 = \frac{1}{6}e^2 T^2$ , 可以发现结果中不存在  $\ln e^{-1}$  形式的对数增强; 2) 由于  $p \ll T$ , 上述结果中占主导的是第二项并且是正的贡献. 事实上, (61) 式中的三项分别独立地取正值. 这些性质定性地与文献 [31] 的结果相符. 虽然由于计算中采用了运动学限制  $p \ll T$ , 在这里给出的对手征流的贡献并不是主要的, 但上述结果与文献 [31] 的符合暗示了我们得到的形状因子的结果或定性地反映了  $p \sim T$  的费米子与引力子散射的性质.

## 4 总结和展望

本文研究了有限温度介质对引力形状因子的修正效应. 首先将真空中的引力形状因子的定义推广到零质量费米子的情形. 通过引入合适的度规扰动来模拟流体的涡旋, 发现引力形状因子可以描述

熟知的自旋-涡旋耦合. 根据等效性原理, 真空中的辐射修正不能改变自旋-涡旋耦合的强度.

基于洛伦兹不变性的等效性原理在介质中不再成立. 以量子电动力学等离子体介质为例, 进一步研究了引力形状的介质修正, 并以此讨论介质对自旋-涡旋耦合的可能修正. 在硬热圈近似下, 得到只有两个结构对费米子在涡旋场中的散射有贡献, 其中之一来自于费米子的自能修正, 它可以被解释为介质对自旋-涡旋耦合的修正效应. 本文的结果指向介质中自旋-涡旋耦合的压低; 另一贡献来自于对引力子-费米子的顶点修正, 它不能被解释为势能, 而是对应初末态之间的跃迁矩阵元. 这一贡献在引力子动量趋于零时存在红外发散. 通过引入介质的屏蔽效应得到了红外安全的结果. 本文的分析表明, 上述两个结构均对手征涡旋效应有贡献. 当综合两部分贡献时, 发现总的效果是辐射修正导致了手征流的增强, 与已知的结果定性地符合.

考虑到本文涉及到的图和量子色动力学等离子体有一一对应关系, 因此我们认为上述结论对于后者仍成立. 对于局域热平衡态的自旋极化效应, 只有第一个结构对应的自旋-涡旋耦合起作用. 因此只需考虑来自于费米子自能的贡献. 唯一需要改变的是热质量的表达式, 此时有  $m_f^2 = \frac{1}{8}g^2 T^2 C_F$ , 其中  $C_F = 4/3$ . 考虑在重离子碰撞现象学上的应用, 进一步取  $\alpha_s = 0.3$ ,  $T = 350$  MeV 以及  $p = 1$  GeV. 注意此时硬热圈近似不适用, 但考虑到这一压低完全来自于费米子的场强重整化因子, 介质对自旋-涡旋耦合的压低效应或具有一定的普遍性, 基于 (45) 式将得到自旋-涡旋耦合存在 9% 左右的压低. 这一结果表明目前尚未被考虑的辐射修正可能会在重离子碰撞的自旋极化现象中有不可忽略的效应.

本文得到的引力形状因子的介质修正可以用来研究自旋和所有流体梯度的耦合. 本文只考虑了自旋与流体涡旋的耦合, 并只保留了形状因子的实部. 由于自旋与涡旋的耦合具有简单的势能形式, 实部足够描述它们之间的相互作用. 而自旋与其他形式的流体梯度, 例如剪切的耦合可能会导致自旋的耗散. 这里的耗散效应可以由引力形状因子中的虚部来描述. 自旋的耗散也是重离子碰撞中的自旋极化现象不可缺少因素.

本文讨论的是费米子的引力形状因子, 类似的



讨论也适用于费米子的电磁形状因子. 一个有趣的问题是手征极限下, 自旋-磁场耦合如何被介质修正? 这将对费米子在磁场中的热力学<sup>[43,44]</sup>和手征磁效应(最新的综述参见文献<sup>[45]</sup>)均产生影响. 另一个可能的拓展是讨论非相对论性的 Weyl 费米子, 相应的电磁形状因子可被用于研究非相对论的手征动力学理论中的辐射修正<sup>[46]</sup>.

最后本文讨论形状因子的方法也可以被推广到矢量介子等复合粒子. 最新的实验研究发现矢量介子也存在自旋排列现象<sup>[47]</sup>, 相关讨论参见文献<sup>[10,11,48]</sup>. 矢量介子的引力形状因子可为描述矢量介子的自旋与流体梯度的耦合提供一种新的方法, 我们将在后续的工作中作进一步研究.

感谢侯德富教授富有启发性的讨论.

## 附录 IV 中积分的正规化

我们需要计算如下类型的积分:

$$\begin{aligned} & \left( K^\lambda - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\lambda \right) \left( K^\mu - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\mu \right) \\ & \times \left( K^\nu - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\nu \right) \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} \left( f(k_0) + \tilde{f}(k_0) \right) \\ & \left( K^\lambda - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\lambda \right) \left[ \left( K^\mu - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\mu \right) \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\nu + (\mu \leftrightarrow \nu) \right] \\ & \times \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} \left( f(k_0) + \tilde{f}(k_0) \right) \\ & \left( K^\lambda - \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} P_1^\lambda \right) \left( \frac{K \cdot u}{P_1 \cdot u} \right)^2 P_1^\mu P_1^\nu \frac{1}{2K \cdot P_1} \frac{Q^2}{(2K \cdot Q)^2} \\ & \times \left( f(k_0) + \tilde{f}(k_0) \right), \end{aligned} \quad (A1)$$

这里来自于分母  $(2K \cdot Q)^2$  的发散看起来是不可避免的. 为解决这一问题, 需要恢复  $i\epsilon$ . 注意到上述分母来自对传播子  $D_{\text{ra}}(K - Q)$  和  $D_{\text{ar}}(K + Q)$  的展开. 因此在展开式中可以作如下的替换:  $-2K \cdot Q \rightarrow -2K \cdot Q - i\text{sgn}(k_0)\epsilon$ ,  $2K \cdot Q \rightarrow 2K \cdot Q + i\text{sgn}(k_0)\epsilon$ . 考虑到此时  $k_0 = \pm k$  给出相同的贡献这一结论仍然成立, 取  $k_0 = k$  并将上述分母替换成  $(2K \cdot Q + i\epsilon)^2$ . 为简化标记, 定义

$$a = \left( p^2 + \frac{q^2}{4} \right)^{1/2} - p \cos \theta, \quad b = \frac{q}{2} \sin \theta, \quad c = \frac{q}{2} \sin \theta. \quad (A2)$$

(62) 式的第一项指标可取为  $\lambda\mu\nu = zzz, zxx, yxy, zyy, zzy$ ; 第二项指标可取为  $\lambda\mu = zz, xx, zy$ ; 第三项指标可取为  $\lambda = z$ . 在  $q \rightarrow 0$  的极限下, 剩余指标只能取 0 或  $z$ . 下面以第一项中指标  $\lambda\mu\nu = zzz$  的情况为例展示角度积分的计算, 对应积分的角度依赖部分可写为

$$\begin{aligned} & \int d\cos\theta d\varphi \left( \cos\theta - \frac{p}{(p^2 + q^2/4)^{1/2}} \right)^3 \\ & \times \frac{1}{4(a + b \sin\varphi)(c \sin\varphi + i\epsilon)^2}, \end{aligned} \quad (A3)$$

$\varphi$  的积分可先积出得到:

$$\begin{aligned} & \int d\cos\theta \left( \cos\theta - \frac{p}{(p^2 + q^2/4)^{1/2}} \right)^3 \\ & \times \frac{2\pi \left( \frac{b^2}{a^2 - b^2} - \frac{\epsilon ac^2}{(c^2 + \epsilon^2)^{3/2}} + \frac{ibc(c^2 + 2\epsilon^2)}{(c^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \right)}{4(ac - i\epsilon b)^2}. \end{aligned} \quad (A4)$$

取  $\epsilon \rightarrow 0$  的极限, 此时 (65) 式的分母简化为  $(ac - i\epsilon b)^2 \rightarrow (ac)^2$ . 由于我们关心的是对应实部的自旋-涡旋耦合势, 因此在分子中舍弃最后的纯虚数项. 第二项表面上看  $\epsilon \rightarrow 0$  趋于零, 其实不然. 因为  $c = \frac{q}{2} \sin\theta$ , 在  $\sin\theta \sim \epsilon$  的积分区间可以产生有限的贡献, 所以需要保留. 分别对第一项和第二项作  $d\cos\theta$  的积分:

$$\begin{aligned} & \int d\cos\theta \left[ \cos\theta - \frac{p}{(p^2 + q^2/4)^{1/2}} \right]^3 \frac{2\pi \left( \frac{b^2}{a^2 - b^2} \right)}{4(ac)^2} \approx -\frac{\pi}{p^3}, \\ & \int d\cos\theta \left[ \cos\theta - \frac{p}{(p^2 + q^2/4)^{1/2}} \right]^3 \frac{2\pi \left( -\frac{\epsilon ac^2}{(c^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \right)}{4(ac)^2} \approx \frac{8\pi}{pq^2}, \end{aligned} \quad (A5)$$

其中在第二项的结果中取了  $\epsilon \rightarrow 0$  的极限.  $\approx$  表示在结果中只保留了  $q \rightarrow 0$  的极限下占主导的贡献. 相比两项的结果可以看出, 第一项的贡献在  $q \rightarrow 0$  的极限下可被忽略.

为后边方便处理红外发散, 单独讨论第二项指标取  $\lambda\mu = xx$  的情况. 这时相应的积分可写为

$$\int d\cos\theta d\varphi \frac{\cos^2\varphi \sin^2\theta}{4(a + b \sin\varphi)(c \sin\varphi + i\epsilon)^2}. \quad (A6)$$

$\varphi$  的积分给出

$$\int d\cos\theta \sin^2\theta \frac{2\pi \left( ibc + a\epsilon - \sqrt{(a^2 - b^2)(c^2 + \epsilon^2)} \right)}{(ac - i\epsilon b)^2 \sqrt{c^2 + \epsilon^2}}. \quad (A7)$$

仍然取分母  $(ac - i\epsilon b)^2 \rightarrow (ac)^2$ . 在分子中的第一项是纯虚数, 第二项的被积函数仅当  $\sin\theta \sim \epsilon$  时是有限的, 但相应的积分区间  $d\cos\theta \sim \epsilon$ , 因此在  $\epsilon \rightarrow 0$  的极限下趋于零. 只剩下第三项:

$$\int d\cos\theta \sin^2\theta \frac{-2\pi \sqrt{a^2 - b^2}}{4(ac)^2} \approx -\frac{4\pi \ln \frac{2p}{q}}{pq^2}. \quad (A8)$$

其他项的情况可类似得到, 在此不再赘述.

## 参考文献

- [1] Adamczyk L, et al. 2017 *Nature* **548** 62
- [2] Liang Z T, Wang X N 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 102301



- [erratum: 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 039901]
- [3] Liang Z T, Wang X N 2005 *Phys. Lett. B* **629** 20
- [4] Gao J H, Chen S W, Deng W T, Liang Z T, Wang Q, Wang X N 2008 *Phys. Rev. C* **77** 044902
- [5] Huang X G, Huovinen P, Wang X N 2011 *Phys. Rev. C* **84** 054910
- [6] Jiang Y, Lin Z W, Liao J 2016 *Phys. Rev. C* **94** 044910 [erratum: 2017 *Phys. Rev. C* **95** 049904]
- [7] Gao J H, Ma G L, Pu S, Wang Q 2020 *Nucl. Sci. Tech.* **31** 90
- [8] Liu Y C, Huang X G 2020 *Nucl. Sci. Tech.* **31** 56
- [9] Becattini F, Lisa M A 2020 *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **70** 395
- [10] Sun X, Zhou C S, Chen J H, Chen Z Y, Ma Y G, Tang A H, Xu Q H 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 072401 (in Chinese) [孙旭, 周晨升, 陈金辉, 陈震宇, 马余刚, 唐爱洪, 徐庆华 2023 物理学报 **72** 072401]
- [11] Gao J H, Huang X G, Liang Z T, Wang Q, Wang X N 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 072501 (in Chinese) [高建华, 黄旭光, 梁作堂, 王群, 王新年 2023 物理学报 **72** 072501]
- [12] Becattini F, Karpenko I 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 012302
- [13] Wei D X, Deng W T, Huang X G 2019 *Phys. Rev. C* **99** 014905
- [14] Fu B, Xu K, Huang X G, Song H 2021 *Phys. Rev. C* **103** 024903
- [15] Adam J, et al. 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 132301
- [16] Liu S Y F, Yin Y 2021 *JHEP* **07** 188
- [17] Becattini F, Buzzegoli M, Palermo A 2021 *Phys. Lett. B* **820** 136519
- [18] Hidaka Y, Pu S, Yang D L 2018 *Phys. Rev. D* **97** 016004
- [19] Fu B, Liu S Y F, Pang L, Song H, Yin Y 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 142301
- [20] Becattini F, Buzzegoli M, Inghirami G, Karpenko I, Palermo A 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 272302
- [21] Yi C, Pu S, Yang D L 2021 *Phys. Rev. C* **104** 064901
- [22] Fu B, Pang L, Song H, Yin Y 2022 arXiv: 2201.12970 [hep-ph]
- [23] Wu X Y, Yi C, Qin G Y, Pu S 2022 *Phys. Rev. C* **105** 064909
- [24] Lin S, Wang Z 2022 *JHEP* **12** 030
- [25] Liu Y C, Huang X G 2022 *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **65** 272011
- [26] Kobzarev I Y, Okun L B 1962 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **43** 1904
- [27] Pagels H 1966 *Phys. Rev.* **144** 1250
- [28] Donoghue J F, Holstein B R, Robinett R W 1984 *Phys. Rev. D* **30** 2561
- [29] Donoghue J F, Holstein B R, Robinett R W 1985 *Gen. Rel. Grav.* **17** 207
- [30] Buzzegoli M, Kharzeev D E 2021 *Phys. Rev. D* **103** 116005
- [31] Hou D F, Liu H, Ren H C 2012 *Phys. Rev. D* **86** 121703
- [32] Polyakov M V, Schweitzer P 2018 *Int. J. Mod. Phys. A* **33** 1830025
- [33] Chen J Y, Son D T, Stephanov M A, Yee H U, Yin Y 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 182302
- [34] Hidaka Y, Pu S, Yang D L 2017 *Phys. Rev. D* **95** 091901
- [35] Dong L, Lin S 2022 *Eur. Phys. J. A* **58** 176
- [36] Hattori K, Hidaka Y, Yang D L 2019 *Phys. Rev. D* **100** 096011
- [37] Weickgenannt N, Sheng X L, Speranza E, Wang Q, Rischke D H 2019 *Phys. Rev. D* **100** 056018
- [38] Gao J H, Liang Z T 2019 *Phys. Rev. D* **100** 056021
- [39] Liu Y C, Mameda K, Huang X G 2020 *Chin. Phys. C* **44** 094101 [erratum: 2021 *Chin. Phys. C* **45** 089001]
- [40] Guo X 2020 *Chin. Phys. C* **44** 104106
- [41] Chou K C, Su Z B, Hao B I, Yu L 1985 *Phys. Rep.* **118** 1
- [42] Bellac M L 2011 *Thermal Field Theory* (Cambridge: Cambridge University Press) pp118–140
- [43] Zhang C, Fang R H, Gao J H, Hou D F 2020 *Phys. Rev. D* **102** 056004
- [44] Fang R H, Dong R D, Hou D F, Sun B D 2021 *Chin. Phys. Lett.* **38** 091201
- [45] Zhao X L, Ma G L, Ma Y G 2023 *Acta Phys. Sin.* Accepted (in Chinese) [赵新丽, 马国亮, 马余刚 2023 物理学报 Accepted]
- [46] Gao L L, Huang X G 2022 *Chin. Phys. Lett.* **39** 021101
- [47] Abdallah M S, et al. 2023 *Nature* **614** 7947
- [48] Wang X N 2023 *Nucl. Sci. Tech.* **34** 15

SPECIAL TOPIC—Spin and chiral effects in high energy heavy ion collisions

# Medium correction to gravitational form factors<sup>\*</sup>

Lin Shu<sup>†</sup> Tian Jia-Yuan

(*School of Physics and Astronomy, Sun Yat-Sen University, Zhuhai 519082, China*)

( Received 31 December 2022; revised manuscript received 21 February 2023 )

## Abstract

We generalize the gravitational form factor for chiral fermion in vacuum, which reproduces the well-known spin-vorticity coupling. We also calculate radiative correction to the gravitational form factors in quantum electrodynamics plasma. We find two structures in the form factors contributing to the scattering amplitude of fermion in vorticity field, one is from the fermion self-energy correction, pointing to suppression of spin-vorticity coupling in medium; the other structure comes from graviton-fermion vertex correction, which does not adopt potential interpretation, but corresponds to transition matrix element between initial and final states. Both structures contribute to chiral vortical effect. The net effect is that radiative correction enhances the chiral vortical effect. Our results clarify the relation and difference between spin-vorticity coupling and chiral vortical effect from the perspective of form factors. We also discuss the application of the results in QCD plasma, indicating radiative correction might have an appreciable effect in spin polarization effect in heavy ion collisions.

**Keywords:** gravitational form factor, spin-vorticity coupling, radiative correction, heavy ion collisions

**PACS:** 12.38.Mh, 11.10.Wx

**DOI:** 10.7498/aps.72.20222473

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 2075328, 1735007).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [linshu8@mail.sysu.edu.cn](mailto:linshu8@mail.sysu.edu.cn)

## 引力形状因子的介质修正

林树 田家源

### Medium correction to gravitational form factors

Lin Shu Tian Jia-Yuan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 071201 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222473

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222473>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

非规则形状介质内辐射-导热耦合传热的间断有限元求解

Discontinuous finite element solutions for coupled radiation-conduction heat transfer in irregular media

物理学报. 2020, 69(3): 034401 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191185>

线性引力论的引力磁分量及其磁效应

The gravitational magnetic component and its magnetic effects in linearized theory of gravity

物理学报. 2020, 69(13): 130401 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191673>

克尔度规引力场对费米子的量子散射

Quantum scattering of fermion by gravitational field with Kerr metric

物理学报. 2022, 71(21): 210401 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220876>

万有引力常数G精确测量实验进展

Progress on the precision measurement of the Newtonian gravitational constant G

物理学报. 2018, 67(16): 160603 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181381>

非对易施瓦西黑洞的热力学及其量子修正

Thermodynamics and its quantum correction of non-commutative Schwarichild black hole

物理学报. 2019, 68(20): 200401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191054>

自旋-轨道耦合系统的电子涡旋

Electron vortices in spin-orbit coupling system

物理学报. 2022, 71(21): 210301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220751>