

# 三模型随机场对一维量子 Ising 模型动力学性质的调控\*

袁晓娟<sup>†</sup>

(齐鲁师范学院物理与电子工程学院, 济南 250200)

(2023 年 1 月 10 日收到; 2023 年 2 月 11 日收到修改稿)

量子自旋系统在外磁场下的动力学性质一直是凝聚态理论和统计物理研究的热点. 本文利用递推关系方法, 通过计算系统的自旋关联函数及其对应的谱密度, 研究了三模型随机外场对一维量子 Ising 模型动力学性质的调控效应. 在三模型随机横场下, 利用  $r$  分支引入了非磁性杂质, 研究表明: 非磁性杂质使得系统的低频响应得到保持, 中心峰值行为更加明显; 非磁性杂质与横场之间的竞争能激发出新的频率响应, 呈现多峰行为; 但较多的非磁性杂质最终会限制系统对横场的响应. 此外, 研究还发现随机横场的三模分布参数满足  $qB_q = pB_p$  这一条件, 是使中心峰值行为得到保持的有利条件. 在三模型随机纵场下,  $r$  分支仅仅起到调节纵场强度的作用, 且  $r$  分支所占比重的增大不利于低频响应, 与三模型随机横场下  $r$  分支的调控作用是相反的.

**关键词:** Ising 模型, 三模分布, 自旋关联函数, 谱密度**PACS:** 75.10.Pq, 75.40.Gb, 75.10.Jm, 75.50.Lk**DOI:** 10.7498/aps.72.20230046

## 1 引言

外磁场对量子自旋系统动力学性质的调控一直是实验和理论关注的焦点, 众多研究表明低维量子自旋系统在外磁场调控下能够表现出非常丰富的物理性质. 例如, 横向磁场 (横场) 能够诱导 XY-like 量子铁磁体  $\text{Cs}_2\text{CoCl}_4$  发生有序-无序相变<sup>[1]</sup>, 诱导 Ising-like 反铁磁体  $\text{BaCo}_2\text{V}_2\text{O}_8$  发生铁磁-反铁磁相变<sup>[2]</sup>, 可以快速抑制 Ising-like 反铁磁体  $\text{SrCo}_2\text{V}_2\text{O}_8$  的 Néel 温度等<sup>[3]</sup>. 在 Ising-like 光学晶格中, 通过改变纵向磁场 (纵场) 可以引起顺磁-反铁磁相变<sup>[4]</sup>. 而横场和纵场共同存在时的混合磁场 (又称倾斜磁场) 对自旋系统性质的调控更为明显, 研究发现混合磁场对系统的基态相图<sup>[5,6]</sup>、热力学性质<sup>[7]</sup>、临界行为<sup>[8,9]</sup>、量子相变<sup>[10]</sup> 和动力学行为<sup>[11]</sup> 等现象的影响明显不同于外加磁场只有横场或纵

场时的结果.

截至目前, 对于纯自旋系统已有大量的研究, 且取得了丰硕的成果. 但对随机自旋系统的研究仍然处于发展阶段, 这是由于实际材料中的无序效应非常复杂, 有时根本没有规律可循. 不同于纯自旋系统, 在随机自旋系统中, 系统的自旋-自旋耦合作用或外加磁场不再为常数, 而是被取为满足某种概率分布的随机数. 从数学角度来看, 随机分布的选取是任意的, 常被采用的几种典型随机分布是离散型的双模分布<sup>[12–15]</sup>、连续型的高斯分布<sup>[16,17]</sup> 和更广义的双高斯分布<sup>[18,19]</sup> 等. 但从物理角度来看, 随机分布的选取还要考虑实际材料的性质. 比如晶格中的非磁性杂质 (非磁性自旋、空位或缺陷) 不会受到外磁场的影响, 且非磁性杂质的存在会降低系统的随机性等<sup>[20]</sup>. 因此可以将纯数学的随机分布进行扩展, 间接引入某些实际因素, 例如改变版的双模分布<sup>[21]</sup>、各项异性场依赖的双模分布<sup>[22]</sup>、对称

\* 山东省自然科学基金 (批准号: ZR2021MA073)、山东省高等学校科技计划项目 (批准号: J18KB104) 和齐鲁师范学院青年博士支持计划 (批准号: QBJH19-0006) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: [yuanxiaojuan@163.com](mailto:yuanxiaojuan@163.com)

或非对称的三模随机分布等<sup>[23–25]</sup>.

由于三模分布可以蜕化为双模分布, 且在特殊参数 ( $p = 1/3$ ) 下是高斯分布的一个很好的近似<sup>[26,27]</sup>, 因此备受关注. 一些稀释反铁磁体 (如  $\text{Fe}_x\text{Zn}_{1-x}\text{F}_2$ ), 氰化物晶体 (如  $X(\text{CN})_xY_{1-x}$ ,  $X = \text{K}, \text{Na}, \text{Rb}$ ,  $Y = \text{Br}, \text{Cl}, \text{I}$ ) 等材料在外磁场下的性质, 可以采用三模分布进行描述<sup>[20,23]</sup>. 目前研究者们对于 Ising 模型在三模型随机外场下的平衡态性质进行了大量研究, 但未见对其动力学性质的研究. 为了深入研究三模型随机场对 Ising 模型动力学性质的调控, 本工作从三模型随机横场和三模型随机纵场两个角度分别探讨, 计算了系统的自旋关联函数和谱密度, 得到了丰富的动力学结果.

## 2 模型及方法

考虑混合磁场 Ising 模型, 其外加磁场既有横场又有纵场<sup>[11,28–31]</sup>, 哈密顿量为

$$H = -\frac{1}{2}J \sum_i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \frac{1}{2} \sum_i B_{iz} \sigma_i^z - \frac{1}{2} \sum_i B_{ix} \sigma_i^x, \quad (1)$$

其中  $J$  代表自旋-自旋耦合交换相互作用,  $\sigma_i^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) 为格点  $i$  处的自旋泡利算符,  $B_{iz}$  为横场,  $B_{ix}$  为纵场. 计算时采用周期性边界条件  $\sigma_{i+N}^\alpha = \sigma_i^\alpha$ , 哈密顿中的  $1/2$  是为了理论推导方便而引入的常数. 特殊情况下, 当纵场  $B_{ix} \equiv 0$  时, 该模型蜕化为一维横场 Ising 模型<sup>[12,16]</sup>.

为了深入研究三模型随机场对 Ising 模型动力学性质的调控, 从随机横场和随机纵场两个角度进行探讨. 考虑横场和纵场相互独立, 当横场满足三模分布时<sup>[20]</sup>:

$$\rho(B_{iz}) = p\delta(B_{iz} - B_p) + q\delta(B_{iz} - B_q) + r\delta(B_{iz}), \quad (2)$$

纵场取值  $B_{ix} \equiv 0$ . 当纵场满足三模分布时:

$$\rho(B_{ix}) = p\delta(B_{ix} - B_p) + q\delta(B_{ix} - B_q) + r\delta(B_{ix}), \quad (3)$$

横场取值为常数, 如  $B_{iz} \equiv 1$ . 在三模分布中, 系数  $p$ ,  $q$  和  $r$  的取值区间为  $[0, 1]$ , 且满足约束条件  $p + q + r = 1$ . (2) 式的物理意义是横场取值为  $B_p$ ,  $B_q$  和 0 的概率分别为  $p$ ,  $q$  和  $r$ , 其中系数  $r$  可以理解为非磁性杂质所占的比重, 因为非磁性杂质不会受到随机外场的影响, 且可以降低系统的随机性. 同样可以类似地理解 (3) 式的物理意义. 特殊情况下, 当  $p = q = (1 - r)/2$  时, (2) 式和 (3) 式化为对称的三模分布, 早期研究经常采用这种对称形式<sup>[23,24]</sup>;

当  $r \equiv 0$  时, 三模分布蜕化为双模分布. 若横场和纵场同时满足三模分布, 或者横场和纵场不是相互独立的, 则情况较复杂, 本工作暂不讨论.

求解含时自旋关联函数<sup>[32]</sup> 是研究自旋动力学性质的关键, 其定义式为

$$C(t) = \overline{\langle \sigma_j^x(t) \sigma_j^x(0) \rangle}, \quad (4)$$

式中  $\overline{\langle \rangle}$  表示先求统计平均, 然后再对无序求平均. 对自旋关联函数进行傅里叶变换可以得到对应的谱密度

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} C(t), \quad (5)$$

且  $\Phi(\omega)$  可以实验测量<sup>[33]</sup>, 例如中子散射实验、中子自旋回声实验等.

众多研究表明由 Lee<sup>[34–36]</sup> 提出的递推关系方法 (recursion method) 是求解  $C(t)$  及  $\Phi(\omega)$  的最有效的方法之一. 该方法最初用来求解广义 Langevin 方程, 之后被逐渐用于研究自旋系统的动力学, 例如多粒子系统、电子气、谐振子链、简单流体等系统<sup>[37]</sup>. 下面简述递推关系方法.

在量子自旋系统中, 力学量  $\sigma_j^x(t)$  的演化满足 Liouville 方程:

$$\frac{d\sigma_j^x(t)}{dt} = iL\sigma_j^x(t), \quad (6)$$

其中  $L$  为 Liouville 算符, 其定义为  $LA = [H, A] \equiv HA - AH$ ,  $H$  为系统的哈密顿量. 递推关系方法的核心是将力学量  $\sigma_j^x(t)$  按照一组完备的正交基矢  $\{f_\nu\}$  展开, 表达式为

$$\sigma_j^x(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(t) f_\nu, \quad (7)$$

其中,  $\{a_\nu(t)\}$  为一组依赖于时间的函数, 表示  $t$  时刻  $\sigma_j^x(t)$  在基矢  $\{f_\nu\}$  上的投影.

若选择零阶基矢  $f_0 = \sigma_j^x(0)$ , 则基矢  $\{f_\nu\}$  满足如下递推关系式:

$$f_{\nu+1} = iLf_\nu + \Delta_\nu f_{\nu-1}, \quad \nu \geq 0, \quad (8)$$

其中

$$\Delta_\nu = (f_\nu, f_\nu) / (f_{\nu-1}, f_{\nu-1}), \quad \nu \geq 1, \quad (9)$$

称为连分式系数或递推因子. 在 Hilbert 空间中, 任意两基矢  $X$  和  $Y$  的内积满足 Kubo 内积的形式:

$$(X, Y) = \beta^{-1} \int_0^\beta d\lambda \langle X(\lambda) Y^+ \rangle - \langle X \rangle \langle Y^+ \rangle, \quad (10)$$

其中  $X(\lambda) = e^{\lambda H} X e^{-\lambda H}$ ,  $\langle XY \rangle = \frac{\text{Tr}(e^{-\beta H} XY)}{\text{Tr} e^{-\beta H}}$ ,

$\beta = (k_B T)^{-1}$ ,  $H$  为系统的哈密顿量,  $k_B$  为 Boltzmann 常数. 如果在高温极限下 ( $T \rightarrow \infty$ ) 对无序求平均, 内积可以简化为如下形式:

$$(X, Y) = \overline{\langle XY^+ \rangle}. \quad (11)$$

同时, 系数  $\{a_\nu(t)\}$  满足如下递推关系式:

$$\Delta_{\nu+1} a_{\nu+1}(t) = -\frac{da_\nu(t)}{dt} + a_{\nu-1}(t), \quad \nu \geq 0, \quad (12)$$

其中  $a_{-1}(t) \equiv 0$ . 可以证明  $a_0(t)$  正是所要求解的自旋关联函数  $C(t)$ . 将 (12) 式进行 Laplace 变换, 得到如下连分式:

$$a_0(z) = 1 / \left[ z + \Delta_1 / \left( z + \frac{\Delta_2}{z + \dots} \right) \right], \quad (13)$$

其中  $z = \varepsilon + i\omega$  ( $\varepsilon > 0$ ). (13) 式显示, 连分式是无穷阶的, 所以必须选用一种合理的截断方式将其截断. 其中高斯截断比较适合我们的模型, 由截断后的  $a_0(z)$  得到谱密度:

$$\Phi(\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \text{Re} a_0(z). \quad (14)$$

利用 (8) 式精确求解了前 9 个基矢  $f_1, f_2, \dots, f_9$ , 发现随着  $\nu$  的增大, 基矢越来越复杂. 这里仅给出前 3 个基矢及其相应的内积, 如下:

$$f_1 = B_{jz} \sigma_j^y, \quad (15)$$

$$f_2 = (\Delta_1 - B_{jz}^2) \sigma_j^x + B_{jz} B_{jx} \sigma_j^z + JB_{jz} (\sigma_{j-1}^x \sigma_j^z + \sigma_{j+1}^x \sigma_j^z), \quad (16)$$

$$f_3 = B_{jz} (\Delta_1 + \Delta_2 - B_{jz}^2 - 2J^2 - B_{jx}^2) \sigma_j^y - 2JB_{jz} B_{jx} \sigma_{j-1}^x \sigma_j^y - 2JB_{jz} B_{jx} \sigma_{j+1}^x \sigma_j^y - 2J^2 B_{jz} \sigma_{j-1}^x \sigma_{j+1}^y + JB_{(j-1)z} B_{jz} \sigma_{j-1}^y \sigma_j^z + JB_{jz} B_{(j+1)z} \sigma_{j+1}^y \sigma_j^z, \quad (17)$$

$$(f_1, f_1) = \overline{B_{jz}^2}, \quad (18)$$

$$(f_2, f_2) = \overline{\Delta_1^2} - 2\overline{\Delta_1 B_{jz}^2} + \overline{B_{jz}^4} + 2J\overline{B_{jz}^2} + \overline{B_{jz}^2 B_{jx}^2}, \quad (19)$$

$$(f_3, f_3) = \overline{\Delta_1^2 B_{jz}^2} + 2\overline{\Delta_1 \Delta_2 B_{jz}^2} + \overline{\Delta_2^2 B_{jz}^2} - 2\overline{\Delta_1 B_{jz}^4} - 2\overline{\Delta_2 B_{jz}^4} + \overline{B_{jz}^6} - 4J^2 \overline{\Delta_1 B_{jz}^2} - 4J^2 \overline{\Delta_2 B_{jz}^2} + J^2 \overline{B_{(j-1)z}^2 B_{jz}^2} + 4J^2 \overline{B_{jz}^4} + 8J^4 \overline{B_{jz}^2} + J^2 \overline{B_{jz}^2 B_{(j+1)z}^2} - 2\overline{\Delta_1 B_{jz}^2 B_{jx}^2} - 2\overline{\Delta_2 B_{jz}^2 B_{jx}^2} + 2\overline{B_{jz}^4 B_{jx}^2} + 12J^2 \overline{B_{jz}^2 B_{jx}^2} + \overline{B_{jz}^2 B_{jx}^4}. \quad (20)$$

利用 (9) 式计算了前 9 个连分式系数  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ ,

$\Delta_9$ , 进而得到自旋关联函数和谱密度. 需要注意, 以上计算是在高温极限下 ( $T \rightarrow \infty$ ) 进行的, 因此所得动力学结果不会受到相变的影响.

### 3 三模型随机横场对动力学的调控

为了清晰给出三模型随机横场下的动力学性质, 暂不考虑纵场的影响, 取  $B_{ix} \equiv 0$ , 此时混合磁场 Ising 模型蜕化为横场 Ising 模型 [12,16]. 为不失一般性, 令自旋耦合相互作用  $J \equiv 1$ , (2) 式中磁场的参考值可取  $B_p = 0.5 < J$  和  $B_q = 1.5 > J$ . 本工作采用非对称的三模分布, 即系数  $p$  和  $q$  可取不同值, 以期得到丰富的动力学结果和普遍性结论.

首先讨论  $r \equiv 0$  的情况, 即系统中没有非磁性杂质, 此时 (2) 式蜕化为双模分布. 由约束条件  $p + q + r = 1$ , 得  $p + q = 1$ . 图 1(a), (b) 给出  $q$  取不同值时的自旋关联函数及相应的谱密度. 当  $q$  值较小, 如  $q = 0$  或  $q = 0.25$  时, 关联函数随时间单调递减, 其谱密度峰值出现在  $\omega = 0$  处, 表现为典型的中心峰值行为. 这是由于此时横场取值为  $B_p = 0.5$  的概率较大, 横场明显小于自旋耦合相互作用, 系统的动力学性质由自旋耦合相互作用来主导, 表现为低频响应. 当  $q$  值较大, 如  $q = 1$  时, 关联函数以阻尼振荡形式衰减, 其谱密度峰值出现在  $\omega = 1.0 - 2.0$  处, 表现为典型的集体模行为. 此时横场取值为  $B_q = 1.5$  的概率最大, 当横场较强时, 动力学由横场来主导, 表现为高频响应. 当  $q$  和  $p$  取中间值或者两者相差不大时, 如  $q = p = 0.5$ , 此时横场和自旋耦合相互作用也相差不大, 因此两者之间的竞争较明显, 系统的动力学表现为介于中心峰值行为和集体模行为之间的无序行为 [16]. 显然, 随着  $q$  的增大, 系统的动力学经历了由中心峰值行为到集体模行为的交跨, 与已有结果相吻合 [12], 证明本文计算可行.

当  $r = 0.2$  时, 系统中非磁性杂质所占的比重较小, 由约束条件可得  $p + q = 0.8$ . 从图 1(c), (d) 可以看出, 当  $q = 0$  (或  $p = 0.8$ ) 时, 系统的动力学仍然表现为中心峰值行为. 但与  $r \equiv 0$  时相比, 关联函数衰减的幅度变慢, 且其谱密度在  $\omega = 0$  处的峰值变高. 说明非磁性杂质的出现使得系统的中心峰值行为增强, 低频响应更加明显. 但随着  $q$  的增大, 如  $q = 0.6$  或  $q = 0.8$  时, 中心峰值行为逐渐消失, 谱密度由一个峰 (在  $\omega = 0$  处) 逐渐扩展为两个

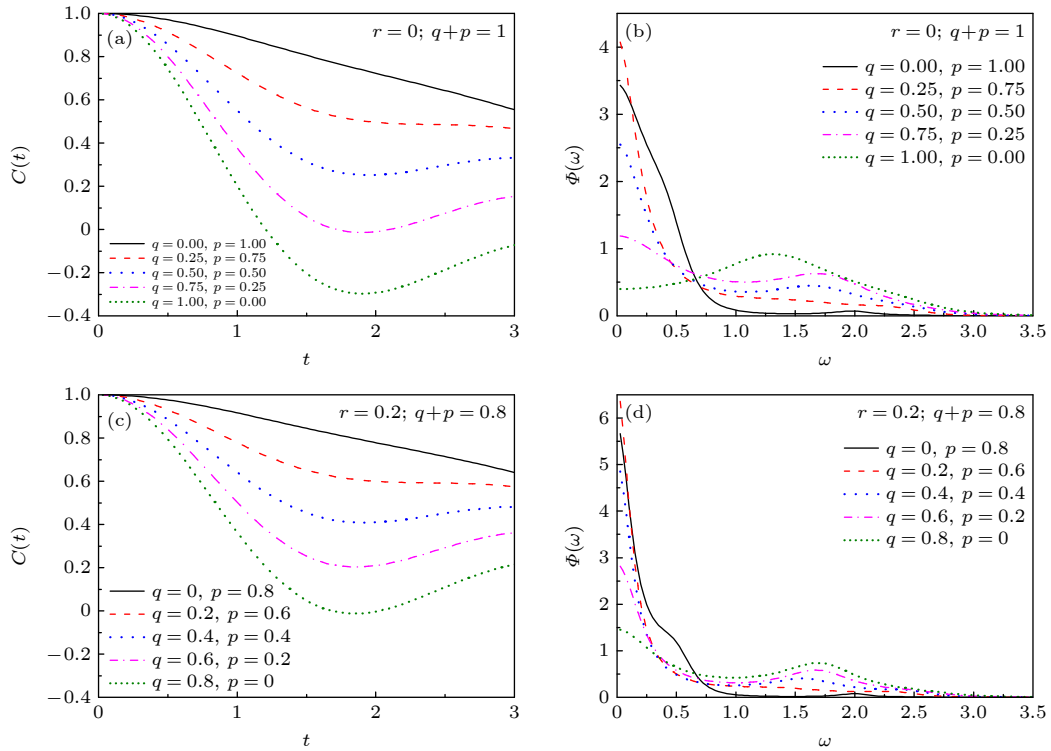


图 1 (a), (b)  $r \equiv 0$  时的自旋关联函数  $C(t)$  及相应的谱密度  $\Phi(\omega)$ ; (c), (d)  $r = 0.2$  时的  $C(t)$  及  $\Phi(\omega)$ . 三模分布中的参数  $B_p = 0.5$ ,  $B_q = 1.5$

Fig. 1. The spin autocorrelation function  $C(t)$  and corresponding spectral density  $\Phi(\omega)$  for  $r \equiv 0$  are given in graphs (a) and (b), and for  $r = 0.2$  are given in graphs (c) and (d), respectively. The parameters  $B_p$  and  $B_q$  in the tri-modal distribution are 0.5 and 1.5, respectively.

峰, 且  $\omega = 0$  处的峰值逐渐降低,  $\omega \neq 0$  处的峰值逐渐升高, 将这种行为称为双峰行为. 显然, 随着  $q$  的增大, 系统的动力学经历了由中心峰值行为到双峰行为的交跨. 虽然非磁性杂质所占的比重较小, 但仍可以使系统的动力学行为发生明显的变化.

将图 1(d) 中的双峰行为与以往研究中出现的双峰行为<sup>[31,38]</sup> 进行比较, 发现谱密度形状虽然类似, 但其物理机制明显不同. 这里的双峰行为由非磁性杂质、自旋耦合相互作用和横场共同决定. 随着  $q$  的增大, 横场逐渐增强, 系统的动力学倾向于出现高频响应; 而非磁性杂质和自旋耦合相互作用均使系统保持低频响应, 两者与横场之间的竞争使得谱密度出现两种频率响应. 将图 1(b) 中的无序行为 (如  $q = 0.75$ ) 和图 1(d) 中的双峰行为 (如  $q = 0.8$ ) 进行比较, 发现两者的谱密度形状也非常类似. 虽然引起这两种行为的物理原因不同, 但其本质上都是由于各种因素或相互作用之间的竞争所导致, 所以双峰行为在本质上也是一种无序行为. 之所以将其称为双峰行为, 是因为在前期工作中曾发现谱密度出现 3 个峰甚至多个峰的情况<sup>[31]</sup>. 与

更广义的无序行为相比, 可认为双峰行为更加具体.

保持其他参数不变, 继续提高非磁性杂质所占的比重, 如取  $r = 0.4, 0.6, 0.8, 0.96$ . 由于关联函数和谱密度呈现的动力学结果一致, 因此本工作仅给出谱密度结果, 如图 2 所示. 当  $r = 0.4$  时, 系统仅在参数  $q = 0.15$  ( $p = 0.45$ ) 时表现为中心峰值行为, 在其他大部分情况下均表现为双峰行为, 如  $q = 0.30, 0.45, 0.60$  所对应的曲线. 黑色曲线对应  $q = 0$ , 呈现不明显的三峰特征. 与  $r = 0.2$  时的双峰行为相比, 此双峰行为具有非常明显的特点, 即在  $\omega = 0$  处的峰值较大, 称为主峰, 而  $\omega \neq 0$  处的峰值较小, 称为次峰. 说明非磁性杂质比重的增大, 使得低频响应得到保持, 与图 1(d) 得到的结论是一致的. 同时发现, 次峰随着  $q$  的增大而逐渐增强, 这是由于横场增强使得高频响应更加明显.

当  $r = 0.6$  时, 系统仅在参数  $q = 0.1$  ( $p = 0.3$ ) 时表现为中心峰值行为, 如图 2(b) 所示. 有趣的是, 在大部分情况下谱密度曲线呈现三峰特征. 观察次峰出现的位置, 当  $q = 0$  时, 横场取值为  $B_p = 0.5$  ( $B_q = 1.5$ ) 的概率最大 (为零), 此时系统

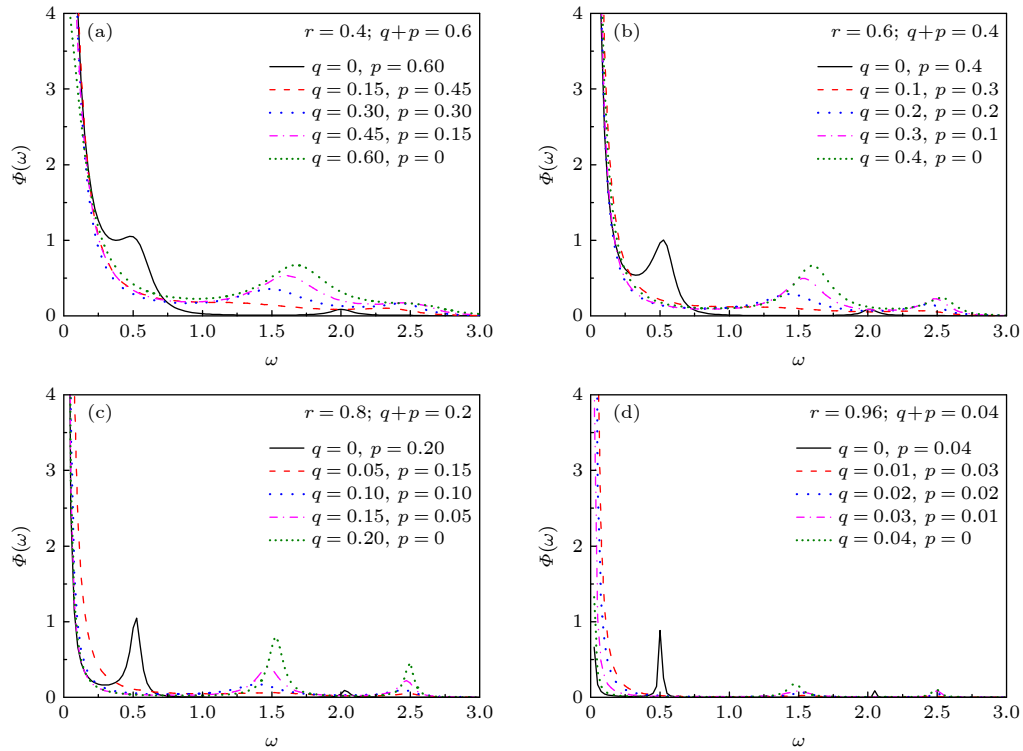


图 2 (a)–(d) 分别为系数  $r = 0.4, 0.6, 0.8, 0.96$  时的谱密度, 三模分布中的参数  $B_p = 0.5, B_q = 1.5$

Fig. 2. The spectral densities for  $r = 0.4, 0.6, 0.8$  and  $0.96$  are given in (a)–(d), respectively. The parameters  $B_p$  and  $B_q$  in the tri-modal distribution are  $0.5$  and  $1.5$ , respectively.

主要对外场  $B_p = 0.5$  响应, 因此离主峰较近的次峰出现在  $\omega \approx B_p \approx 0.5$  处, 但另一个不明显的次峰出现在  $\omega \approx 2.0$  处. 当  $q = 0.2, 0.3, 0.4$  时, 横场取值为  $B_q = 1.5$  的概率逐渐增大, 系统开始对外场  $B_q = 1.5$  响应, 此时离主峰较近的次峰出现在  $\omega \approx B_q \approx 1.5$  处, 而另一个次峰出现在  $\omega \approx 2.5$  处. 这表明系统除了对外加横场的响应之外, 还出现了新的频率响应. 显然, 新的频率响应是由于非磁性杂质比重增大所导致, 当非磁性杂质与横场之间的竞争较激烈时, 容易激发出新的频率响应, 呈现多峰行为. 图 2(c) ( $r = 0.8$ ) 也给出了类似的结果. 如果继续增大  $r$  值, 主峰将得到保持, 但次峰最终消失, 如图 2(d) 所示. 这是由于较多的非磁性杂质最终会限制系统对横场响应.

从图 2(a)–(d) 可以看出, 谱密度在大部分情况下呈现多峰特征 (双峰或三峰), 但在某些参数下表现为中心峰值行为. 将这些参数进行分析, 发现一个特殊的规律, 即这些参数满足  $qB_q = pB_p$ . 为了验证这一条件是否成立, 又随机选取了多组参数, 发现在该条件下系统的中心峰值行为均可以得到很好的保持, 但在其他参数下, 系统主要表现为

多峰行为. 如图 3 所示, 图 3(a)–(d) 中红色虚线对应的参数满足  $qB_q = pB_p$ . 因此分析认为, 三模分布参数满足  $qB_q = pB_p$  ( $q \neq 0$  且  $p \neq 0$ ) 这一条件, 这是使中心峰值行为得到保持的有利条件. 从数学统计的角度来分析, 其物理机制可以定性理解为: 当  $qB_q = pB_p$  时, 外加横场较无序, 系统对无序外场的响应较弱, 此时非磁性杂质在系统的动力学行为中起主导作用, 因此低频响应较明显.

由于递推方法的核心是通过连分式系数  $\Delta_n$  得到系统的自旋关联函数和谱密度, 因此还需要定量探讨  $qB_q = pB_p$  时连分式系数所满足的规律. 以图 3(c) 所给的谱密度为例, 给出相应的连分式系数, 如图 4(a) 所示. 图 4(b)–(d) 分别给出了  $q = 0.1, 0.2, 0.3$  时连分式系数线性拟合的结果, 拟合斜率接近于 1. 但在  $qB_q = pB_p$  条件下, 连分式系数线性拟合的标准误差较小, 拟合较成功, 如图 4(b) 所示. 早期研究表明, 当连分式系数呈线性变化时 (见图 4(a) 中黑色五角星标注的结果, 其斜率等于 1), 其谱密度呈高斯衰减<sup>[12,16]</sup>, 属于中心峰值行为. 显然,  $qB_q = pB_p$  时得到的谱密度结果最接近于高斯衰减, 可以将其称为类高斯衰减. 图 3(a), (b), (d)

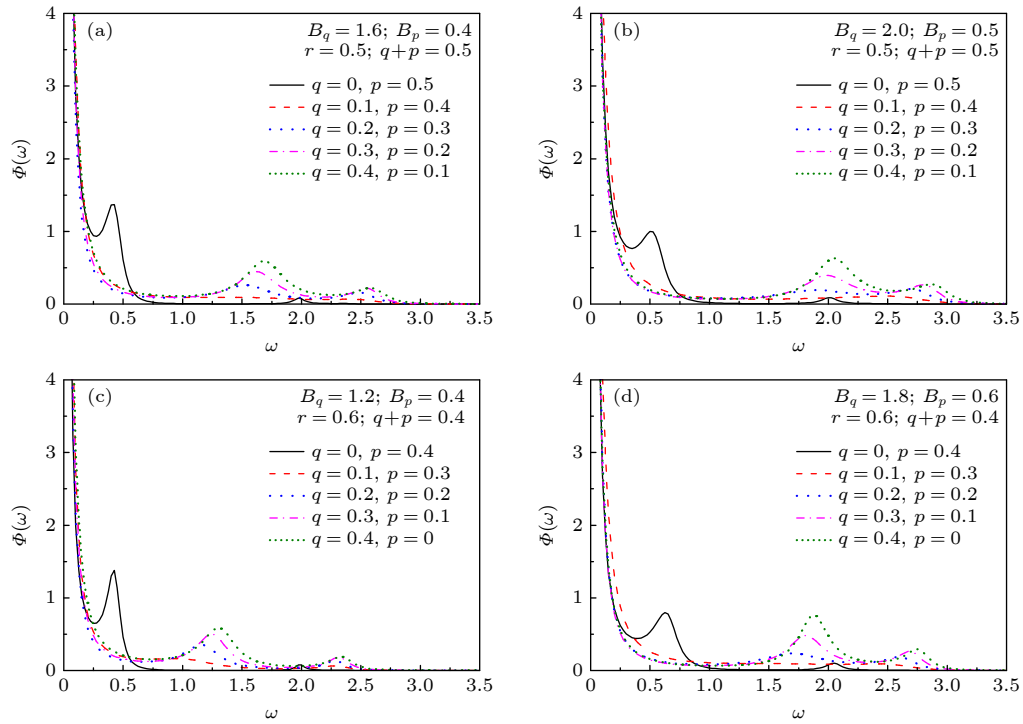


图 3 随机选取几组参数, 给出不同参数下的谱密度 (a)  $r = 0.5, B_q = 1.6, B_p = 0.4$ ; (b)  $r = 0.5, B_q = 2.0, B_p = 0.5$ ; (c)  $r = 0.6, B_q = 1.2, B_p = 0.4$ ; (d)  $r = 0.6, B_q = 1.8, B_p = 0.6$ . (a)–(d) 中红色虚线对应的参数满足  $qB_q = pB_p$ .

Fig. 3. The spectral densities for several groups of parameters: (a)  $r = 0.5, B_q = 1.6, B_p = 0.4$ ; (b)  $r = 0.5, B_q = 2.0, B_p = 0.5$ ; (c)  $r = 0.6, B_q = 1.2, B_p = 0.4$ ; (d)  $r = 0.6, B_q = 1.8, B_p = 0.6$ . The parameters corresponding to the red dashed lines in graphs (a)–(d) satisfy  $qB_q = pB_p$ .

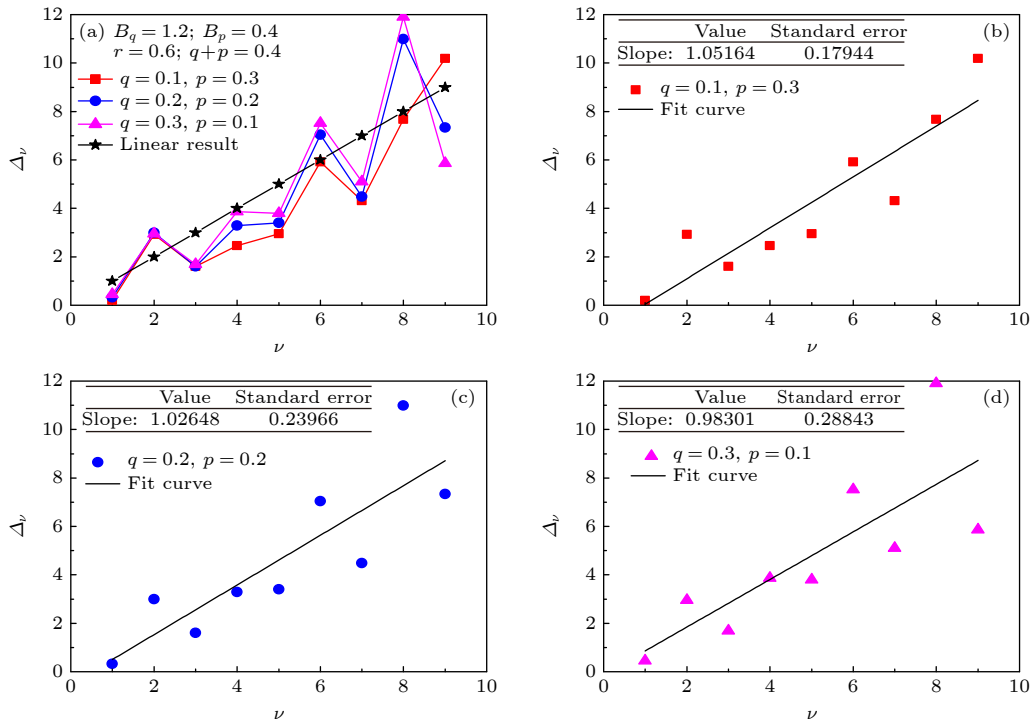


图 4 (a) 图 3(c) 所给参数下的连分式系数  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_9$ , 仅给出了  $q \neq 0$  且  $p \neq 0$  时的结果, 参数取值为  $r = 0.6, B_q = 1.2, B_p = 0.4$ ; (b)–(d)  $q = 0.1, 0.2, 0.3$  时连分式系数线性拟合的结果

Fig. 4. (a) The first nine recurrent  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_9$  for the parameters  $r = 0.6, B_q = 1.2$  and  $B_p = 0.4$  given in Fig. 3(c); (b)–(d) the linear fit results of the recurrent for  $q = 0.1, 0.2$  and  $0.3$ , respectively.

所对应的连分式系数也满足这样的规律. 因此当三模分布参数满足  $qB_q = pB_p$  ( $q \neq 0$  且  $p \neq 0$ ) 时有利于中心峰值行为的保持. 从以上结果可以看出, 三模型随机横场下的动力学结果非常丰富, 且非磁性杂质的存在可以调控系统的动力学性质.

#### 4 三模型随机纵场对动力学的调控

接下来重点分析三模型随机纵场下的动力学性质, 此时横场取值为常数. 需要说明的是, 这里虽然讨论纵场的影响, 但横场项不能忽略或取值为零. 若外场只有纵场, 则系统的哈密顿量化为

$$H = -\frac{1}{2}J \sum_i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \frac{1}{2} \sum_i B_{ix} \sigma_i^x. \quad (21)$$

此哈密顿中只有  $x$  方向上的自旋算符  $\sigma_i^x$ , 而算符  $\sigma_i^x$  与  $\sigma_j^x$  对易, 将导致自旋关联函数  $C(t) = \overline{\langle \sigma_j^x(t) \sigma_j^x(0) \rangle} \equiv 1$ , 因此横场项  $-\frac{1}{2} \sum_i B_{iz} \sigma_i^z$  不能忽略. 为不失一般性, 可将横场取值为  $B_{iz} \equiv 1$ . 由于横场和纵场共同存在, 因此在随机纵场所满足的三模分布中, 系数  $r$  是否依然理解为非磁性杂质所占的比重, 需要进一步研究.

在前期工作中我们研究了双模型随机纵场下的动力学性质<sup>[38]</sup>, 为了与已有结果进行比较, 某些参数的取值将参考前期工作. 例如, 自旋耦合相互作用取  $J \equiv 0.5 < B_{iz}$ , 因为在弱耦合情况下纵场对系统动力学性质的调控较明显. 三模分布参数的取值为  $B_p = 0.5 < B_{iz}$  和  $B_q = 1.5 > B_{iz}$ , 则随着  $q$  的增大, 纵场从小于横场的情况变为大于横场的情况. 为了验证计算的可行性, 首先给出  $r = 0$  时的谱密度 (见图 5), 此时三模分布蜕化为双模分布, 图 5 中插图为相应的自旋关联函数. 当  $q = 0$  (或  $p = 1$ ) 时, 系统表现为典型的集体模行为, 因为此时纵场取值为  $B_p = 0.5$  的概率最大, 当纵场较弱时, 系统的动力学由横场来主导. 当  $q = 0.25$  时, 系统表现为双峰行为, 且  $\omega = 0$  和  $\omega \neq 0$  处的峰值大小几乎相同, 说明纵场的增强引发了低频响应. 随着  $q$  的继续增大 (如  $q = 0.75$ ),  $\omega = 0$  处的峰值逐渐增大,  $\omega \neq 0$  处的峰值逐渐变小, 说明低频响应增强, 而高频响应减弱, 显然这是由于纵场所占比重增大所导致, 与双模随机纵场下的结果一致<sup>[38]</sup>.

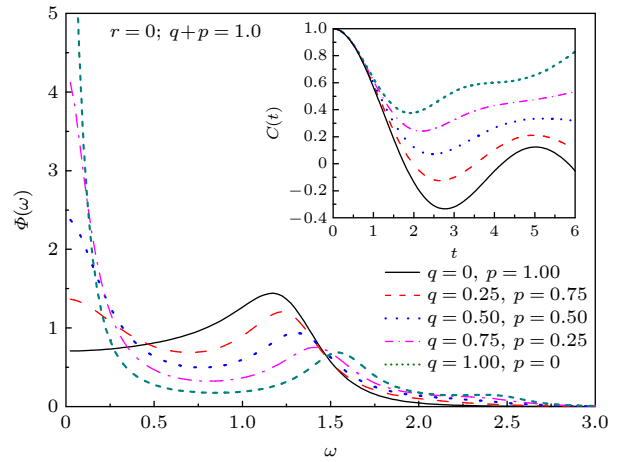


图 5 三模型随机纵场蜕化为双模型随机纵场时的谱密度和自旋关联函数 (插图), 三模分布系数  $r = 0$ , 参数  $B_p = 0.5$ ,  $B_q = 1.5$

Fig. 5. Spectral density and spin autocorrelation function for trimodal-type random longitudinal magnetic field when  $r = 0$ . The inset is the corresponding result of  $C(t)$ . The parameters  $B_p$  and  $B_q$  in the tri-modal distribution are 0.5 and 1.5, respectively.

保持其他参数不变, 将  $r$  值增大, 给出  $r = 0.2, 0.4, 0.6$  和  $0.8$  时的谱密度, 如图 6(a)–(d) 所示. 当  $r$  较小时, 如  $r = 0.2, 0.4$ , 系统经历了集体模行为到双峰行为的交跨, 与  $r = 0$  时的结果一致. 有趣的是, 随着  $r$  的增大, 双峰行为中  $\omega = 0$  处的峰值逐渐变小,  $\omega \neq 0$  处的峰值逐渐变大, 这表明  $r$  的增大不利于低频响应, 与三模随机横场下  $r$  的调控作用是相反的. 随着  $r$  的继续增大, 低频响应逐渐消失, 而高频响应逐渐增强, 如  $r = 0.8$  时, 系统的动力学行为仅表现为集体模行为. 分析认为出现这一现象的原因是, 随着  $r$  的增大, 纵场取值为零的概率增大, 当纵场较弱时, 系统的动力学行为由横场来主导. 可见, 在三模随机纵场中,  $r$  分支仅仅起到了调节纵场强度的作用, 不再代表非磁性杂质所占的比重.

总之, 三模型随机横场和三模型随机纵场对动力学的调控有很大的差别, 且三模分布下的动力学结果比双模分布下的结果更加丰富. 在三模分布中,  $r$  分支的影响非常重要, 但  $r$  分支在随机横场和随机纵场下的物理本质不同. 在三模型随机横场中,  $r$  分支代表非磁性杂质所占的比重, 而在三模型随机纵场中,  $r$  分支仅仅起到调节纵场强度的作用.

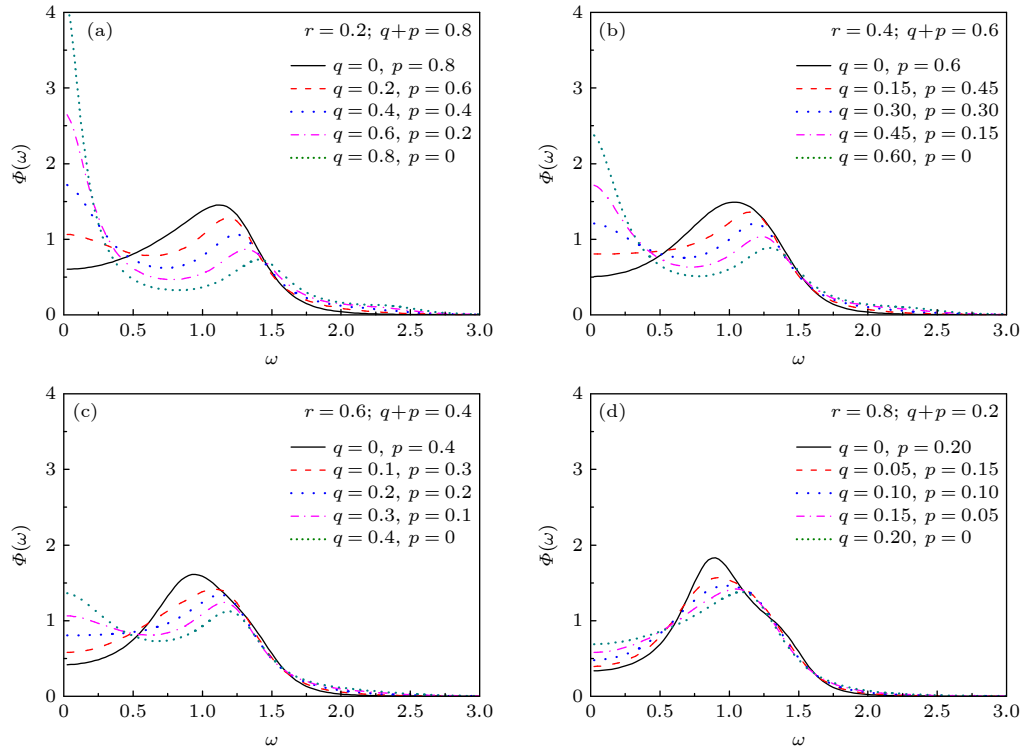


图 6 随机纵场满足三模分布时的谱密度 (a)–(d) 系数  $r = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ . 三模分布中的参数  $B_p = 0.5$ ,  $B_q = 1.5$

Fig. 6. Spectral densities for tri-modal-type random longitudinal magnetic field: (a)–(d)  $r = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ . The parameters  $B_p$  and  $B_q$  in the tri-modal distribution are 0.5 and 1.5, respectively.

## 5 结 论

本文利用递推关系方法研究了三模型随机横场和三模型随机纵场对 Ising 模型动力学性质的调控. 在三模型随机横场下, 利用三模分布的  $r$  分支将非磁性杂质引入到理论模拟中, 研究了非磁性杂质对系统动力学性质的影响. 研究发现: 非磁性杂质的出现, 使系统的低频响应得到保持, 中心峰值行为更加明显; 非磁性杂质与横场之间存在着竞争关系, 使得系统除了对外加横场的响应之外, 还出现了新的频率响应, 表现为多峰行为; 但较多的非磁性杂质最终会限制系统对横场的响应. 更有意义的是, 研究发现了能够使中心峰值行为得到保持的有利条件: 随机横场的三模分布参数满足  $qB_q = pB_p$ .

在三模型随机纵场下, 由于横场的存在, 三模分布的  $r$  分支不再代表非磁性杂质所占的比重. 研究表明,  $r$  分支仅仅起到调节纵场强度的作用, 且  $r$  的增大不利于低频响应, 与三模型随机横场下  $r$  的调控作用是相反的. 总之, 三模分布下的动力学结果非常丰富, 利用三模分布的  $r$  分支可以很好地调

控系统的动力学性质. 需要说明的是, 在本工作中随机横场和随机纵场的变化是相互独立的, 若横场和纵场相互关联, 或者随机横场和随机纵场同时满足三模分布, 则情况更加复杂, 需要进一步研究.

## 参考文献

- [1] Kenzelmann M, Coldea R, Tennant D A, Visser D, Hofmann M, Smeibidl P, Tylczynski Z 2002 *Phys. Rev. B* **65** 144432
- [2] Zhao Z Y, Liu X G, He Z Z, Wang X M, Fan C, Ke W P, Li Q J, Chen L M, Zhao X, Sun X F 2012 *Phys. Rev. B* **85** 134412
- [3] Cui Y, Zou H, Xi N, He Z, Yang Y X, Shu L, Zhang G H, Hu Z, Chen T, Yu R, Wu J and Yu W 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 067203
- [4] Simon J, Bakr W S, Ma R, Tai M E, Preiss P M, Greiner M 2011 *Nature* **472** 307
- [5] Dmitriev D V, Krivnov V Y 2004 *Phys. Rev. B* **70** 144414
- [6] Neto M A, De Sousa J R 2013 *Physica A* **392** 1
- [7] Corrêa Silva E V, Skea J E F, Rojas O, De Souza S M, Thomaz M T 2008 *Physica A* **387** 5117
- [8] Do Nascimento D A, Neto M A, De Sousa J R, Pacobahyba J T 2012 *J. Magn. Magn. Mater.* **324** 2429
- [9] Do Nascimento D A, Pacobahyba J T, Neto M A, Salmon O D R, Plascak J A 2017 *Physica A* **474** 224
- [10] Senthil T 1998 *Phys. Rev. B* **57** 8375
- [11] Liu Z Q, Jiang S R, Kong X M, Xu Y L 2017 *Physica A* **473** 536
- [12] Florencio J, Sá Barreto F C 1999 *Phys. Rev. B* **60** 9555

- [13] Chen S X, Shen Y Y, Kong X M 2010 *Phys. Rev. B* **82** 174404
- [14] Da Conceição C M S, Maia R N P 2017 *Phys. Rev. E* **96** 032121
- [15] von Ohr S, Maassen M, Hartmann A K 2017 *Phys. Rev. E* **96** 013315
- [16] Liu Z Q, Kong X M, Chen X S 2006 *Phys. Rev. B* **73** 224412
- [17] Theodorakis P E, Georgiou I, Fytas N G 2013 *Phys. Rev. E* **87** 032119
- [18] Crokidakis N, Nobre F D 2008 *J. Phys. Condens. Matter* **20** 145211
- [19] Liu Z Q, Jiang S R, Kong X M 2014 *Chin. Phys. B* **23** 087505
- [20] Hadjiagapiou I A 2011 *Physica A* **390** 2229
- [21] Hadjiagapiou I A, Velonakis I N 2018 *Physica A* **505** 965
- [22] Hadjiagapiou I A, Velonakis I N 2021 *Physica A* **578** 126112
- [23] Kaufman M, Klunzinger P E, Khurana A 1986 *Phys. Rev. B* **34** 4766
- [24] Saxena V K 1987 *Phys. Rev. B* **35** 2055
- [25] Hadjiagapiou I A, Velonakis I N 2019 *Physica A* **534** 122065
- [26] Mattis D C 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 3009
- [27] Sebastianes R M, Saxena V K 1987 *Phys. Rev. B* **35** 2058
- [28] Fogedby H C 1978 *J. Phys. C Solid State Phys.* **11** 2801
- [29] Kopeć T K, Usadel K D, Büttner G 1989 *Phys. Rev. B* **39** 12418
- [30] Ovchinnikov A A, Dmitriev D V, Krivnov V Y, Cheranovskii V O 2003 *Phys. Rev. B* **68** 214406
- [31] Yuan X J, Zhao J F, Wang H, Bu H X, Yuan H M, Zhao B Y, Kong X M 2021 *Physica A* **583** 126279
- [32] Viswanath V S, Müller G 1994 *The Recursion Method — Application to Many-body Dynamics* (Berlin: Springer-Verlag)
- [33] Mezei F, Murani A P 1979 *J. Magn. Magn. Mater.* **14** 211
- [34] Lee M H 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 1072
- [35] Lee M H 1982 *Phys. Rev. B* **26** 2547
- [36] Lee M H 2000 *Phys. Rev. E* **62** 1769
- [37] Florencio J, De Alcantara Bonfim O F 2020 *Front. Phys.* **8** 557277
- [38] Yuan X J, Wang H, Zhao B Y, Zhao J F, Ming J, Geng Y L, Zhang K Y 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 197501 (in Chinese) [袁晓娟, 王辉, 赵邦宇, 赵敬芬, 明静, 耿延雷, 张凯煜 2021 物理学报 **70** 197501]

# Effects of trimodal random magnetic field on spin dynamics of quantum Ising chain\*

Yuan Xiao-Juan<sup>†</sup>

(College of Physics and Electronic Engineering, Qilu Normal University, Jinan 250200, China)

(Received 10 January 2023; revised manuscript received 11 February 2023)

## Abstract

It is of fundamental importance to know the dynamics of quantum spin systems immersed in external magnetic fields. In this work, the dynamical properties of one-dimensional quantum Ising model with trimodal random transverse and longitudinal magnetic fields are investigated by the recursion method. The spin correlation function  $C(t) = \overline{\langle \sigma_j^x(t) \sigma_j^x(0) \rangle}$  and the corresponding spectral density  $\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} C(t)$  are calculated. The model Hamiltonian can be written as

$$H = -\frac{1}{2}J \sum_i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \frac{1}{2} \sum_i B_{iz} \sigma_i^z - \frac{1}{2} \sum_i B_{ix} \sigma_i^x,$$

where  $\sigma_i^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) are Pauli matrices at site  $i$ ,  $J$  is the nearest-neighbor exchange coupling.  $B_{iz}$  and  $B_{ix}$  denote the transverse and longitudinal magnetic field, respectively. They satisfy the following trimodal distribution,

$$\begin{aligned} \rho(B_{iz}) &= p\delta(B_{iz} - B_p) + q\delta(B_{iz} - B_q) + r\delta(B_{iz}), \\ \rho(B_{ix}) &= p\delta(B_{ix} - B_p) + q\delta(B_{ix} - B_q) + r\delta(B_{ix}). \end{aligned}$$

The value intervals of the coefficients  $p$ ,  $q$  and  $r$  are all  $[0,1]$ , and the coefficients satisfy the constraint condition  $p + q + r = 1$ .

For the case of trimodal random  $B_{iz}$  (consider  $B_{ix} \equiv 0$  for simplicity), the exchange couplings are assumed to be  $J \equiv 1$  to fix the energy scale, and the reference values are set as follows:  $B_p = 0.5 < J$  and  $B_q = 1.5 > J$ .

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. ZR2021MA073), the Higher Educational Science and Technology Program of Shandong Province, China (Grant No. J18KB104), and the Young Doctoral Support Program of Qilu Normal University, China (Grant No. QBJH19-0006).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [yuanxiaojuan@163.com](mailto:yuanxiaojuan@163.com)

The coefficient  $r$  can be considered as the proportion of non-magnetic impurities. When  $r = 0$ , the trimodal distribution reduces into the bimodal distribution. The dynamics of the system exhibits a crossover from the central-peak behavior to the collective-mode behavior as  $q$  increases, which is consistent with the value reported previously. As  $r$  increases, the crossover between different dynamical behaviors changes obviously (e.g. the crossover from central-peak to double-peak when  $r = 0.2$ ), and the presence of non-magnetic impurities favors low-frequency response. Owing to the competition between the non-magnetic impurities and transverse magnetic field, the system tends to exhibit multi-peak behavior in most cases, e.g.  $r = 0.4, 0.6$  or  $0.8$ . However, the multi-peak behavior disappears when  $r \rightarrow 1$ . That is because the system's response to the transverse field is limited when the proportion of non-magnetic impurities is large enough. Interestingly, when the parameters satisfy  $qB_q = pB_p$ , the central-peak behavior can be maintained. What makes sense is that the conclusion is universal.

For the case of trimodal random  $B_{ix}$ , the coefficient  $r$  no longer represents the proportion of non-magnetic impurities when  $B_{ix}$  and  $B_{iz}$  ( $B_{iz} \equiv 1$ ) coexist here. In the case of weak exchange coupling, the effect of longitudinal magnetic field on spin dynamics is obvious, so  $J \equiv 0.5$  is set here. The reference values are set below:  $B_p = 0.5 < B_{iz}$  and  $B_q = 1.5 > B_{iz}$ . When  $r$  is small ( $r = 0, 0.2$  or  $0.4$ ), the system undergoes a crossover from the collective-mode behavior to the double-peak behavior as  $q$  increases. However, the low-frequency responses gradually disappear, while the high-frequency responses are maintained as  $r$  increases. Take the case of  $r = 0.8$  for example, the system only presents a collective-mode behavior. The results indicate that increasing  $r$  is no longer conducive to the low-frequency response, which is contrary to the case of trimodal random  $B_{iz}$ . The  $r$  branch only regulates the intensity of the trimodal random  $B_{ix}$ . Our results indicate that using trimodal random magnetic field to manipulate the spin dynamics of the Ising system may be a new try.

**Keywords:** Ising model, trimodal distribution, spin correlation function, spectral density

**PACS:** 75.10.Pq, 75.40.Gb, 75.10.Jm, 75.50.Lk

**DOI:** 10.7498/aps.72.20230046

## 三模型随机场对一维量子Ising模型动力学性质的调控

袁晓娟

### Effects of trimodal random magnetic field on spin dynamics of quantum Ising chain

Yuan Xiao-Juan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 087501 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230046

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230046>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

随机纵场对一维量子Ising模型动力学性质的影响

Effects of random longitudinal magnetic field on dynamics of one-dimensional quantum Ising model

物理学报. 2021, 70(19): 197501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210631>

三量子比特Dicke模型中的两体和三体纠缠动力学

The dynamics of the bipartite and tripartite entanglement in the three-qubit Dicke model

物理学报. 2021, 70(4): 040301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201602>

从横场伊辛链到量子 $E_8$ 可积模型

From the transverse field Ising chain to the quantum  $E_8$  integrable model

物理学报. 2021, 70(23): 230504 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211836>

级联环境下三量子比特量子关联动力学研究

Dynamics of quantum correlation for three qubits in hierarchical environment

物理学报. 2021, 70(10): 100301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202133>

一维晶格中全同任意子的量子动力学与关联

Quantum dynamics and correlations of indistinguishable anyons in one-dimensional lattices

物理学报. 2022, 71(13): 130501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220188>

格点量子色动力学蒸馏算法中关联函数的计算优化

Calculation and optimization of correlation function in distillation method of lattice quantum chromodynamics

物理学报. 2021, 70(16): 161201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210030>