

专题: 非线性系统理论及其前沿应用

# 散焦型非线性薛定谔方程的 Whitham 调制理论及其间断初值问题解的分类和演化\*

公睿智 王灯山†

(北京师范大学数学科学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京 100875)

(2023 年 2 月 11 日收到; 2023 年 3 月 16 日收到修改稿)

Whitham 调制理论自 1965 年被首次提出后, 由于其在研究色散流体动力学和处理间断初值问题上的独特优势得到了人们的广泛关注. 本文发展了散焦型非线性薛定谔方程的 Whitham 调制理论, 研究它的间断初值问题解的分类和演化, 并利用直接数值模拟验证结果的正确性. 具体地, 推导出稀疏波和色散冲击波解及其相应的 Whitham 方程, 详细讨论了每种分类中黎曼不变量和色散流体的密度分布. 最后, 分析了色散流体的活塞问题, 发现了新奇的波状涌潮结构.

**关键词:** Whitham 调制理论, Lax 对, 黎曼问题, 稀疏波, 色散冲击波**PACS:** 05.45.Yv, 42.65.Tg, 02.30.Ik**DOI:** 10.7498/aps.72.20230172

## 1 引言

波动作为自然界中一种普遍存在的现象, 多年来已引起了人们的广泛关注. 同时, 诸多奇妙的自然规律也吸引研究者们发展更多有效的数学方法来解释各种非线性波动现象. 因此, 用来描述这些现象的非线性色散方程成为热点研究对象, 其中产生的色散冲击波因其普遍性而受到越来越多的关注. 以往研究非线性波动方程的精确解时, 给定的初始条件多是连续且光滑函数. 然而, 在现实物理问题中, 人们经常遇到初值在某处受到有限跃变, 即初值在某处不连续, 这种情形可能会出现稀疏波或冲击波. 当时间很大时, 会在有限空间中出现振荡区域, 该区域的左右两侧解都是光滑的, 且振荡区域的长度远大于振荡波的特征长度. 在这种情形下, Whitham 调制理论是一种行之有效的研究方法. Whitham 调制理论自 1965 年由 Whitham<sup>[1]</sup>首次提出以来, 学者们已经做了大量的工作来研究

色散流体动力学中相关模型的间断初值问题, 即黎曼问题. 后来, 拉格朗日平均法<sup>[1]</sup>、扰动展开法<sup>[2]</sup>与有限间隙积分方法<sup>[3]</sup>的提出大大丰富和发展了这一理论, 使其成为一种经典的研究方法.

许多系统中都能观察到色散冲击波 (dispersive shock wave, DSW), 如超冷原子玻色-爱因斯坦凝聚<sup>[4]</sup>、强电子束<sup>[5]</sup>、浅水波<sup>[6]</sup>和黏性流体管道<sup>[7]</sup>等. 此外, 在光纤实验中也有类似一维流体动力系统的结果<sup>[8]</sup>. 在由散焦非线性薛定谔方程描述的光学模型中, 光子流体演化的一个显著特征是形成色散冲击波<sup>[9-14]</sup>, 该理论的一个直接应用是活塞问题. 在气体动力学和经典冲击波 (classical shock wave, CSW) 理论框架内, 活塞问题具有经典解. 当活塞压缩其一侧静止的气体时, 经典冲击波出现, 而缩回活塞将产生平滑的稀疏波 (rarefaction wave, RW). 特别地, 在研究光子流体的模拟问题时, Bendahmane 等<sup>[15]</sup>在实验上也观察到许多奇妙的现象. 事实上, 近年来无论是理论上的突破<sup>[16-19]</sup>还是实验中的新发现, 都大大推动了非线性科学领域

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11971067) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [dswang@bnu.edu.cn](mailto:dswang@bnu.edu.cn)

的快速发展<sup>[20]</sup>. 此外, 关于 Whitham 调制理论的其他最新研究进展, 可见参考文献 [21–26].

本文发展 Whitham 调制理论研究如下散焦型非线性薛定谔方程间断初值问题解的分类和演化:

$$iq_t + \frac{1}{2}q_{xx} - |q|^2q = 0, \quad (1)$$

这是一个完全可积系统, 可以描述非线性光学、等离子体的离子声波、玻色-爱因斯坦凝聚和深水波动等物理学中的许多非线性现象, 重要性不言而喻. 此方程的 Lax 对 (线性谱问题) 为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_x &= \begin{pmatrix} F & G \\ H & -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_t &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, 上述矩阵的元素分别是

$$\begin{aligned} F &= -i\lambda, \quad G = q, \quad H = q^*, \quad A = -i\lambda^2 - \frac{1}{2}iqq^*, \\ B &= \lambda q + \frac{1}{2}iq_x, \quad C = \lambda q^* - \frac{1}{2}iq_x^*, \end{aligned} \quad (3)$$

这里\*表示共轭. 引入 Madelung 变换

$$q = \sqrt{\rho}e^{i\phi}, \quad \partial_x \phi = v, \quad (4)$$

得到方程 (1) 的色散流体动力学形式如下:

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad (5)$$

$$v_t + vv_x + \rho_x = \frac{1}{4}\partial_x \left[ \frac{\partial_{xx}^2 \rho}{\rho} - \frac{(\partial_x \rho)^2}{2\rho^2} \right], \quad (6)$$

其中,  $\rho$  称为色散流体的密度,  $v$  是色散流体的速度.

本文考虑的是间断初值问题, 为此设  $\rho(x, 0)$  和  $v(x, 0)$  分别为阶梯型分段函数, 即

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &= \begin{cases} \rho^L, & x < 0, \\ \rho^R, & x > 0, \end{cases} \\ v(x, 0) &= \begin{cases} v^L, & x < 0, \\ v^R, & x > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $\rho^L > 0, \rho^R > 0, v^L$  和  $v^R$  均为任意实常数.

第 2 节详细推导了零-相解、1-相解及其相应的零亏格、1 亏格 Whitham 方程并给出了推导  $N$  亏格 Whitham 方程的一般步骤. 第 3 节讨论了基本波结构, 分析了基本稀疏波结构和基本冲击波结构. 特殊间断问题解的演化结果在第 4 节中给出, 并且给出了区域边界的计算结果, 重点分析了真空区域. 第 5 节给出了散焦型非线性薛定谔方程一般间断初值下解的 6 种分类结果, 详细分析了每

种分类的黎曼不变量分布及波函数的密度分布等, 并给出了所得结果与直接数值模拟的对比图. 特别地, 讨论了部分特殊初值下解的演化. 活塞问题作为 Whitham 调制理论的一类重要应用, 在第 6 节中也进行了分析.

## 2 散焦型非线性薛定谔方程的调制解及其相应的 Whitham 方程

本节详细推导散焦型非线性薛定谔方程 (1) 的调制解及其相应的 Whitham 方程, 不仅给出 0 亏格和 1 亏格的结果, 还阐述了推导  $N$  亏格 Whitham 方程的基本步骤. 首先考虑线性谱问题 (2) 的两组线性无关解  $(\phi_1, \phi_2)^T$  和  $(\varphi_1, \varphi_2)^T$ , 对于非线性薛定谔方程所属的 AKNS 系统可以构造如下形式的平方特征函数:

$$f = -\frac{i}{2}(\phi_1\varphi_2 + \phi_2\varphi_1), \quad g = \phi_1\varphi_1, \quad h = -\phi_2\varphi_2. \quad (8)$$

因此, 可以得到

$$\begin{aligned} f_x &= -iHg + iGh, \quad g_x = 2iGf + 2Fg, \\ h_x &= -2iHf - 2Fh, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} f_t &= -iCg + iBh, \quad g_t = 2iBf + 2Ag, \\ h_t &= -2iCf - 2Ah. \end{aligned} \quad (10)$$

可以证明  $f^2 - gh = -\frac{1}{4}(\phi_1\varphi_2 - \phi_2\varphi_1)^2$  与  $x$  和  $t$  均无关, 仅与谱参数  $\lambda$  有关. 所以可设为

$$f^2 - gh = P(\lambda) = \prod_{i=1}^{2N+2} (\lambda - \lambda_i), \quad (11)$$

其中,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N+2}$  是多项式  $P(\lambda)$  的根, 称为黎曼不变量.

对于方程 (1) 这样的 AKNS 系统, 为了得到有限间隙 (gap) 解, 一般假设  $f, g$  和  $h$  关于谱参数  $\lambda$  有如下形式:

$$\begin{aligned} f(x, t, \lambda) &= \sum_{j=0}^{N+1} f_j(x, t)\lambda^j, \\ g(x, t, \lambda) &= \sum_{j=0}^{N+1} g_j(x, t)\lambda^j, \\ h(x, t, \lambda) &= \sum_{j=0}^{N+1} h_j(x, t)\lambda^j. \end{aligned} \quad (12)$$

方程 (9) 表明, 函数  $g$  和  $h$  是关于  $\lambda$  的  $N$  次多项式, 函数  $f$  是关于  $\lambda$  的  $N + 1$  次多项式. 不失一般性, 总可假设  $f_{N+1} = 1$ . 多项式  $P(\lambda)$  的最高次幂决定了方程 (1) 解的形式. 下面分别给出散焦型非线性薛定谔方程 (1) 的有限间隙解并且利用有限间隙积分法<sup>[3]</sup> 导出相应的 Whitham 方程.

首先, 做行波变换

$$\rho(x, t) = \rho(\xi), \quad v(x, t) = v(\xi), \quad (13)$$

其中,  $\xi = x - Ut$  是行波变量,

由此, 色散流体动力学方程 (5) 和方程 (6) 可约化为

$$\rho_\xi v - U\rho_\xi + \rho v_\xi = 0, \quad (14)$$

$$\rho_\xi - Uv_\xi + vv_\xi + \frac{\rho_\xi \rho_\xi \xi}{2\rho^2} - \frac{\rho_\xi \xi \xi}{4\rho} - \frac{\rho_\xi^3}{4\rho^3} = 0. \quad (15)$$

对方程 (14) 积分一次, 可以得到  $v$  和  $\rho$  的关系式为

$$v = U + C_1/\rho, \quad (16)$$

将方程 (16) 代入方程 (15), 再进行积分可以得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2 &= 4\rho^3 + 8C_2\rho^2 + 8C_3\rho - 4C_1^2 \\ &= 4(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3), \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $C_1, C_2, C_3$  是积分常数;  $\rho_1, \rho_2$  和  $\rho_3$  是三次方程  $4\rho^3 + 8C_2\rho^2 + 8C_3\rho - 4C_1^2 = 0$  的三个根, 满足  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$ . 根据代数方程根与系数的关系, 有

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{\rho_1\rho_2\rho_3}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3), \\ C_3 &= \frac{1}{2}(\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3). \end{aligned} \quad (18)$$

方程 (17) 具有显式精确解

$$\rho = \rho_2 - (\rho_2 - \rho_3)\text{cn}^2(\sqrt{\rho_1 - \rho_3}\xi, m), \quad (19)$$

其中,  $\text{cn}$  是雅可比椭圆函数, 其模数为  $m = (\rho_2 - \rho_3)/(\rho_1 - \rho_3)$ .

因此, 得到了色散流体动力学方程 (5) 和方程 (6) 的 1-相周期行波解:

$$\rho(x, t) = \rho_2 - (\rho_2 - \rho_3)\text{cn}^2(\sqrt{\rho_1 - \rho_3}(x - Ut), m), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} v(x, t) &= U + C_1/[\rho_2 - (\rho_2 - \rho_3) \\ &\quad \times \text{cn}^2(\sqrt{\rho_1 - \rho_3}(x - Ut), m)]. \end{aligned} \quad (21)$$

事实上, 根据方程 (9) 和方程 (10), 有

$$(\log(g))_x = \frac{g_x}{g} = 2if\frac{G}{g} + 2F,$$

$$(\log(g))_t = \frac{g_t}{g} = 2if\frac{B}{g} + 2A. \quad (22)$$

这两个方程的相容性条件是

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( 2if\frac{G}{g} + 2F \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2if\frac{B}{g} + 2A \right), \quad (23)$$

(23) 式可进一步简化为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{G}{g} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{B}{g} \right), \quad (24)$$

这就是散焦型非线性薛定谔方程 (1) 用平方特征函数  $g$  表示的守恒律方程.

理论上, 对方程 (24) 做平均, 可得黎曼不变量形式的 Whitham 方程. 这里多项式  $P(\lambda)$  的零点分别是  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N+2}$ , 它们是缓变参数, 也是本文将要重点研究的黎曼不变量.

## 2.1 零-相解及相应的零亏格 Whitham 方程

首先考虑散焦型非线性薛定谔方程 (1) 的零-相解及其对应的零亏格 Whitham 方程. 在方程 (12) 中, 令  $N = 0$ , 不失一般性, 有

$$f = f_0 + \lambda, \quad g = g_0, \quad h = h_0, \quad (25)$$

其中,  $f_0, g_0$  和  $h_0$  都是关于  $x$  和  $t$  的待定函数. 将 (25) 式代入 (9) 式与 (10) 式, 搜集并平衡  $\lambda$  各幂次系数, 可以得到

$$\begin{aligned} f_{0x} &= -iq^*g_0 + iqh_0, \quad g_0 = q, \\ g_{0x} &= 2iqf_0, \quad h_0 = q^*, \quad h_{0x} = -2iq^*f_0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$q_x = 2iqf_0, \quad q_x^* = -2iq^*f_0, \quad f_{0t} = -\frac{1}{2}(|q|^2)_x, \quad (27)$$

$$g_{0t} = -q_x f_0 - iqq^*g_0, \quad h_{0t} = -q_x^* f_0 + iqq^*h_0. \quad (28)$$

由于  $N = 0$  时, 寻找零-相平面波解, 因其振幅是常数, 故有  $|q|^2 = \rho_0$  (常数). 则 (26) 式和 (27) 式表明:

$$f_{0x} = f_{0t} = 0,$$

故  $f_0$  是任意常数. 此外, 进一步化简方程 (26) 和方程 (28) 可得:

$$q_x = 2iqf_0, \quad q_t = (-2if_0^2 - i\rho_0)q, \quad (29)$$

由此可求得原散焦型非线性薛定谔方程 (1) 的精确平面波解, 即零-相解:

$$q = \sqrt{\rho_0}e^{i[2f_0x - (2f_0^2 + \rho_0)t]}. \quad (30)$$

此平面波解的相位函数  $\theta_0 = 2f_0x - (2f_0^2 + \rho_0)t$  是

快变量, 而平面波的振幅  $\sqrt{\rho_0}$ 、波数  $2f_0$  和相速度  $\omega = (2f_0^2 + \rho_0)/(2f_0)$  均为缓慢变量, 并且它们依赖于零-相解对应的亏格为零的 Whitham 方程. 为此, 下面推导亏格为零的 Whitham 方程. 根据 Madelung 变换 (4) 式, 显然有  $\phi = 2f_0x$  且  $v = 2f_0$ .

根据上述  $f, g$  和  $h$  的具体形式, 有

$$f^2 - gh = \lambda^2 + 2f_0\lambda + f_0^2 - \rho = \lambda^2 - s_1\lambda + s_2, \quad (31)$$

这里,  $s_1 = -2f_0$  且  $s_2 = f_0^2 - \rho$ . 假设二次函数  $f^2 - gh$  有两个根  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 即

$$f^2 - gh = P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2),$$

则有

$$\lambda_1 + \lambda_2 = s_1, \quad \lambda_1\lambda_2 = s_2. \quad (32)$$

进一步, 等式  $v = 2f_0$  表明  $s_1 = -v$  且  $s_2 = v^2/4 - \rho$ . 因此, 方程 (31) 可重写为

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -v, \quad \lambda_1\lambda_2 = v^2/4 - \rho, \quad (33)$$

由此可解得

$$\lambda_1 = -\frac{v}{2} + \sqrt{\rho}, \quad \lambda_2 = -\frac{v}{2} - \sqrt{\rho}. \quad (34)$$

为了导出关于黎曼不变量 (缓慢变量)  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的 Whitham 方程, 考虑守恒律方程 (24). 在零-相解的情形下, 有  $g = g_0 = q$ , 从而方程 (24) 变为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{P(\lambda)}) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sqrt{P(\lambda)} \left( \lambda - \frac{v}{2} \right) \right] = 0, \quad (35)$$

式中,  $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$  成立. 其中,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是关于  $x$  和  $t$  的缓慢变量,  $\lambda$  为常数谱参数. 将 (35) 式展开, 然后分别取极限  $\lambda \rightarrow \lambda_1$  和  $\lambda \rightarrow \lambda_2$ , 立即得到关于  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  满足的 Whitham 方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} - \left( \frac{3}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 \right) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} - \left( \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_2 \right) \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (36)$$

其中,  $\lambda_1 > \lambda_2$ . 此方程称为零-相解对应的亏格为零的 Whitham 方程. 它的形式不唯一, 在 3.1 节中会通过另外一个方式得到亏格为零的 Whitham 方程, 它们是等价的.

## 2.2 1-相解及相应的 1 亏格 Whitham 方程

当  $N = 1$  时, 可以得到散焦型非线性薛定谔方程 (1) 的 1-相周期解. 此时, 多项式  $P(\lambda)$  是关于  $\lambda$  的四次函数, 即

$$\begin{aligned} f^2 - gh &= P(\lambda) = \prod_{i=1}^4 (\lambda - \lambda_i) \\ &= \lambda^4 - s_1\lambda^3 + s_2\lambda^2 - s_3\lambda + s_4, \end{aligned} \quad (37)$$

这里限定  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$ . 多项式  $P(\lambda)$  的系数  $s_1, s_2, s_3$  和  $s_4$  可以由黎曼不变量  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 表示:

$$\begin{cases} s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \\ s_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4, \\ s_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4, \\ s_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4. \end{cases} \quad (38)$$

此时, 可以假设

$$f = \lambda^2 - f_1\lambda + f_2, \quad g = g_0 + \lambda g_1, \quad h = h_0 + \lambda h_1. \quad (39)$$

而对应 AKNS 系统, 以往计算表明总可假设  $f, g$  和  $h$  有如下形式:

$$f = \lambda^2 - f_1\lambda + f_2, \quad g = q(\lambda - \mu), \quad h = q^*(\lambda - \mu^*), \quad (40)$$

其中,  $f_1, f_2, \mu$  分别是关于  $x$  和  $t$  的函数. 将方程 (40) 代入方程 (9) 和方程 (10), 搜集谱参数  $\lambda$  的系数并令其为零, 得到  $f_{1x} = f_{1t} = 0$  且

$$f_{2x} = i|q|^2(\mu - \mu^*), \quad 2f_{2t} = qq_x^*\mu + q_xq^*\mu^*, \quad (41)$$

$$q_x = 2iq(\mu - f_1), \quad q_t = 2iqf_2 - i|q|^2q + q_xf_1, \quad (42)$$

$$(q\mu)_x = -2iqf_2, \quad (q\mu)_t = q_xf_2 - i|q|^2q\mu, \quad (43)$$

以及它们对应的共轭方程.

进一步, 将方程 (40) 代入方程 (37), 比较  $\lambda$  的各次幂, 进一步得到

$$\begin{aligned} s_1 &= 2f_1, \quad s_2 = f_1^2 + 2f_2 - |q|^2, \\ s_3 &= 2f_1f_2 - |q|^2(\mu + \mu^*), \\ s_4 &= f_2^2 - |q|^2\mu\mu^*. \end{aligned} \quad (44)$$

由此可知

$$f_1 = s_1/2, \quad 2f_2 = (|q|^2 - f_1^2 + s_2). \quad (45)$$

此外, 由 Madelung 变换 (4) 可以得知  $\rho = |q|^2$ . 因此, (45) 式中第二个方程变为

$$2f_2 = (\rho - f_1^2 + s_2). \quad (46)$$

上式分别对  $x$  和  $t$  求导, 并结合方程 (41), 可得密度函数  $\rho$  满足的偏微分方程组:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 2i\rho(\mu - \mu^*), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 2i\rho(\mu - \mu^*)f_1. \quad (47)$$

为得到方程 (1) 的 1-相周期行波解, 引入变量  $\xi = x - Ut$ , 则偏微分方程组 (47) 被约化为

$$\frac{d\rho}{d\xi} = 2i\rho(\mu - \mu^*), \quad -U\frac{d\rho}{d\xi} = 2i\rho(\mu - \mu^*)f_1. \quad (48)$$

从而, 可直接得到行波解的速度  $U$  为

$$U = -f_1 = -\frac{s_1}{2} = -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4). \quad (49)$$

由方程 (42) 和方程 (43), 计算可得

$$\begin{aligned} \mu_x &= -2i(\mu^2 - \mu f_1 + f_2), \\ \mu_t &= -2if_1(\mu^2 - \mu f_1 + f_2), \end{aligned} \quad (50)$$

这就是 1-相周期解对应的辅助谱  $\mu$  满足的 Dubrovinn 方程. 根据方程 (40) 中函数  $f$  的假设形式, 进一步有

$$\begin{aligned} \mu_x &= -2if|_{\lambda=\mu} = -2i\sqrt{P(\mu)}, \\ \mu_t &= -U\mu_x. \end{aligned} \quad (51)$$

在行波约化  $\xi = x - Ut$  下, (51) 式转化为关于辅助谱  $\mu$  满足的常微分方程:

$$\frac{d\mu}{d\xi} = -2i\sqrt{P(\mu)}. \quad (52)$$

此外, 根据 (44) 式的后两个方程, 并利用根与系数的关系, 可以计算得到

$$\mu, \mu^* = \frac{1}{16\rho}(4s_1\rho + 4s_1s_2 - s_1^3 - 8s_3 \pm 8i\sqrt{R(\rho)}), \quad (53)$$

其中, 函数  $R(\rho)$  具有如下形式:

$$\begin{aligned} R(\rho) &= \rho^3 + \left(2s_2 - \frac{3}{4}s_1^2\right)\rho^2 \\ &+ \left(\frac{3}{16}s_1^4 - s_1^2s_2 + s_1s_3 + s_2^2 - 4s_4\right)\rho \\ &- \frac{1}{64}(s_1^3 - 4s_1s_2 + 8s_3)^2. \end{aligned} \quad (54)$$

假设函数  $R(\rho)$  有 3 个不同实根  $\rho_1, \rho_2$  和  $\rho_3$  且满足  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$ , 即  $R(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3)$ , 则有

$$\begin{aligned} 2s_2 - \frac{3}{4}s_1^2 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 &= 0, \\ \frac{3}{16}s_1^4 - s_1^2s_2 + s_3s_1 + s_2^2 - 4s_4 - \rho_1\rho_2 \\ - \rho_1\rho_3 - \rho_2\rho_3 &= 0, \\ \frac{1}{8}s_1^4s_2 - \frac{s_1^6}{64} - \frac{1}{4}s_1^3s_3 - \frac{1}{4}s_1^2s_2^2 \\ + s_1s_2s_3 - s_3^2 + \rho_1\rho_2\rho_3 &= 0. \end{aligned} \quad (55)$$

将 (53) 式和 (54) 式代入 (48) 式, 最终得到关于密度函数  $\rho$  满足的常微分方程:

$$\frac{d\rho}{d\xi} = -2\sqrt{R(\rho)} = -2\sqrt{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3)}. \quad (56)$$

此方程具有显式精确周期解:

$$\rho = \rho_2 - (\rho_2 - \rho_3)\text{cn}^2(\sqrt{\rho_1 - \rho_3}\xi, m), \quad (57)$$

其中, 雅可比椭圆函数的模数  $m = \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_1 - \rho_3}$ . 值得注意的是, 此精确周期解与行波变换得到的解 (19) 完全一致, 只不过这种方法得不到 Madelung 变换中色散流体的速度  $v$ .

特别地, 这里给出极限状态下周期解的退化结果. 当  $m \rightarrow 1$  时, 有

$$\rho = \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_4)^2 - \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_3)}{\cosh^2\left[\xi\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)}\right]}, \quad (58)$$

对于小振幅谐波极限, 即  $m \rightarrow 0$ , 对应于两种情况  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$  或  $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4$ , 分别有  $\rho = \frac{1}{4}(\lambda_3 - \lambda_4)^2$  或  $\rho = \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)^2$ . 通过研究函数  $R(\rho)$  和  $P(\lambda)$  根之间的关系可以确定  $\rho_1, \rho_2$  和  $\rho_3$  满足:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)^2, \\ \rho_2 &= \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4)^2, \\ \rho_3 &= \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)^2. \end{aligned} \quad (59)$$

将上式表示的  $\rho_1, \rho_2$  和  $\rho_3$  代入方程 (55) 并结合  $s_1, s_2, s_3$  和  $s_4$  满足的方程 (38), 发现根  $\rho_1, \rho_2$  和  $\rho_3$  满足方程 (55). 从而最终得到了散焦型非线性薛定谔方程 (1) 的密度函数  $\rho$  的显式表达式:

$$\rho(\xi) = \rho_2 - (\rho_2 - \rho_3)\text{cn}^2(\sqrt{\rho_1 - \rho_3}\xi, m), \quad (60)$$

其中, 参数  $\rho_1 = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)^2$ ,  $\rho_2 = \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4)^2$ ,  $\rho_3 = \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)^2$ , 模数  $m = \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_1 - \rho_3}$ .

下面推导关于黎曼不变量  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  和  $\lambda_4$  的 Whitham 方程. 为此, 考虑守恒律方程 (24), 在 1-相周期解情形下, 有  $g = q(\lambda - \mu)$ , 从而方程 (24) 改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sqrt{P(\lambda)} \frac{1}{\lambda - \mu} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sqrt{P(\lambda)} \left[ 1 + \frac{s_1}{2(\lambda - \mu)} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

式中,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  和  $\lambda_4$  是关于  $x$  和  $t$  的缓慢变量, 但  $\lambda$  不是  $x$  和  $t$  的函数.

方程 (51) 表明:

$$dx = -\frac{d\mu}{2i\sqrt{P(\mu)}} = \pm \frac{d\mu}{2\sqrt{-P(\mu)}}. \quad (62)$$

对守恒律方程 (61) 做平均, 有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\sqrt{P(\lambda)}}{2L} \oint \frac{d\mu}{2(\lambda - \mu)\sqrt{-P(\mu)}} \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\sqrt{P(\lambda)}}{2L} \oint \left[ 1 + \frac{s_1}{2(\lambda - \mu)} \right] \frac{d\mu}{2\sqrt{-P(\mu)}} \right\} \\ & = 0. \end{aligned}$$

考虑缓慢变量  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  和  $\lambda_4$  是关于  $x$  和  $t$  的函数, 将上式展开, 然后取极限  $\lambda \rightarrow \lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), 得到:

$$\begin{aligned} & \oint \frac{d\mu}{2(\lambda_i - \mu)\sqrt{-P(\mu)}} \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} \\ & - \oint \left[ 1 + \frac{s_1}{2(\lambda_i - \mu)} \right] \frac{d\mu}{2\sqrt{-P(\mu)}} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \\ & i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

由此, 得到有关黎曼不变量  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 的 Whitham 方程:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} + v_i(\lambda_i) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (63)$$

特征速度  $v_i = v_i(\lambda_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 为

$$v_i = -\frac{I_2(\lambda_i)}{I_1(\lambda_i)}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (64)$$

其中,  $I_1 = I_1(\lambda_i)$  和  $I_2 = I_2(\lambda_i)$  分别是

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint \frac{d\mu}{2(\lambda_i - \mu)\sqrt{-P(\mu)}} = -2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}, \\ I_2 &= \oint \left[ 1 + \frac{s_1}{2(\lambda_i - \mu)} \right] \frac{d\mu}{2\sqrt{-P(\mu)}} = \frac{s_1}{2} I_1 + L. \end{aligned} \quad (65)$$

波长  $L$  表达式为

$$L = \oint \frac{d\mu}{2\sqrt{-P(\mu)}} = \frac{2K(m)}{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}}, \quad (66)$$

其中, 对应的椭圆函数的模数为

$$m = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}. \quad (67)$$

根据方程 (65), 特征速度可进一步写成

$$v_i = U + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda_i} \right)^{-1}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (68)$$

最后, 将方程 (66) 代入方程 (68), 立即可得黎曼不变量  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  和  $\lambda_4$  满足的 Whitham 方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} + v_i(\lambda_i) \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4, \\ & i = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (69)$$

其中, 特征速度  $v_i = v_i(\lambda_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 变为

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i - \frac{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_2) K(m)}{(\lambda_1 - \lambda_4) K(m) + (\lambda_4 - \lambda_2) E(m)}, \\ v_2 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2) K(m)}{(\lambda_2 - \lambda_3) K(m) + (\lambda_3 - \lambda_1) E(m)}, \\ v_3 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i - \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4) K(m)}{(\lambda_2 - \lambda_3) K(m) + (\lambda_4 - \lambda_2) E(m)}, \\ v_4 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i + \frac{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4) K(m)}{(\lambda_1 - \lambda_4) K(m) + (\lambda_3 - \lambda_1) E(m)}. \end{aligned} \quad (70)$$

### 2.3 $N$ 亏格 Whitham 方程

为得到  $N$ -相有限间隙解, 假设

$$g(x, t, \lambda) = \phi \prod_{j=1}^N (\lambda - \mu_j(x, t)), \quad (71)$$

这里,  $\mu_j = \mu_j(x, t)$  称为辅助谱,  $N$  表示如下超椭圆曲线的亏格数:

$$w^2 = P(\lambda). \quad (72)$$

将方程 (71) 代入方程 (9) 和方程 (10), 并令  $\lambda = \mu_k(x, t)$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ), 得到关于函数  $\mu_k(x, t)$  的 Dubrovin 型方程

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mu_k}{\partial x} &= \frac{2i\tilde{G}\sqrt{P(\mu_k)}}{\prod_{j \neq k} (\mu_k - \mu_j)}, \\ -\frac{\partial \mu_k}{\partial t} &= \frac{2i\tilde{B}\sqrt{P(\mu_k)}}{\prod_{j \neq k} (\mu_k - \mu_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (73)$$

这里,  $\tilde{G}(\mu_k) = G(\mu_k)/\phi$  且  $\tilde{B}(\mu_k) = B(\mu_k)/\phi$ . Dubrovin 型方程 (73) 可以通过 Abel 变换进行求解, 得到用黎曼  $\Theta$  函数表示的形式, 称为有限间隙解, 其中  $N$  个相变量可写为

$$\theta_j = \kappa_j x + \omega_j t + \theta_{0j}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (74)$$

这里,  $\kappa_j$  和  $\omega_j$  可以通过超椭圆曲线 (72) 式表示的黎曼曲面上的某些循环上的积分来确定.

下面给出利用有限间隙积分方法 (又称 FFM 理论) 导出 Whitham 调制方程的一般步骤<sup>[3]</sup>:

1) 做尺度变换  $f \rightarrow f/\sqrt{P(\lambda)}$ ,  $g \rightarrow g/\sqrt{P(\lambda)}$  和  $h \rightarrow h/\sqrt{P(\lambda)}$ , 则守恒律满足的方程 (24) 可改

写为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{G\sqrt{P(\lambda)}}{g} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{B\sqrt{P(\lambda)}}{g} \right) = 0. \quad (75)$$

根据函数  $g$  的假设形式 (71) 以及函数  $\tilde{G}$  和  $\tilde{B}$  的定义, (75) 式可进一步写为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\tilde{G}\sqrt{P(\lambda)}}{\prod_{j=0}^N (\lambda - \mu_j)} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\tilde{B}\sqrt{P(\lambda)}}{\prod_{j=0}^N (\lambda - \mu_j)} \right] = 0. \quad (76)$$

2) 假设  $Q$  是守恒律中的流 (flux) 或者守恒密度 (density), 考虑如下平均:

$$\langle Q \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L Q(q(x, t)) dx, \quad (77)$$

其中,  $L$  表示波长. 黎曼不变量  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N+2}$  是缓慢变量  $X = \varepsilon x$  和  $T = \varepsilon t$  的函数 ( $\varepsilon$  为小参量), 在每个波长范围内, 它们的变化非常微小. 因此, 在以上的平均积分中, 我们冻结缓慢变量, 在快变空间变量  $x$  上积分. 根据 FFM 理论, 空间变量  $x$  上积分 (77) 式可以转化为  $N$ -环面上的  $N$  个变量  $\theta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) 上的积分, 即为

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} Q(q(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)) \times d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_N. \quad (78)$$

此积分可进一步转换成  $N$  个变量  $\mu_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) 上的积分:

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \oint_{C_1} \dots \oint_{C_N} Q \frac{\partial \theta}{\partial \mu} d\mu_1 d\mu_2 \dots d\mu_N, \quad (79)$$

这里,  $C_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) 是 Abel 映射定义的循环,  $\frac{\partial \theta}{\partial \mu}$  满足

$$\frac{1}{(2\pi)^N} \frac{\partial \theta}{\partial \mu} = \frac{1}{V} \frac{\prod_{n>k} (\mu_n - \mu_k)}{\sqrt{\prod_{j=1}^N P(\mu_j)}}, \quad (80)$$

其中,  $V$  是一个常数.

3) 将 (77) 式和 (79) 式中关于流或守恒密度的平均积分应用到守恒律满足的方程 (76) 中, 并假设缓变参数依赖于缓慢变量  $X$  和  $T$ , 进一步有

$$\left\langle \frac{G}{g} \right\rangle \frac{\partial \lambda_i}{\partial T} - \left\langle \frac{B}{g} \right\rangle \frac{\partial \lambda_i}{\partial X} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2N + 2. \quad (81)$$

4) 根据 (79) 式中平均积分的定义, 最终得到黎曼不变量  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2N + 2$ ) 满足的 Whi-

tham 方程如下:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2N + 2, \quad (82)$$

其中, 特征速度  $v_i$  为

$$v_i = -\frac{I_2(\lambda_i)}{I_1(\lambda_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2N + 2,$$

$$I_1(\lambda_i) = \oint_{C_1} \dots \oint_{C_N} \frac{\tilde{G}}{\prod_{j=1}^N (\lambda - \mu_j)} \times \frac{\partial \theta}{\partial \mu} d\mu_1 d\mu_2 \dots d\mu_N,$$

$$I_2(\lambda_i) = \oint_{C_1} \dots \oint_{C_N} \frac{\tilde{B}}{\prod_{j=1}^N (\lambda - \mu_j)} \times \frac{\partial \theta}{\partial \mu} d\mu_1 d\mu_2 \dots d\mu_N,$$

这里限定  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{2N+2}$ .

### 3 基本波结构及其动力学分析

一般情况下, 方程 (1) 的间断初值问题可以由三类简单波组成: 平台 (plateau)、稀疏波 (rarefaction wave) 和色散冲击波 (dispersive shock wave), 其中平台在两个无穷远端点处与初值一致. 这里考虑方程 (1) 间断初值问题的自相似解的演化和分类问题, 即假设黎曼不变量  $\lambda_i$  是  $\tau = x/t$  的函数. 具体地, 考虑形如 (7) 式的间断初值问题. 特别地, 1995 年 El 等<sup>[27]</sup> 研究了一类特殊的初值:

$$q(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \sqrt{\rho_0} e^{iv_0 x}, & x > 0, \end{cases} \quad (83)$$

其中,  $\rho_0 > 0, v_0$  是任意常数, 且  $\rho(x, 0)$  和  $v(x, 0)$  分别为

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \rho_0, & x > 0, \end{cases} \quad v(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ v_0, & x > 0. \end{cases} \quad (84)$$

#### 3.1 稀疏波结构

下面首先研究基本的稀疏波结构. 考虑散焦型非线性薛定谔方程 (1) 对应的无色散系统:

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad (85)$$

$$v_t + v v_x + \rho_x = 0, \quad (86)$$

即为

$$\begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} v & \rho \\ 1 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}_x = 0. \quad (87)$$

设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} v & \rho \\ 1 & v \end{pmatrix}, \quad (88)$$

则存在可逆矩阵  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & -\sqrt{\rho} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 使得

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} v + \sqrt{\rho} & 0 \\ 0 & v - \sqrt{\rho} \end{pmatrix}. \quad (89)$$

引入黎曼不变量  $\lambda_{\pm} = v \pm 2\sqrt{\rho}$ , 则对应稀疏波 (即零-相解) 的 Whitham 方程为

$$\partial_t \lambda_{\pm} + V_{\pm} \partial_x \lambda_{\pm} = 0, \quad (90)$$

这里,  $V_+ = \frac{3}{4}\lambda_+ + \frac{1}{4}\lambda_-$ ,  $V_- = \frac{1}{4}\lambda_+ + \frac{3}{4}\lambda_-$ .

值得特别强调的是, 稀疏波对应的 Whitham 方程 (90) 可以由零-相解对应的亏格为零的 Whitham 方程 (36) 导出. 事实上, 在尺度变换

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\lambda_-, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}\lambda_+ \quad (91)$$

下, Whitham 方程 (36) 立刻转化为 Whitham 方程 (90).

对于 El 等 [27] 给出的特殊初值 (83) 式, Whitham 方程 (36) 的初值可简化为

$$\lambda_1(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \lambda_1^R = \sqrt{\rho_0} - \frac{v_0}{2}, & x > 0, \end{cases}$$

$$\lambda_2(x, 0) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \lambda_2^R = -\frac{v_0}{2} - \sqrt{\rho_0}, & x > 0. \end{cases} \quad (92)$$

而对于 (7) 式的一般初值问题, Whitham 方程 (36) 的初值也是一般性初值, 如下:

$$\lambda_1(x, 0) = \begin{cases} \lambda_1^L, & x < 0, \\ \lambda_1^R, & x > 0, \end{cases}$$

$$\lambda_2(x, 0) = \begin{cases} \lambda_2^L, & x < 0, \\ \lambda_2^R, & x > 0, \end{cases} \quad (93)$$

这里,  $\lambda_1^L, \lambda_1^R, \lambda_2^L$  和  $\lambda_2^R$  均为任意常数.

下面研究 Whitham 方程 (36) 描述的稀疏波结构. 设自相似变量  $\tau = x/t$ , 则 Whitham 方程 (36) 约化为

$$\frac{1}{t} \left( \frac{3}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \tau \right) \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tau} = 0,$$

$$\frac{1}{t} \left( \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_2 + \tau \right) \frac{\partial \lambda_2}{\partial \tau} = 0. \quad (94)$$

此方程表明  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  或为常数或为关于  $\tau$  的变量. 这样可得两种类型的稀疏波, 其中一种稀疏波是 (见图 1(a)):

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_2 = \text{constant}, \quad \frac{3}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\bar{\lambda}_2 + \tau = 0. \quad (95)$$

从而有  $\partial \lambda_1 / \partial \tau = -\frac{2}{3} < 0$ , 故而图 1(a) 中  $\lambda_1$  的斜率为负. 图 1(a) 中稀疏波的左右两边界特征速度分别是

$$s_- = -\left( \frac{3}{2}\lambda_1^L + \frac{1}{2}\bar{\lambda}_2 \right), \quad s_+ = -\left( \frac{3}{2}\lambda_1^R + \frac{1}{2}\bar{\lambda}_2 \right). \quad (96)$$

另一种稀疏波是 (见图 1(b)):

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_1 = \text{constant}, \quad \frac{1}{2}\bar{\lambda}_1 + \frac{3}{2}\lambda_2 + \tau = 0. \quad (97)$$

从而有  $\partial \lambda_2 / \partial \tau = -\frac{2}{3} < 0$ , 故而图 1(b) 中  $\lambda_2$  的斜率为负. 图 1(b) 中稀疏波的左右两边界特征速度分别是

$$s_- = -\left( \frac{1}{2}\bar{\lambda}_1 + \frac{3}{2}\lambda_2^L \right), \quad s_+ = -\left( \frac{1}{2}\bar{\lambda}_1 + \frac{3}{2}\lambda_2^R \right). \quad (98)$$

由方程 (34) 可知

$$\sqrt{\rho} = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2), \quad v = -(\lambda_1 + \lambda_2). \quad (99)$$

因此, 对应于图 1(a) 和类型 (95) 式中的稀疏波, 可得原方程的稀疏波解:

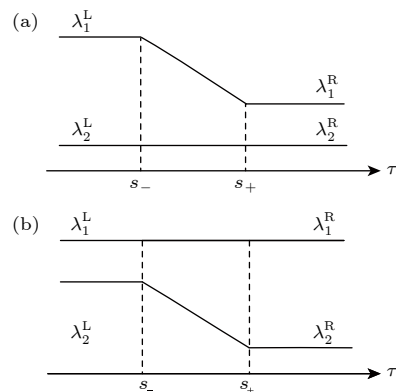


图 1 两种类型的稀疏波结构 (a)  $\lambda_2$  为常数; (b)  $\lambda_1$  为常数

Fig. 1. Two types of RW structure: (a)  $\lambda_2$  is constant; (b)  $\lambda_1$  is constant.



$$\rho = \frac{1}{9} \left( \frac{x}{t} + 2\bar{\lambda}_2 \right)^2, \quad v = \frac{2}{3} \left( \frac{x}{t} - \bar{\lambda}_2 \right). \quad (100)$$

对应于图 1(b) 和类型 (97) 式中的稀疏波, 可得原方程的稀疏波解:

$$\rho = \frac{1}{9} \left( \frac{x}{t} + 2\bar{\lambda}_1 \right)^2, \quad v = \frac{2}{3} \left( \frac{x}{t} - \bar{\lambda}_1 \right). \quad (101)$$

### 3.2 色散冲击波结构

色散冲击波是一种扩展的、调制的非线性波列, 它连接了两种不同的状态 (小振幅谐波与孤立波). 它可以被看作是耗散的经典激波的色散对应物. 色散冲击波具有明显的多尺度结构, 由两个非振荡状态 (如缓慢变化或恒定状态) 之间的振荡过渡组成: 一个边缘与孤立波或孤子相关, 通过缓慢调制的周期波列连接到对面边缘的小振幅谐波 [28].

下面分析 Whitham 方程 (69) 和方程 (70) 所描述的 1-相冲击波结构. 类似于稀疏波的讨论, 考虑 Whitham 方程 (69) 和方程 (70) 关于变量  $\tau$  的自相似解:

$$\frac{d\lambda_i}{d\tau} [v_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) - \tau] = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (102)$$

由此可知,  $d\lambda_i/d\tau = 0$  或者  $v_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \tau$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). 下面分两种情况进行讨论.

**情形 I** 假设  $\lambda_1^L < \lambda_1^R$  且  $\lambda_2^L = \lambda_2^R$ . 图 2(a) 和图 2(c) 给出的是这种情形下 1-相冲击波的结构. 在此情形下有

$$\lambda_1 = \lambda_1^R, \quad \lambda_3 = \lambda_1^L, \quad \lambda_4 = \lambda_2^L = \lambda_2^R, \quad (103)$$

但  $\lambda_2$  是关于自相似变量  $\tau$  的函数, 且由如下隐函

数确定:

$$v_2(\lambda_1^R, \lambda_2, \lambda_1^L, \lambda_2^L) = \tau. \quad (104)$$

Whitham 方程 (69) 和方程 (70) 中椭圆函数的模数为

$$m = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}.$$

由此, 极限  $m \rightarrow 1$  表示 1-相冲击波处于孤立子前沿, 即  $\lambda_2 \rightarrow \lambda_3$ , 则有

$$\lambda_2(\tau_s) = \lambda_3(\tau_s) = \lambda_1^L, \quad \lambda_1(\tau_s) = \lambda_1^R, \quad \lambda_4(\tau_s) = \lambda_2^R, \quad (105)$$

其中,  $\tau_s$  表示在孤立子前沿极限处黎曼不变量对应的特征速度, 即为

$$\tau_s = - \left( \frac{1}{2} \lambda_1^R + \lambda_1^L + \frac{1}{2} \lambda_2^L \right). \quad (106)$$

极限  $m \rightarrow 0$  表示 1-相冲击波处于振荡前沿 (也称为调和前沿), 即  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ , 这种情形下有

$$\lambda_1(\tau_0) = \lambda_2(\tau_0) = \lambda_1^R, \quad \lambda_3(\tau_0) = \lambda_1^L, \quad \lambda_4(\tau_0) = \lambda_2^L, \quad (107)$$

其中,  $\tau_0$  表示在振荡前沿极限处黎曼不变量对应的特征速度, 即为

$$\tau_0 = \frac{4(\lambda_1^L + \lambda_2^L)\lambda_1^R - 8(\lambda_1^R)^2 + (\lambda_1^L - \lambda_2^L)^2}{4\lambda_1^R - 2\lambda_1^L - 2\lambda_2^L}. \quad (108)$$

**情形 II** 假设  $\lambda_2^L < \lambda_2^R$  且  $\lambda_1^L = \lambda_1^R$ . 图 2(b) 和图 2(d) 给出的是这种情形下 1-相冲击波的结构. 在此情形下有

$$\lambda_1 = \lambda_1^L = \lambda_1^R, \quad \lambda_2 = \lambda_2^R, \quad \lambda_4 = \lambda_2^L, \quad (109)$$

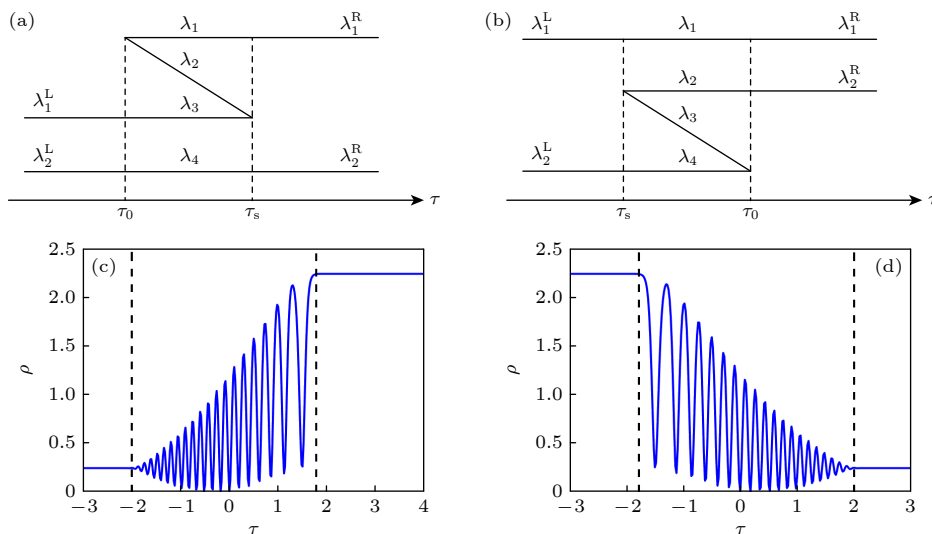


图 2 两种冲击波结构及其对应的色散冲击波

Fig. 2. Two types of DSW structure and their corresponding dispersive shock waves.

但  $\lambda_3$  是关于自相似变量  $\tau$  的函数, 且由如下隐函数确定:

$$v_3(\lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_3, \lambda_2^L) = \tau. \quad (110)$$

在这种情形下, 极限  $m \rightarrow 1$  仍然表示 1-相冲击波处于孤立子前沿, 即  $\lambda_3 \rightarrow \lambda_2$ , 则有

$$\lambda_2(\tau_s) = \lambda_3(\tau_s) = \lambda_2^R, \quad \lambda_1(\tau_s) = \lambda_1^L, \quad \lambda_4(\tau_s) = \lambda_2^L, \quad (111)$$

其中,  $\tau_s$  表示在孤立子前沿极限处黎曼不变量对应的特征速度, 即为

$$\tau_s = - \left( \frac{1}{2} \lambda_1^L + \lambda_2^R + \frac{1}{2} \lambda_4 \lambda_2^L \right). \quad (112)$$

极限  $m \rightarrow 0$  仍然表示 1-相冲击波处于振荡前沿, 即  $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4$ , 有

$$\lambda_3(\tau_0) = \lambda_4(\tau_0) = \lambda_2^L, \quad \lambda_1(\tau_0) = \lambda_1^R, \quad \lambda_2(\tau_0) = \lambda_2^R, \quad (113)$$

其中,  $\tau_0$  表示在振荡前沿极限处黎曼不变量对应的特征速度, 即为

$$\tau_0 = \frac{8(\lambda_2^L)^2 - (\lambda_1^R - \lambda_2^R)^2 - 4\lambda_2^L(\lambda_1^R + \lambda_2^R)}{2\lambda_2^R + 2\lambda_1^R - 4\lambda_2^L}. \quad (114)$$

#### 4 特殊间断初值问题解的演化

本节考虑方程 (1) 在特殊间断初值问题 (83) 式和 (84) 式下的演化. 由初值 (84) 式可知, 当  $x < 0$  时, 有  $\rho_0 = 1, v_0 = 0$ , 则

$$\lambda_1^L = 1, \quad \lambda_2^L = -1. \quad (115)$$

对于  $x > 0$  的情形, 可分两种情况: 1)  $\lambda_2^R = \lambda_2^L = -1$  和 2)  $\lambda_1^R = \lambda_1^L = 1$ .

首先, 讨论第一种情况 1)  $\lambda_2^R = \lambda_2^L = -1$ . 此时有  $\frac{v_0}{2} + \sqrt{\rho_0} = 1$ , 即  $v_0 = 2(1 - \sqrt{\rho_0})$ , 从而

$$\lambda_1^R = \sqrt{\rho_0} - \frac{v_0}{2} = 2\sqrt{\rho_0} - 1 = c. \quad (116)$$

若  $c < 1$ , 即  $\rho_0 < 1$  且  $v_0 > 0$ , 有  $\lambda_1^R < \lambda_1^L$ , 则此初值问题只能产生稀疏波 (见图 1(a)), 而不会产生色散冲击波. 图 3(a) 给出了这种情况下方程 (1) 特殊初值问题 (83) 式和 (84) 式下的演化情形, 可以清晰地看到稀疏波的演化过程, 其中, 参数  $\rho_0 = 1/4, v_0 = 1$ .

若  $c = 1$ , 即  $\rho_0 = 1$  且  $v_0 = 0$ , 则有  $\lambda_1^R = \lambda_1^L$ , 左右初值相等, 既不会产生稀疏波又不会产生色散冲击波.

若  $c > 1$ , 即  $\rho_0 > 1$  且  $v_0 < 0$ , 有  $\lambda_1^R > \lambda_1^L$ , 则此初值问题肯定产生色散冲击波, 对应以上给出的冲击波情形 I 以及图 2(a), 此时有

$$\lambda_1 = c, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = -1, \quad v_2(c, \lambda_2, 1, -1) = \tau, \quad (117)$$

其中,  $v_2(c, \lambda_2, 1, -1) = \tau$  可进一步表示成

$$\tau = -\frac{1}{2}(c + \lambda_2) - \frac{(\lambda_2 - 1)(c - \lambda_2)K(m)}{(1 - \lambda_2)K(m) + (c - 1)E(m)}, \quad (118)$$

这里,  $m = \frac{2(c - \lambda_2)}{(c - 1)(1 + \lambda_2)}$ .

在振荡前沿,  $\lim_{\lambda_2 \rightarrow c} v_2(c, \lambda_2, 1, -1) = \tau_0$  表明

$$\tau_0 = \frac{1}{c} - 2c = \frac{1}{2\sqrt{\rho_0} - 1} - 2(2\sqrt{\rho_0} - 1). \quad (119)$$

在孤立子前沿,  $\lim_{\lambda_2 \rightarrow -1} v_2(c, \lambda_2, 1, -1) = \tau_s$  表明

$$\tau_s = -\frac{1}{2}(1 + c) = -\frac{1}{2}(1 + 2\sqrt{\rho_0} - 1). \quad (120)$$

图 3(b) 给出了这种情况下方程 (1) 特殊初值问题 (83) 式和 (84) 式下的演化情形. 可以观察到, 这是标准的色散冲击波演化过程, 其中, 参数  $\rho_0 = 9/4, v_0 = -1$ .

接着讨论 2)  $\lambda_1^R = \lambda_1^L = 1$ . 此时有  $\sqrt{\rho_0} - \frac{v_0}{2} = 1$ ,

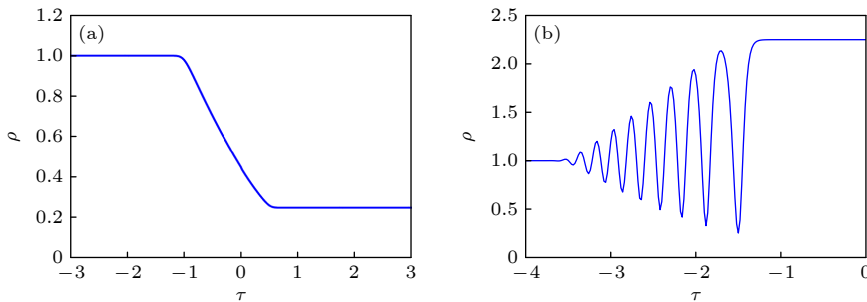


图 3 方程 (1) 在特殊初值问题 (83) 式和 (84) 式下的演化情形 (a)  $\rho_0 = 1/4, v_0 = 1$ ; (b)  $\rho_0 = 9/4, v_0 = -1$

Fig. 3. Evolution of the Eq. (1) under special initial value problems Eq. (83) and Eq. (84): (a)  $\rho_0 = 1/4, v_0 = 1$ ; (b)  $\rho_0 = 9/4, v_0 = -1$ .

即  $v_0 = 2(\sqrt{\rho_0} - 1)$ , 从而

$$\lambda_2^R = -\frac{v_0}{2} - \sqrt{\rho_0} = 1 - 2\sqrt{\rho_0} = d < 1. \quad (121)$$

若  $d < -1$ , 即  $\rho_0 > 1$  且  $v_0 > 0$ , 有  $\lambda_2^R < \lambda_2^L$ , 则此初值问题只能产生稀疏波 (见图 1(b)), 而不会产生色散冲击波.

若  $d = -1$ , 即  $\rho_0 = 1$  且  $v_0 = 0$ , 有  $\lambda_2^R = \lambda_2^L$ , 左右初值相等, 既不会产生稀疏波又不会产生色散冲击波.

若  $d > -1$ , 即  $\rho_0 < 1$  且  $v_0 < 0$ , 有  $\lambda_2^R > \lambda_2^L$ , 则此初值问题肯定产生色散冲击波, 对应以上给出的冲击波情形 II 以及图 2(b), 此时有

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = d, \quad v_3(1, d, \lambda_3, -1) = \tau, \quad \lambda_4 = -1, \quad (122)$$

其中,  $v_3(1, d, \lambda_3, -1) = \tau$  可进一步表示成

$$\tau = -\frac{1}{2}(d + \lambda_3) - \frac{(\lambda_3 + 1)(d - \lambda_3)K(m)}{(d - \lambda_3)K(m) - (d + 1)E(m)}, \quad (123)$$

这里,  $m = \frac{(1-d)(1+\lambda_3)}{(1+d)(1-\lambda_3)}$ .

在振荡前沿,  $\lim_{\lambda_3 \rightarrow -1} v_3(1, d, \lambda_3, -1) = \tau_0$  表明

$$\tau_0 = \frac{11 - d^2 + 6d}{2d + 6}, \quad d = 1 - 2\sqrt{\rho_0}. \quad (124)$$

在孤立子前沿,  $\lim_{\lambda_3 \rightarrow d} v_3(1, d, \lambda_3, -1) = \tau_s$  表明

$$\tau_s = -d = 2\sqrt{\rho_0} - 1. \quad (125)$$

我们知道, 色散冲击波的最小密度为

$$\rho_{\min} = \rho_3 = \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)^2 = \frac{1}{4}(d + \lambda_3)^2. \quad (126)$$

故总是可以选取  $\lambda_3 = -d$ , 使得  $\rho_{\min} = 0$ , 这表明在色散冲击波内部出现了一个密度为 0 的点, 称为“真空点”(vacuum point). 此时通过方程 (123), 可得此“真空点”的坐标  $\tau = \tau_v$  为

$$\tau_v = \frac{2d(d-1)K(m_v)}{2dK(m_v) - (d+1)E(m_v)}, \quad (127)$$

此时  $m_v = \frac{1-d}{1+d}$ , 其中  $d = 1 - 2\sqrt{\rho_0}$ . 此外, 由于在此“真空点”处,  $U = -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = -\frac{1}{2}(1 + d - d - 1) = 0$ , 且  $C_1 = \sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3} = \sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_{\min}} = 0$ , 则根据行波解 (21) 式知, 原方程解的相速度  $v(x, t) = 0$ .

最后, 当  $\rho_0 = \frac{1}{4}$  时, 有  $d = 0$ , 则有  $m_v = 1$ . 此时,  $\tau_s = \tau_v = 0$ , 说明“真空点”与孤立子前沿重合. 此外,  $\rho_0$  的值越小, “真空点”越接近振荡前沿, 即  $\tau_v \rightarrow \tau_0$  ( $\rho_0 \rightarrow 0$ ). 这时, 色散冲击波的振荡逐渐消失, 变为稀疏波.

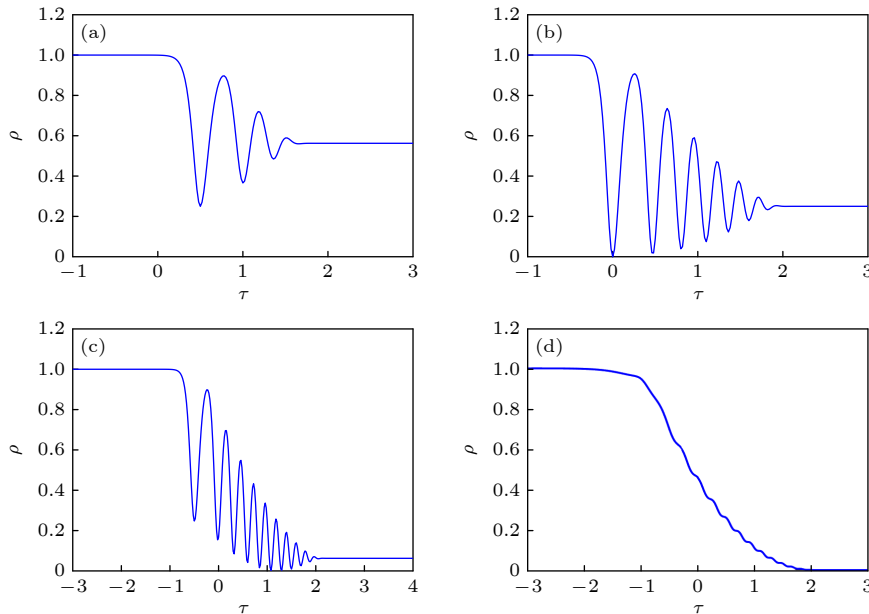


图 4 方程 (1) 在特殊初值问题 (83) 式和 (84) 式下的演化情形 (a)  $\rho = 9/16, v = -0.5, d = -0.5$ ; (b)  $\rho = 1/4, v = -1, d = 0$ ; (c)  $\rho = 1/16, v = -1.5, d = 0.5$ ; (d)  $\rho = 0.0001, v = -1.98, d = 0.98$

Fig. 4. Evolution of the Eq. (1) under special initial value problems Eq. (83) and Eq. (84): (a)  $\rho = 9/16, v = -0.5, d = -0.5$ ; (b)  $\rho = 1/4, v = -1, d = 0$ ; (c)  $\rho = 1/16, v = -1.5, d = 0.5$ ; (d)  $\rho = 0.0001, v = -1.98, d = 0.98$ .

在研究初值问题解的演化过程中, 可以把初始值  $\rho_0$  分为如下情况:  $\frac{1}{4} < \rho_0 < 1$ ;  $\rho_0 = \frac{1}{4}$ ;  $0 < \rho_0 < \frac{1}{4}$  和  $0 < \rho_0 \ll \frac{1}{4}$ . 对于不同的初值  $\rho_0$ , 图 4 给出了方程 (1) 在特殊初值问题 (83) 式和 (84) 式下几类简单的色散冲击波和稀疏波结构.

### 5 一般间断初值问题解的完全分类

本节基于以上分析, 对方程 (1) 的一般间断初值问题 (7) 式进行完全分类. 对于两种类型的稀疏波, 分别有  $\lambda_1 = -\frac{v}{2} + \sqrt{\rho} = \bar{\lambda}_1$  和  $\lambda_2 = -\frac{v}{2} - \sqrt{\rho} = \bar{\lambda}_2$ . 为完成分类, 首先固定左端初值  $(v_L, \rho_L)$ , 从而得到黎曼不变量在左侧的固定值  $\lambda_1^L$  和  $\lambda_2^L$  ( $\lambda_1^L > \lambda_2^L$ ), 则有

$$\lambda_1^L = -\frac{v}{2} + \sqrt{\rho}, \quad \lambda_2^L = -\frac{v}{2} - \sqrt{\rho}, \quad (128)$$

此式即为

$$\rho = \left(\frac{v}{2} + \lambda_1^L\right)^2 \quad \text{或} \quad \rho = \left(\frac{v}{2} + \lambda_2^L\right)^2. \quad (129)$$

在  $(v, \rho)$  平面内, 这是两条开口向上的抛物线, 最低点都落在  $v$ -轴上, 它们的最低点的横坐标分别是

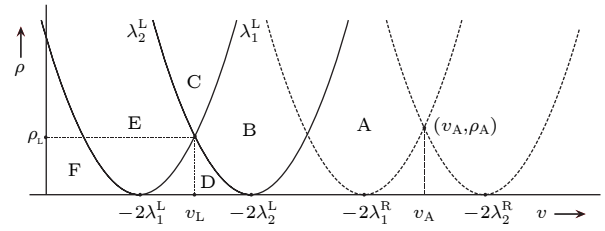


图 5 一般间断初值问题 (7) 式的分类图

Fig. 5. Classification of solutions to discontinuous initial value problems Eq. (7).

$-2\lambda_1^L$  和  $-2\lambda_2^L$ , 且两条抛物线相交于  $(v_L, \rho_L)$ , 见图 5 中的实线. 由图可以看出,  $(v, \rho)$  平面被分割成 6 个区域; 在每个区域中, 根据  $v$  和  $\rho$  的取值范围, 可以确定黎曼不变量  $\lambda_1^L, \lambda_2^L, \lambda_1^R$  和  $\lambda_2^R$  的取值范围. 下面以区域 A 为例, 说明左右端点处黎曼不变量的大小顺序. 为此, 给定右端初值  $(v_R, \rho_R) = (v_A, \rho_A)$ , 也可做出两条开口向上的抛物线, 见图 5 中的虚抛物线, 它们在  $v$ -轴上最低点的横坐标分别是  $-2\lambda_1^R$  和  $-2\lambda_2^R$ . 因此, 在区域 A 中, 有  $\lambda_1^L > \lambda_2^L > \lambda_1^R > \lambda_2^R$ . 同理可得其他区域中关于黎曼不变量的约束条件, 因此有

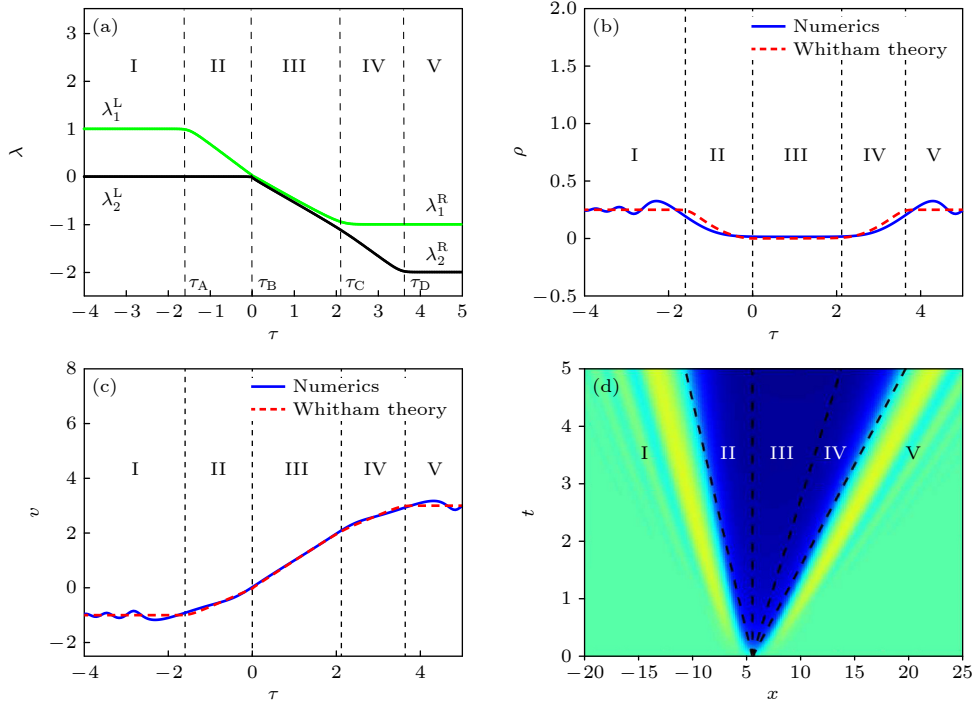


图 6 情况 A 下 (a) 黎曼不变量的分布、(b) 密度函数  $\rho$  的波形结构、(c) 速度函数  $v$  的波形结构与 (d) 密度函数  $\rho$  的演化过程. 其中, 参数选择为  $t = 5, \lambda_2^L = 0, \lambda_1^L = 1, \lambda_2^R = -2, \lambda_1^R = -1$

Fig. 6. (a) Distribution of Riemann invariants, (b) the waveform structure of density function  $\rho$ , (c) the waveform structure of velocity function  $v$  and (d) the evolution process of density function  $\rho$  for Case A. The parameters are  $t = 5, \lambda_2^L = 0, \lambda_1^L = 1, \lambda_2^R = -2, \lambda_1^R = -1$ .

- A.  $\lambda_1^L > \lambda_2^L > \lambda_1^R > \lambda_2^R$ , B.  $\lambda_1^L > \lambda_1^R > \lambda_2^L > \lambda_2^R$ ,  
 C.  $\lambda_1^R > \lambda_1^L > \lambda_2^L > \lambda_2^R$ , D.  $\lambda_1^L > \lambda_1^R > \lambda_2^R > \lambda_2^L$ ,  
 E.  $\lambda_1^R > \lambda_1^L > \lambda_2^R > \lambda_2^L$ , F.  $\lambda_1^R > \lambda_2^R > \lambda_1^L > \lambda_2^L$ .  
 (130)

**情况 A**  $\lambda_1^L > \lambda_2^L > \lambda_1^R > \lambda_2^R$ .

在情况 A 中没有出现色散冲击波结构, 但是出现了一个真空区域, 即图 6 中的区域 III. 图 6 给出了黎曼不变量的分布情况 (图 6(a)) 与色散流体的密度、速度结构 (图 6(b) 和图 6(c)), 并且实现了直接数值模拟与 Whitham 调制理论结果的对比. 从图中的对比结果来看, 符合良好. 图 6(d) 是密度函数  $\rho$  的演化俯视图. 特别地, 图 7(a) 给出了在  $(v, \rho)$  平面上解的演化行为, 从蓝色实线的走势不难观察到从左边界到右边界经过了一个真空区域, 在图中表现为  $\rho = 0$ . 区域的边界可以给出显式的计算结果如下 (见图 6(a) 的标记位置):

$$\tau_A = -\frac{3}{2}\lambda_1^L - \frac{1}{2}\lambda_2^L, \quad \tau_B = -2\lambda_2^L,$$

$$\tau_C = -2\lambda_1^R, \quad \tau_D = -\frac{1}{2}\lambda_1^R - \frac{3}{2}\lambda_2^R.$$

**情况 B**  $\lambda_1^L > \lambda_1^R > \lambda_2^L > \lambda_2^R$ .

情况 B 是两个基本的稀疏波结构组成, 与情况 A 类似. 从黎曼不变量的分布中可以看出区域划分为平台、稀疏波、平台、稀疏波、平台, 与波形结构的区域划分对应. 图 8 给出了黎曼不变量的分布情况 (图 8(a)) 与色散流体的密度、速度结构 (图 8(b) 和图 8(c)) 以及密度  $\rho$  的演化过程 (图 8(d)). 图 7(b) 给出了在  $(v, \rho)$  平面上解的行为, 可以看出, 从  $(v_L, \rho_L)$  到  $(v_R, \rho_R)$  的过程对应于  $\lambda_2^L$  为常数到  $\lambda_1^R$  为常数的过程. 同样地, 区域的边界计算结果可以给出 (见图 8(a) 的标记位置):

$$\tau_A = -\frac{3}{2}\lambda_1^L - \frac{1}{2}\lambda_2^L, \quad \tau_B = -\frac{3}{2}\lambda_1^R - \frac{1}{2}\lambda_2^L,$$

$$\tau_C = -\frac{1}{2}\lambda_1^R - \frac{3}{2}\lambda_2^L, \quad \tau_D = -\frac{1}{2}\lambda_1^R - \frac{3}{2}\lambda_2^R.$$

**情况 C**  $\lambda_1^R > \lambda_1^L > \lambda_2^L > \lambda_2^R$ .

情况 C 出现了色散冲击波, 从左往右 5 个区域分别是平台、冲击波、平台、稀疏波、平台. 图 9 中, 流体密度  $\rho$  的波形结构 (图 9(b)) 的 II 区域左侧为小振幅谐波 (此时雅可比椭圆函数的模数  $m$  接近 0), 右侧为孤子边缘 (此时雅可比椭圆函数的模数  $m$  接近 1). 从密度函数  $\rho$  的演化过程

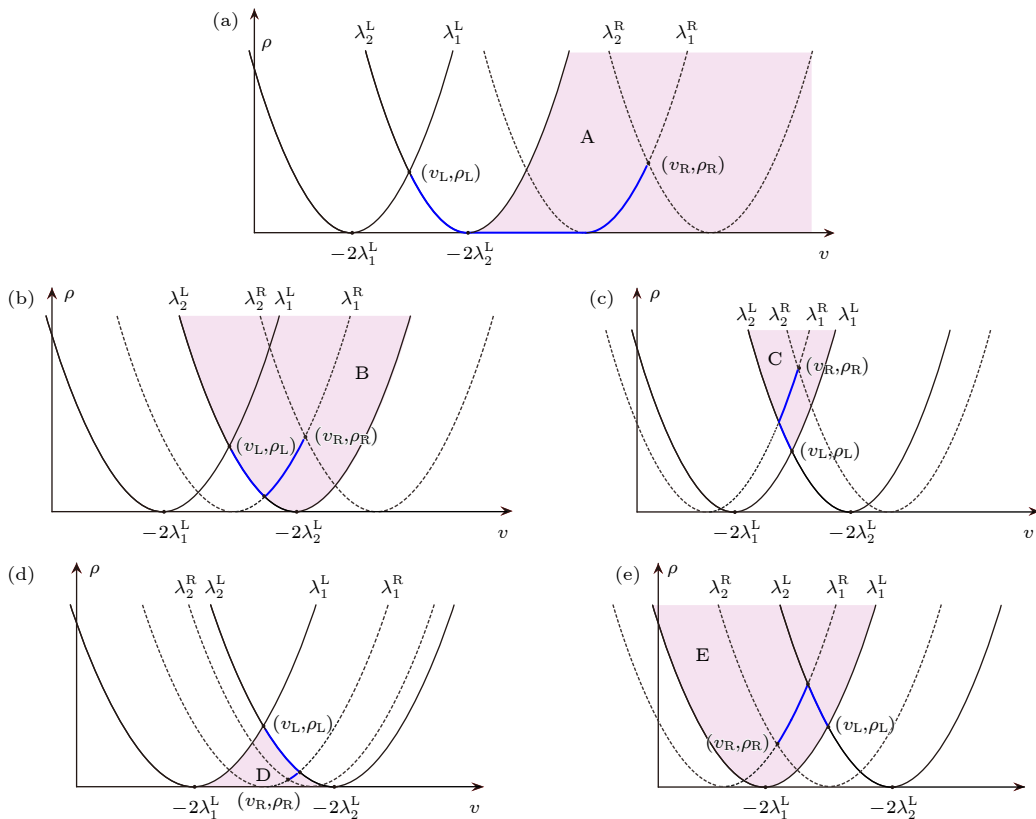


图 7 情况 A—情况 E 在  $(v, \rho)$  平面中解的行为

Fig. 7. Behavior of the solution in the  $(v, \rho)$  plane for Case A—Case E.

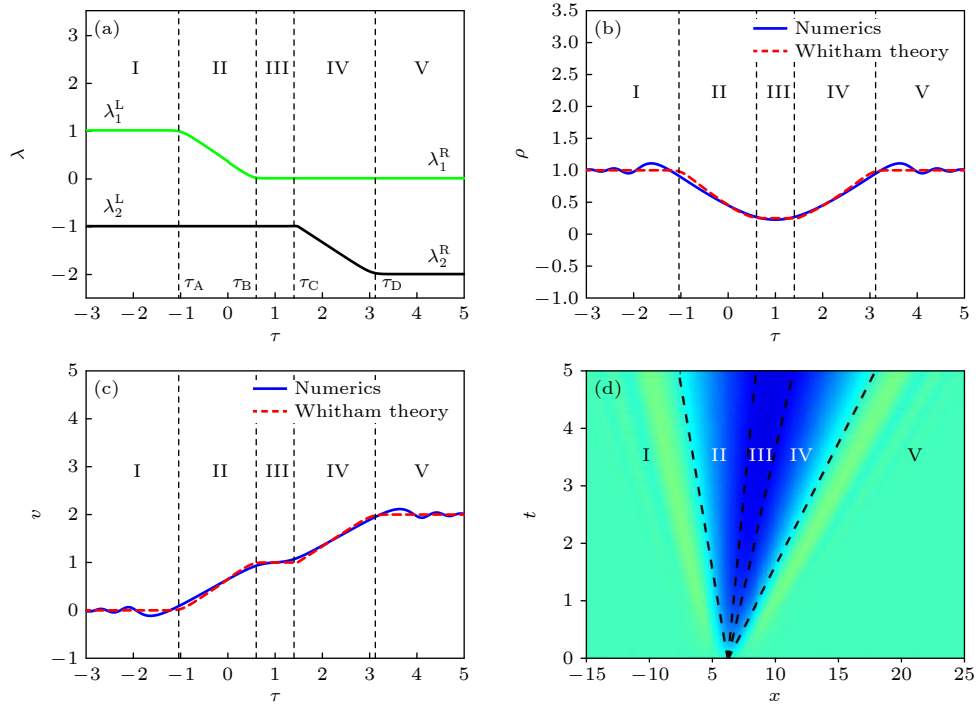


图 8 情况 B 下 (a) 黎曼不变量的分布、(b) 密度函数  $\rho$  的波形结构、(c) 速度函数  $v$  的波形结构与 (d) 密度函数  $\rho$  的演化过程. 其中, 参数选择为  $t = 5, \lambda_2^L = -1, \lambda_1^L = 1, \lambda_2^R = -2, \lambda_1^R = 0$

Fig. 8. (a) Distribution of Riemann invariants, (b) the waveform structure of density function  $\rho$ , (c) the waveform structure of velocity function  $v$  and (d) the evolution process of density function  $\rho$  for Case B. The parameters are  $t = 5, \lambda_2^L = -1, \lambda_1^L = 1, \lambda_2^R = -2, \lambda_1^R = 0$ .

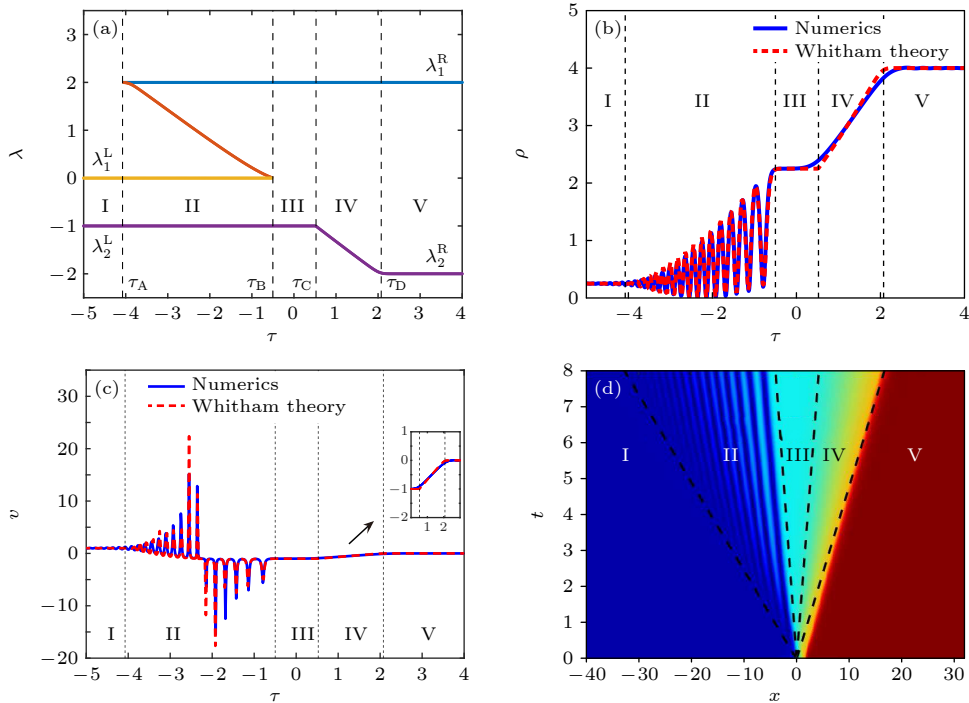


图 9 情况 C 下 (a) 黎曼不变量的分布、(b) 密度函数  $\rho$  的波形结构、(c) 速度函数  $v$  的波形结构与 (d) 密度函数  $\rho$  的演化过程. 其中, 参数选择为  $t = 8, \lambda_2^L = -1, \lambda_1^L = 0, \lambda_2^R = -2, \lambda_1^R = 2$

Fig. 9. (a) Distribution of Riemann invariants, (b) the waveform structure of density function  $\rho$ , (c) the waveform structure of velocity function  $v$  and (d) the evolution process of density function  $\rho$  for Case C. The parameters are  $t = 8, \lambda_2^L = -1, \lambda_1^L = 0, \lambda_2^R = -2, \lambda_1^R = 2$ .

(图 9(d)) 也可以观察到单一颜色区域均为平台区域, 并且区域 II 中出现波动, 区域 IV 为稀疏波区域. 当  $\lambda_2 = 1$  时, 会出现一个真空点  $\rho = 0$ , 此时速度分量  $v$  有奇异性, 从图 9(c) 的区域 II 能观察到波形在真空点处的反转. 图 7(c) 给出了在  $(v, \rho)$  平面上解的行为, 从  $(v_L, \rho_L)$  到  $(v_R, \rho_R)$  的过程对应于  $\lambda_2^L$  为常数到  $\lambda_1^R$  为常数. 此时的区域边界可由如下公式给出 (见图 9(a) 的标记位置):

$$\tau_A = v_2(\lambda_1^R, \lambda_1^R, \lambda_1^L, \lambda_2^L), \quad \tau_B = v_2(\lambda_1^R, \lambda_1^L, \lambda_1^L, \lambda_2^L),$$

$$\tau_C = -\frac{1}{2}\lambda_1^R - \frac{3}{2}\lambda_2^L, \quad \tau_D = -\frac{1}{2}\lambda_1^R - \frac{3}{2}\lambda_2^R.$$

**情况 D**  $\lambda_1^L > \lambda_1^R > \lambda_2^R > \lambda_2^L$ .

情况 D 与情况 C 类似, 此时的区域划分从左往右分别为平台、稀疏波、平台、色散冲击波、平台. 密度函数  $\rho$  和速度函数  $v$  的理论结果与数值结果符合情况良好. 图 10(d) 在时间  $t = 5$  时的二维平面图即图 10(b). 同样地, 区域的边界计算结果可以详细给出 (见图 10(a) 的标记位置):

$$\tau_A = -\frac{3}{2}\lambda_1^L - \frac{1}{2}\lambda_2^L, \quad \tau_B = -\frac{3}{2}\lambda_1^R - \frac{1}{2}\lambda_2^L,$$

$$\tau_C = v_3(\lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_2^R, \lambda_2^L), \quad \tau_D = v_3(\lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_2^L, \lambda_2^L).$$

Whitham 调制理论在物理和工程技术中有许多重要应用, 这里考虑流体动力学中一类典型的应用问题——溃坝问题, 也称为大坝问题. 当流体保持静止时, 流体平底部上方的垂直墙壁被迅速移走, 由此产生的二维流动称为溃坝波 [29]. 这里忽略了摩擦阻力和湍流阻力的影响, 只考虑完全快速溃坝后流体运动的理想状态. 事实上, 这对应于一种特殊的间断初值. 本文研究散焦型非线性薛定谔方程所描述的色散流体动力学模型, 其初值可选取为

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho^L, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad v(x, 0) = \begin{cases} v^L, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad (131)$$

则根据 (34) 式可得,  $\lambda_2^R = \lambda_1^R = 0$ . 在这一特殊初值下, 解的区域不再对应于图 5 的全部区域.

具体地说, 当  $v_L < -2\sqrt{\rho_L}$  时对应于情况 A, 当  $|v_L| < 2\sqrt{\rho_L}$  时对应于情况 D, 而当  $v_L > 2\sqrt{\rho_L}$  时对应于情况 F, 这里给出情况 A (图 11) 和情况 D (图 12) 的黎曼不变量的分布与密度函数  $\rho$  的波形结构.

**情况 E**  $\lambda_1^R > \lambda_1^L > \lambda_2^R > \lambda_2^L$ .

这种情况下不存在稀疏波结构, 只有色散冲击

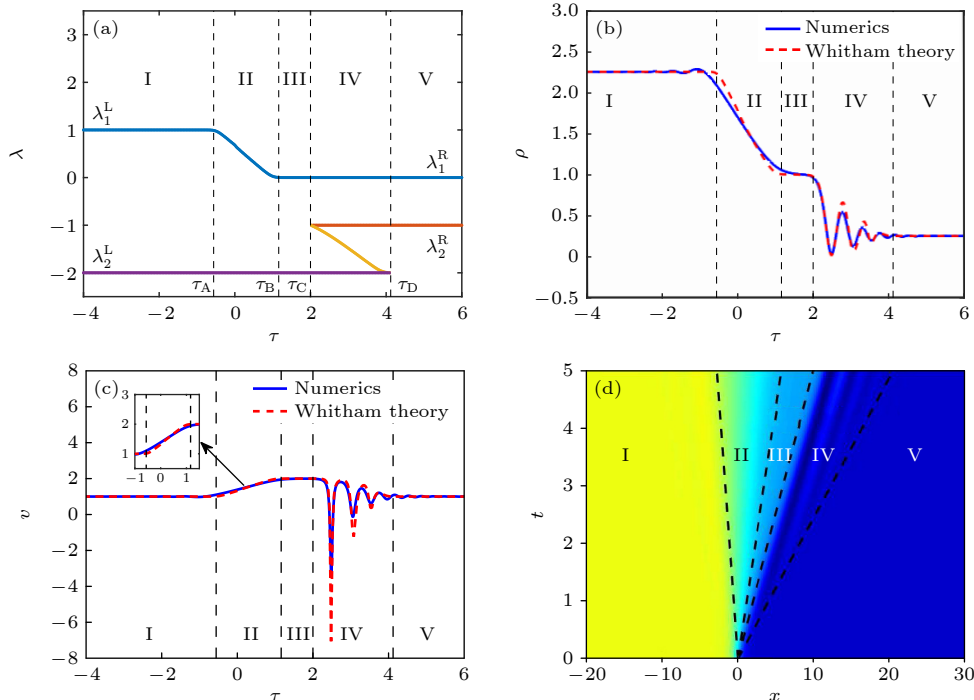


图 10 情况 D 下 (a) 黎曼不变量的分布、(b) 密度函数  $\rho$  的波形结构、(c) 速度函数  $v$  的波形结构与 (d) 密度函数  $\rho$  的演化过程. 其中, 参数选择为  $t = 5$ ,  $\lambda_2^L = -2$ ,  $\lambda_1^L = 1$ ,  $\lambda_2^R = -1$ ,  $\lambda_1^R = 0$

Fig. 10. (a) Distribution of Riemann invariants, (b) the waveform structure of density function  $\rho$ , (c) the waveform structure of velocity function  $v$  and (d) the evolution process of density function  $\rho$  for Case D. The parameters are  $t = 5$ ,  $\lambda_2^L = -2$ ,  $\lambda_1^L = 1$ ,  $\lambda_2^R = -1$ ,  $\lambda_1^R = 0$ .

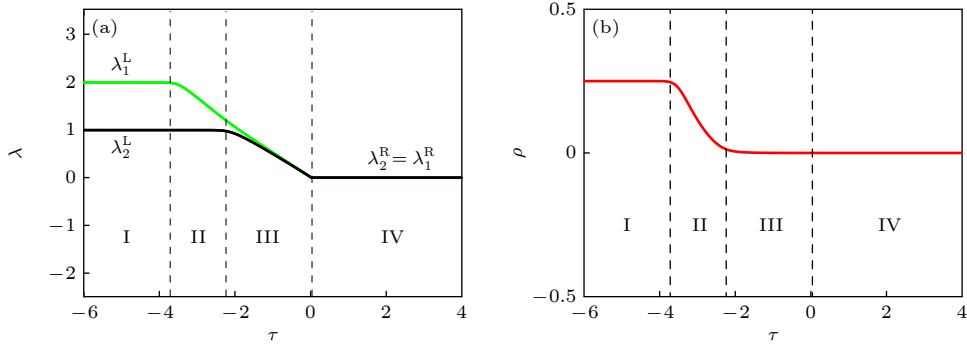


图 11 情况 A 大坝问题的 (a) 黎曼不变量与 (b) 密度函数的分布图. 其中时间为  $t = 5$

Fig. 11. (a) Distribution of Riemann invariants and (b) density function for the dam problem for Case A, where  $t = 5$ .

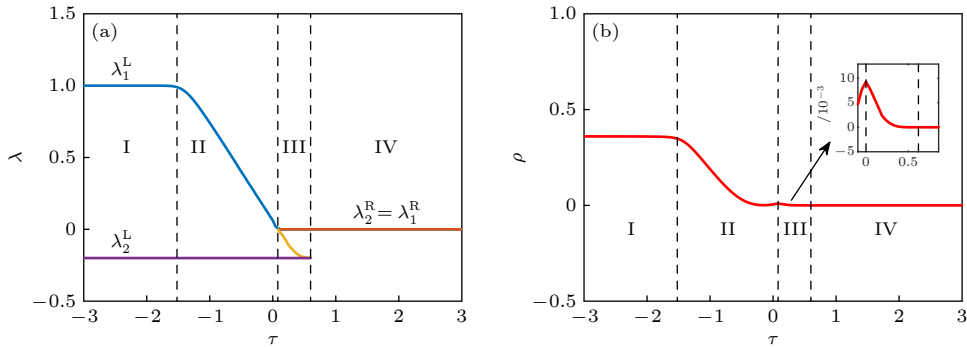


图 12 情况 D 大坝问题的 (a) 黎曼不变量与 (b) 密度函数的分布图. 其中时间为  $t = 5$

Fig. 12. (a) Distribution of Riemann invariants and (b) density function for the dam problem for Case D, where  $t = 5$ .

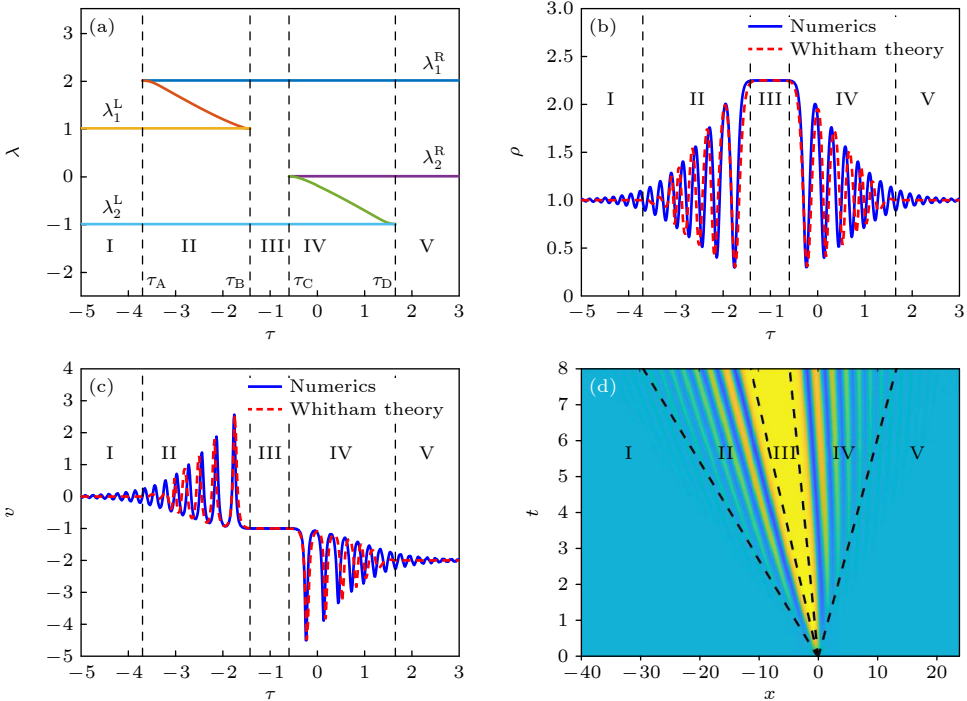


图 13 情况 E 下 (a) 黎曼不变量的分布、(b) 密度函数  $\rho$  的波形结构、(c) 速度函数  $v$  的波形结构与 (d) 密度函数  $\rho$  的演化过程. 其中, 参数选择为  $t = 8$ ,  $\lambda_2^L = -1$ ,  $\lambda_1^L = 1$ ,  $\lambda_2^R = 0$ ,  $\lambda_1^R = 2$

Fig. 13. (a) Distribution of Riemann invariants, (b) the waveform structure of density function  $\rho$ , (c) the waveform structure of velocity function  $v$  and (d) the evolution process of density function  $\rho$  for Case E. The parameters are  $t = 8$ ,  $\lambda_2^L = -1$ ,  $\lambda_1^L = 1$ ,  $\lambda_2^R = 0$ ,  $\lambda_1^R = 2$ .



波和平台结构. 图 13(a) 给出了黎曼不变量的分布情况, 可以看出, 区域 II 和 IV 为色散冲击波区域, 其余为平台区域. 区域 II 的左侧与区域 IV 的右侧为小振幅谐波边缘, 另一侧为孤子边缘. 图 7(e) 给出了在  $(v, \rho)$  平面上解的行为. 区域的边界计算结果可以详细给出 (见图 13(a) 的标记位置):

$$\begin{aligned} \tau_A &= v_2(\lambda_1^R, \lambda_1^R, \lambda_1^L, \lambda_2^L), & \tau_B &= v_2(\lambda_1^R, \lambda_1^L, \lambda_1^L, \lambda_2^L), \\ \tau_C &= v_5(\lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_2^L, \lambda_2^L), & \tau_D &= v_5(\lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_2^L, \lambda_2^L). \end{aligned}$$

特别地, 当  $\lambda_1^L = \lambda_2^R$  时, 图 13 中间的平台区域会消失, 两个亏格为 1 的色散冲击波连接在一起, 见图 14. 具体地, 在图 14(b) 中表现为两个孤子边缘相连接.

**情况 F**  $\lambda_1^R > \lambda_2^R > \lambda_1^L > \lambda_2^L$ .

此情况下出现了一种非调制周期波区域, 即图 15 中的区域 III. 由于本文中的 1 亏格的 NLS-Whitham 方程是严格双曲的, 在自相似解的演化过程中, 至多有一个黎曼不变量不是常数<sup>[27-30]</sup>, 所以不会出现 2-相周期波区域, 且最中间的 1-相周期波的 4 个黎曼不变量均为常数. 此时, 区域的边界

计算结果可以详细给出 (见图 15(a) 的标记位置):

$$\begin{aligned} \tau_A &= v_2(\lambda_1^R, \lambda_1^R, \lambda_1^L, \lambda_2^L), & \tau_B &= v_2(\lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_1^L, \lambda_2^L), \\ \tau_C &= v_3(\lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_1^L, \lambda_2^L), & \tau_D &= v_3(\lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_2^L, \lambda_2^L). \end{aligned}$$

## 6 活塞问题

本节研究散焦型非线性薛定谔方程 (1) 所涉及的色散流体动力学的活塞问题. 活塞问题指硬壁 (活塞) 相对于稳定流体运动, 流体具有恒定的速度时流体的运动规律. 具体地, 以活塞作为固定参照物, 其位置标记在  $x = 0$  处. 色散流体以恒定速度  $v_L = -V$  从左侧的固定深度  $\rho_L$  进入, 与活塞接触的流体相对于活塞处于静止状态, 则活塞的边界条件有  $v(0, t) = 0$  及  $\rho(0, t) = 0$  或  $\rho_x(0, t) = 0$ <sup>[31]</sup>. 活塞与硬壁流体之间的中间速度分布可以用图 2(a) 中的黎曼不变量来描述, 分别为连接活塞区域的平台、色散冲击波、与右边界相连的平台. 此时有

$$\begin{aligned} \lambda_1^R &= \sqrt{\rho_R}, & \lambda_2^R &= -\sqrt{\rho_R}, \\ \lambda_1^L &= -\frac{v_L}{2} + \sqrt{\rho_R}, & \lambda_2^L &= -\frac{v_L}{2} - \sqrt{\rho_R}. \end{aligned}$$

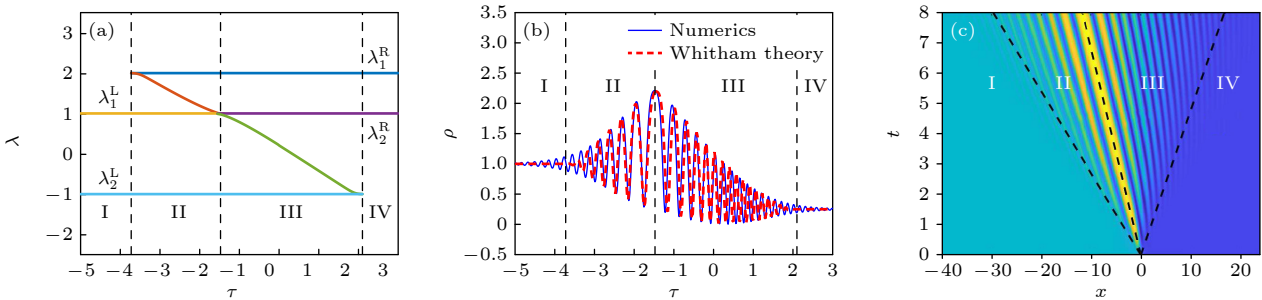


图 14 情况 E 的特殊情形下, (a) 黎曼不变量的分布、(b) 密度函数  $\rho$  的波形结构和 (c) 密度函数  $\rho$  分量的演化过程. 其中, 参数选择为  $t = 8$ ,  $\lambda_2^L = -1$ ,  $\lambda_1^L = \lambda_2^R = 1$ ,  $\lambda_1^R = 2$

Fig. 14. (a) Distribution of Riemann invariants, (b) the waveform structure of density function  $\rho$  and (c) the evolution process of density function  $\rho$  for the special case of Case E. The parameters are  $t = 8$ ,  $\lambda_2^L = -1$ ,  $\lambda_1^L = \lambda_2^R = 1$ ,  $\lambda_1^R = 2$ .

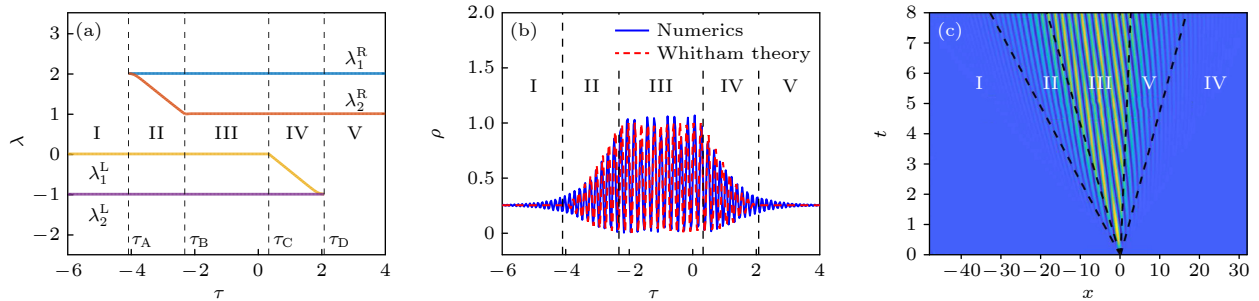


图 15 情况 F 中 (a) 黎曼不变量的分布、(b) 密度函数  $\rho$  的波形结构和 (c) 密度函数  $\rho$  的演化过程. 其中, 参数选择为  $t = 8$ ,  $\lambda_2^L = -1$ ,  $\lambda_1^L = 0$ ,  $\lambda_2^R = 1$ ,  $\lambda_1^R = 2$

Fig. 15. (a) Distribution of Riemann invariants, (b) the waveform structure of density function  $\rho$  and (c) the evolution process of density function  $\rho$  for Case F. The parameters are  $t = 8$ ,  $\lambda_2^L = -1$ ,  $\lambda_1^L = 0$ ,  $\lambda_2^R = 1$ ,  $\lambda_1^R = 2$ .

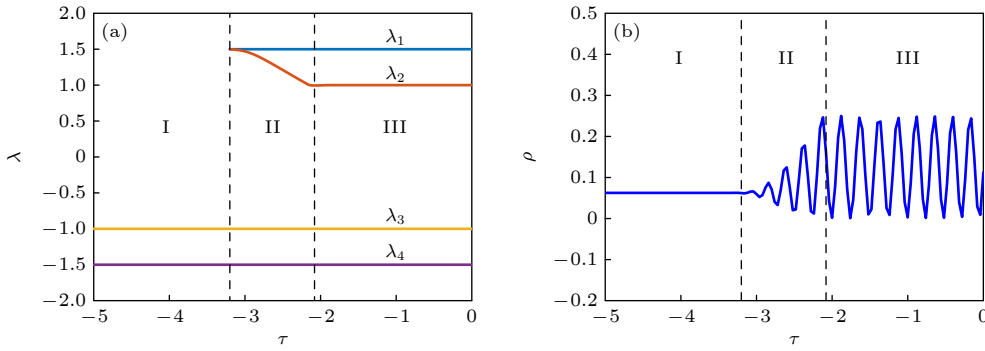


图 16 活塞问题中, (a) 黎曼不变量的分布与 (b) 密度函数  $\rho$  的波形结构, 其中时间选取为  $t = 5$

Fig. 16. (a) Distribution of the Riemann invariant and (b) the waveform structure of the density function  $\rho$  in the piston problem, where  $t = 5$ .

且有  $\lambda_2^L = \lambda_2^R$ . 边界为  $\tau_s = -\frac{V}{2} - \sqrt{\rho_L}$ , 当  $V < -2\sqrt{\rho_L}$  时, 结构发生改变, 这里采用非调制周期波 (见图 16 的 III 区域) 与色散冲击波 (见图 16 的 II 区域) 来近似描述这一结果. 此时黎曼不变量的分布情况为图 16(a), 而流体的密度分布由图 16(b) 来描述. 为了消去非调制周期波的相速度, 需要黎曼不变量满足  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$ . 该算例进一步说明活塞问题中的波动结构与初始不连续演化引起的波动结构并不相同, 甚至具有完全不同的性质, 但这里的讨论提供了一个有启发性的结果.

## 7 结 论

本文发展 Whitham 调制理论研究散焦型非线性薛定谔方程黎曼问题解的分类和演化, 利用有限间隙积分法推导出零-相平面波解和 1-相周期解以及对应的 Whitham 方程, 并且实现了一般间断初值下解的完全分类. 在此基础上详细讨论了 6 种分类结果以及部分特殊情形, 并与直接数值模拟进行对比, 验证了理论结果的正确性. 此外, 本文还讨论了色散流体动力学的活塞问题, 这是 Whitham 调制理论的一类重要应用, 发现了新奇的波状涌潮结果. 事实上, Whitham 调制理论研究非线性色散方程的间断初值问题仍然具有极大的挑战性, 这一点体现为高亏格 Whitham 方程的分析和求解, 未来还有诸多值得深入讨论的工作.

## 参考文献

[1] Whitham G B 1965 *J. Fluid Mech.* **22** 273  
 [2] Luke J C 1966 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **292** 403  
 [3] Flaschka H, Forest M G, McLaughlin D W 1980 *Commun. Pure Appl. Math.* **33** 739

[4] Hoefler M A, Ablowitz M J, Coddington I, Cornell E A, Engels P, Schweikhard V 2006 *Phys. Rev. A* **74** 023623  
 [5] Mo Y C, Kishek R A, Feldman D, Haber I, Beaudoin B, O'Shea P G, Thangaraj J C T 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 084802  
 [6] Trillo S, Deng G, Biondini G, Klein M, Clauss G F, Chabchoub A, Onorato M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 144102  
 [7] Maiden M D, Lowman N K, Anderson D V, Schubert M E, Hoefler M A 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 174501  
 [8] Xu G, Conforti M, Kudlinski A, Mussot A 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 254101  
 [9] Wan W, Jia S, Fleischer J W 2007 *Nat. Phys.* **3** 46  
 [10] Conti C, Fratolocci A, Peccianti M, Ruocco G, Trillo S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 083902  
 [11] Fatome J, Finot C, Millot G, Armaroli A, Trillo S 2014 *Phys. Rev. X* **4** 021022  
 [12] Wang J, Li J, Lu D, Guo Q, Hu W 2015 *Phys. Rev. A* **91** 063819  
 [13] Xu G, Mussot A, Kudlinski A, Trillo S, Copie F, Conforti M 2016 *Opt. Lett.* **41** 2656  
 [14] Millot G, Pitois S, Yan M, Hovhannisyan T, Bendahmane A, Hänsch T W, Picqué N 2016 *Nat. Photonics* **10** 27  
 [15] Bendahmane A, Xu G, Conforti M, Kudlinski A, Mussot A, Trillo S 2022 *Nat. Commun.* **13** 3137  
 [16] Jenkins R 2015 *Nonlinearity* **28** 2131  
 [17] Zhang X F, Wen L, Wang L X, Chen G P, Tan R B, Saito H 2022 *Phys. Rev. A* **105** 033306  
 [18] Bilman D, Buckingham R, Wang D S 2021 *J. Diff. Equ.* **297** 320  
 [19] Lou S Y, Hao X 2022 *Phys. Lett. A* **443** 128203  
 [20] Zhao L C, Xin G G, Yang Z Y, Yang W L 2022 *Phys. D* **435** 133283  
 [21] Wang D S, Xu L, Xuan Z 2022 *J. Nonlinear Sci.* **32** 3  
 [22] Liu Y, Wang D S 2022 *Stud. Appl. Math.* **149** 588  
 [23] Abeya A, Biondini G, Hoefler M A 2023 *J. Phys. A: Math. Theor.* **56** 025701  
 [24] Saleh B, Smyth N F 2023 *Proc. R. Soc. A* **479** 20220580  
 [25] Gong R, Wang D S 2022 *Appl. Math. Lett.* **126** 107795  
 [26] Gong R, Wang D S 2022 *Phys. D* **439** 133398  
 [27] El G A, Geogjaev V V, Gurevich A V, Krylov A L 1995 *Phys. D* **87** 186  
 [28] Congy T, El G A, Hoefler M A, Shearer M 2019 *Stud. Appl. Math.* **142** 241  
 [29] Dressler R F 1954 *Assemblée Générale de Rome* **38** 319  
 [30] Dressler R F 1952 *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **49** 2356  
 [31] Congy T, Ivanov S K, Kamchatnov A M, Pavloff N 2017 *Chaos* **27** 083107

SPECIAL TOPIC—Nonlinear system theory and its frontier applications

# Whitham modulation theory of defocusing nonlinear Schrödinger equation and the classification and evolutions of solutions with initial discontinuity\*

Gong Rui-Zhi    Wang Deng-Shan<sup>†</sup>

(Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Ministry of Education, School of  
Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

( Received 11 February 2023; revised manuscript received 16 March 2023 )

## Abstract

Since the Whitham modulation theory was first proposed in 1965, it has been widely concerned because of its superiority in studying dispersive fluid dynamics and dealing with discontinuous initial value problems. In this paper, the Whitham modulation theory of the defocusing nonlinear Schrödinger equation is developed, and the classification and evolution of the solutions of discontinuous initial value problem are studied. Moreover, the dispersive shock wave region, the rarefaction wave region, the unmodulated wave region and the plateau region are distinguished. Particularly, the correctness of the results is verified by direct numerical simulation. Specifically, the solutions of 0-phase and 1-phase and their corresponding Whitham equations are derived by the finite gap integration method. Also the Whitham equation of genus  $N$  corresponding to the  $N$ -phase periodic wave solution is derived. The basic structures of rarefaction wave and dispersive shock wave are given, in which the boundaries of the regions are calculated in detail. The Riemann invariants and density distributions of dispersive fluids in each case are discussed. When the initial value is fixed as a special one, the vacuum point is considered and analyzed in detail. In addition, the oscillating front and the soliton front in the dispersive shock wave are considered. In fact, the Whitham modulation theory has many wonderful applications in real physics and engineering. The dam problem is investigated as a special Riemann problem, the piston problem of dispersive fluid is analyzed, and the novel undular bores are found.

**Keywords:** Whitham modulation theory, Lax pair, Riemann problem, rarefaction wave, dispersive shock wave

**PACS:** 05.45.Yv, 42.65.Tg, 02.30.Ik

**DOI:** 10.7498/aps.72.20230172

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11971067).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [dswang@bnu.edu.cn](mailto:dswang@bnu.edu.cn)



散焦型非线性薛定谔方程的Whitham调制理论及其间断初值问题解的分类和演化

公睿智 王灯山

**Whitham modulation theory of defocusing nonlinear Schrödinger equation and the classification and evolutions of solutions with initial discontinuity**

Gong Rui-Zhi Wang Deng-Shan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 100503 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230172

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230172>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

四阶色散非线性薛定谔方程的明暗孤立波和怪波的形成机制

Study on the generation mechanism of bright and dark solitary waves and rogue wave for a fourth-order dispersive nonlinear Schrödinger equation

物理学报. 2020, 69(1): 010502 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191384>

非线性薛定谔方程的高阶分裂改进光滑粒子动力学算法

Numerical study of nonlinear Schrödinger equation with high-order split-step corrected smoothed particle hydrodynamics method

物理学报. 2019, 68(9): 090203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190169>

玻色-爱因斯坦凝聚体中的淬火孤子与冲击波

Quenched solitons and shock waves in Bose-Einstein condensates

物理学报. 2021, 70(18): 180303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210564>

基于分裂格式有限点集法对孤立波二维非线性问题的模拟

Simulation of two-dimensional nonlinear problem with solitary wave based on split-step finite pointset method

物理学报. 2019, 68(14): 140203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190340>

冲击波诱导水中纳米气泡塌陷的分子动力学分析

Molecular dynamics analysis of shock wave-induced nanobubble collapse in water

物理学报. 2021, 70(13): 134702 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210058>

Boussinesq方程的Lax对、Bäcklund变换、对称群变换和Riccati展开相容性

The Boussinesq equation: Lax pair, Bäcklund transformation, symmetry group transformation and consistent Riccati expansion solvability

物理学报. 2020, 69(1): 010203 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191316>