

反应扩散系统中交叉扩散引发的图灵斑图之间的转变*

孟星柔 刘若琪 贺亚峰[†] 邓腾坤 刘富成[‡]

(河北大学物理科学与技术学院, 保定 071002)

(2023 年 3 月 6 日收到; 2023 年 8 月 7 日收到修改稿)

交叉扩散是影响图灵斑图形成和转变的重要因素之一. 本文在反应扩散布鲁塞尔模型中引入交叉扩散项, 首先对其进行线性分析和弱非线性分析, 然后数值研究了交叉扩散的方向性以及浓度依赖性在图灵斑图转变过程中的作用. 在单向交叉扩散情况下, 交叉扩散的方向直接决定了斑图转变的次序. 阻滞子向活化子的交叉扩散会导致系统逐渐远离初级分岔点, 从而引发图灵斑图的正向转变; 与之相反, 活化子向阻滞子的交叉扩散会导致系统逐渐靠近初级分岔点, 从而引发图灵斑图的反向转变. 对称双向交叉扩散下, 阻滞子向活化子的交叉扩散效应要强于活化子向阻滞子的交叉扩散. 交叉扩散系数除了与自身浓度相关外, 还与其他物质浓度相关. 研究发现浓度依赖交叉扩散也会影响图灵斑图的转变方向. 当扩散系数 D_{uv} 线性依赖阻滞子浓度 v 变化时, 随着浓度线性调节参数 β 的增大, 引发图灵斑图正向转变; 相反, 当扩散系数 D_{vu} 线性依赖活化子浓度 u 变化时, 引发图灵斑图的反向转变.

关键词: 图灵机理, 斑图转变, 交叉扩散, 方向性, 浓度依赖

PACS: 82.40.Ck, 05.45.-a, 05.65.+b, 45.70.Qj

DOI: 10.7498/aps.72.20230333

1 引言

图灵斑图是均匀定态经历图灵失稳而自发产生的空间定态图纹, 其广泛存在于生物体、生态系统、地球化学以及物理化学等领域^[1-4]. 图灵失稳的机理是扩散所引起的不稳定性^[5], 因此, 扩散是反应扩散系统图灵斑图形成的关键因素. 以前的研究大都只考虑自扩散过程^[6-9], 但在实际系统中, 给定物种的扩散通量也会受到其他物种梯度的影响^[10], 即存在交叉扩散. 例如, 社会系统中的人口统计学^[11], 生态系统中的物种迁移^[12], 物理系统中的静电相互作用和排除体积效应^[13], 化学系统中的化学波

动力学^[14]以及粒子运输过程^[15]等都会导致交叉扩散效应.

自 Kerner^[16]首次提出交叉扩散以来, 人们逐渐认识到自扩散与交叉扩散的相互作用可以使反应扩散系统产生更为丰富的时空斑图动力学^[17-19]. 在自扩散作用下, 图灵不稳定性只能由长程抑制和短程激活来触发, 但引入交叉扩散项解除了这种限制^[11]. 交叉扩散可以影响反应扩散系统中图灵不稳定性的形成与消失^[20-22]. Chung 和 Peacock-López^[23]在带有交叉扩散项的自我复制化学模型中, 分析获得了表征庞加莱-阿德罗诺夫-霍普夫分岔和图灵分岔参数之间的精确关系. 此外通过改变交叉扩散系数, 可以实现六边形与条纹斑图之间的

* 国家自然科学基金 (批准号: 12275064, 11975089, 11875014)、河北省自然科学基金 (批准号: A2021201003) 和河北大学自然科学多学科交叉研究计划 (批准号: DXK202010) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: heyf@hbu.edu.cn

[‡] 通信作者. E-mail: hdlfc@hbu.cn

转变^[11,24,25]. 上述关于交叉扩散的研究中只针对双向交叉扩散, 尽管从理论结果上双向扩散包含了单向扩散, 但在实际的复杂系统, 尤其是生命系统以及生态系统中, 单向交叉扩散更加符合实际情况. 例如, 由于食物链的单向性, 病毒传播过程中健康人类对患病禽类并没有影响^[26]; 由于季节变化、觅食以及繁殖等因素引起动物的周期性迁移^[27]. 但是鲜有研究者单独考虑单向交叉扩散的影响, 且其单独作用机理尚不清楚. 交叉扩散的方向性对斑图动力学的影响尚需进一步研究^[28,29].

复杂系统中物质的扩散过程一般来说与物质浓度密切相关, 因此常扩散系数的反应扩散模型无法精确描述复杂系统^[30–32]. 研究发现浓度依赖的扩散系数对斑图形成和选择以及转变有着很大的影响. Zemskov 等^[33] 理论分析了浓度依赖交叉扩散作用下图灵不稳定性的条件. Li 等^[34,35] 研究了自扩散系统中受局域浓度调控下图灵斑图的形成机制, 发现控制调控系数可实现六角斑图和条纹斑图共存并且可以调节二者比例. 通过在图灵系统中施加一个圆偏振电场, 也可实现六边形与条纹斑图之间的转化^[36,37]. 在可激发的介质中, 浓度依赖性扩散可实现自我复制行为到稳定空间结构的转变^[38]. Gambino 等^[39] 发现在没有霍普夫和波不稳定性的反应扩散系统中, 引入交叉扩散项可以产生闪烁六边形和其他振荡图灵斑图. Mukherjee 等^[40] 发现在浓度依赖交叉扩散项的影响下, 自扩散模型中的混沌动力学可以被抑制, 从而达到稳态或保持稳态. 从扩散本质上来讲, 交叉扩散来源于物质之间的相互作用, 因此一种物质的交叉扩散系数, 除了与自身浓度相关外, 还应当与其他物质的浓度有关, 例如生态系统中的植动力学, 水的浓度可以诱导植被格局的转变, 促进植被的密度, 可预警荒漠化^[41]. 到目前为止, 大多数线性依赖浓度的交叉扩散的研究集中于依赖自身浓度, 但是还缺乏对交叉扩散依赖另一变量浓度的研究. 针对上述情况, 本文通过在反应扩散系统中引入不同形式的交叉扩散项, 系统研究了交叉扩散的方向性以及浓度依赖性在图灵斑图转变过程中的作用.

2 物理模型

布鲁塞尔 (Brusselator) 模型是一种典型的反应扩散模型, 因其理论分析与实验结果定性吻合,

被广泛用于研究图灵斑图动力学^[42]. 将交叉扩散引入到该模型中, 在无量纲的情况下, 其形式如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a - (b+1)u + u^2v + D_u \nabla^2 u \\ \quad + \nabla(D_{uv}(u, v) \nabla v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = bu - u^2v + D_v \nabla^2 v \\ \quad + \nabla(D_{vu}(u, v) \nabla u), \end{cases} \quad (1)$$

其中 u 和 v 分别为活化子与阻滞子浓度; a 和 b 均为系统动力学参数; D_u 和 D_v 分别为物质 u , v 的自扩散系数. 本文固定参数 $a = 3$, $b = 9$, $D_u = 3$, 以及 $D_v = 10$, 以确保在无交叉扩散情况下系统未经历霍普夫分岔, 而经历图灵分岔, 从而确保图灵斑图的产生. D_{uv} 和 D_{vu} 为活化子与阻滞子之间的交叉扩散系数, 其值可正可负, 且在通常情况下依赖于两种物质的浓度^[43].

对系统的均匀定态解 $(u_0, v_0) = (a, b/a)$ 进行线性稳定性分析, 得到线性本征方程:

$$|\mathbf{J} - \mathbf{D}k^2 - \lambda \mathbf{I}| = 0, \quad (2)$$

其中 \mathbf{J} 为雅可比矩阵, \mathbf{D} 为扩散系数矩阵:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_u & D_{uv} \\ D_{vu} & D_v \end{pmatrix}.$$

对线性本征方程进行求解可以得到本征值 λ , 进而可以分析系统的分岔类型. 在交叉扩散为常数的情况下, 图灵分岔满足的条件为^[10]

$$\det \mathbf{D} = D_u D_v - D_{uv} D_{vu} > 0, \quad (3a)$$

$$(D_u - D_v)^2 + 4D_{uv} D_{vu} \geq 0, \quad (3b)$$

$$D_u J_{22} + D_v J_{11} - D_{uv} J_{21} - D_{vu} J_{12} > 0, \quad (3c)$$

$$(D_u J_{22} + D_v J_{11} - D_{uv} J_{21} - D_{vu} J_{12})^2 - 4 \det \mathbf{D} \det \mathbf{J} \geq 0. \quad (3d)$$

由这些不等式共同决定的区域就是图灵斑图所能形成的参数区域, 即图灵空间.

图 1 给出了 $D_{uv} - D_{vu}$ 平面内的图灵空间分布情况. 图中每条曲线都对应着不等式所确定区域的边界. 不等式 (3a) 所确定的区域以 $D_{uv} D_{vu}$ 的乘积为边界, 如图 1 中点线所示. 当乘积 $D_u D_v$ 为正时, 该区域在第一和第三象限的两个双曲线内.

不等式 (3b) 所确定的区域也以 D_{uv} D_{vu} 的乘积为边界, 且其数值应当大于某一负值, 因此该区域位于第二和第四象限的双曲线内. 不等式 (3c) 对应着一条直线, 将平面分为两个区域, 图灵区域位于直线下方. 最后, 不等式 (3d) 得到一个椭圆, 图灵区域在椭圆区域之外.

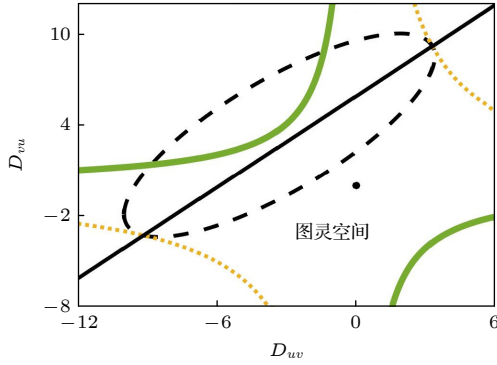


图 1 $a = 3$, $b = 9$, $D_u = 3$, $D_v = 10$ 时, 交叉扩散存在下的图灵空间. 点线、粗实线、细实线和虚线分别对应 (3a) 式—(3d) 式

Fig. 1. Turing space in the present of cross diffusion for $a = 3$, $b = 9$, $D_u = 3$, and $D_v = 10$. Thick solid line, dotted line, thin solid line, and dotted line correspond to Eqs. (3a)—(3d), respectively.

线性稳定性分析只能得到图灵斑图的存在空间, 但无法确定图灵斑图的类型. 为此本文利用多重尺度的方法推导出系统经历图灵分岔后二维图灵斑图的振幅方程, 并据此分析图灵斑图的选择问题^[44,45]. 由于篇幅限制, 这里只给出主要结果.

为方便本文仍然使用原变量, 系统方程 (1) 在平衡点 (u_0, v_0) 处的泰勒展开式为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (b-1)u + a^2v + \frac{b}{a}u^2 + 2auv \\ \quad + u^2v + D_u\Delta u + D_{uv}\Delta v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -bu - a^2v - \frac{b}{a}u^2 - 2auv \\ \quad - u^2v + D_{vu}\Delta u + D_v\Delta v. \end{cases} \quad (4)$$

在临界点附近, 方程解的形式可写为

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 \begin{pmatrix} A_j^u \\ A_j^v \end{pmatrix} \exp(i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}) + \text{c.c.}$$

方程 (4) 可写为如下形式:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = L\mathbf{c} + N,$$

式中 L 为线性算符, N 为非线性算符, 它们分别为

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} + D_u\Delta & a_{12} + D_{uv}\Delta \\ a_{21} + D_{vu}\Delta & a_{22} + D_v\Delta \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} \frac{b}{a}u^2 + 2auv + u^2v \\ -\frac{b}{a}u^2 - 2auv - u^2v \end{pmatrix}.$$

选取 b 为控制参数, b_T 为对应的临界值. 将控制参量 b 、变量 \mathbf{c} 与非线性项 N 按小量 ε 展开:

$$b - b_T = \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + o(\varepsilon^3),$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} + o(\varepsilon^3),$$

$$N = \varepsilon^2 N_1 + \varepsilon^3 N_2 + o(\varepsilon^4),$$

其中,

$$N_1 = \begin{pmatrix} \frac{b_T}{a}u_1^2 + 2au_1v_1 \\ -\frac{b_T}{a}u_1^2 - 2au_1v_1 \end{pmatrix},$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} \frac{2b_T}{a}u_1u_2 + 2a(u_2v_1 + u_1v_2) + u_1^2v_1 \\ -\frac{2b_T}{a}u_1u_2 - 2a(u_2v_1 + u_1v_2) - u_1^2v_1 \end{pmatrix}.$$

线性算符 L 可分解为

$$L = L_T + (b - b_T)M,$$

其中,

$$L_T = \begin{pmatrix} b_T - 1 + D_u\Delta & a^2 + D_{uv}\Delta \\ -b_T + D_{vu}\Delta & -a^2 + D_v\Delta \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

利用中心流理论^[44] 推导可得如下振幅方程:

$$\begin{cases} \tau_0 \frac{\partial A_1}{\partial t} = \mu A_1 + h \overline{A_2 A_3} - [g_1 |A_1|^2 \\ \quad + g_2 (|A_2|^2 + |A_3|^2)] A_1, \\ \tau_0 \frac{\partial A_2}{\partial t} = \mu A_2 + h \overline{A_1 A_3} - [g_1 |A_2|^2 \\ \quad + g_2 (|A_1|^2 + |A_3|^2)] A_2, \\ \tau_0 \frac{\partial A_3}{\partial t} = \mu A_3 + h \overline{A_1 A_2} - [g_1 |A_3|^2 \\ \quad + g_2 (|A_1|^2 + |A_2|^2)] A_3, \end{cases} \quad (5)$$

其中, μ 表示临界值的归一化距离; τ_0 表示弛豫时间. 计算可得方程中系数 μ , τ_0 , h , g_1 , g_2 的表达式分别为

$$\mu = \frac{b - b_T}{b_T}, \quad \tau_0 = \frac{p + q}{b_T p(1 - q)}, \quad h_0 = \frac{H}{b_T p(1 - q)}.$$

当系统偏离分岔点, 需要考虑 μ 的影响, 将系数 h 修正为^[45]

$$h = h_0 + \alpha\mu, \quad \alpha = 2/a,$$

$$g_1 = \frac{G_1}{b_T p^3(1 - q)}, \quad g_2 = \frac{G_2}{b_T p^3(1 - q)},$$

其中, p 满足 $L_T \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, q 满足 $L_T^+ \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} = 0$, L_T^+ 为 L_T 的伴随算子. G_1 , G_2 和 H 的表达式可参见文献^[46].

振幅方程 (5) 中的每个解都对应着一种斑图类型. 振幅系数 A_j 可分解为模 $\rho_j = |A_j|$ 及一个相应的相角 ϕ_j , 将 $A_j = \rho_j \exp(i\phi_j)$ 代入振幅方程并分离实部和虚部, 可得如下方程:

$$\begin{cases} \tau_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -h \frac{\rho_1^2 \rho_2^2 + \rho_1^2 \rho_3^2 + \rho_2^2 \rho_3^2}{\rho_1 \rho_2 \rho_3} \sin \phi, \\ \tau_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \mu \rho_1 + h \rho_2 \rho_3 \cos \phi - g_1 \rho_1^3 \\ \quad - g_2 (\rho_2^2 + \rho_3^2) \rho_1, \\ \tau_0 \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \mu \rho_2 + h \rho_1 \rho_3 \cos \phi - g_1 \rho_2^3 \\ \quad - g_2 (\rho_1^2 + \rho_3^2) \rho_2, \\ \tau_0 \frac{\partial \rho_3}{\partial t} = \mu \rho_3 + h \rho_1 \rho_2 \cos \phi - g_1 \rho_3^3 \\ \quad - g_2 (\rho_1^2 + \rho_2^2) \rho_3, \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$, 上述系统有下列 4 种类型的解, 分别对应均匀定态、条纹斑图、六边形斑图以及混合态斑图.

1) 定态解 (0):

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0,$$

当 $\mu < \mu_2 = 0$ 时, 定态解稳定, 当 $\mu > \mu_2$ 时, 定态解不稳定.

2) 条状斑图 (S):

$$\rho_1 = \sqrt{\mu/g_1}, \quad \rho_2 = \rho_3 = 0.$$

根据 $\mu = h(\mu)^2 g_1 / (g_2 - g_1)^2$ 可得到两个解 μ_s^\pm . 当 $\mu_s^- < \mu < \mu_s^+$ 时, 条纹斑图稳定.

3) 六边形斑图 (H_0, H_π):

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{|h| \pm \sqrt{h^2 + 4(g_1 + 2g_2)\mu}}{2(g_1 + 2g_2)}.$$

六边形斑图的类型由振幅方程中的二次项系

数 h 决定. 当 $h > 0$ 时, 六边形斑图为 $H_0(\phi = 0)$, 即点状斑图; 当 $h < 0$ 时, 六边形斑图为 $H_\pi(\phi = \pi)$, 即蜂窝状斑图. 六边形斑图解只有在 $\mu > \mu_1 = \frac{-h^2}{4(g_1 + 2g_2)}$ 时才存在.

根据方程 $\mu = \frac{2g_1 + g_2}{(g_2 - g_1)^2} h(\mu)^2$ 可以得到两个解 μ_h^\pm : 当 $\mu < \mu_h^-$ 时, H_π 稳定; 当 $\mu > \mu_h^+$ 时, H_0 稳定.

4) 混合斑图:

$$\rho_1 = \frac{|h|}{g_2 - g_1}, \quad \rho_2 = \rho_3 = \sqrt{\frac{\mu - g_1 \rho_1^2}{g_1 + g_2}},$$

当 $g_2 > g_1$, $\mu > g_1 \rho_1^2$ 时, 该解存在.

方程 (1) 通过商业有限元计算软件 Comsol Multiphysics 进行数值求解. 计算采用 MUMPS 求解器, 使用向后差分法进行时间离散, 时间步长采用自适应步长, 用 10^{-4} 的相对精度进行控制. 模拟区域大小为 64×64 , 使用自由三角形网格进行空间离散, 网格最大单元格大小 0.64, 最大单元增长率 1.1. 在均匀定态的基础上附加一个 10% 的随机扰动作为初始条件, 边界处选取无通量边界条件. 系统演化时间采用 10^4 无量纲时间, 系统在演化时间 5000 左右后趋于稳定.

3 模拟结果与讨论

为了系统研究交叉扩散项对图灵斑图转变的影响, 分别讨论了交叉扩散系数为常数以及线性依赖浓度时的两种情况. 在常数交叉扩散系数情况下, 从单向交叉扩散以及双向交叉扩散两个角度分析了交叉扩散方向性的作用.

图 2 给出了交叉扩散项 $D_{vu} = 0$, $D_{uv} \neq 0$ 时, 阻滞子向活化子的交叉扩散对图灵斑图的影响. 其中图 2(a) 为不同交叉扩散系数 D_{uv} 下的色散关系曲线, 曲线为特征值的实部 $\text{Re}(\lambda)$, 代表了图灵模的线性增长率, $\text{Re}(\lambda)$ 越大, 图灵模式增长越快. 随着扩散系数 D_{uv} 的增大, 临界值的归一化距离 μ 不断增大, 图灵模波数及其对应的 $\text{Re}(\lambda)$ 逐渐增大, 系统逐渐远离初级分岔点. 偏离分岔点的程度是模式选择过程中的一个重要因素. 随着系统偏离图灵分岔点的程度逐渐增大, 系统经历均匀态 \rightarrow 蜂窝六边形 \rightarrow 条纹 \rightarrow 点状六边形的转变^[42,45,47], 定义上述转变次序为正向转变, 反之则为反向转变. 图 2(b) — (d) 给出了交叉扩散项 D_{uv} 作用下条纹斑图向点状

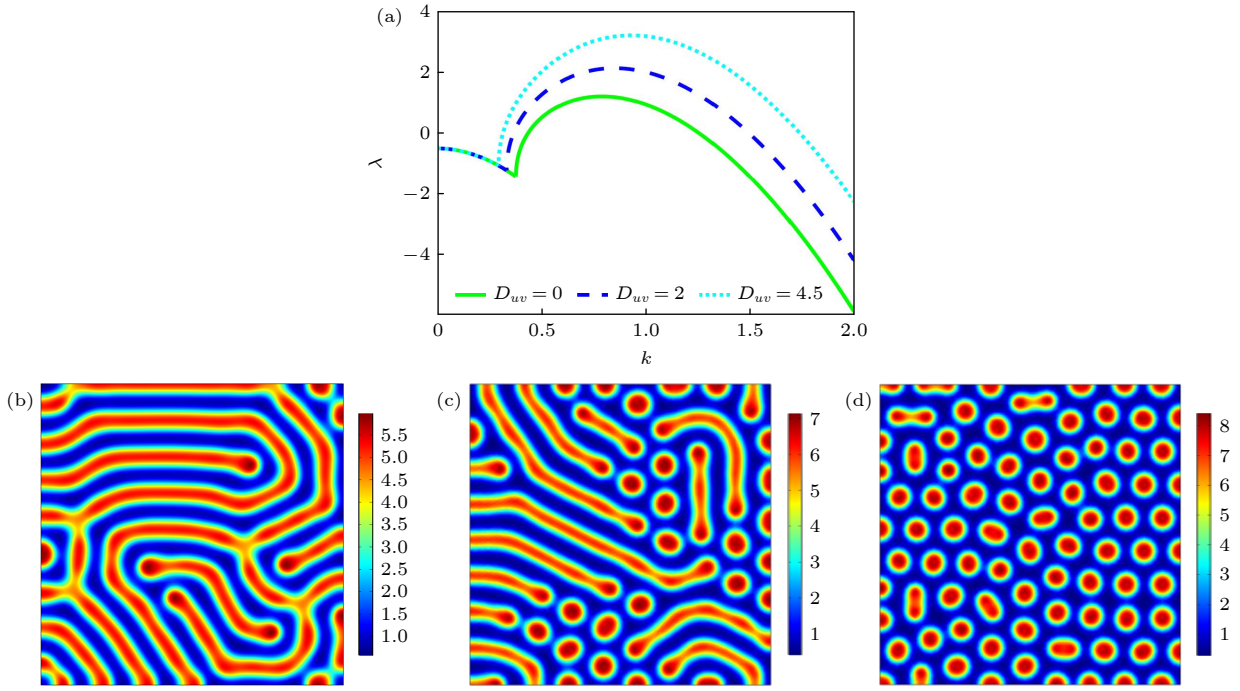


图2 单向交叉扩散 D_{uv} 引发的图灵斑图转变 (a) 色散曲线; (b) 条纹斑图, $D_{uv} = 0$; (c) 点状六边形与条纹混合斑图, $D_{uv} = 2$; (d) 点状六边形斑图, $D_{uv} = 4.5$

Fig. 2. Turing pattern transition induced by one-way cross diffusion term D_{uv} : (a) Dispersion curves; (b) stripe pattern, $D_{uv} = 0$; (c) mixed pattern with stripes and spots, $D_{uv} = 2$; (d) hexagonal spot pattern, $D_{uv} = 4.5$.

六边形斑图转变的过程. 当交叉扩散项 $D_{uv} = 0$ 时, 即自扩散情况下, 此时 μ 满足 $\mu_h^- < \mu = 0.2882 < \mu_h^+$, 系统产生图 2(b) 所示的条纹斑图. 在单向交叉扩散项 D_{uv} 的作用下, 系统逐渐远离图灵分岔点, $D_{uv} = 2$ 时, μ 满足 $\mu_h^+ = 0.5434 < \mu = 0.5459 < \mu_s^+ = 1.2678$, 系统处于条纹与点状六边形同时存在的区域, 因此系统表现出条纹与点状六边形混合斑图 (图 2(c)), 由于 μ 更接近 μ_h^+ , 因此条纹斑图优于点状六边形斑图. 当 $D_{uv} = 4.5$ 时, 临界值的归一化距离 μ 继续增大, 此时 μ 满足 $\mu_h^+ < \mu = 0.8679 < \mu_s^+$, 且靠近 μ_s^+ , 系统转变为图 2(d) 所示的点状六边形斑图. 图 2 结果表明, 阻滞子向活化子的交叉扩散会导致系统逐渐远离初级分岔点, 从而引发图灵斑图的正向转变, 且数值模拟结果与理论分析相符.

图 3 研究了交叉扩散项 $D_{uv} = 0$, $D_{vu} \neq 0$ 时, 活化子向阻滞子的交叉扩散对图灵斑图转变的影响. 图 3(a) 为不同交叉扩散系数 D_{vu} 下的色散关系曲线, 随着扩散系数 D_{vu} 的增大, 临界值的归一化距离 μ 不断减小, 图灵模波数及其对应的 $\text{Re}(\lambda)$ 逐渐减小, 系统逐渐靠近图灵分岔点并最终低于图灵分岔点. 图 3(b)–(d) 为在单向交叉扩散系数

D_{vu} 作用下, 系统从条纹经历蜂窝六边形最终稳定成均匀态的转变过程. 相较于自扩散的情况, 当交叉扩散系数 $D_{vu} = 0.5$ 时, 系统相对靠近图灵分岔点, μ 略微减小, 但仍满足 $\mu_h^- < \mu = 0.2103 < \mu_h^+$, 因此系统表现为图 3(b) 所示的条纹斑图. 随着 D_{vu} 增大到 1.5, 此时 μ 满足 $\mu_s^- = 0.0665 < \mu = 0.0796 < \mu_h^- = 0.1871$, 系统处于蜂窝状六边形与条纹同时存在的区域, 但由于 μ 更接近 μ_s^- , 因此系统表现出图 3(c) 所示的蜂窝状六边形斑图. 当 $D_{vu} = 3$ 时, 由于超出了图 1 中图灵空间的参数范围, 此时特征值的实部 $\text{Re}(\lambda)$ 低于图灵分岔点, 系统逐渐稳定成均匀态 (图 3(d)). 图 3 结果表明, 活化子向阻滞子的交叉扩散会导致系统逐渐靠近初级分岔点, 从而引发图灵斑图的反向转变, 且数值模拟结果与理论分析相符.

图 4 为对称双向交叉扩散 ($D_{uv} = D_{vu}$) 对图灵斑图的影响, 改变对称交叉扩散系数会影响图灵斑图的参数区域, 导致其发生转变. 其中图 4(a) 为不同双向交叉扩散系数下的色散曲线, 随着双向交叉扩散系数的增大, 系统逐渐远离图灵分岔点. 当双向交叉扩散系数 $D_{uv} = D_{vu} = 1$ 时, 活化子与阻滞子之间的交叉扩散效应较小, 此时系统偏离图

灵分岔点的程度与自扩散时系统偏离图灵分岔点的程度相当, μ 满足 $\mu_h^- < \mu = 0.2642 < \mu_h^+$, 因此

系统仍然表现为条纹斑图, 如图 4(b) 所示, 在对称双向交叉扩散情况下数值模拟结果也与理论分析

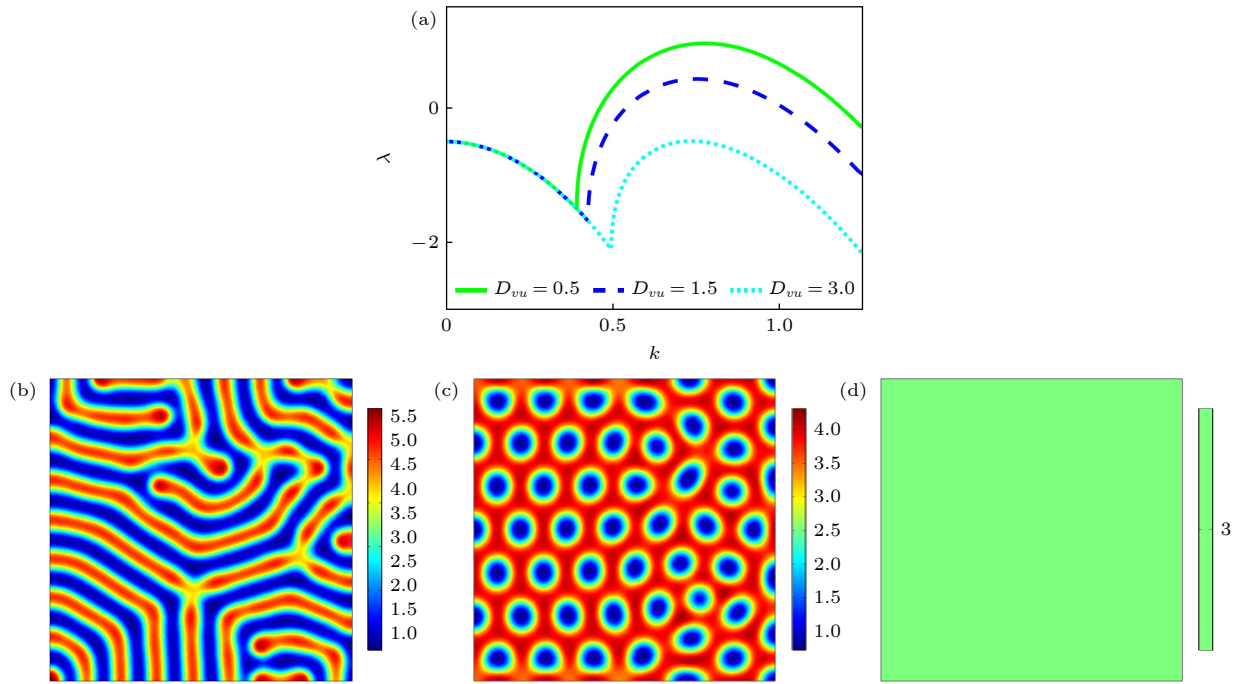


图 3 单向交叉扩散 D_{vu} 引发的图灵斑图转变 (a) 色散曲线; (b) 条纹斑图, $D_{vu} = 0.5$; (c) 蜂窝状六边形斑图, $D_{vu} = 1.5$; (d) 均匀态, $D_{vu} = 3$

Fig. 3. Turing pattern transition induced by one-way cross diffusion term D_{vu} : (a) Dispersion curves; (b) stripe pattern, $D_{vu} = 0.5$; (c) honeycomb hexagonal pattern, $D_{vu} = 1.5$; (d) uniform state, $D_{vu} = 3$.

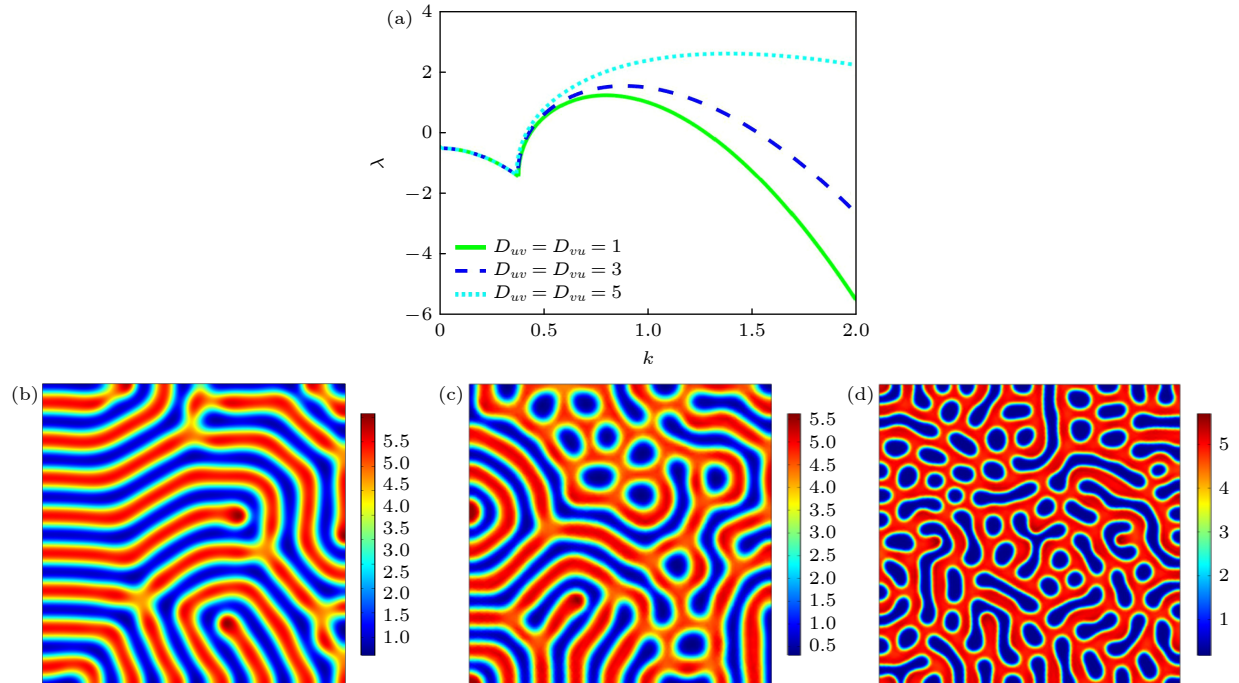


图 4 对称双向交叉扩散作用下图灵斑图的转变过程 (a) 色散曲线; (b) 条纹斑图, $D_{uv} = D_{vu} = 1$; (c) 蜂窝状六边形与条纹混合斑图, $D_{uv} = D_{vu} = 3$; (d) 多模混合斑图, $D_{uv} = D_{vu} = 5$

Fig. 4. Turing pattern transition induced by symmetrical two-way cross-diffusion: (a) Dispersion curves; (b) stripe pattern, $D_{uv} = D_{vu} = 1$; (c) mixed pattern with honeycomb hexagons and stripes, $D_{uv} = D_{vu} = 3$; (d) multimode mixed pattern, $D_{uv} = D_{vu} = 5$.

相符. 随着对称双向交叉扩散系数的增大, μ 逐渐增大, 此时 $g < 0$, 系统发生次临界分岔, 在次临界区域, 通过弱非线性分析得到三次 Stuart-Landau 规范性振幅方程不再适用, 须将弱非线性展开式提高至五次, 暂不予研究. 但从色散关系曲线可知, 此时系统相对远离初级图灵分岔点, 因此产生如图 4(c) 所示的蜂窝状六边形与条纹混合斑图. 当对称双向交叉扩散系数增大到 5 时, 此时失稳图灵模式的区域增大, 最危险图灵模式增强, 且其波数增大, 因此系统表现为多模混合斑图如图 4(d) 所示. 另外, 当交叉扩散系数 $D_{vu} = 0$ 时, 增大扩散系数 D_{uv} , μ 满足 $\mu > \mu_s^+$, 系统将会一直呈现出点状六边形斑图, 数值模拟结果以及理论分析均表明: 在单向交叉扩散情况下, 当阻滞子向活化子的交叉扩散效果足够强时, 不会出现多模混合斑图. 图 4 结果表明, 在对称双向交叉扩散作用下, 阻滞子向活化子的交叉扩散效应要强于活化子向阻滞子的交叉扩散.

图 5 给出了非对称双向交叉扩散 ($D_{uv} \neq D_{vu}$) 对图灵斑图转变的影响. 图 5(a) 为非对称双向交叉扩散作用下的色散曲线, 固定 $D_{uv} = 1$, 逐渐增大 D_{vu} , 当交叉扩散系数 $D_{vu} \approx 1.1$ 时, 与系统自扩散下的色散曲线基本一致, 当 $D_{vu} > 1.1$ 时, 系

统逐渐靠近图灵分岔点并最终低于图灵分岔点. 图 5(b)—(d) 给出了非对称双向交叉扩散下, 斑图从条纹经历蜂窝状六边形向均匀态方向转变的过程. 当 $D_{vu} = 0$ 时, μ 满足 $\mu_h^- < \mu = 0.4171 < \mu_h^+$, 此时只有阻滞子向活化子的交叉扩散作用在系统上, 会导致系统相对远离初级分岔点, 产生条纹斑图如图 5(b). 但当 $D_{vu} = 2.5$ 时, 活化子向阻滞子的交叉扩散效应要强于阻滞子向活化子的交叉扩散, 因此系统相对靠近初级分岔点, 呈现出如图 5(c) 所示的蜂窝状六边形斑图. 当交叉扩散系数 D_{vu} 增大到 5 时, 特征值的实部 $\text{Re}(\lambda)$ 低于图灵分岔点, 最终得到均匀态如图 5(d). 图 5 结果表明, 在非对称双向交叉扩散作用下, 图灵斑图的转变方向与交叉扩散系数的强度相关, 若阻滞子向活化子的交叉扩散效应较强, 则系统远离图灵分岔点发生正向转变, 与之相反, 则系统靠近图灵分岔点发生反向转变.

在生物系统中, 化学物质通过细胞运输时受到局域化学物质浓度的影响 [38]. 物质的扩散不仅依赖于自身的浓度, 而且还依赖于其他物质的浓度, 例如物种迁移, 植被格局, 多孔介质中的传质过程等 [21]. 因此引入线性依赖浓度的交叉扩散系数 $D_{ij} = (1 + \beta_j)D_0$, 进一步研究依赖其他变量的扩散系数对系统斑图形成以及斑图选择的影响.

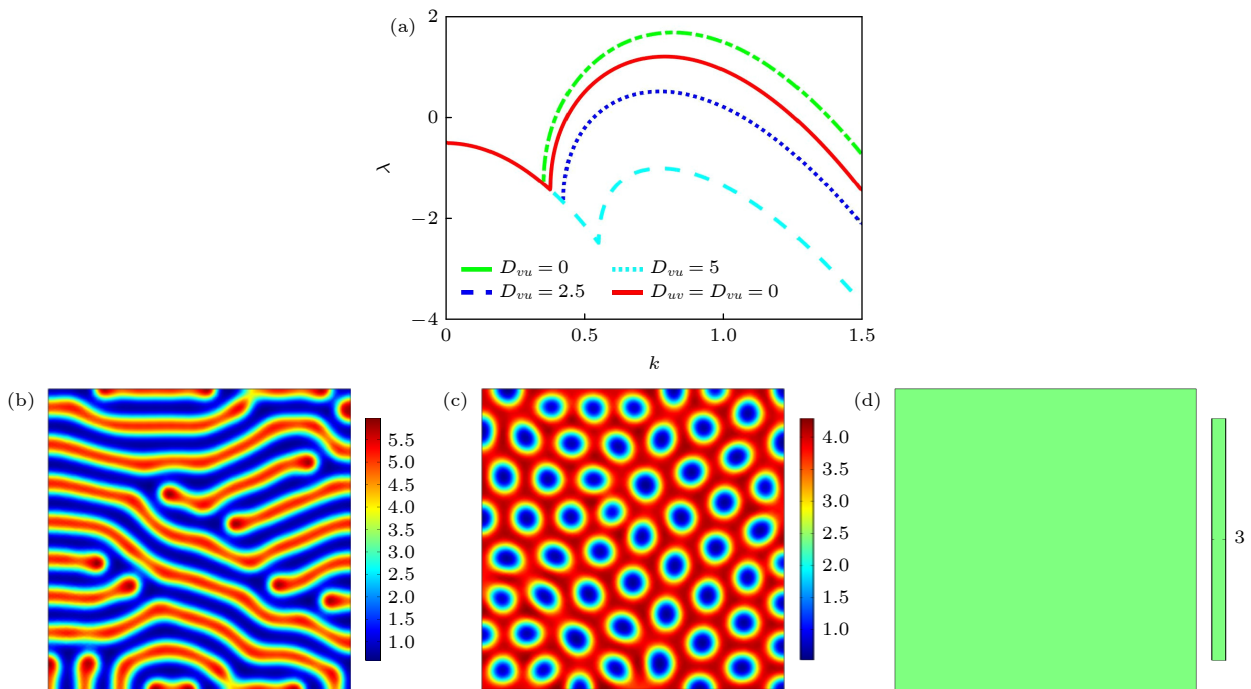


图 5 非对称交叉扩散项下图灵斑图的转变过程, $D_{uv} = 1$ (a) 色散曲线; (b) 条纹斑图, $D_{vu} = 0$; (c) 蜂窝状六边形斑图, $D_{vu} = 2.5$; (d) 均匀态, $D_{vu} = 5$

Fig. 5. Turing pattern transition induced by asymmetrical two-way cross-diffusion at $D_{uv} = 1$: (a) Dispersion curves; (b) stripe pattern, $D_{vu} = 0$; (c) honeycomb hexagonal pattern, $D_{vu} = 2.5$; (d) uniform state, $D_{vu} = 5$.

其中 i 代表活化子 u 或阻滞子 v 的浓度, j 代表两者中另一变量的浓度, β 是浓度依赖的调节参数, 而 D_0 为恒定的扩散系数. 本文从两个角度分别进行研究: 1) 活化子的交叉扩散系数 D_{uv} 线性依赖于阻滞子浓度; 2) 阻滞子的交叉扩散系数 D_{vu} 线性依赖于活化子浓度.

图 6 为交叉扩散系数 $D_{vu} = 2$, D_{uv} 取不同调节参数 β 时斑图的转变过程. 当 $\beta < -0.48$ 时, 系统低于图灵分岔点, 因此当 $\beta = -0.6$ 时, 呈现出均匀态, 如图 6(a) 所示. 当 $-0.48 < \beta < -0.31$ 时, 随着参数 β 的增大, 图灵模本征值增大, 系统高于图灵分岔点, 当 $\beta = -0.4$ 时, μ 满足 $\mu_1 < \mu = -0.0215 < \mu_2$, 因此系统表现为蜂窝状六边形 (图 6(b)). 继续增大 β , $g < 0$, 系统发生次临界分岔, 三阶的振幅方程不再适用. 当 $-0.31 < \beta < -0.15$ 时, 系统呈现出图 6(c) 所示的蜂窝状六边形与条纹混合斑图. 当 $\beta > -0.15$ 时, 系统与自扩散时偏离初级分岔点的程度相当, 因此表现为条纹斑图如图 6(d). 当 $0.5 < \beta < 1.4$ 时, 系统远离图灵分岔点, 呈现图 6(e) 所示的点状六边形与条纹混合斑图, 随着调节参数

的增大, 点状六边形的比例逐渐增大. 当 $\beta > 1.4$ 时, 阻滞子向活化子的交叉扩散效应远强于活化子向阻滞子的交叉扩散, 系统表现为图 6(f) 所示的点状六边形斑图, 并且随着 β 的增大, 点状六边形的波长减小. 图 6 结果表明, 当活化子的交叉扩散系数 D_{uv} 线性依赖阻滞子浓度 v 时, 随着 β 的增大, 系统逐渐远离图灵分岔点, 从而引发图灵斑图的正向转变.

图 7 为交叉扩散系数 $D_{uv} = 2$, D_{vu} 取不同调节参数 β 时引起图灵斑图转变的过程. 当 $\beta < -0.25$ 时, 系统偏离初级分岔点最远, 图 7(a) 为 $\beta = -0.3$ 时, 此时系统表现为点状六边形斑图. 当 $-0.25 < \beta < -0.2$ 时, 此时系统处于六边形向条纹的过渡区, 因此呈现出点状六边形与条纹混合斑图, 如图 7(b) 所示. 随着 β 的增大, 系统相对靠近图灵分岔点, 当 $\beta > -0.2$ 时, 交叉扩散项 D_{vu} 与 D_{uv} 对系统的作用相当, 因此表现为自扩散时的斑图类型, 即图 7(c) 所示的条纹斑图. 当 $0.05 < \beta < 0.1$ 时, 此时系统处于条纹向六边形的过渡区, 因此呈现出蜂窝状六边形与条纹混合斑图, 如图 7(d) 所示.

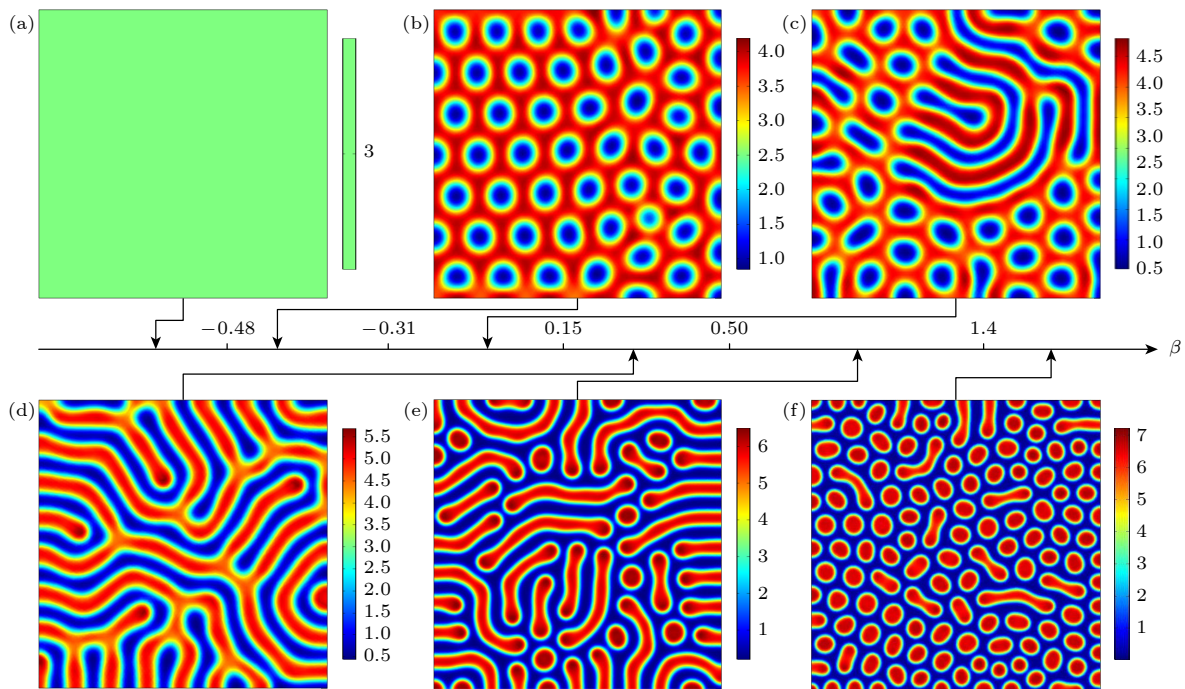


图 6 浓度依赖交叉扩散 $D_{uv} = D_0(1 + \beta v)$ 引起图灵斑图的转变, $D_0 = 2$, $D_{vu} = 2$: (a) 均匀态, $\beta = -0.6$; (b) 蜂窝六边形斑图, $\beta = -0.4$; (c) 蜂窝六边形与条纹混合斑图, $\beta = -0.2$; (d) 条纹斑图, $\beta = 0$; (e) 条纹与点状混合斑图, $\beta = 0.8$; (f) 点状六边形斑图, $\beta = 1.5$

Fig. 6. Turing pattern transition induced by cross-diffusion coefficient with concentration-dependence ($D_{uv} = D_0(1 + \beta v)$), $D_0 = 2$, $D_{vu} = 2$: (a) Uniform state, $\beta = -0.6$; (b) honeycomb hexagonal pattern, $\beta = -0.4$; (c) mixed pattern with honeycomb hexagons and stripes, $\beta = -0.2$; (d) stripe pattern, $\beta = 0$; (e) mixed pattern with stripes and spots, $\beta = 0.8$; (f) hexagonal spot pattern, $\beta = 1.5$.

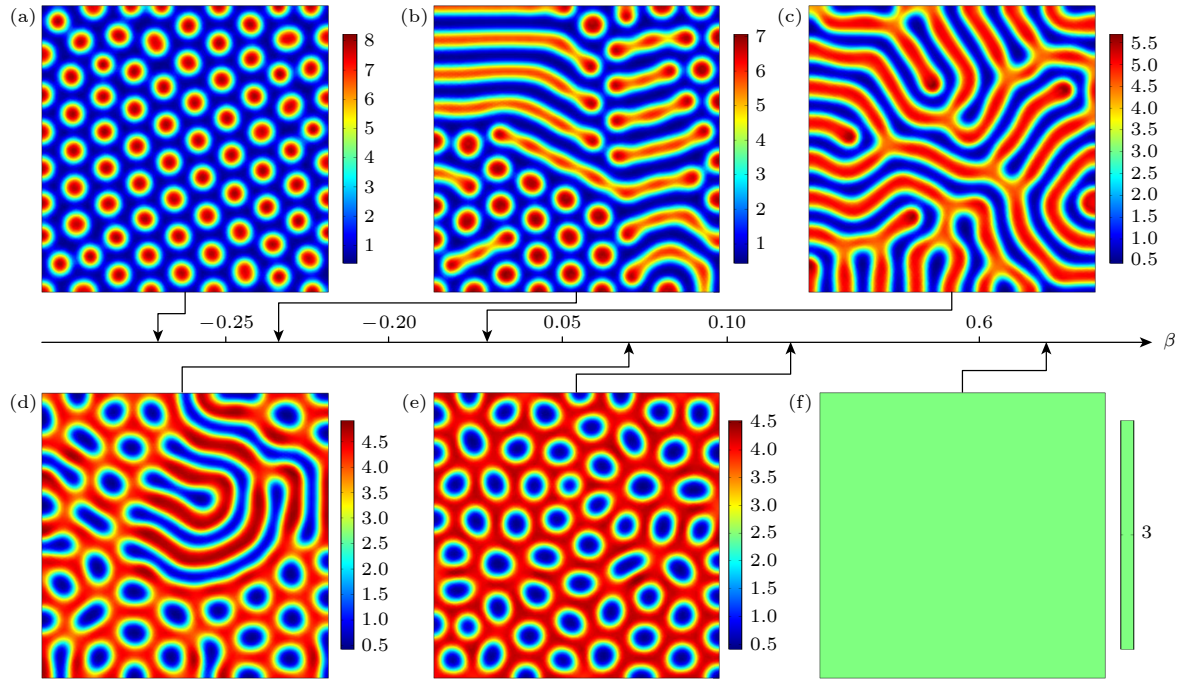


图7 浓度依赖交叉扩散 $D_{vu} = D_0(1 + \beta u)$ 引起图灵斑图的转变, $D_0 = 2$, $D_{uv} = 2$ (a) 点状六边形斑图, $\beta = -0.30$; (b) 条纹与点状六边形混合斑图, $\beta = -0.22$; (c) 条纹斑图, $\beta = 0$; (d) 蜂窝状六边形与条纹混合斑图, $\beta = 0.08$; (e) 蜂窝状六边形斑图, $\beta = 0.20$; (f) 均匀态, $\beta = 0.80$

Fig. 7. Turing pattern transition induced by cross-diffusion coefficient with concentration-dependence ($D_{vu} = D_0(1 + \beta u)$), $D_0 = 2$, $D_{uv} = 2$: (a) Hexagonal spot pattern, $\beta = -0.30$; (b) mixed pattern with stripes and spots, $\beta = -0.22$; (c) stripe pattern, $\beta = 0$; (d) mixed pattern with honeycomb hexagons and stripes, $\beta = 0.08$; (e) honeycomb hexagonal pattern, $\beta = 0.20$; (f) uniform state, $\beta = 0.80$.

当 $0.1 < \beta < 0.6$ 时, 系统继续靠近初级分岔点呈现出图7(e)所示的蜂窝状六边形. 当 $\beta > 0.6$ 时, 活化子向阻滞子的交叉扩散作用使系统低于图灵分岔点, 因此系统稳定成如图7(f)所示的均匀态. 图7结果表明, 当阻滞子的交叉扩散系数 D_{vu} 线性依赖活化子浓度 u 时, 随着 β 的增大, 系统逐渐靠近并最终低于图灵分岔点, 从而引发图灵斑图的反向转变. 浓度依赖性交叉扩散会影响图灵斑图的转变方向, 因此, 研究浓度依赖性交叉扩散可预防荒漠化, 对物种生存与灭绝等问题具有重要指导意义. 另外, 本文进一步研究了交叉扩散系数依赖自身变量以及同时依赖两个变量的情况, 结果表明相较于交叉扩散系数依赖另一个变量的情况, 依赖自身变量时仅增大了图灵斑图的参数范围, 而同时依赖两个变量时仅减小图灵斑图的参数范围, 对斑图其他性质没有明显影响.

4 结 论

本文通过在布鲁塞尔反应扩散系统中引入不同形式的交叉扩散系数, 系统研究了交叉扩散的方

向性以及浓度依赖性对图灵斑图演化过程的影响. 在图灵分岔点附近进行弱非线性稳定性分析, 得到了系统的振幅方程, 给出了不同类型斑图的存在条件, 并利用数值模拟对理论分析进行了验证, 模拟结果与理论一致. 结果表明, 单向交叉扩散即可引起图灵斑图的转变, 且交叉扩散的方向直接决定了斑图转变的次序. 随着阻滞子向活化子交叉扩散强度的增大, 系统会逐渐远离初级分岔点, 从而引发图灵斑图向点状六边形斑图的正向转变. 反之, 随着活化子向阻滞子交叉扩散强度的增大, 系统会逐渐靠近图灵分岔点, 引发图灵斑图向均匀态的反向转变. 对称双向交叉扩散作用下, 随着交叉扩散系数的增大系统发生反向转变, 表明阻滞子向活化子的交叉扩散效应要强于活化子向阻滞子的交叉扩散. 非对称双向交叉扩散作用下, 图灵斑图的转变方向与交叉扩散系数的强度相关, 若阻滞子向活化子的交叉扩散效应较强则系统远离图灵分岔点发生正向转变, 与之相反, 则系统靠近图灵分岔点发生反向转变. 当活化子的交叉扩散系数 D_{uv} 线性依赖阻滞子浓度 v 时, 随着调节参数 β 的增大, 引发

图灵斑图正向转变; 相反, 当阻滞子的交叉扩散系数 D_{vu} 线性依赖活化子浓度 u 时, 引发图灵斑图的反向转变. 以上研究结果揭示了交叉扩散的方向性和浓度依赖性影响图灵斑图转变方向的机制, 对研究交叉扩散对复杂非线性系统中植被格局、粒子运输、材料生长等其他斑图的产生机制及类型选择具有重要意义.

参考文献

- [1] Gao S P, Chang L L, Perc M, Wang Z 2023 *Phys. Rev. E* **107** 014216
- [2] Fuseya Y, Katsuno H, Behnia K, Kapitulnik A 2021 *Nat. Phys.* **17** 1031
- [3] Halatek J, Frey E 2018 *Nat. Phys.* **14** 507
- [4] Wang X L, Wang W D, Zhang G H 2017 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **42** 571
- [5] Turing A M 1952 *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. B* **237** 37
- [6] Ouyang Q, Swinney H L 1991 *Nature* **352** 610
- [7] Callahan T K, Knobloch E 1999 *Physica D* **132** 339
- [8] Haas P A, Goldstein R E 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 238101
- [9] Landge A N, Jordan B M, Diego X, Muller P 2020 *Dev. Biol.* **460** 2
- [10] Kumar N, Horsthemke W 2011 *Phys. Rev. E* **83** 036105
- [11] Yang R 2022 *Nonlinear Dyn.* **110** 1753
- [12] Tang X S, Song Y L, Zhang T H 2016 *Nonlinear Dyn.* **86** 73
- [13] Vanag V K, Epstein I R 2009 *Int. J. Dev. Biol.* **53** 673
- [14] Cui R F, Chen Q H, Chen J X 2020 *Nanoscale* **12** 12275
- [15] Chen J X, Chen Y G, Kapral R 2018 *Adv. Sci.* **5** 1800028
- [16] Kerner E H 1957 *Bull. Math. Biol.* **19** 121
- [17] Soua F, Djilali S, Lakmeche A 2021 *Eur. Phys. J. Plus* **136** 474
- [18] Guin L N 2015 *Math. Comput. Simulat.* **109** 174
- [19] Gambino G, Lombardo M C, Sammartino M 2013 *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **14** 1755
- [20] Liu B, Wu R C, Chen L P 2018 *Math. Biosci.* **298** 71
- [21] Ma T T, Meng X Z 2022 *Math. Biosci. Eng.* **19** 6040
- [22] Xie Z F 2012 *J. Math. Anal. Appl.* **388** 539
- [23] Chung J M, Peacock-López E 2007 *Phys. Lett. A* **371** 41
- [24] Zhu L H, He L 2022 *Nonlinear Dyn.* **110** 1935
- [25] Han R J, Dai B X 2019 *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **45** 822
- [26] Chen T R, Sun Z Y, Wu B Y 2017 *Appl. Math. Model.* **47** 745
- [27] Li H L, Zhang L, Teng Z D, Jiang Y L 2015 *J. Appl. Math. Comput.* **53** 223
- [28] Berenstein I, Beta C 2013 *Chaos* **23** 033119
- [29] Wang P F, Zhao M, Yu H G, Dai C J, Wang N, Wang B B 2016 *Discrete Dyn. Nat. Soc.* **2016** 4893451
- [30] Roussel C J, Roussel M R 2004 *Prog. Biophys. Mol. Biol.* **86** 113
- [31] Ling Z, Zhang L, Lin Z G 2014 *Appl. Math. Model.* **38** 5022
- [32] He Y F, Ai B Q, Dai C X, Song C, Wang R Q, Sun W T, Liu F C, Feng Y 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 75001
- [33] Zemskov E P, Kassner K, Hauser M J B, Horsthemke W 2013 *Phys. Rev. E* **87** 032906
- [34] Li W S, Hu W Y, Pang Y C, Liu T R, Zhong W R, Shao Y Z 2012 *Phys. Rev. E* **85** 066132
- [35] Hu W Y, Shao Y Z 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 238202 (in Chinese) [胡文勇, 邵元智 2014 物理学报 **63** 238202]
- [36] Chen W Q, Zhang H, Ying H P, Li B W, Chen J X 2007 *J. Chem. Phys.* **127** 154708
- [37] Picozzi A, Rica S 2008 *EPL* **84** 34004
- [38] Roussel M R, Wang J C 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 188302
- [39] Gambino G, Lombardo M C, Sammartino M 2018 *Phys. Rev. E* **97** 012220
- [40] Mukherjee N, Ghorai S, Banerjee M 2018 *Ecol. Complex.* **36** 276
- [41] Liu C, Li L, Wang Z, Wang R W 2019 *Appl. Math. Comput.* **342** 255
- [42] Peña B, Pérez-García C, Sanz-Anchergues A, Miguez D G, Munuzuri A P 2003 *Phys. Rev. E* **68** 056206
- [43] Yang R 2022 *Chaos Solitons Fractals* **164** 112695
- [44] Ouyang Q 2010 *Nonlinear Science and the Pattern Dynamics Introduction* (Beijing: Peking University Press) pp144–160 (in Chinese) [欧阳颀 2010 非线性科学与斑图动力学导论 (北京: 北京大学出版社) 第144—160页]
- [45] Verdasca J, de Wit A, Dewel G, Borckmans P 1992 *Phys. Lett. A* **168** 194
- [46] Song D X, Li C, Song Y L 2020 *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **54** 103106
- [47] Liu R Q, Jia M M, Fan W L, He Y F, Liu F C 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 248201 (in Chinese) [刘若琪, 贾萌萌, 范伟丽, 贺亚峰, 刘富成 2022 物理学报 **71** 248201]

Cross-diffusion-induced transitions between Turing patterns in reaction-diffusion systems*

Meng Xing-Rou Liu Ruo-Qi He Ya-Feng[†]

Deng Teng-Kun Liu Fu-Cheng[‡]

(College of Physics Science and Technology, Hebei University, Baoding 071002, China)

(Received 6 March 2023; revised manuscript received 7 August 2023)

Abstract

Cross-diffusion is one of the most important factors affecting the formation and transition of Turing patterns in reaction diffusion systems. In this paper, cross-diffusion is introduced into a reaction diffusion Brusselator model to investigate the effects of the directivity and density-dependence of cross-diffusion on Turing pattern transition. Turing space is obtained by the standard linear stability analysis, and the amplitude equations are derived based on weakly nonlinear method, by which Turing pattern selection can be determined theoretically. It is found that the degree of deviation from the primary Turing bifurcation point plays an important role in determining the process of pattern selection in the Turing region. As the deviation from onset is increased, the system exhibits a series of pattern transitions from homogenous state to honeycomb hexagonal pattern, to stripe pattern, and then to hexagonal spot pattern. In the case of one-way cross-diffusion, the direction of cross-diffusion determines the order of Turing pattern transition. The cross-diffusion from the inhibitor to the activator enhances the Turing mode and drives the system far away from the primary bifurcation point, resulting in the forward order of Turing pattern transition. On the contrary, the cross-diffusion from the activator to the inhibitor suppresses the Turing mode and forces the pattern transition in a reverse order. In the case of two-way cross-diffusion, the cross-diffusion effect from inhibitors to activators is stronger than that from activators to inhibitors with the same diffusion coefficient. Essentially, the cross-diffusion coefficient is dependent on not only the local concentration of species itself, but also the concentrations of other species due to their interaction. It is found that concentration dependent cross diffusion also affects the transformation direction of Turing pattern. When the diffusion coefficient D_{uv} is linearly dependent on the concentration of retarders, the positive transformation of the Turing pattern is induced with the increase of the concentration linear adjustment parameter β . On the contrary, when the diffusion coefficient D_{vu} is linearly dependent on the concentration of active particles, the reverse transformation of the Turing pattern is induced. The numerical simulation results are consistent with the theoretical analysis.

Keywords: turing mechanism, pattern transition, cross-diffusion, directivity, density-dependent

PACS: 82.40.Ck, 05.45.-a, 05.65.+b, 45.70.Qj

DOI: 10.7498/aps.72.20230333

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12275064, 11975089, 11875014), the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. A2021201003), and the Interdisciplinary Research Program of Natural Science of Hebei University, China (Grant No. DXK202010).

[†] Corresponding author. E-mail: heyf@hbu.edu.cn

[‡] Corresponding author. E-mail: hdlfc@hbu.cn

反应扩散系统中交叉扩散引发的图灵斑图之间的转变

孟星柔 刘若琪 贺亚峰 邓腾坤 刘富成

Cross-diffusion-induced transitions between Turing patterns in reaction-diffusion systems

Meng Xing-Rou Liu Ruo-Qi He Ya-Feng Deng Teng-Kun Liu Fu-Cheng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 198201 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230333

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230333>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

双层耦合非对称反应扩散系统中的振荡图灵斑图

Oscillatory Turing patterns in two-layered coupled non-symmetric reaction diffusion systems

物理学报. 2021, 70(15): 158201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201710>

空间周期性驱动对双层耦合反应扩散系统中图灵斑图的影响

Effects of spatial periodic forcing on Turing patterns in two-layer coupled reaction diffusion system

物理学报. 2022, 71(9): 098201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212148>

异质环境下各向异性扩散对图灵斑图的影响

Effects of anisotropic diffusion on Turing patterns in heterogeneous environment

物理学报. 2022, 71(24): 248201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221294>

反应扩散模型在图灵斑图中的应用及数值模拟

Application of reaction diffusion model in Turing pattern and numerical simulation

物理学报. 2018, 67(5): 050503 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171791>

双层耦合非对称反应扩散系统中的超点阵斑图

Super-lattice patterns in two-layered coupled non-symmetric reaction diffusion systems

物理学报. 2020, 69(2): 028201 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191353>

双层耦合介质中四边形图灵斑图的数值研究

Numerical investigation on square Turing patterns in medium with two coupled layers

物理学报. 2019, 68(6): 068201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182167>