

## 专题: 非线性系统理论及其前沿应用

## 激子极化激元凝聚体中的二维亮孤子\*

黄轶凡 梁兆新†

(浙江师范大学物理系, 金华 321004)

(2023 年 3 月 21 日收到; 2023 年 4 月 21 日收到修改稿)

在非保守非线性系统中, 产生孤子的基本物理机理是系统的动能与非线性、以及增益与耗散达到双动力学平衡. 如何在系统中产生稳定的自由高维孤子是当前孤子理论具有挑战性的前沿课题. 本文提出了一种在激子极化激元玻色-爱因斯坦凝聚体中实现二维自由亮孤子理论方案, 即通过时间周期调制相互作用以及增益与耗散双平衡的物理机理产生稳定的二维自由空间亮孤子. 为此, 首先通过拉格朗日量变分法得到了二维亮孤子参数的动力学方程, 得到其动力学稳定的参数空间. 其次, 数值模拟广义增益耗散 Gross-Pitaevskii 方程的含时演化, 验证了二维亮孤子的稳定性. 最后, 加入高斯噪声模拟真实实验环境, 发现在实验可观测的时间范围内, 二维亮孤子是稳定的. 本文的实验方案打开了在非保守系统中研究高维自由空间亮孤子的大门.

**关键词:** 亮孤子, 激子极化激元凝聚体, Gross-Pitaevskii 方程

**PACS:** 05.45.Yv, 42.65.Tg, 67.85.Hj

**DOI:** 10.7498/aps.72.20230425

## 1 引言

孤子是指在传播过程中形状、幅度和速度都保持不变的脉冲状行波. 孤子在流体力学、非线性光学、量子场论以及超冷量子气体等诸多领域得到极其广泛的应用. 研究孤子的形成机制是孤子研究的基本问题之一. 在保守非线性系统中, 产生孤子的基本物理图像是系统的动能项与非线性项达到动力学平衡. 下面以非线性薛定谔方程中的亮孤子为例, 简单阐述非线性系统中产生孤子的基本物理机理: 假设物理系统中孤子的特征长度为  $\sigma$ , 则系统中孤子的动能  $E_{\text{kin}}$  和非线性能  $E_{\text{int}}$  分别满足  $E_{\text{kin}} \propto \sigma^{-2}$  和  $E_{\text{int}} \propto -\sigma^{-d}$ , 其中  $d = 1, 2$  和  $3$  分别代表一维、二维和三维系统, 系统中孤子的有效能量满足  $E_{\text{soliton}} \propto \sigma^{-2} - \sigma^{-d}$ . 此时, 只有在一维 ( $d = 1$ ) 情形下, 孤子有效能量  $E_{\text{soliton}}$  存在极小值, 即存在稳定的孤子; 而在二维 ( $d = 2$ ) 和三维 ( $d = 3$ ) 情形下,

上述孤子有效能量  $E_{\text{soliton}}$  无极小值. 据此, 传统的孤子理论认为, 在自由空间中高维孤子是不稳定的. 因此, 在自由空间中, 探索和研究高维孤子的稳定机制是孤子研究的前沿热点问题之一. 沿着这条研究思路, 在二维自由空间, Saito 和 Ueda<sup>[1]</sup> 开创性地提出通过使用费希巴赫共振技术调节时间周期变化的非线性系数来稳定二维亮孤子; 在三维自由空间, 周正威课题组<sup>[2]</sup> 通过自旋-轨道耦合效应实现了稳定的三维自由亮孤子. 与此同时, 也有其他一些理论方案稳定二维或三维亮孤子, 如调控外势<sup>[3,4]</sup>、高阶<sup>[5]</sup> 或非定域非线性系数<sup>[6,7]</sup>.

与保守非线性物理系统相比, 非保守非线性物理系统的典型特征是存在内禀的增益和耗散, 上述孤子稳定的能量  $E_{\text{soliton}}$  平衡物理机制失效. 因此, 在非保守物理系统中研究孤子的稳定机制是孤子理论具有挑战性的课题. 现有的研究表明<sup>[8]</sup>, 在自由空间的非保守物理系统中, 孤子的稳定机制是双平衡机制, 即动能与非线性能动态平衡以及增益与耗散动力学平衡同时满足. 目前, 虽然有众多工作

\* 浙江省自然科学基金重点项目 (批准号: LZ21A040001) 和国家自然科学基金 (批准号: 12074344) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhxliang@zjnu.edu.cn

研究一维自由空间中非保守系统的孤子问题<sup>[9–16]</sup>. 但据我们所知, 在非保守物理系统中, 还没有稳定二维自由空间亮孤子的理论方案. 本文的目的是提出一种新的理论方案, 在非保守物理系统中通过时间周期调制相互作用的双稳定机制产生稳定二维自由空间亮孤子.

本文的另外一个研究动机是受激子极化激元玻色-爱因斯坦凝聚体实验实现所驱动<sup>[17–21]</sup>, 该系统内禀非平衡特性给建立在平衡态物理基础上的传统孤子理论带来严峻挑战和新的发展机遇. 半导体光学微腔中的激子极化激元是半导体激子和腔模光子发生强耦合形成的部分光、部分物质的二维杂化玻色子. 激子极化激元具有极小的有效质量, 寿命在皮秒量级, 因而能在室温下就发生玻色-爱因斯坦凝聚<sup>[22,23]</sup>, 该凝聚根源于耗散与增益的动力学平衡, 即天然处于非平衡态. 文献<sup>[24]</sup>详细介绍了微腔激子极化激元的形成过程、凝聚原理和发展历史. 具体讲, 在非相干激光泵浦下, 激子极化激元可以形成玻色-爱因斯坦凝聚体<sup>[20,21]</sup>. 在相干激光泵浦下, 激子极化激元相干性由泵浦激光的相干性决定<sup>[20,21]</sup>. 并且凝聚体与激子热库构成开放量子系统, 超越以哈密顿和纯态波函数为基础的平衡态物理的理论框架<sup>[25]</sup>. 其次, 激子极化激元凝聚体的一个特点是腔模光子不可避免地会逃逸出光微腔. 科学家们创造性地把这一特性变“坏”为“好”, 通过光致发光光谱技术<sup>[26,27]</sup>分析激子极化激元的辐射光的性质, 从而得到关于凝聚体的丰富的信息, 包括能量、动量、相位、极化性质等<sup>[20,21,28]</sup>. 具有综合功能的光学探测系统对于研究激子极化激元的物理特性及器件研发至关重要<sup>[29,30]</sup>. 随着近几年实验技术的发展, 激子极化激元凝聚体已经拥有全方位的微观可操控性: 1) 激子极化激元间的相互作用, 通过激子费希巴赫共振技术<sup>[31–33]</sup>可以实现在微观上调控激子极化激元相互作用及相关多体效应. 2) 外场形式, 已实现诸多很有意义的外势场<sup>[28]</sup>, 包括产生光晶格势<sup>[34,35]</sup>、超晶格和有序势<sup>[36,37]</sup>. 3) 新奇的耦合效应, TE-TM 劈裂导致的自旋-轨道耦合<sup>[38,39]</sup>和各种人工规范场<sup>[40,41]</sup>已在实验中实现. 总之, 激子极化激元凝聚体的非平衡本质与其高度微观可操控性融合在一起, 开辟了非平衡物理的研究热点前沿, 也赋予了激子极化激元凝聚体区别于基于光和超冷原子的量子模拟器的独特之处, 在光电子学、自旋-光电子学和极化激元激光<sup>[20,21]</sup>等领域存

在巨大实际应用价值. 而孤子以其特有的性质成为了激子极化激元凝聚体研究的重要对象<sup>[42,43]</sup>, 在激子极化激元凝聚体中探索实现高维自由孤子也具有现实的实验基础.

本文通过解析与数值相结合, 系统研究自由空间中激子极化激元玻色-爱因斯坦凝聚体中二维亮孤子的动力学问题, 提出了通过时间周期调制相互作用以及增益与耗散双平衡的物理机理产生稳定二维自由空间亮孤子的实验方案. 在平均场近似下, 激子极化激元玻色-爱因斯坦凝聚体的动力学可以由具有增益耗散的 Gross-Pitaevskii (GP) 方程所描述. 首先, 通过拉格朗日量变分法, 得到了二维自由亮孤子参数的动力学方程, 进而得到其动力学稳定的参数空间和物理机理. 其次, 通过数值求解广义增益耗散 GP 方程, 数值验证解析法得到的二维亮孤子的稳定性参数空间. 最后, 通过加入高斯噪声, 模拟真实实验环境, 发现在实验可观测的时间范围内, 本文预测的二维自由亮孤子也是稳定的. 据此, 我们相信在现有的实验条件下, 本文预测的稳定的二维亮孤子可以在激子极化激元凝聚体中被观测到.

本文结构如下: 第 2 节给出描述激子极化激元凝聚体动力学的开放耗散增益 GP 方程; 第 3 节通过拉格朗日变分法给出自由空间中二维亮孤子的稳定参数区间, 进一步通过数值求解开放耗散增益 GP 方程, 验证稳定二维亮孤子的稳定参数区间; 第 4 节加入高斯噪声模拟真实实验环境, 研究自由空间中二维亮孤子的稳定性问题; 第 5 节总结了主要结果以及最后的评论.

## 2 具有增益耗散项的 Gross-Pitaevskii 方程

受通过激子费希巴赫共振技术<sup>[31–33]</sup>可以实现在微观上调控激子极化激元两体相互作用以及相关多体效应的实验进展启发, 本文关注的物理系统是费希巴赫共振技术调控的激子极化激元凝聚体. 在平均场理论框架下, 激子极化激元凝聚体以及激子热库的物理性质可分别由宏观波函数  $\psi(\mathbf{r}, t)$  和热库密度函数  $n_R(\mathbf{r}, t)$  所描述.  $\psi(\mathbf{r}, t)$  的动力学遵循具有增益耗散的 GP 方程, 同时  $\psi(\mathbf{r}, t)$  会耦合到热激子库的密度  $n_R(t)$  上, 具体如下<sup>[10–14]</sup>:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + g(t) |\psi|^2 + \frac{i}{2} \hbar (R n_R - \gamma_C) + g_R n_R \right] \psi + i\hbar \frac{d\psi^{\text{st}}}{dt}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_R}{\partial t} = P - (\gamma_R + R |\psi|^2) n_R. \quad (2)$$

(1) 式中,  $m$  为激子极化激元的有效质量,  $g(t)$  是费希巴赫共振技术调控的含时两体相互作用系数,  $\gamma_C$  是凝聚体衰减率,  $g_R$  表示凝聚体与热库激子的相互作用常数. (2) 式中,  $P = P_0 \exp(-x^2 + y^2/\omega^2)$  描述通过高斯型激光泵浦将激子注入到热库过程,  $\gamma_R$  是激子热库密度的衰减率. (1) 式和 (2) 式中的  $R$  项共同描述从激子热库中补充凝聚体的物理过程. (1) 式中的最后一项  $d\psi^{\text{st}} = dW$  描述白噪音导致的量子涨落项, 具体如下<sup>[10]</sup>:

$$\begin{aligned} \langle dW(\mathbf{r}, t) dW^*(\mathbf{r}', t) \rangle &= 2D \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dt, \\ \langle dW(\mathbf{r}, t) dW(\mathbf{r}', t) \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $dW$  是高斯随机变量,  $D$  表征噪声的强度. 在下面的分析中, 计算二维亮孤子的稳定参数区间及其动力学演化时, 将忽略 (1) 式中的噪声项<sup>[10]</sup>. 在模拟相对真实实验环境验证二维亮孤子稳定性时候, 会增加 (1) 式中的噪音项.

通过方程 (1) 和方程 (2), 首先回顾一下激子极化激元凝聚体稳态问题. 当泵浦强度  $P$  大于临界值  $P_{\text{th}} = \gamma_R \gamma_C / R$  时, (1) 式激子极化激元凝聚体密度  $n_0 = |\psi|^2$  以及 (2) 式中的热库密度  $n_R^0$  存在稳态解, 即  $n_0 = (P - P_{\text{th}}) / \gamma_C$  和  $n_R^0 = \gamma_C / R$ . 为了后面计算方便, 定义系统的特征能量为  $g_e n_0$  ( $g_e$  为系统的背景两体相互作用系数), 特征长度为  $\xi = \sqrt{\hbar^2 / (m g_e n_0)}$  以及特征时间为  $\tau = \hbar / (g_e n_0)$ . 进而把方程 (1) 和方程 (2) 写成无量纲化的方程:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ -\frac{1}{2} \nabla^2 + g(t) |\psi|^2 + \frac{i}{2} (R n_R - \gamma_C) + g_R n_R \right] \psi + i \frac{d\psi^{\text{st}}}{dt}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial n_R}{\partial t} = P - (\gamma_R + R |\psi|^2) n_R. \quad (5)$$

在 (4) 式和 (5) 式中, 已经重新标定了时间  $t \rightarrow t/\tau$ , 空间  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}/\xi$  和波函数  $\psi \rightarrow \sqrt{n_0} \psi$ , 及方程的各类参数:  $(g(t), g_R) \rightarrow (g(t), g_R) / (g_e n_0)$ ,  $(P, R) \rightarrow (P, R) / (g_e n_0)$  和  $(\gamma_C, \gamma_R) \rightarrow (\gamma_C, \gamma_R) / (g_e n_0)$ . (4) 式中,

费希巴赫共振技术调控的相互作用系数  $g(t)$  是频率为  $\Omega$  的时间周期函数  $g(t) = [g_0 + g_1 \sin(\Omega t)]$ .

### 3 拉格朗日变分法与数值解

#### 3.1 拉格朗日变分法

本节的目的是通过拉格朗日变分法解析求解在激子极化激元系统中存在自由二维亮孤子的参数空间. 在开始非保守非线性系统的孤子研究之前, 先回顾保守非线性系统相关孤子的研究.

首先, 当方程 (4) 中的参数  $R = \gamma_C = g_R = 0$  时, 本文的模型过渡到文献 [1] 中的保守非线性系统模型. 直接解析求解方程 (4) 是十分困难的, 但是可以借助某一拟设的含若干不确定参数的孤子解, 通过变分法推导出关于目标参量的运动方程. 文献 [44, 45] 给出了非保守非线性系统的变分法详细介绍. Saito 和 Ueda<sup>[1]</sup> 已经利用试探函数为高斯函数的变分法提出了一种通过使用费希巴赫共振技术调节时间周期变化的非线性系数来稳定二维亮孤子的理论方案. 但是文献 [1] 中变分法的本质是能量取极值, 故不能直接应用到能量不守恒的具有耗散和增益项的方程 (4) 中.

其次, 当方程 (4) 中的参数  $R, \gamma_C, g_R$  不等于零时, 计划用拉格朗日变分法来研究孤子问题<sup>[10–14]</sup>. 为此, 把方程 (4) 重新写为

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla^2 \psi - g(t) |\psi|^2 \psi = I(\psi), \quad (6)$$

其中  $I(\psi) = \left[ \frac{i}{2} (R n_R - \gamma_C) + g_R n_R \right] \psi$ .  $I(\psi)$  中的函数  $n_R$  动力学遵循方程 (5). 把方程 (6) 等号右边的  $I(\psi)$  看成是微扰项, 等号左边的项对应的拉格朗日量为

$$L = \int dt \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \left[ i\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 - \frac{g(t)}{2} |\psi|^4 \right].$$

根据拟设的含参孤子解, 可以表示出系统的拉格朗日密度  $\mathcal{L}$ , 再对空间积分求出对应的拉格朗日量  $L$ , 代入欧拉-拉格朗日方程以得到确定这些参量的运动方程. 文献 [44] 将耗散增益项当作微扰处理, 给出了适用于极化子系统的欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{\partial L}{\partial a_j} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j} \right) = 2 \text{Re} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} I^*(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial a_j} d\mathbf{r} \right), \quad (7)$$

式中,  $a_j$  代表变分参数的集合.



再次, 受到保守系统中的二维自由亮孤子形式的启发<sup>[1]</sup>, 我们拟设方程 (6) 中二维自由亮孤子具有如下形式:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma(t)} e^{\left[ -\frac{x^2+y^2}{2\sigma(t)^2} + \frac{i(x^2+y^2)\sigma'(t)}{2\sigma(t)} \right]}, \quad (8)$$

其中  $\sigma(t)$  是表征二维亮孤子空间宽度的变分参数. 与此同时, 还需要知道 (6) 式中热库密度  $n_R$  的具体信息, 为此, 需要求解 (5) 式. 在本文解析分析中, 聚焦在快热库近似参数区间 ( $\gamma_C \ll \gamma_R$ ). 在此快热库参数空间<sup>[9,20,21]</sup>, 可以由 (5) 式的时间变化项得到热库密度为  $n_R = \frac{P}{\gamma_R} \left( 1 - \frac{R}{\gamma_R} |\psi|^2 \right)$ .

最后, 把变分波函数 (8) 和  $n_R = \frac{P}{\gamma_R} \left( 1 - \frac{R}{\gamma_R} |\psi|^2 \right)$  代入拉格朗日变分方程, 经过标准的变分法计算, 可以得到二维自由孤子的宽度  $R(t)$  的动力学方程如下:

$$\frac{d^2\sigma(t)}{dt^2} + \Gamma \frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{1}{\sigma(t)^3} + \frac{g_0 + g_1 \sin(\Omega t)}{2\pi\sigma(t)^3}, \quad (9)$$

其中

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left\{ \omega^4 P_0 \left[ \frac{R}{\pi\gamma_R (2\omega^2\sigma(t) + \sigma(t)^3)^2} - \frac{1}{(\omega^2 + \sigma(t)^2)^2} \right] + \frac{R}{\gamma_R} \right\}.$$

(9) 式是本文的核心结果. 下面根据 (9) 式来分析并给出在非保守系统中稳定二维自由亮孤子基本物理图像和参数空间.

(i) 当增益和耗散参数为零, 即 (9) 式中  $\Gamma = 0$  时, (9) 式可以严格恢复到文献<sup>[1]</sup>中相应的结果. 可以得到, 时间周期驱动的非线性系数为自由空间中的二维亮孤子提供了一个额外的力, 使其能够抵抗非线性性能带来的孤子崩塌效应.

(ii) 当增益和耗散参数为零, 即 (9) 式中  $\Gamma \neq 0$  时, (9) 式中的  $\Gamma$  项为孤子的运动提供了类似摩擦力的作用. 此时, 即使在保守系统中稳定的二维亮孤子也会因为  $\Gamma$  项的存在而衰减或崩塌.

(iii) 为了得到非保守系统中稳定的二维耗散亮孤子, 把 (9) 式中的  $\sigma(t)$  写成缓慢变化项  $\sigma_0(t)$  以及快速振荡项目  $\theta(t)$ , 即  $R(t) = R_0(t) + \theta(t)$ . 当  $\Omega \gg 1$  时,  $\theta(t)$  含时变化在  $\Omega^{-2}$  阶上. 把  $\sigma(t) = \sigma_0(t) + \theta(t)$  代入 (9) 式, 可以得到  $\sigma_0(t)$  和  $\theta(t)$  满足的方程如下:

$$\frac{d^2\sigma_0(t)}{dt^2} = -\Gamma_0 \frac{d\sigma_0(t)}{dt} + \frac{2\pi + g_0}{2\pi\sigma_0(t)^3} - \frac{3g_1}{2\pi\sigma_0(t)^4} \int_0^{2\pi/\Omega} \theta(t) \sin(\Omega t) dt, \quad (10)$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{g_1}{2\pi\sigma_0(t)^3} \sin(\Omega t), \quad (11)$$

其中

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} \left\{ \omega^4 P_0 \left[ \frac{R}{\pi\gamma_R (2\omega^2\sigma_0(t) + \sigma_0(t)^3)^2} - \frac{1}{(\omega^2 + \sigma_0(t)^2)^2} \right] + \frac{R}{\gamma_R} \right\}.$$

求解 (11) 式可以得到  $\theta = -g_1 / [2\pi\Omega^2\sigma_0(t)^3]$  并把  $\theta$  代回 (10) 式, 可以得到  $\sigma_0(t)$  满足的动力学方程为

$$\frac{d^2\sigma_0}{dt^2} = -\Gamma_0 \frac{d\sigma_0}{dt} - \frac{\partial}{\partial\sigma_0} \left( \frac{g_0 + 2\pi}{4\pi\sigma_0} + \frac{g_1^2}{16\pi\Omega^2\sigma_0^6} \right). \quad (12)$$

根据 (12) 式可以推测: 二维自由耗散亮孤子的宽度存在稳定的极值  $\sigma_0^4 = -3g_1^2 / [4\pi\Omega^2(g_0 + 2\pi)]$ , 其指数衰减率为  $\Gamma_0$ , 并且孤子宽度围绕极值的振荡频率为  $\omega_{\text{soliton}} = 2\sqrt{2}\Omega(g_0 + 2\pi) / (\sqrt{3}g_1)$ .

(iv) 根据 (12) 式得出, 在激子极化激元凝聚体中存在稳定的自由二维亮孤子的参数空间为: 1)  $g_0 < -2\pi$  和 2)  $\Gamma_0 \approx 0$ . 下面通过数值求解增益耗散 GP 方程来验证该物理图像.

### 3.2 数值法模拟二维耗散孤子的动力学

(12) 式已经通过拉格朗日变分法得到在激子极化激元凝聚体中得到稳定亮孤子的基本物理图像. 在快热库极限下, 方程 (6) 可以重新写成如下形式:

$$i \frac{\partial\psi}{\partial t} = \left\{ -\frac{1}{2} \nabla^2 + [1 - f(t)] \frac{r^2}{2} + f(t)g(t)|\psi|^2 + \frac{i}{2} \left( \frac{PR}{\gamma_R} - \frac{PR^2}{\gamma_R^2} |\psi|^2 - \gamma_C \right) \right\} \psi, \quad (13)$$

其中

$$f(t) = \begin{cases} t/T, & 0 \leq t \leq T, \\ 1, & t > T. \end{cases} \quad (14)$$

方程 (13) 与方程 (4) 相比多了简谐势项, 该项的引入是一种得到稳定初态的数值技巧. 为了避免非绝热扰动破坏孤子稳态, (13) 式中人为用径向简谐势约束初态, 在含时演化的前段通过调节  $f(t)$  逐渐打开相互作用, 同时缓慢减弱径向约束势到零. 另外选用分步傅里叶方法对上述方程进行数值模拟, 该

方法支持大规模并行, 可以利用 GPU 显著提升计算效率. 特别指出, 在非线性薛定谔方程中, 初态在经历演化后有时会发出一些射出辐射, 为避免因此产生的误差甚至是数值崩溃, 模拟开放边界条件是必要的. 文献 [46] 提出了一种数值方法来模拟开放边界条件, 可以加入形式为  $V_a = Ae^{-(r-r_0)^2/2\omega_a^2}$  的吸收势, 其中  $A$ ,  $r_0$ ,  $\omega_a$  分别控制吸收势的强度、中心位置和宽度, 可以凭经验调整这些参数, 使  $V_a$  能够最大化地吸收射出辐射.

通过数值求解具有增益和耗散的 GP 方程 (13), 设计如下理论方案来实现稳定的二维自由空间亮孤子: 1) 在初始  $t=0$  时刻, (13) 式中的  $f(t)=0$ , 此时准备的初始态为二维自由谐振子的基态. 2) 随着时间的演化, 通过  $f(t)$  的合理选取, 逐渐把相互作用从零加大到  $g(t)$ , 与此同时调节外势的强度为零. 在  $t=20$  后, 外势强度调节成零, 此后波函数的演化可以看成是在自由空间中的演化. 3) 图 1 给出了峰值密度  $|\psi(r=0)|^2$  (见图 1(a1), 图 1(b1) 和图 1(c1)) 和单极矩  $\langle r \rangle = \int r |\psi|^2 dr$  (见图 1(a2), 图 1(b2) 和图 1(c2)) 随时间演化的图像. 通过图 1 可知, 在 (12) 式预言的孤子稳定区间, 即  $g_0 = -2\pi$

附近, 通过数值求解增益和耗散的 GP 方程 (13), 的确找到了稳定的二维耗散孤子. 二维亮孤子的动力学可分为两部分: 小振幅快速振荡的部分和缓慢、平滑变化的部分. 快速振荡平均后, 缓变宽度和峰值密度相当恒定. 4) 在图 1(a)—(c) 中, 调节增益系数  $R$  和耗散系数  $\gamma_C$  发现, 总是可以找到合适的稳定二维耗散孤子的参数区间. 另外, 图 2 也给出图 1 对应的孤子演化的三维图. 从图 2 可以明显看出, 当时间演化到  $t=37$  时, 二维自由空间耗散亮孤子依旧保持原来的孤子形状.

#### 4 高斯噪声下二维耗散孤子稳定性

前面在快热库近似下通过 (12) 式利用解析方法确定了稳定二维耗散亮孤子的参数空间, 接着通过数值求解相应的具有增益耗散的 GP 方程 (13), 数值验证了稳定二维耗散亮孤子. 但是, 真实的实验环境中总是存在噪音. 在激子极化激元凝聚体系统中, 真实的实验环境可以通过向 GP 方程加入白噪音加以模拟. 下面, 通过加入白噪音来验证真实环境下本文预测的二维耗散亮孤子的稳定性.

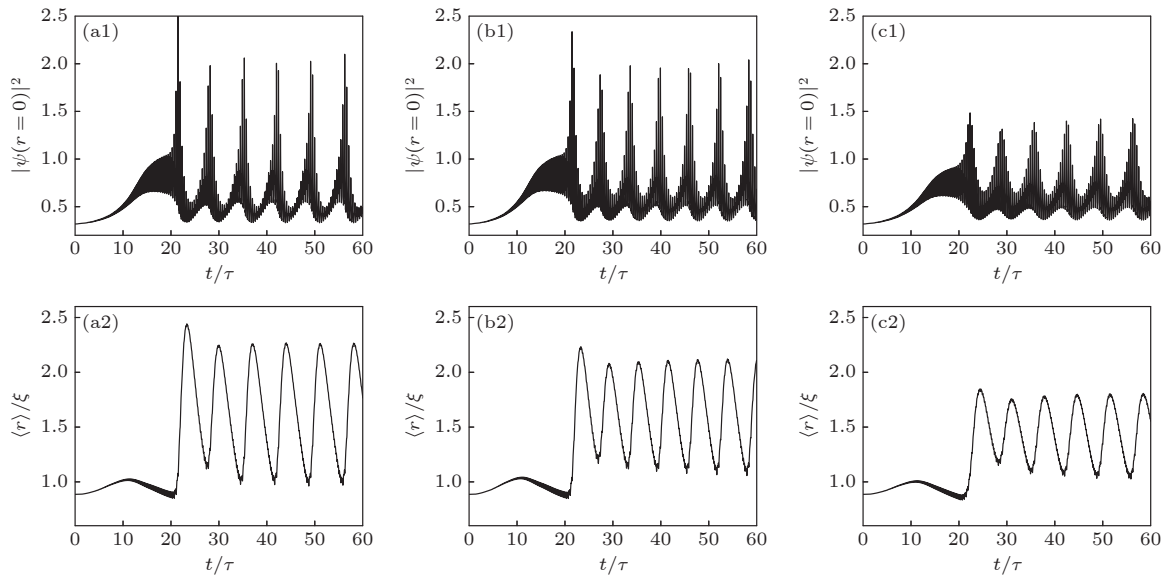


图 1 峰值密度  $|\psi(r=0)|^2$  和单极矩  $\langle r \rangle = \int r |\psi|^2 dr$  随时间  $t$  演化的图像 (a1), (a2)  $\gamma_C = 0.60$ ,  $\gamma_R = 3.00$ ,  $P_0 = 1.271$ ; (b1), (b2)  $\gamma_C = 0.70$ ,  $\gamma_R = 3.00$ ,  $P_0 = 1.484$ ; (c1), (c2)  $\gamma_C = 0.60$ ,  $\gamma_R = 2.60$ ,  $P_0 = 1.142$ . 周期振荡相互作用强度取为  $g(t) = -2\pi + 8\pi \sin(\Omega t)$ , 含时演化的前段  $t=0-20$ , 逐渐打开热源极化子间的相互作用, 同时缓慢减弱径向约束势到零. 其他参数为  $R = 2.40$ ,  $\omega = 2.00$ ,  $\Omega = 30$ ,  $g_R = 0$

Fig. 1. Time evolution of the peak density  $|\psi(r=0)|^2$  and the monopole moment  $\langle r \rangle = \int r |\psi|^2 dr$ : (a1), (a2)  $\gamma_C = 0.60$ ,  $\gamma_R = 3.00$ ,  $P_0 = 1.271$ ; (b1), (b2)  $\gamma_C = 0.70$ ,  $\gamma_R = 3.00$ ,  $P_0 = 1.484$ ; (c1), (c2)  $\gamma_C = 0.60$ ,  $\gamma_R = 2.60$ ,  $P_0 = 1.142$ . The interaction  $g(t) = -2\pi + 8\pi \sin(\Omega t)$  is switched on a little bit at a time while the radial confinement potential is switched off from  $t=0$  to 20. Values of other parameters are  $R = 2.40$ ,  $\omega = 2.00$ ,  $\Omega = 30$ ,  $g_R = 0$ .

首先, 本文稳定二维自由亮孤子的物理图像建立在 (12) 式上, 该式是在快热库极限下得到的. 所以可以直接把噪音项 (3) 加入增益耗散 GP 方程 (13), 验证在快热库近似下二维自由亮孤子是否稳定. 图 3(a) 和图 3(b) 给出了加入噪音项的二维亮孤子峰值以及二维演化图. 从图 3 可以看出, 在弱噪音下, 孤子在相当长的时间 (对应真实 70 ms 时间) 内二维自由空间亮孤子是稳定的.

其次, 在图 3 中的稳定孤子图是在快热库极限近似下通过求解增益耗散 GP 方程 (13) 得到的. 正如前面所述, 在快热库近似下, 已经通过公式  $n_R = \frac{P}{\gamma_R} \left(1 - \frac{R}{\gamma_R} |\psi|^2\right)$  忽略了热库  $n_R$  的动力学. 下面的研究同样在快热库参数空间, 但是考虑  $n_R$  完整动力学, 进而研究二维亮孤子的稳定性. 为了研究这种情况, 直接选取合适的参数数值求解耦合的增益耗散 GPE 方程 (4) 和方程 (5). 在图 4(a1) 和

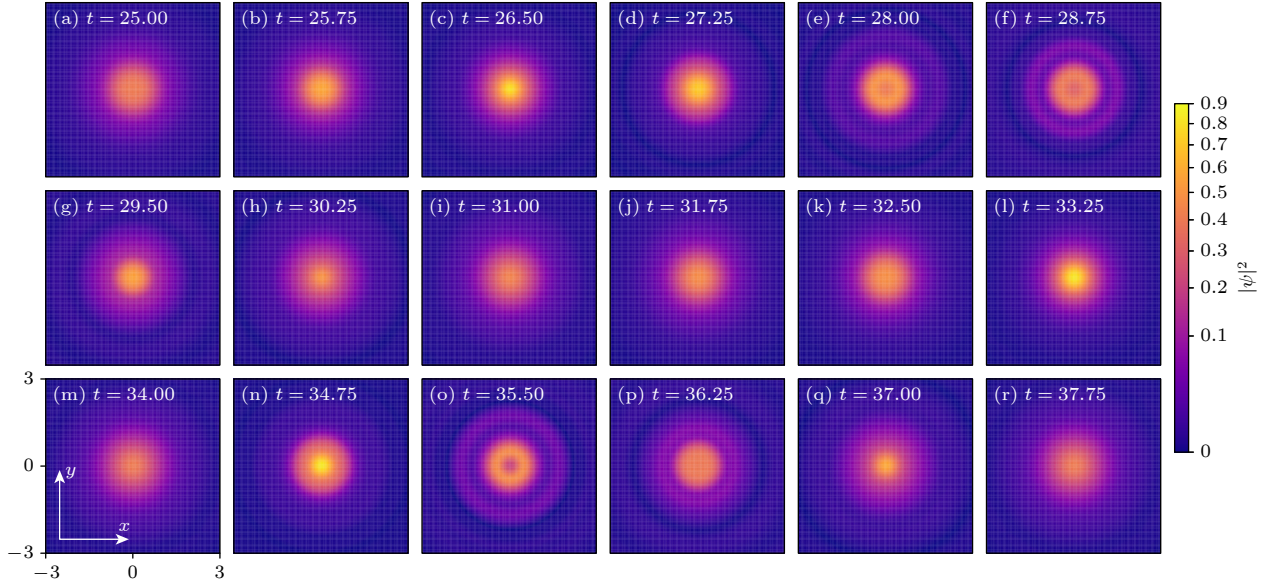


图 2 图 1(a) 所描述系统中, 概率密度分布随时间演化的图像. 图中颜色明暗代表概率密度的大小, 颜色越亮表示对应的概率密度越大

Fig. 2. Time evolution of the the odds density distribution for the system depicted in Fig. 1(a). The brighter and darker colors in the figure represent the magnitude of the density, and the brighter color indicates the corresponding higher density.

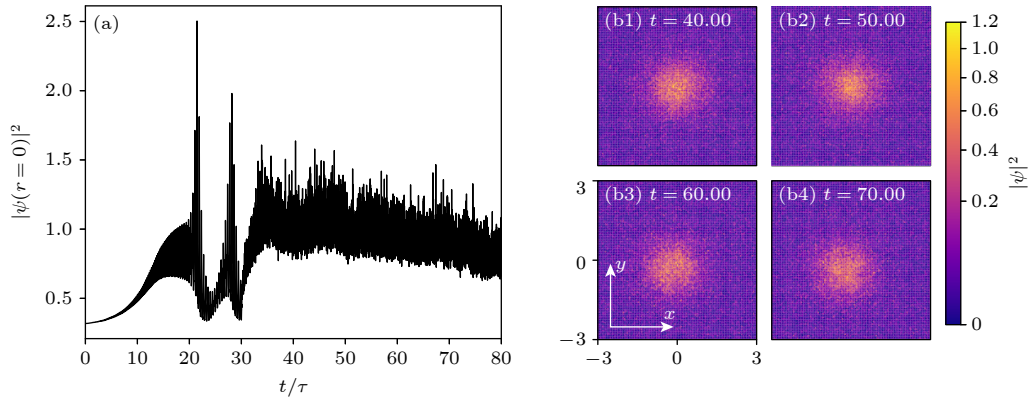


图 3 考虑噪声的快热库极限下, 峰值密度  $|\psi(r=0)|^2$  (a) 随时间演化图像和 (b) 概率密度分布图像. 周期振荡相互作用强度取为  $g(t) = -2\pi + 8\pi \sin(\Omega t)$ , 噪音强度为  $D = 0.01$ , 其他参数为  $R = 2.40$ ,  $\gamma_C = 0.60$ ,  $\gamma_R = 3.00$ ,  $P_0 = 1.274$ ,  $\omega = 2.00$ ,  $\Omega = 30$ ,  $g_R = 0$ . 图中颜色明暗代表概率密度的大小, 颜色越亮表示对应的概率密度越大

Fig. 3. (a) Time evolution of the peak density  $|\psi(r=0)|^2$  and (b) the density distribution in the limit of fast reservoir considering the noise. The interaction  $g(t) = -2\pi + 8\pi \sin(\Omega t)$  is switched on a little bit at a time while the radial confinement potential is switched off from  $t = 0$  to 20. The noise intensity is  $D = 0.01$ . Values of other parameters are  $R = 2.40$ ,  $\gamma_C = 0.60$ ,  $\gamma_R = 3.00$ ,  $P_0 = 1.274$ ,  $\omega = 2.00$ ,  $\Omega = 30$ ,  $g_R = 0$ . The brighter and darker colors in the figure represent the magnitude of the density, and the brighter color indicates the corresponding higher density.



图 4(b1) 以及图 4(c1) 和图 4(d1) 中, 绘制了加入强度为  $D = 0.01$  的白噪音项的二维亮孤子峰值以及二维演化图. 可以看到, 在图 4(a1) 中, 在快热库参数区间 ( $\gamma_C/\gamma_R \ll 1$ ) 以及没有噪音 ( $D = 1$ ) 下, 二维亮孤子是稳定的. 进一步地, 在图 4(b2) 中加入噪音强度为  $D = 0.01$  的弱噪音, 此时二维亮孤子同样稳定. 同时在图 4(c1) 和图 4(d1) 中绘制了加入噪音后亮孤子的三维演化图, 演化到时间  $t = 55$  时, 二维自由亮孤子仍然是稳定的.

最后, 上面的解析结果 (12) 式以及数值计算局限在快热库的参数空间. 下面研究在非快热库参

数空间是否存在稳定的二维亮孤子. 为此数值求解耦合的增益耗散 GPE 方程 (4) 和方程 (5), 绘制了图 4(a2), 图 4(b2), 图 4(c2) 和图 4(d2), 此时凝聚体耗散参数  $\gamma_C$  和热库耗散参数  $\gamma_R$  分别取  $\gamma_C = 0.6$  和  $\gamma_R = 0.3$ . 通过图 4(a2), 图 4(b2), 图 4(c2) 和图 4(d2), 可以看到在非快热库参数下, 仍然可以找到稳定激子极化激元凝聚体中稳定的二维自由亮孤子的参数空间. 总之, 通过 (12) 式解析分析稳定二维亮孤子的基本物理图像以及通过数值求解耗散与增益 GP 方程 (4), 逻辑自洽地验证了稳定二维亮孤子存在的真实性.

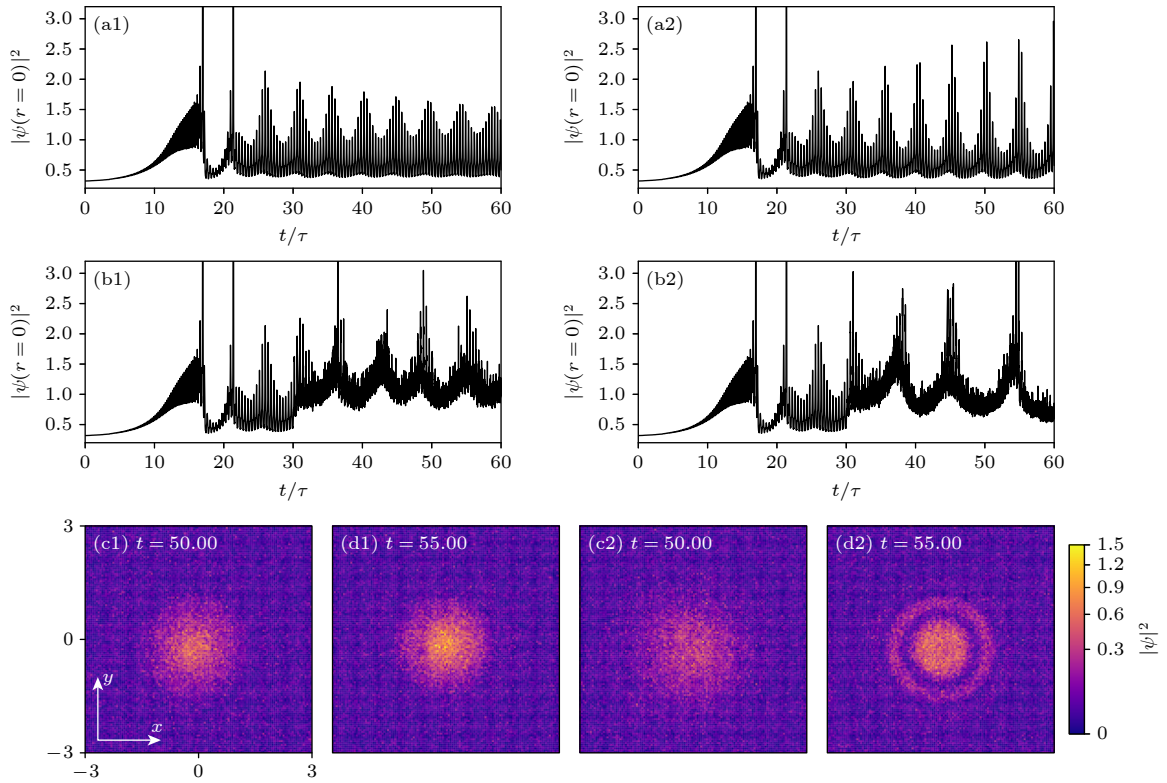


图 4 根据演化耦合方程 (4) 和方程 (5), 峰值密度  $|\psi(r=0)|^2$  和概率密度分布图像 (a1) 快热库参数空间中峰值密度  $|\psi(r=0)|^2$  随时间演化的图像,  $R = 2.40$ ,  $\gamma_R = 3.00$ ; (b1) 在图 (a1) 基础上再加入强度为  $D = 0.01$  的弱噪声; (c1), (d1) 考虑噪声的快热库参数空间中的概率密度分布图; (a2) 非快热库参数空间中峰值密度  $|\psi(r=0)|^2$  随时间演化的图像,  $R = 0.24$ ,  $\gamma_R = 0.30$ ; (b2) 在图 (a2) 基础上再加入强度为  $D = 0.01$  的弱噪声; (c2), (d2) 考虑噪声的非快热库参数空间中的概率密度分布图. 周期振荡相互作用强度取为  $g(t) = -2\pi + 8\pi \sin(\Omega t)$ , 在  $t = 30$  时加入高斯白噪声, 其他参数为  $\gamma_C = 0.60$ ,  $P_0 = 1.265$ ,  $\omega = 2.20$ ,  $\Omega = 30$ ,  $g_R = 0$ . 图中颜色明暗代表概率密度的大小, 颜色越亮表示对应的概率密度越大

Fig. 4. Time evolution of the peak density  $|\psi(r=0)|^2$  and the monopole moment  $\langle r \rangle = \int r |\psi|^2 d\mathbf{r}$  while evolving the coupled equations (4) and (5): (a1) Image of peak density  $|\psi(r=0)|^2$  in the parameter space of fast reservoir with time evolution,  $R = 2.40$ ,  $\gamma_R = 3.00$ ; (b1) adding a weak noise with intensity  $D=0.01$  to panel (a1); (c1), (d1) image of density distribution in the parameter space of fast reservoir considering the noise; (a2) image of peak density  $|\psi(r=0)|^2$  in the parameter space of non-fast reservoir with time evolution,  $R = 0.24$ ,  $\gamma_R = 0.30$ ; (b2) adding a weak noise with intensity  $D = 0.01$  to panel (a2); (c2), (d2) image of density distribution in the parameter space of non-fast reservoir considering the noise. The interaction  $g(t) = -2\pi + 8\pi \sin(\Omega t)$  is switched on a little bit at a time while the radial confinement potential is switched off from  $t = 0$  to 20. Gaussian white noise is added at the moment  $t = 30$ , and the other parameters are  $\gamma_C = 0.60$ ,  $P_0 = 1.265$ ,  $\omega = 2.20$ ,  $\Omega = 30$ ,  $g_R = 0$ . The brighter and darker colors in the figure represent the magnitude of the density, and the brighter color indicates the corresponding higher density.

## 5 结论与展望

在激子极化激元凝聚体中, 非平衡导致的量子耗散与系统的量子相干性在决定宏观量子相时是同等重要的, 量子耗散不仅不能当成微扰, 甚至会导致没有平衡态物理对应的新奇非平衡量子相. 本文通过解析与数值相结合, 提出了通过时间周期调制相互作用以及增益与耗散双平衡的物理机理产生稳定二维自由空间亮孤子的实验方案. 为此, 首先通过拉格朗日量变分法得到了二维亮孤子参数的动力学方程, 得到其动力学稳定的参数空间. 其次, 用数值模拟广义耗散 Gross-Pitaevskii 方程的演化, 数值地验证了二维亮孤子的稳定性. 最后, 加入高斯噪声模拟真实实验环境, 发现在实验可观测的时间范围内, 二维亮孤子也是稳定的. 这是对传统保守非线性系统中孤子理论研究以及调控研究范式在非平衡条件下的新开拓.

感谢浙江师范大学物理系博士生贾春玉和硕士生张义灵提供有意义的讨论和帮助.

## 参考文献

- [1] Saito H, Ueda M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 040403
- [2] Zhang Y C, Zhou Z W, Malomed B A, Pu H 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 253901
- [3] Dalfovo F, Stringari S 1996 *Phys. Rev. A* **53** 2477
- [4] Carr L D, Clark C W 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 010403
- [5] Kartashov Y V, Malomed B A, Torner L 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 247
- [6] Maucher F, Henkel N, Saffman M, Królikowski W, Skupin S, Pohl T 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 170401
- [7] Tikhonenkov I, Malomed B A, Vardi A 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 090406
- [8] Kippenberg T J, Gaeta A L, Lipson M, Gorodetsky M L 2018 *Science* **361** 567
- [9] Smirnov L A, Smirnova D A, Ostrovskaya E A, Kivshar Y S 2014 *Phys. Rev. B* **89** 235310
- [10] Xu X R, Chen L, Zhang Z D, Liang Z X 2019 *J. Phys. B* **52** 025303
- [11] Jia C Y, Liang Z X 2020 *Chin. Phys. Lett.* **37** 040502
- [12] Jia C Y, Wu R K, Hu Y, Liu W M, Liang Z X 2021 *Front. Phys.* **9** 805841
- [13] Zhang Y L, Jia C Y, Liang Z X 2022 *Chin. Phys. Lett.* **39** 020501
- [14] Jia C Y, Liang Z X 2022 *Entropy* **24** 1789
- [15] Yu C F, Liang G D, Cao X J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4402 (in Chinese) [余超凡, 梁国栋, 曹锡金 2008 物理学报 **57** 4402]
- [16] Chen L Y, Gao C, Lin J, Li H J 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 181101 (in Chinese) [陈礼元, 高超, 林机, 李慧军 2022 物理学报 **71** 181101]
- [17] Kasprzak J, Richard M, Kundermann S, et al. 2006 *Nature* **443** 409
- [18] Balili R, Hartwell V, Snoke D, Pfeiffer L, West K 2007 *Science* **316** 1007
- [19] Deng H, Weihs G, Santori C, Bloch J, Yamamoto Y 2002 *Science* **298** 199
- [20] Carusotto I, Ciuti C 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 299
- [21] Byrnes T, Kim N Y, Yamamoto Y 2014 *Nat. Phys.* **10** 803
- [22] Plumhof J D, Stöferle T, Mai L, Scherf U, Mahr R F 2014 *Nat. Mater.* **13** 247
- [23] Su R, Ghosh S, Wang J, Liu S, Diederichs C, Liew T C H, Xiong Q H 2020 *Nat. Phys.* **16** 301
- [24] Li F, Xiong Q H 2022 *Physics* **51** 445 (in Chinese) [李峰, 熊启华 2022 物理 **51** 445]
- [25] Sieberer L M, Buchhold M, Diehl S 2016 *Rep. Prog. Phys.* **79** 096001
- [26] Ciuti C, Schwendimann P, Quattropani A 2001 *Phys. Rev. B* **63** 041303(R)
- [27] Klass M, Flayac H, Amthor M, Savenko I G, Brodbeck S, Ala-Nissila T, Klemmt S, Schneider C, Höfling S 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 017401
- [28] Schneider C, Winkler K, Fraser M D, Kamp M, Yamamoto Y, Ostrovskaya E A, Höfling S 2016 *Rep. Prog. Phys.* **80** 016503
- [29] Shelykh I A, Kavokin A V, Rubo Y G, Liew T C H, Malpuech G 2010 *Semicond. Sci. Technol.* **25** 013001
- [30] Sanvitto D, Kéna-Cohen S 2016 *Nat. Mater.* **15** 1061
- [31] Takemura N, Trebaol S, Wouters M, Portella-Oberli M T, Deveaud B 2014 *Nat. Phys.* **10** 500
- [32] Sun Y, Yoon Y, Steger M, Liu G, Pfeiffer L N, West K, Snoke D W, Nelson K A 2017 *Nat. Phys.* **13** 870
- [33] Navadeh-Toupchi M, Takemura N, Anderson M D, Oberli D Y, Portella-Oberli M T 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 047402
- [34] Lai C W, Kim N Y, Utsunomiya S, et al. 2007 *Nature* **450** 529
- [35] St-Jean P, Goblot V, Galopin E, Lemaître A, Ozawa T, Le Gratiet T, Sagnes I, Bloch J, Amo A 2017 *Nat. Photonics* **11** 651
- [36] Manni F, Lagoudakis K G, Pietka B, Fontanesi L, Wouters M, Savona V, André R, Deveaud-Plédran B 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 176401
- [37] Thunert M, Janot A, Franke H, Sturm C, Michalsky T, Martín T, Viña L, Rosenow B, Grundmann M, Schmidt-Grund R 2016 *Phys. Rev. B* **93** 064203
- [38] Sala V G, Solnyshkov D D, Carusotto I, et al. 2015 *Phys. Rev. X* **5** 011034
- [39] Whittaker C E, Cancellieri E, Walker P M, et al. 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 097401
- [40] Klemmt S, Harder T H, Egorov O A, et al. 2018 *Nature* **562** 552
- [41] Lim H T, Togan E, Kroner M, Miguel-Sanchez J, Inamoglu A 2017 *Nat. Commun.* **8** 14540
- [42] Chen H J, Ren Y, Wang H 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 056701 (in Chinese) [陈海军, 任元, 王华 2022 物理学报 **71** 056701]
- [43] Guo H, Wang Y J, Wang L X, Zhang X F 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 010302 (in Chinese) [郭慧, 王雅君, 王林雪, 张晓斐 2020 物理学报 **69** 010302]
- [44] Kivshar Y S, Królikowski W 1995 *Opt. Commun.* **114** 353
- [45] Frantzeskakis D J 2010 *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** 213001
- [46] Tran P 1998 *Phys. Rev. E* **58** 8049



SPECIAL TOPIC—Nonlinear system theory and its frontier applications

# Two-dimensional bright soliton in exciton-polariton condensate<sup>\*</sup>

Huang Yi-Fan      Liang Zhao-Xin<sup>†</sup>

(*Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China*)

( Received 21 March 2023; revised manuscript received 21 April 2023 )

## Abstract

In non-conservative nonlinear systems, the basic physical mechanics of soliton generation is that the kinetic energy and nonlinear terms of the system, as well as the gain and dissipation terms reach a double dynamic balance. How to generate stable free high-dimensional solitons in such a system is currently a challenging topic in soliton theory. In this article, we propose a theoretical scheme for realizing two-dimensional free bright solitons in exciton-polariton Bose-Einstein condensates, which proposes a physical mechanism for generating stable two-dimensional free space bright solitons through time periodic modulation interactions and a dual balance between gain and dissipation. In this end, firstly, we obtain the dynamic equations of two-dimensional bright soliton parameters through the Lagrange variational method, and obtain its dynamically stable parameter space. Secondly, the evolution of the generalized dissipative Gross-Pitaevskii equation is numerically simulated to verify the stability of two-dimensional bright solitons. Finally, we add Gaussian noise to simulate a real experimental environment and find that two-dimensional bright solitons are also stable within the observable time range of the experiment. Our experimental scheme opens the door to the study of bright solitons in high-dimensional free space in non-conservative systems.

**Keywords:** bright soliton, polariton condensate, Gross-Pitaevskii equation

**PACS:** 05.45.Yv, 42.65.Tg, 67.85.Hj

**DOI:** 10.7498/aps.72.20230425

<sup>\*</sup> Project supported by the Key Program of the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. LZ21A040001) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12074344).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [zhxliang@zjnu.edu.cn](mailto:zhxliang@zjnu.edu.cn)

## 激子极化激元凝聚体中的二维亮孤子

黄轶凡 梁兆新

### Two-dimensional bright soliton in exciton-polariton condensate

Huang Yi-Fan Liang Zhao-Xin

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 100505 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230425

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230425>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 旋转二维激子极化激元凝聚涡旋叠加态的动力学特性

Rotational dynamics characteristics of planar superimposed vortices of exciton polariton condensates

物理学报. 2020, 69(23): 230303 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200697>

#### 耦合光学微腔的频率调谐过程分析

Analysis of frequency tuning process of dual coupled optical microcavities

物理学报. 2020, 69(18): 184207 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200530>

#### Bessel型光晶格中自旋-轨道耦合极化激元凝聚的稳态结构

Stationary structures of spin-orbit coupled polariton condensates in Bessel lattices

物理学报. 2022, 71(5): 056701 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211949>

#### 线性塞曼劈裂对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子动力学的影响

Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2019, 68(8): 080301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182013>

#### 环形泵浦激发下微腔激子极化激元的涡旋叠加态演化分析

Analysis for vortex superposition state evolution of microcavity exciton polariton excited by ring-shaped pump

物理学报. 2021, 70(24): 240304 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210971>

#### 对称极化子凝聚体系统中的稳定孤子及其调控

Stable solitons and their controllability in symmetrical polariton condensates

物理学报. 2022, 71(18): 181101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220475>