

基于 GPU 的二维梯形空腔流的格子 Boltzmann 模拟与分析*

陈百慧¹⁾²⁾³⁾ 施保昌^{1)2)3)†} 汪垒⁴⁾⁵⁾ 柴振华¹⁾²⁾³⁾

1) (华中科技大学数学与统计学院, 武汉 430074)

2) (华中科技大学, 工程建模与科学计算湖北重点实验室, 武汉 430074)

3) (华中科技大学数学与应用学科交叉创新研究院, 武汉 430074)

4) (中国地质大学 (武汉) 数学与物理学院, 武汉 430074)

5) (中国地质大学 (武汉) 数学科学中心, 武汉 430074)

(2023 年 3 月 21 日收到; 2023 年 4 月 16 日收到修改稿)

采用格子 Boltzmann 方法模拟上下壁面驱动的二维梯形空腔流, 并使用 GPU-CUDA 程序进行加速计算. 主要采用本征正交分解方法, 分析了 4 种壁面驱动条件的流场模态, 并探究了雷诺数和驱动速度方向对流场形态的影响. 结果表明: 1) 当上壁面单驱动 (T1a) 时, 若雷诺数为 1000—8000, 流场处于稳态流动; 雷诺数为 8500 时, 流场处于周期性非稳态流动; 雷诺数大于 10000 时, 流场处于非周期非稳态流动. 2) 当下壁面单驱动 (T1b) 时, 若雷诺数在 1000—8000 之间, 流场处于稳态流动; 雷诺数增大至 11500 时, 流场处于周期性非稳态流动; 雷诺数大于 12500 时, 流场进入非周期非稳态流动. 3) 当上下壁面同方向同速度双驱动 (T2a) 时, 若雷诺数在 1000—10000 区间, 流场均为稳态流动; 雷诺数为 12500—15000 时, 流场处于周期性非稳态流动; 当雷诺数大于 20000 时, 流场为非周期非稳态流动. 4) 当上下壁面反方向同速度双驱动 (T2b) 时, 若雷诺数在 1000—5000 之间, 流场处于稳态流动; 雷诺数为 6000 时, 流场处于周期性非稳态流动; 雷诺数大于 8000 时, 流场为非周期非稳态流动.

关键词: 格子 Boltzmann 方法, 梯形空腔, 双壁面驱动, GPU-CUDA 计算

PACS: 47.85.-g, 47.15.Rq, 47.11.-j

DOI: 10.7498/aps.72.20230430

1 引言

顶盖驱动流是计算流体力学中经典的物理模型之一, 随着不同雷诺数的变化, 流场中包含了涡旋、二次流、不稳定层流、周期流、过渡流和湍流^[1–3]等复杂现象, 其相关研究具有重要的理论价值和现实意义, 已有多位学者对顶盖驱动方腔流进行了详细的研究^[4–8]. 在实际应用中存在着不同几何形状的工况^[9–15], 比如矩形、三角形和梯形空腔等, 受

到了广泛关注. Darr 和 Vanka^[16] 利用有限差分法首次研究了梯形腔内的流动结构, 随后 Paramane 和 Sharma^[17] 采用多种传统数值格式计算了三角形、平行四边形和梯形空腔流.

格子 Boltzmann 方法 (lattice Boltzmann method, LBM) 是一种简单、稳定、高效的介观数值算法, 被广泛用于流体计算. 目前已有大量利用 LBM 研究顶盖驱动流的工作^[18–24]. Hou 等^[25] 率先利用 LBM 研究方腔流. Chai 等^[26] 采用多松弛 LBM 模拟高雷诺数下方腔中的流动情况. Yuana 和

* 国家自然科学基金 (批准号: 12072127, 51836003) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: shibc@hust.edu.cn

Budiana^[27] 模拟上下壁面同向双驱动的流动. Perumal 和 Dass^[28] 探究低雷诺数时上下壁面反向双驱动的流动情况. Bo 等^[29] 更为详细地分析了雷诺数为 1000—18000 时, 方腔中双驱动的流动情况, 发现在加入下壁面驱动速度后, 流场结构和流动情况有了明显差异. 也有学者将方腔拓展为其他形状, 如矩形腔. Shahid 等^[30] 将多松弛 LBM 应用于加障碍物后矩形腔流的流动特性研究. Perumal^[31] 在矩形空腔的两条平行长壁面上加上不同的驱动速度. Guo 等^[32] 模拟了不同长宽比矩形空腔中的混合对流. 对于更不规则的三角形腔, 也有一些相关研究. Shahid 等^[33] 模拟三角顶盖驱动空腔中的混合对流传热. An 等利用多松弛 LBM 探究雷诺数对等腰直角三角形空腔流的影响^[34], 以及流场中涡流特性、稳态解及 Hopf 分岔^[35]. Sidik 和 Munir^[36] 模拟三条边分别驱动时三角形空腔中的流动. 事实上, 矩形和三角形均可以看作特殊的梯形, 因此对于梯形的研究更具有一般性, 但目前采用 LBM 对梯形空腔流的研究较少. Zhang 等^[37] 考虑了在不可压 LBM 框架下梯形底角和雷诺数对梯形空腔中流动特性影响, 探究了从层流到湍流的转变, 但他们仅考虑顶盖驱动的情况, 且对于非稳态流动的分析较少.

基于已有工作启发, 本文选取二维等腰梯形空腔, 基于格子 Boltzmann 方法探究梯形上、下壁面驱动速度以及方向对梯形空腔流的影响, 研究不同雷诺数下梯形空腔中从层流到湍流的转捩情况, 并借助本征正交分解 (proper orthogonal decomposition, POD) 方法分析了非稳态流场的模态分布情况, 程序实现上借助 CUDA (compute unified device architecture) 工具提高计算效率. 本文模拟了雷诺数从 1000—25000 时, 4 种驱动情况下梯形空腔中流场流动和转捩情况: 梯形上壁面以恒定速度向右驱动; 梯形下壁面以恒定速度向右驱动; 梯形上下壁面同时以相同恒定速度向右驱动; 以及梯形上壁以恒定速度向右驱动, 下壁以相同恒定速度向左驱动.

2 数值方法

2.1 物理模型

二维等腰梯形空腔工况如图 1 所示, 其中梯形

上边界为 L_1 , 梯形下边界为 L_2 , 梯形高 H , 梯形顶角为 θ , 梯形 4 个顶点坐标分别为 $(H/\sqrt{3}, 0)$, $(L_1 - H/\sqrt{3}, 0)$, $(0, H)$, (L_1, H) . 梯形上壁面水平和竖直速度分别为 $u_1 = U_1$, $v_1 = 0$, 梯形下壁面水平和竖直速度分别为 $u_2 = U_2$, $v_2 = 0$, 梯形左边界和右边界速度均为 0. 为表征流场形态与雷诺数之间的关系, 选取监控点 $(L_1/2, H/2)$.

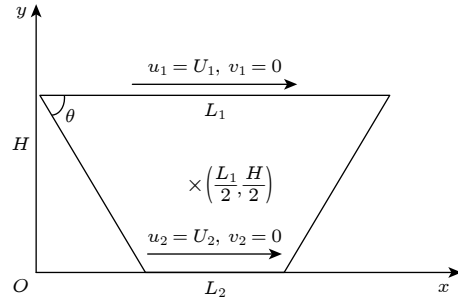


图 1 二维等腰梯形空腔示意图

Fig. 1. Coordinate of two-dimensional isosceles trapezoidal cavity.

雷诺数 Re 的定义为

$$Re = \frac{L_1 U}{\nu}, \quad (1)$$

其中, ν 为运动黏性系数, 速度为 $U = \max\{U_1, U_2\}$.

2.2 格子 Boltzmann 模型

采用单松弛 LBM 演化方程^[38]:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \delta t, t + \delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} (f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)), \quad (2)$$

式中, 无量纲松弛时间 $\tau = \frac{\nu}{c_s^2 \delta t} + \frac{1}{2}$; c_s^2 为格子声速; \mathbf{u} 为粒子速度; $f_i(\mathbf{x}, t)$ 是在 t 时刻 \mathbf{x} 处的粒子分布函数; $f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)$ 为平衡态分布函数,

$$f_i^{\text{eq}} = \omega_i \rho \left[1 + \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2c_s^2} \right], \quad (3)$$

其中, 权重系数为 $\omega_0 = \frac{4}{9}$, $\omega_{1-4} = \frac{1}{9}$, $\omega_{5-8} = \frac{1}{36}$, 粒子宏观速度和密度表达式为

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i f_i(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{x}, t). \quad (5)$$

采用 D2Q9 速度离散模型, 离散速度为

$$\mathbf{c}_i = \begin{cases} (0, 0), & i = 0, \\ c \left(\cos \left[\frac{(i-1)\pi}{2} \right], \sin \left[\frac{(i-1)\pi}{2} \right] \right), & i = 1-4, \\ \sqrt{2}c \left(\cos \left[\frac{(i-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right], \sin \left[\frac{(i-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \right), & i = 5-8, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{c}_i = c\mathbf{e}_i$, $c_s^2 = c^2/3$.

2.3 边界处理

在 LBM 的边界处理上, 通常采用具有二阶精度的半反弹格式 [39] 和非平衡态外推格式 [40], 但该格式只能处理平直边界. 2002 年, Guo 等 [41] 将平直边界的非平衡态外推格式与空间插值结合, 提出了具有二阶计算精度的曲边界非平衡态外推方法, 同时在程序实现上有着良好的并行能力.

曲边界上各节点如图 2 所示, x_b 为流体区域内靠近边界格点, x_s 为流体区域外的邻近格点, x_f 为流体区域内的邻近格点, x_w 为实际物理边界点. 在边界点的碰撞迁移过程中, 由于边界点无法计算所有邻点的流入情况, 因此需要通过固体格点 x_s 处的碰撞过程来确定分布函数, 可以将其分成平衡态和非平衡态两个部分来计算:

$$f_i(x_s, t) = f_i^{\text{eq}}(x_s, t) + f_i^{\text{neq}}(x_s, t), \quad (7)$$

对 (7) 式中平衡态部分, 使用虚拟平衡态分布函数近似:

$$\begin{aligned} f_i^{\text{eq}}(x_s, t) &\approx f_i^*(x_s, t) \\ &\equiv \rho(x_s, t) \left(1 + \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}_s}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}_s)^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u}_s^2}{2c_s^2} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $\rho(x_s, t)$ 的值由 x_b 处的密度近似得出; \mathbf{u}_s 的值由 $\mathbf{u}(x_w, t)$, $\mathbf{u}(x_b, t)$ 和 $\mathbf{u}(x_f, t)$ 计算得出

$$\mathbf{u}_s = \begin{cases} \mathbf{u}_{s_1}, & q \geq 0.75, \\ q\mathbf{u}_{s_1} + (1-q)\mathbf{u}_{s_2}, & q < 0.75, \end{cases} \quad (9)$$

其中, $\mathbf{u}_{s_1} = [\mathbf{u}_w + (q-1)\mathbf{u}(x_b, t)]/q$, $\mathbf{u}_{s_2} = [2\mathbf{u}_w + (q-1)\mathbf{u}(x_f, t)]/(q+1)$, $q = \left| \frac{x_b - x_w}{x_b - x_s} \right|$ 为流体节点靠近边界的点与实际物理边界的相对距离. 对非平衡态部分, 由邻近的流体节点非平衡态分布函数进行插值给出:

$$\begin{aligned} f_i^{\text{neq}}(x_s, t) &= \\ &\begin{cases} qf_i^{\text{neq}}(x_b, t) + (1-q)f_i^{\text{neq}}(x_f, t), & q \geq 0.75, \\ f_i^{\text{neq}}(x_b, t), & q < 0.75. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

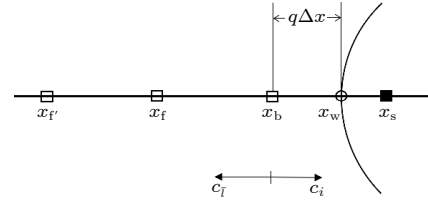


图 2 曲边界上各节点示意图

Fig. 2. Geometry condition of curved wall boundary.

2.4 GPU 并行计算

由于 LBM 的天然优势, 使其具有良好的并行计算能力, 因此在 GPU 程序实现上, 可以选择具有强大的多线程并行计算能力的 CUDA 工具. 程序实现上, 在 CPU 端划分好计算区域网格并初始化格点信息, 拷贝到 GPU 中进行格点的碰撞和迁移, 在每个线程中储存其碰撞信息.

本文利用 CPU, OpenAcc, CUDA 三种计算方式处理同一物理模型, 即网格 512×256 , $Re = 1000$, 上壁面驱动的等腰梯形空腔流, 记录其计算时间进行计算效率的对比. 其中 OpenAcc 将串行程序并行化的手段是添加一些 C/C++ 预处理语句, 操作简单. 实验的硬件配置为: CPU 为 Intel Core i5-7500, GPU 为 NVIDIA GeForce GTX1050, CUDA 版本为 11.1. 3 种计算方式计算 10000 步时所耗费的时间, 及 OpenAcc 和 GPU 所带来的加速比如表 1 所列, 其中 CPU/CUDA 加速比高达 131.96, 可见计算效率显著提高, 这也是 LBM 天然的并行性带来的优势. 因此, 本文的计算全部采用 CUDA 工具对 LBM 进行加速.

表 1 CPU, OpenAcc, CUDA 的计算时间和加速比

Table 1. Compute time and acceleration ratio of CPU, OpenAcc, CUDA.

计算方式	CPU	OpenAcc	CUDA	加速比(CPU/OpenAcc)	加速比(CPU/CUDA)
计算时间/s	6459.28	408.75	48.95	15.80	131.96

2.5 模型验证

通过与其他文献的数据对比,对 2.2 节和 2.3 节中的 D2Q9 模型和曲边界非平衡态外推格式进行代码验证. 验证思路主要分为 3 个部分: 首先与 Paramane 和 Sharma^[17] 的数值计算结果和 Zhang 等^[37] 不可压 LBM 的等腰梯形数据进行对比, 分别对比了在 $Re = 100, 500$ 时等腰梯形的两条中线速度. 在验证中取等腰梯形腔的顶角 $\theta = \arctan(3\sqrt{3}/2)$, 模拟区域为 $H = 3, L_1 = 2\sqrt{3}$, 所选网格大小为 592×512 , 其中梯形上壁面具有水平向右的驱动速度 $U_1 = 1.0$, 其余 3 个壁面速度均为 0. 选取在 $x = \sqrt{3}$ 的直线上垂直于 y 轴的速度 u , 和在 $y = 1.5$ 的直线上垂直于 x 轴的速度 v , 验证结果见图 3, 可以看出, $Re = 100$ 时, 本文模型与 Zhang 等的结果基本一致, 整体曲线十分符合, $Re = 500$ 时略有差异, 但比 Zhang 等的结果更接近 Paramane 和 Sharma 的结果, 验证对比结果良好.

同时, 本文结果与 Zhang 等^[37] 二维梯形顶盖驱动流的涡心数据进行对比, 表 2 列出了 $Re =$

100, 1000, 3200 时流场中的涡心位置. 验证采用的网格大小为 444×255 , 顶角 $\theta = 60^\circ, L_1 = 1, H = 0.5766$, 上壁面水平向右的驱动速度为 $U_1 = 0.1$, 其余壁面速度为 0. 当 $Re = 100$ 时, 涡心位置误差在 0.05% 以内, 当 $Re = 1000$ 时, 涡心位置误差在 0.42% 以内, 当 $Re = 3200$ 时, 涡心位置误差增大到 2.66%. 可以看出, 本文中的模型模拟结果与 Zhang 等以及 Paramane 和 Sharma 的结果相符合.

最后, 选取 $256 \times 128, 512 \times 256, 1024 \times 512$ 3 种网格大小进行网格无关性检验, 工况为 $L_1 = 2, H = 1, \theta = 60^\circ$ 的等腰梯形. 图 4(a) 和图 4(b) 为上壁面以 $U_1 = 0.1$ 的速度单驱动, 其他壁面速度为零, $Re = 500$ 时的中线速度对比, 3 种网格结构差距较小, 但 256×128 时仍与 512×256 及 1024×512 结果有差异. 图 4(c) 和图 4(d) 为上、下壁面同向同速, 即 $U_1 = U_2 = 0.1$ 的速度双驱动 $Re = 10000$ 时的中线速度, 能明显看出在高雷诺数下网格大小为 256×128 与 512×256 差距较为显著, 而 512×256 的网格与 1024×512 差距甚微. 因此本文选取 512×256 的网格进行模拟.

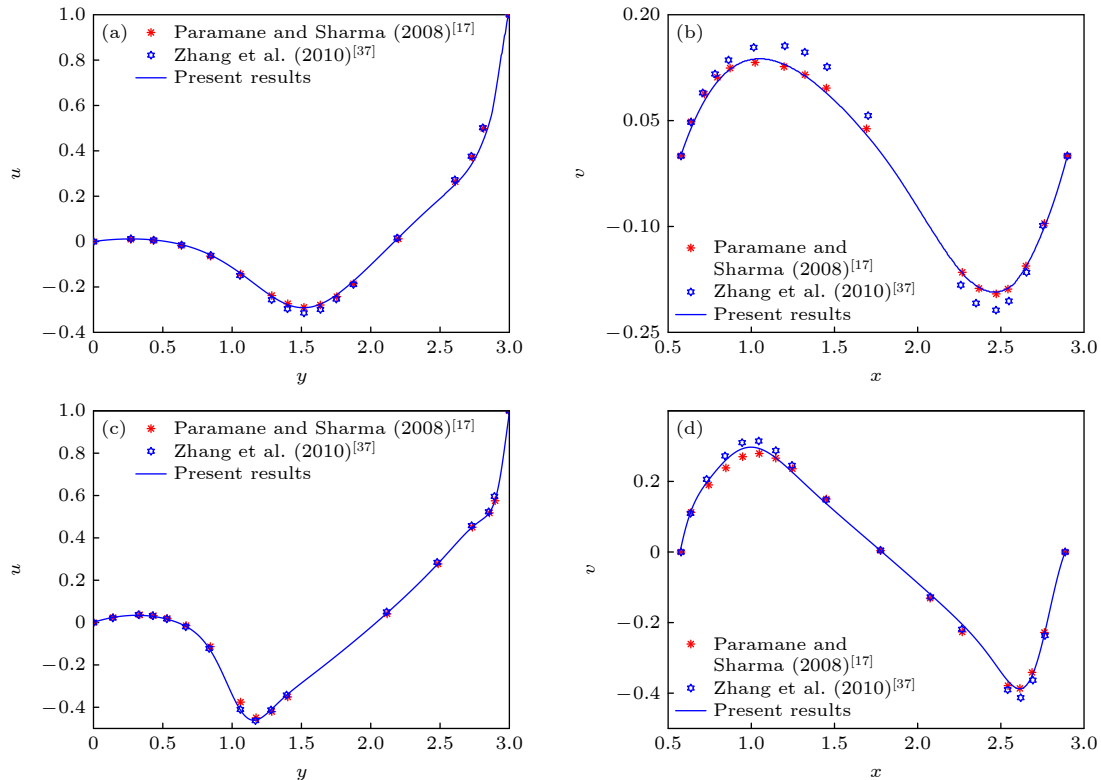


图 3 对比 $Re = 100$ 和 500 时垂直和水平中线上的速度 (a), (c) 沿垂直中线的速度 u 和纵坐标 y 的关系图; (b), (d) 沿水平中线的速度 v 和横坐标 x 的关系图

Fig. 3. Comparison of the velocity profiles along the vertical and horizontal lines through cavity center at $Re = 100, 500$: (a) and (c) The y -component of velocity u profiles along the vertical line; (b) and (d) x -component of velocity v profiles along the horizontal line.

表 2 对比 $Re = 100, 1000, 3200$ 时流场中的涡心位置Table 2. Comparison of the vortex center position in the cavity at $Re = 100, 1000, 3200$.

Re		x_1	y_1	x_2		y_2	
				x_{2l}	x_{2r}	y_{2l}	y_{2r}
100	Zhang et al. ^[37]	0.5721	0.4212	—	—	—	—
	Present	0.5722	0.4210	—	—	—	—
	Error/%	0.03	0.05	—	—	—	—
1000	Zhang et al. ^[37]	0.5473	0.3558	0.3423	0.0180	0.6351	0.0450
	Present	0.5479	0.3561	0.3428	0.0179	0.6370	0.0451
	Error/%	0.11	0.09	0.15	0.42	0.30	0.12
3200	Zhang et al. ^[37]	0.714	0.4392	0.3378	0.3491	0.4504	0.0788
	Present	0.7225	0.4448	0.3427	0.3432	0.4539	0.0809
	Error/%	1.18	1.28	1.46	1.70	0.77	2.66

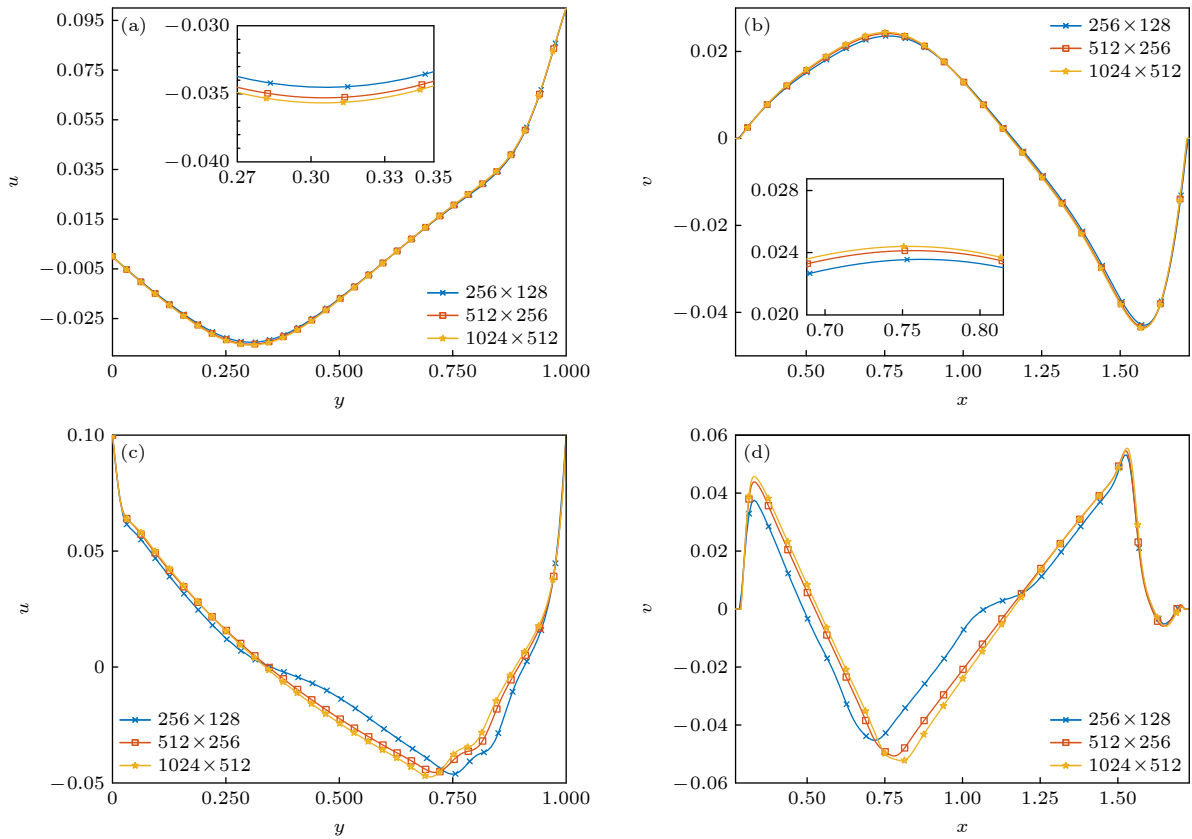


图 4 对比网格数为 256×128 , 512×256 , 1024×512 , $Re = 500, 10000$ 时垂直和水平中线上的速度. $U_1 = 0.1$, $U_2 = 0$, $Re = 500$ 时 (a) 沿垂直中线的速度 u 和纵坐标 y 的关系图, (b) 沿水平中线的速度 v 和横坐标 x 的关系图. $U_1 = 0.1$, $U_2 = 0.1$, $Re = 10000$ 时 (c) 沿垂直中线的速度 u 和纵坐标 y 的关系图, (d) 沿水平中线的速度 v 和横坐标 x 的关系图

Fig. 4. Comparison of the velocity profiles along the vertical and horizontal lines at $Re = 500, 10000$ for 256×128 , 512×256 , 1024×512 . (a) The y -component of velocity u profiles along the vertical line, (b) x -component of velocity v profiles along the horizontal line at $U_1 = 0.1$, $U_2 = 0$ and $Re = 500$. (c) The y -component of velocity u profiles along the vertical line, (d) x -component of velocity v profiles along the horizontal line at $U_1 = 0.1$, $U_2 = 0.1$ and $Re = 10000$.

3 梯形空腔流模拟与分析

选取 $L_1 = 2$, $H = 1$, $\theta = 60^\circ$ 的等腰梯形进行模拟, 网格大小为 512×256 , 分别探究图 5 所示的

4 种壁面驱动条件下流场变化情况和层流到湍流的转捩情况. 图 5(a) 为选取 Re 在 1000—12500 之间, 上壁面以 $U_1 = 0.1$ 的速度单驱动 (Case T1a); 图 5(b) 为选取 Re 在 1000—15000 之间, 下壁面以

$U_2 = 0.1$ 的速度单驱动 (Case T1b); 图 5(c) 为选取 Re 在 1000—25000 之间, 上壁面 $U_1 = 0.1$ 及下壁面 $U_2 = 0.1$ 双驱动 (Case T2a); 图 5(d) 为选取 Re 在 1000—10000 之间, 上壁面 $U_1 = 0.1$ 及下壁面 $U_2 = -0.1$ 双驱动 (Case T2b). 由于不同壁面驱动速度下流场状态不同, 从稳态流动进入到非稳态流动时 Re 的大小也不相同, 因此每种情况下本文选取 Re 的范围也略有不同.

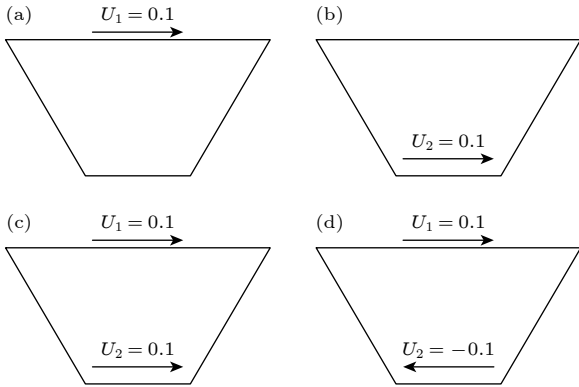


图 5 4 种不同壁面驱动速度下的梯形空腔示意图 (a) Case T1a, 上壁面向右单驱动; (b) Case T1b, 下壁面向右单驱动; (c) Case T2a, 上壁面和下壁面同时向右双驱动; (d) Case T2b, 上壁面向右驱动, 下壁面向左双驱动

Fig. 5. Trapezoidal cavity under four different velocity boundaries: (a) Case T1a, only the upper wall-driven; (b) Case T1b, only the lower wall-driven; (c) Case T2a, the upper and lower wall are driven at the same speed and in the same direction; (d) Case T2b, the upper and lower wall are driven at the same speed and in the opposite direction.

3.1 上壁面单驱动下雷诺数对梯形空腔流的影响

3.1.1 稳态流动

在梯形上壁面为向右单驱动 (Case T1a), Re 为 1000—8000 时, 流场处于稳态流动, 等腰梯形空腔中的流场如图 6 所示, 各级涡的涡心位置见

表 3. $Re = 1000$ 时, 流场中有一个大涡 (称作一级涡), 几乎占据梯形空腔的全部位置, 且涡心的位置偏向右上角. Re 增大到 3200 时, 梯形中心出现了两个较明显的大涡, 分别位于梯形的左半部分和右半部分, 左下角和左上边界附近出现小涡. 随着 Re 逐渐增大, 梯形左边的一级涡逐渐增大, 并不断向上和向下挤压. 在 $Re = 8000$ 时, 梯形左上边界处和右下角的涡均被挤压成扁圆形状. 梯形竖直中线 $x = 1$ 上纵坐标 y 和水平速度 u 的关系如图 7(a) 所示, 梯形水平中线 $y = 0.5$ 上横坐标 x 和竖直速度 v 的关系如图 7(b) 所示. 可以发现, Re 为 1000 和 3200 时, 流场中线速度图线稍有不同, Re 为 5000, 6000, 8000 时, 图线趋势比较接近, 且在图 7(b) 中, $x = 1.6$ 附近时, 竖直速度 v 的大小随着 Re 的增加而减小.

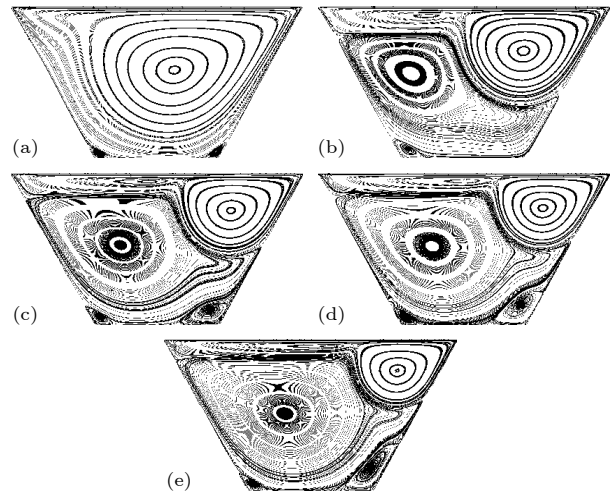


图 6 Case T1a 条件下, Re 为 1000—8000 时的流场形态 (a) $Re = 1000$; (b) $Re = 3200$; (c) $Re = 5000$; (d) $Re = 6000$; (e) $Re = 8000$

Fig. 6. Stream function contours of Reynolds numbers from 1000 to 8000 for Case T1a: (a) $Re = 1000$; (b) $Re = 3200$; (c) $Re = 5000$; (d) $Re = 6000$; (e) $Re = 8000$.

表 3 Case T1a 条件下, $Re = 1000, 3200, 5000, 6000, 8000$ 时流场中一级涡、二级涡和三级涡的涡心位置
Table 3. The first, second and third primary eddies characteristics at $Re = 1000, 3200, 5000, 6000, 8000$ for Case T1a.

Re	x_1	y_1	x_2		y_2		x_3		y_3	
			x_{2l}	x_{2r}	y_{2l}	y_{2r}	x_{3l}	x_{3r}	y_{3l}	y_{3r}
1000	286.89	148.44	153.65	358.66	9.93	11.39	—	—	—	—
3200	359.03	180.97	163.84	158.09	142.90	15.17	—	—	—	—
5000	192.02	134.52	241.44	384.21	241.30	192.66	155.94	347.52	13.77	25.36
6000	200.42	132.50	261.28	393.16	242.12	196.81	155.06	353.98	12.93	35.50
8000	210.51	130.69	290.17	405.75	243.39	202.60	154.62	358.04	12.48	37.51

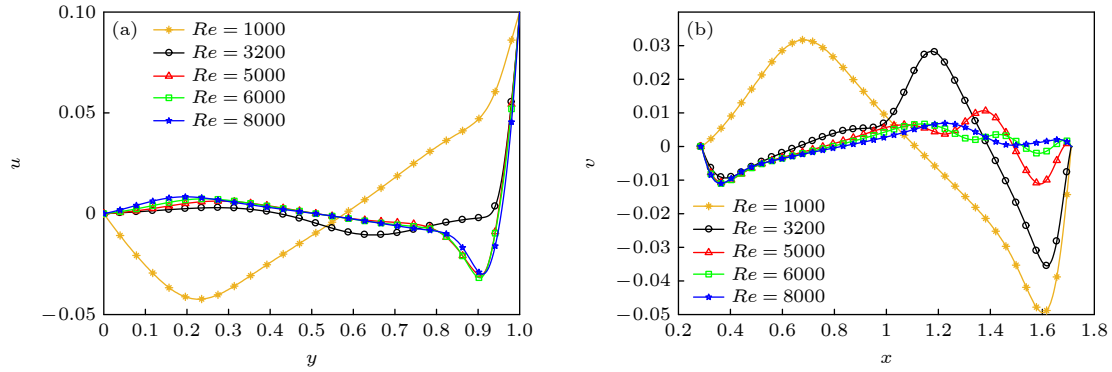


图 7 Case T1a 条件下, Re 为 1000—8000 时, (a) $x = 1$ 的中线上, 纵坐标 y 和水平速度 u 的关系, (b) $y = 0.5$ 的中线上, 横坐标 x 和竖直速度 v 的关系

Fig. 7. (a) Variation of the velocity u magnitude along $x = 1$, (b) variation of the velocity v magnitude along $y = 0.5$ for Re from 1000 to 8000 for Case T1a.

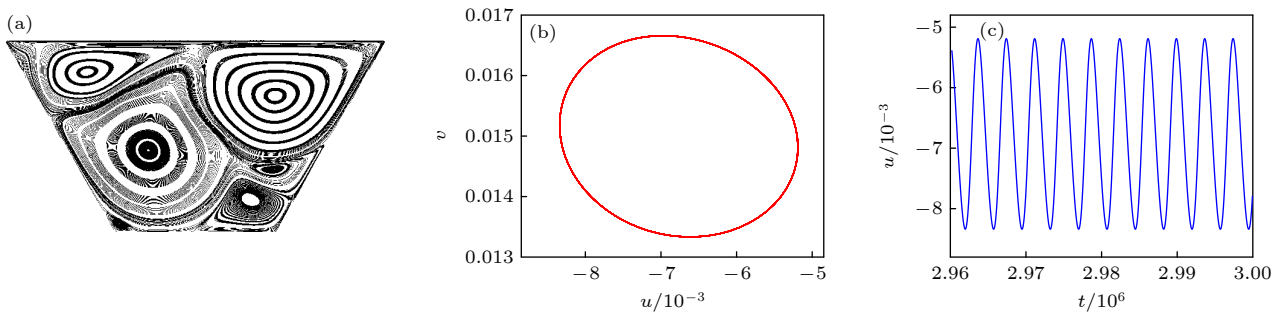


图 8 Case T1a 条件下, $Re = 8500$ 时呈现周期性非稳态流动 (a) 时间步 $t = 3000000$ 时的流场图; (b) 监控点处速度相图; (c) 速度监控点处速度随时间的变化

Fig. 8. Stream function contours are periodic and unsteady at $Re = 8500$ for Case T1a: (a) Stream function contours at time steps $t = 3000000$; (b) velocity phase diagram at the velocity monitoring point; (c) velocity over time at the velocity monitoring point.

3.1.2 周期性非稳态流动

Re 增大到 8500 时, 流场进入了周期性非稳态流动. 当时间步为 3000000 时, 流场如图 8(a) 所示, 梯形上边界附近的两个涡逐渐增大, 上边界附近的层状涡逐渐向左角靠近, 并在左上角附近挤压出一个不明显的小涡. 右下角的涡逐渐被增大的右二级涡向下挤压出现两个小涡, 梯形左下角仍存在一个小涡. 选取速度监控点处速度变化图像, 如图 8(b) 所示, 相图呈现出光滑封闭的圆周, 从图 8(c) 可以看出, 在 2960000—3000000 步之间, 水平速度随时间步变化呈现出十分规律的周期图像, 约 4000 时间步为一个周期.

进一步使用 POD 方法对流场中的速度进行模态分析, 如图 9 所示. 其中图 9(b) 中横轴为前 n 阶模态, 纵轴为前 n 阶模态的能量占比, 图 9(c) 为各阶模态能量占比百分数, 可以看出前两阶模态能量占据了全场能量的主导地位, 能量占比高达 97%. 0—3 阶模态的流场模态的速度场云图如

图 9(a) 和图 9(d)—(f) 所示, 其中从一阶和二阶模态的结果来看, 峰值分布区域集中在梯形中上区域附近, 且峰值分布区域的形状较为相似, 与三阶模态时略有不同.

3.1.3 非周期非稳态流动

在 Re 大于 10000 时, 流场处于非周期非稳态流动状态. $Re = 10000$ 且时间步为 5000000 时, 流场如图 10(a) 所示, 流场内有一个明显大涡和 4 个位于边界附近的小涡. 一级大涡几乎占据了梯形右半部分, 梯形左上边界附近出现一个层状小涡, 小涡的下方出现了一个靠近左边界的竖直涡, 约占据了梯形的 1/5, 这个竖直涡的上半部分有一个类似三角形的小涡, 下半部分有一个竖直的涡, 右下角部分存在着一个不明显小涡. 速度监控点处相图如图 10(b) 所示, 图线紊乱无规则. 速度随时间变化的图像如图 10(c) 所示, 在 4800000—5000000 时间步内, 水平速度随时间变化无规律.

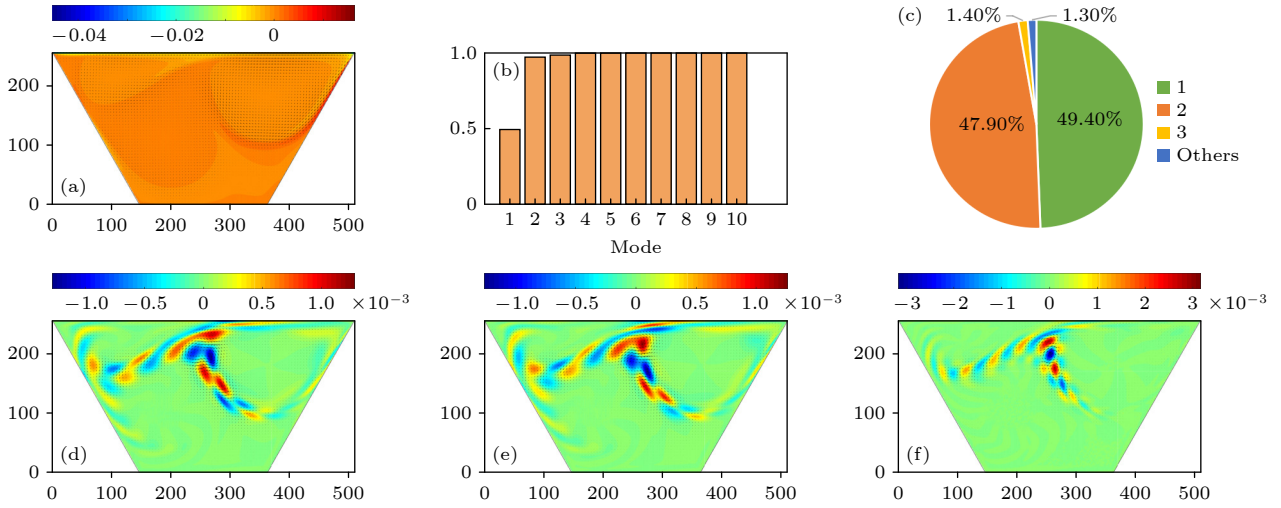


图 9 Case T1a 条件下, $Re = 8500$ 时的各阶模态图 (a) 速度平均场模态图; (b) 前 n 阶模态的能量占比; (c) 各阶模态的能量占比; (d)–(f) 一阶、二阶、三阶速度模态图

Fig. 9. Each order of mode for Case T1a when $Re = 8500$: (a) The mean field modal diagrams of velocity; (b) energy share of the first n order of mode for velocity; (c) energy share of each order of mode for velocity; (d)–(f) the first-order, second-order and third-order mode of velocity.

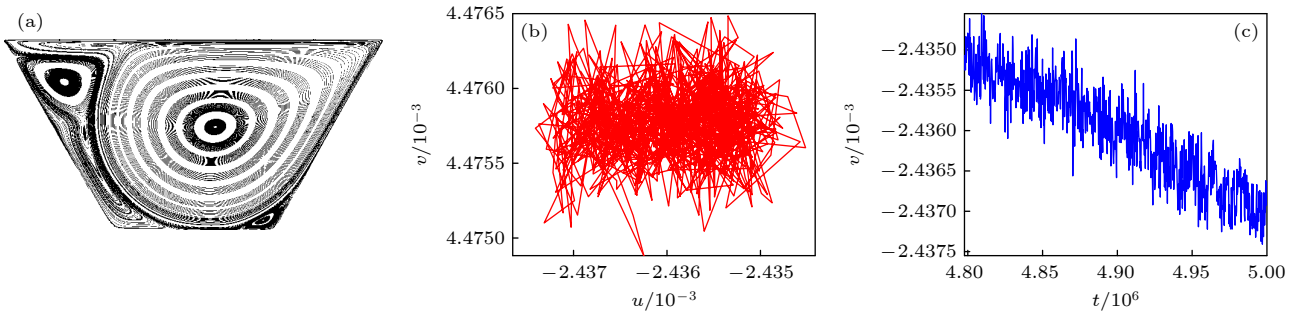


图 10 Case T1a 条件下, $Re = 10000$ 时呈现非周期非稳态流动 (a) 时间步 $t = 5000000$ 时的流场图; (b) 监控点处速度相图; (c) 速度监控点处速度随时间的变化

Fig. 10. Stream function contours are non-periodic and unsteady at $Re = 10000$ for Case T1a: (a) Stream function contours at time steps $t = 5000000$; (b) velocity phase diagrams at the velocity monitoring point; (c) velocity over time at the velocity monitoring point.

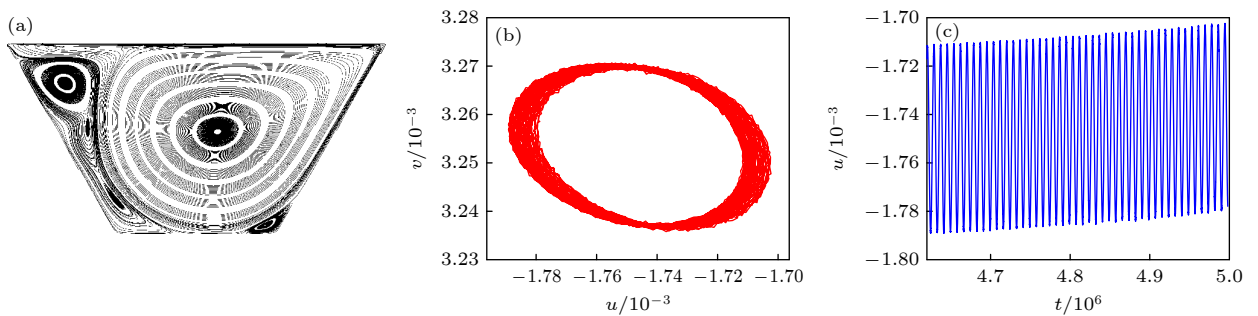


图 11 Case T1a 条件下, $Re = 12500$ 时呈现非周期非稳态流动 (a) 时间步 $t = 5000000$ 时的流场图; (b) 监控点处速度相图; (c) 监控点处速度随时间的变化

Fig. 11. Stream function contours are non-periodic and unsteady at $Re = 12500$ for Case T1a: (a) Stream function contours at time steps $t = 5000000$; (b) velocity phase diagram at the velocity monitoring point; (c) velocity over time at the velocity monitoring point.

$Re = 12500$ 且时间步为 5000000 时, 如图 11(a) 所示, 相较 $Re = 10000$ 时流场结构变化不大, 但在左边界附近的涡稍有变化, 从之前的 2 个涡增多

到了 3 个涡, 在左边界靠下的附近又出现一个扁圆形状的小涡, 同时, 梯形上边界靠左的层状涡消失, 逐渐合并到一级涡当中. 速度监控点处水平速度和

竖直速度的变化如图 11(b) 所示, 图线类似不光滑螺旋状, 变化较紊乱无较明显的规律, 速度相图如图 11(c) 所示, 在 3600000—5000000 时间步内, 水平速度随时间变化呈现出有一定规律的变化, 但速度一直保持向上变化的趋势, 此时流动为非周期非稳态流动.

3.2 下壁面单驱动下雷诺数对梯形空腔流的影响

3.2.1 稳态流动

在梯形下壁面为向右单驱动 (Case T1b), $Re = 1000$ — 8000 时, 流场属于稳态流动, 等腰梯形空腔中的流场如图 12 所示, 各级涡的涡心位置数据见表 4. 可以看出, 不同 Re 下空腔中涡的结构差异很小, 均是一个中心大涡, 以及左右边界附近出现的 2 个二级涡和左右顶角上的 2 个三级涡. 随着 Re 的逐渐增大, 一级涡的涡心位置变化较小, 左二级涡明显增大且逐渐向右下方移动, 左上角的三级涡也在随之增大, 且增大速度较右三级涡快. 右边的二级涡和三级涡同样也在逐渐增大, 右二级涡逐渐向左上方缓慢移动, 但增大的过程都十分缓慢, 这是由于下壁面有着向右的驱动速度, 因此左边变

化较右边明显. 在 $Re = 6000$ 时, 左二级涡十分接近梯形下边界. 不同 Re 下梯形中线速度如图 13 所示. 可以看出, $Re = 3200, 5000, 6000$ 时中线速度差距不大, 并且随着 Re 的增加, 中线上的最大速度也随之增加. 相对于 Case T1a, Case T1b 流场结构简单, 随着 Re 的增大流场变化较小.

3.2.2 周期性非稳态流动

当 $Re = 11500$ 时, 流场进入周期性非稳态流动. 由图 14(a) 可以发现, 相较于稳态流动的情况, 此时流场中涡的个数明显增多, 中心一级涡变化不大, 左右两边分别从 2 个涡增加到了 3 个涡, 且左边涡的大小均比右边的大. 梯形左上角的三级涡逐渐增大并向右下方挤压, 左二级涡被挤压为 2 个分裂的小涡, 分别位于梯形左边界的下半部分和上边界, 右边同样如此. 相对 Case T1a 的周期性非稳态流动, Case T1b 流场中涡的个数明显增多, 并且临界 Re 增大. 监控点处速度相图如图 14(b) 所示, 图线类似逗号形状的封闭图形. 速度随时间变化的图像如图 14(c) 所示, 在 4500000—5000000 时间步内, 水平速度随时间规律变化, 此时流动为周期非稳态流动, 约 17000 时间步为一个周期.

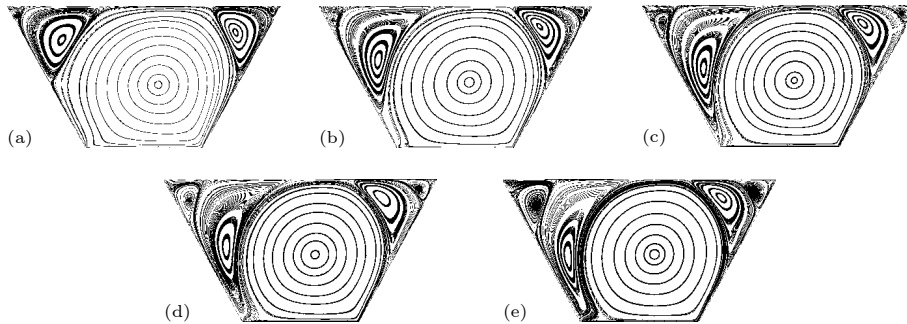


图 12 Case T1b 条件下, Re 为 1000—8000 时的流场形态 (a) $Re = 1000$; (b) $Re = 3200$; (c) $Re = 5000$; (d) $Re = 6000$; (e) $Re = 8000$
Fig. 12. Stream function contours of Reynolds numbers from 1000 to 8000 for Case T1b: (a) $Re = 1000$; (b) $Re = 3200$; (c) $Re = 5000$; (d) $Re = 6000$; (e) $Re = 8000$.

表 4 Case T1b 条件下, $Re = 1000, 3200, 5000, 6000, 8000$ 时流场中一级涡, 二级涡和三级涡的涡心位置
Table 4. The first, second and third primary eddies characteristics at $Re = 1000, 3200, 5000, 6000, 8000$ for Case T1b.

Re	x_1	y_1	x_2		y_2		x_3		y_3	
			x_{2l}	x_{2r}	y_{2l}	y_{2r}	x_{3l}	x_{3r}	y_{3l}	y_{3r}
1000	282.15	113.99	102.26	426.01	194.18	207.84	17.85	492.65	237.54	247.61
3200	280.78	118.95	110.43	412.34	158.93	218.72	25.99	487.95	229.41	245.42
5000	280.79	118.95	110.43	412.34	158.95	218.72	25.97	487.81	229.78	245.57
6000	280.79	118.95	110.43	412.34	158.94	218.73	26.10	487.84	229.99	245.57
8000	283.22	121.00	121.00	408.63	117.03	222.46	61.80	469.33	210.11	233.00

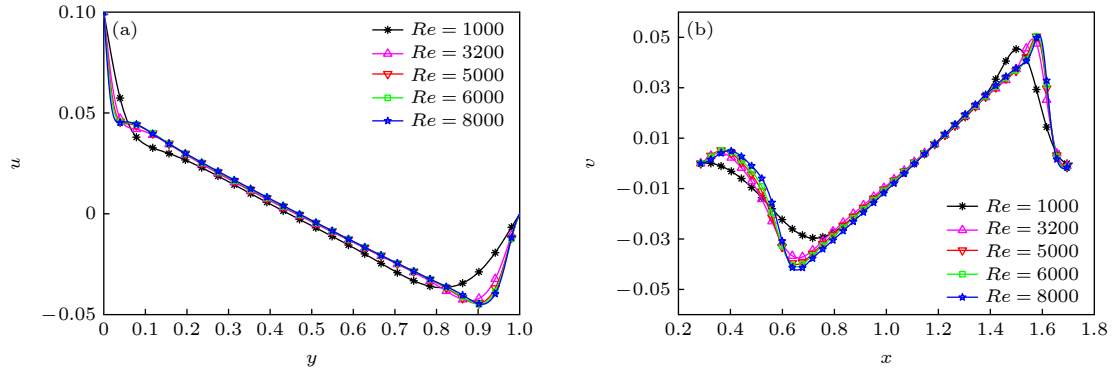


图 13 Case T1b 条件下, Re 为 1000—8000 时, (a) $x = 1$ 的中线上, 纵坐标 y 和水平速度 u 的关系; (b) $y = 0.5$ 的中线上, 横坐标 x 和竖直速度 v 的关系

Fig. 13. (a) Variation of the velocity u magnitude along $x = 1$, (b) variation of the velocity v magnitude along $y = 0.5$ for Re from 1000 to 8000 for Case T1b.

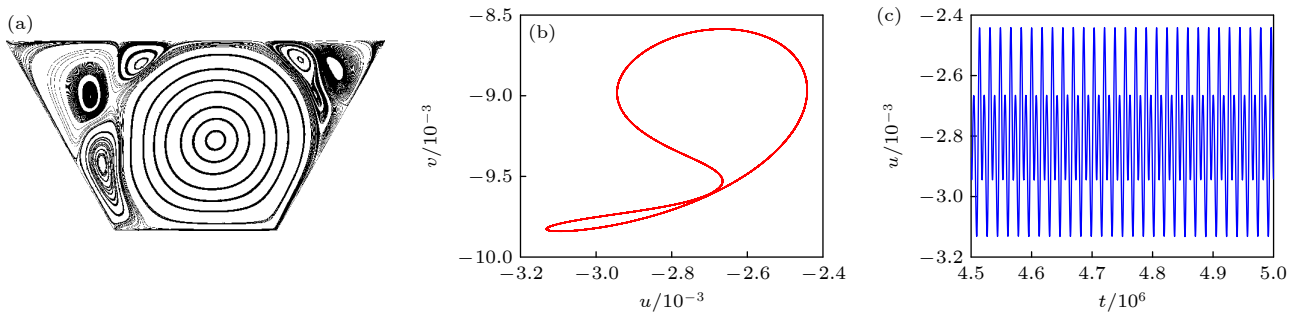


图 14 Case T1b 条件下, $Re = 11500$ 时呈现周期性非稳态流动 (a) 时间步 $t = 5000000$ 时的流场图; (b) 监控点处速度相图; (c) 监控点处速度随时间变化图

Fig. 14. (a) Stream function contours are periodic and unsteady at $Re = 11500$ for Case T1b: (a) Stream function contours at time steps $t = 5000000$; (b) velocity phase diagram at the velocity monitoring point; (c) velocity over time at the velocity monitoring point.

使用 POD 方法对流场中的速度进行模态分析, 如图 15(b) 和图 15(c) 所示, 可以看出前两阶模态能量占比较大. 0—3 阶模态的流场模态的速度场云图如图 15(a) 和图 15(d)—(f) 所示, 其中一阶和二阶模态的峰值分布区域的形状较为相似, 且峰值分布区域集中在梯形左下角附近, 在下板附近的模态值相反, 而三阶模态时, 峰值分布位于梯形中心涡的右上边界附近.

3.2.3 非周期非稳态流动

在 Re 大于 12500 时, 如图 16(a) 所示, 流场处于非周期非稳态流动. $Re = 12500$ 时, 相较于 $Re = 11500$, 流场内涡的个数显著增多, 流线不规则, 一级大涡仍占据梯形中心位置, 其余不规则小涡主要分布在梯形的两侧角落上, 且左侧涡的大小和个数均大于和多于右侧, 相对靠近梯形下边界, 左侧有 5 个较明显可见的小涡和两个扁长形不明显的小涡, 右侧有 3 个较明显的涡. 相对 Case T1a 的非周期非稳态流动, Case T1b 流场中左边界附近涡

的个数明显增多, 一级涡的位置差距不大. 此时监控点处速度相图如图 16(b) 所示, 图线紊乱无规律, 速度随时间变化的图像如图 16(c) 所示, 在 4200000—6000000 时间步内, 水平速度随时间变化无规律, 此时流动为非周期非稳态流动.

当 Re 增大到 15000 时, 如图 17(a), 流场结构变化较小, 梯形左边界附近仍有 7 个大小不等, 形状各异的小涡, 右上角附近出现了 4 个小涡. 此时监控点处速度相图如图 17(b) 所示, 速度变化图线紊乱无规律, 速度随时间变化的图像如图 17(c) 所示, 在 4500000—6000000 时间步内, 水平速度随时间变化无规律, 此时流动为非周期非稳态流动.

3.3 上下壁面同向同速双驱动下雷诺数对梯形空腔流的影响

3.3.1 稳态流动

在梯形上壁面和下壁面均向右双驱动 (Case T2a), Re 从 1000—10000 时, 流场处于稳态流动,

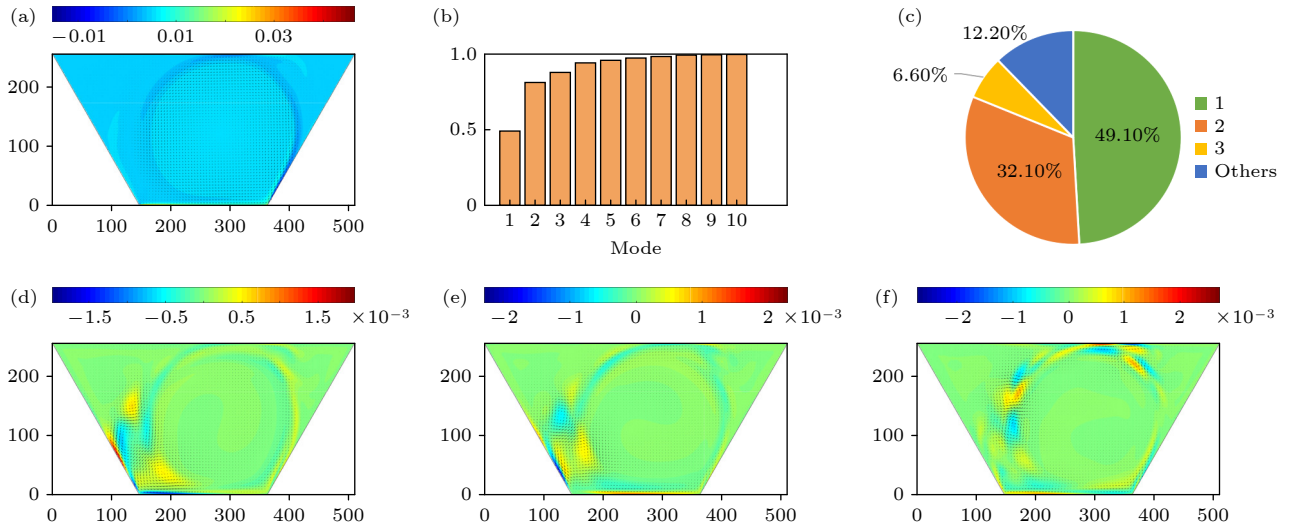


图 15 Case T1b 条件下, $Re = 11500$ 时的各阶模态图 (a) 速度平均场模态图; (b) 前 n 阶模态的能量占比; (c) 各阶模态的能量占比; (d)–(f) 一阶、二阶、三阶速度模态图

Fig. 15. Each order of mode for Case T1b when $Re = 11500$: (a) The mean field modal diagrams of velocity; (b) energy share of the first n order of mode for velocity; (c) energy share of each order of mode for velocity; (d)–(f) the first-order, second-order and third-order mode of velocity.

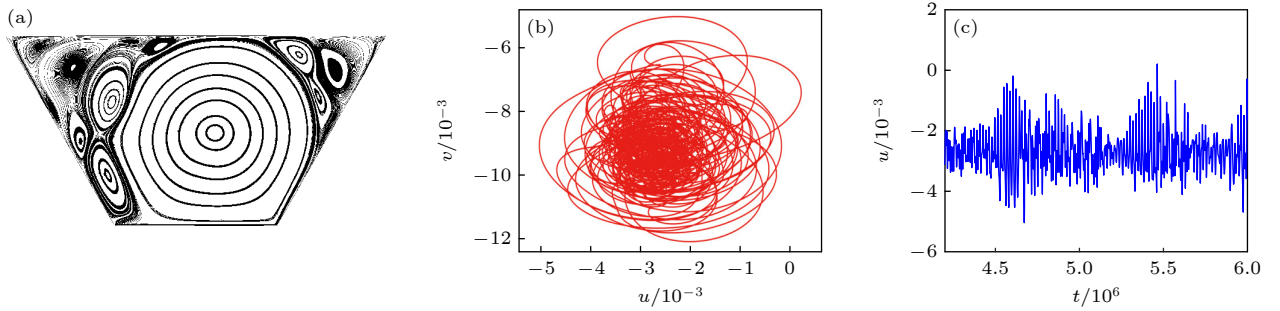


图 16 Case T1b 条件下, $Re = 12500$ 时呈非周期非稳态流动 (a) 时间步 $t = 6000000$ 时的流场图; (b) 监控点处速度相图; (c) 速度监控点处速度随时间的变化

Fig. 16. Stream function contours are non-periodic and unsteady at $Re = 12500$ for Case T1b: (a) Stream function contours at time steps $t = 6000000$; (b) velocity phase diagram at the velocity monitoring point; (c) velocity over time at the velocity monitoring point.

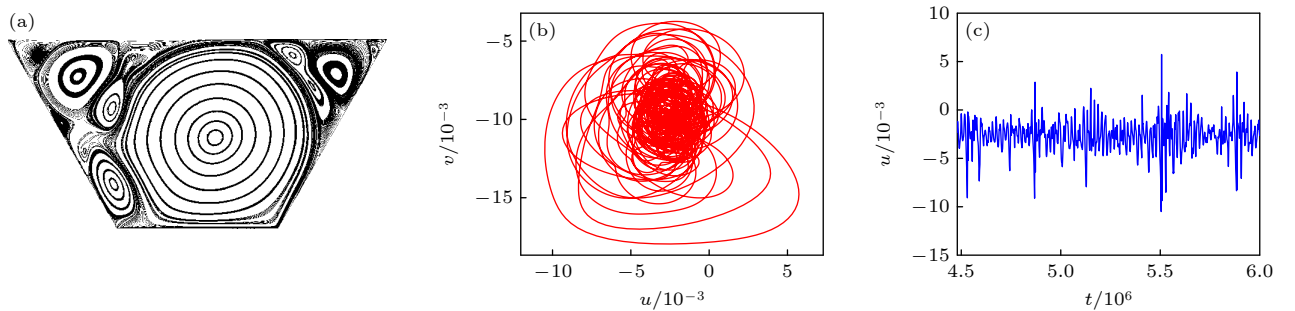


图 17 Case T1b 条件下, $Re = 15000$ 时呈非周期非稳态流动 (a) 时间步 $t = 6000000$ 时的流场图; (b) 监控点处速度相图; (c) 速度监控点处速度随时间的变化

Fig. 17. Stream function contours are non-periodic and unsteady at $Re = 15000$ for Case T1b: (a) Stream function contours at time steps $t = 6000000$; (b) velocity phase diagram at the velocity monitoring point; (c) velocity over time at the velocity monitoring point.

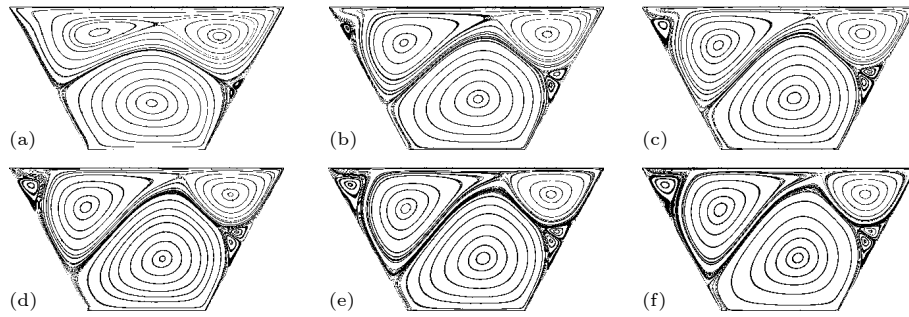


图 18 Case T2a 条件下, Re 为 1000—10000 时的流场形态 (a) $Re = 1000$; (b) $Re = 3200$; (c) $Re = 5000$; (d) $Re = 6000$; (e) $Re = 8000$; (f) $Re = 10000$

Fig. 18. Stream function contours of Reynolds numbers from 1000 to 10000 for Case T2a: (a) $Re = 1000$; (b) $Re = 3200$; (c) $Re = 5000$; (d) $Re = 6000$; (e) $Re = 8000$; (f) $Re = 10000$.

表 5 Case T2a 条件下, $Re = 1000, 3200, 5000, 6000, 8000, 10000$ 时流场中的涡心位置

Table 5. The first, second and third primary eddies characteristics at $Re = 1000, 3200, 5000, 6000, 8000, 10000$ for Case T2a.

Re	x ₁	y ₁	x ₂		y ₂		x ₃			y ₃		
			x _{2l}	x _{2r}	y _{2l}	y _{2r}	x _{3l}	x _{3r}		y _{3l}	y _{3r}	
								x _{3r₁}	x _{3r₂}		y _{3r₁}	y _{3r₂}
1000	265.65	83.21	166.69	390.56	209.14	202.40	—	412.69	422.93	—	101.61	117.56
3200	276.64	90.43	139.51	404.39	190.46	205.49	34.89	410.36	421.46	216.82	115.62	134.97
5000	282.10	92.07	141.76	408.64	186.10	206.44	40.16	410.52	421.23	222.49	120.92	138.91
6000	284.21	92.69	142.88	410.13	184.42	206.76	41.25	410.77	421.29	223.56	122.65	140.12
8000	287.07	93.68	144.54	412.15	182.08	207.14	42.18	411.69	422.02	224.22	124.32	141.38
10000	288.94	94.48	145.67	413.49	180.45	207.33	43.32	412.89	423.35	223.99	124.48	141.80

等腰梯形空腔中的流场结构如图 18 所示, 各级涡的涡心位置数据见表 5. $Re = 1000$ 时, 流场结构简单, 有 3 个明显的大涡和右边界附近的 2 个小涡, 其中一级涡位于梯形中心靠下区域, 在梯形左上和右上区域均有一个二级涡, 在一级涡、右二级涡和右边界的交界处存在两个不明显的小涡. 当 Re 增大到 3200 时, 左二级涡与左边界交界处出现了一个左三级涡. 当 Re 从 3200 增大到 10000 时, 流场结构基本不变, 从图 18(b)—(f) 可以看出, 随着 Re 的逐渐增大, 左上角的二级涡开始逐渐增大, 并向下和向右挤压. 由表 5 可以看出: 一级涡的涡心逐渐向右上移动; 右二级涡逐渐呈现减小的趋势, 涡心向右上移动; 左上角的三级涡也随着左二级涡逐渐增大, 并向右上移动, 随着左三级涡的增大和移动, 梯形左上角有产生层状小涡的趋势, 但 $Re = 10000$ 时还未形成层状涡. 不同 Re 下梯形中线速度如图 19 所示, 随着 Re 的增大, 最大水平速度 u 减小, 最大竖直速度 v 增大. 对于 Case T1a, 由于上下壁面均有向右的速度驱动, 因此流场中 3 个大涡的分布较为均匀. 而对比 Case T1b,

由于上壁面增加了向右的速度驱动, 梯形左右顶角的二级涡相互连接并向下挤压一级涡, 但梯形中涡的个数和涡的结构变化不大.

3.3.2 周期性非稳态流动

Re 在 12500—15000 之间时, 流场处于周期性非稳态流动. 相较于 $Re = 10000$ 的情况下, $Re = 12500$ 时流场结构变化非常小, 如图 20(a) 所示, 此时梯形左上角的层状涡已经形成, 左二级涡持续增大. 监控点处速度相图如图 20(b) 所示, 在 5930000—6000000 时间步之间时, 速度变化图像呈现出十分光滑的椭圆形. 从图 20(c) 可以看出, 在 5930000—6000000 时间步之间, 水平速度随时间步变化呈现出十分规律的周期图像, 约 2500 时间步为一个周期.

对 Case T2a $Re = 12500$ 时的流场进行模态分析, 如图 21(b) 和图 21(c) 所示, 与 Case T1a 类似, 前两阶模态能量占据了全场能量的主导地位, 能量占比约为 95%. 0—3 阶模态的流场模态的速度场云图如图 21(a) 和图 21(d)—(f) 所示, 其中一

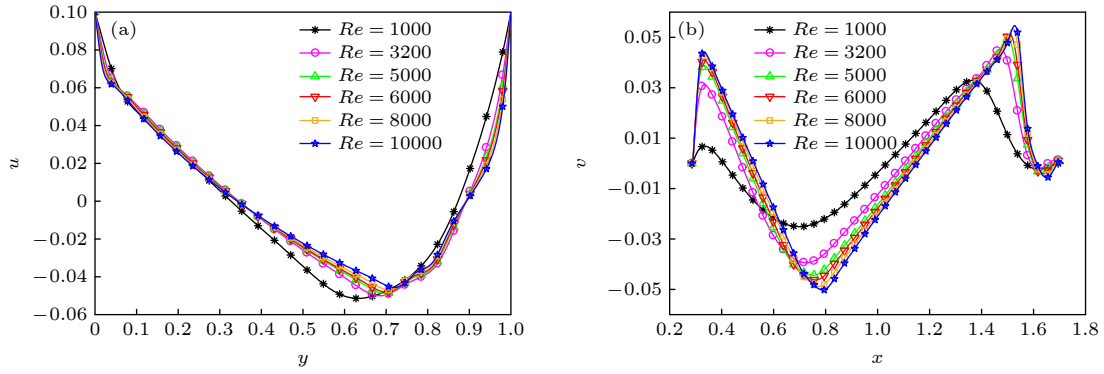


图 19 Case T2a 条件下, Re 为 1000—10000 时, (a) $x=1$ 的中线上, 纵坐标 y 和水平速度 u 的关系; (b) $y=0.5$ 的中线上, 横坐标 x 和竖直速度 v 的关系

Fig. 19. (a) Variation of the velocity u magnitude along $x=1$, (b) variation of the velocity v magnitude along $y=0.5$ at $Re=1000-10000$ for Case T2a.

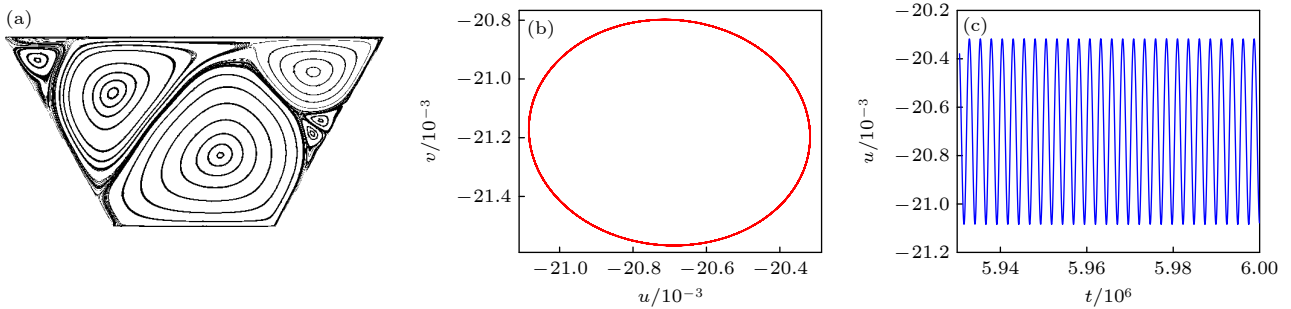


图 20 Case T2a 条件下, $Re = 12500$ 时呈现周期性非稳态流动 (a) 时间步 $t = 6000000$ 时的流场图; (b) 监控点处速度相图; (c) 速度监控点处速度随时间的变化

Fig. 20. Stream function contours are periodic and unsteady at $Re = 12500$ for Case T2a: (a) Stream function contours at time steps $t = 6000000$; (b) velocity phase diagram at the velocity monitoring point; (c) velocity over time at the velocity monitoring point.

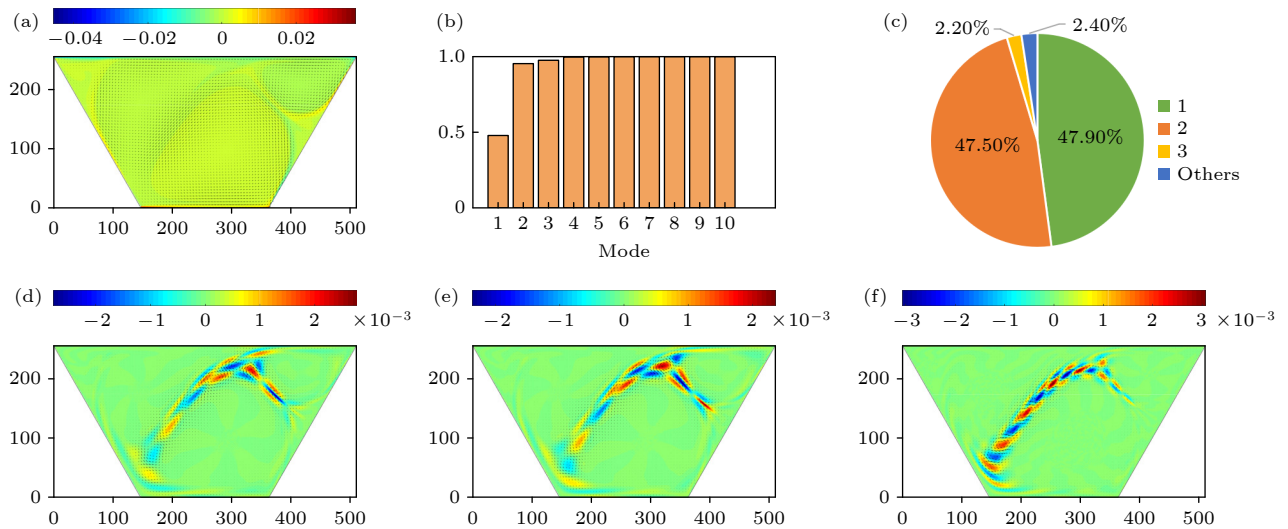


图 21 Case T2a 条件下, $Re = 12500$ 时的各阶模态图 (a) 速度平均场模态图; (b) 前 n 阶模态的能量占比; (c) 各阶模态的能量占比; (d)–(f) 一阶、二阶、三阶速度模态图

Fig. 21. Each order of mode for Case T2a when $Re = 12500$: (a) The mean field modal diagrams of velocity; (b) energy share of the first n order of mode for velocity; (c) energy share of each order of mode for velocity; (d)–(f) the first-order, second-order and third-order mode of velocity.

阶和二阶模态的峰值分布区域的形状较为相似, 位于梯形一级涡的左上边界附近, 但模态值相反。

当 Re 增大到 15000 时, 如图 22(a) 所示, 左三级涡的下方逐渐出现了较不稳定的流线, 但还没有形成涡, 此时的左二级涡还在持续增大, 并向一级涡的方向进行挤压, 梯形右边的流场变化较小。监控点处速度相图如图 22(b) 所示, 速度变化图像呈现出封闭的光滑圆周, 从图 22(c) 可以看出, 在 5940000—6000000 时间步之间, 水平速度随时间步变化呈现出较为规律的周期图像, 约 2000 时间步为一个周期。

对 Case T2a 下 $Re = 15000$ 的流场使用 POD 方法进行模态分析, 如图 23(b) 和图 23(c) 所示, 与 $Re = 12500$ 时的结果差异较小, 前两阶模态能

量仍占据全场能量的主导地位, 能量占比稍高于 $Re = 12500$ 的流场, 约为 96%。此时 0—3 阶模态的流场模态的速度场云图如图 23(a) 和图 23(d)—(f), 其中一阶、二阶和三阶模态图均与 $Re = 12500$ 时变化不大, 主要是一阶和二阶模态图的左下角附近有较小的差异。

3.3.3 非周期非稳态流动

在 Re 大于 20000 时, 流场处于非周期非稳态流动。当 Re 为 20000 且时间步为 6000000 时如图 24(a) 所示, 左三级涡的下方开始出现 2 个新的小涡, 一个位于左边界附近, 一个位于左二级涡的左侧, 呈现出扁长形状。此时的左二级涡增大到几乎与下边界连接, 并持续向一级涡的方向进行

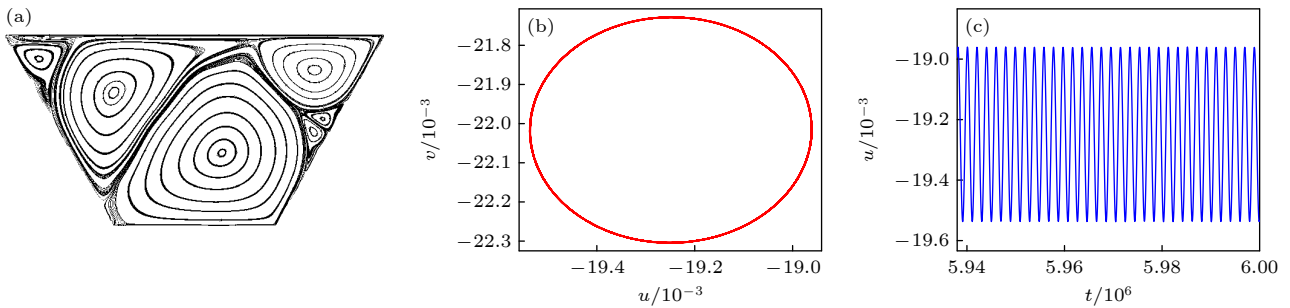


图 22 Case T2a 条件下, $Re = 15000$ 时呈现周期性非稳态流动 (a) 时间步 $t = 6000000$ 时的流场图; (b) 监控点处速度相图; (c) 速度监控点处速度随时间的变化

Fig. 22. Stream function contours are periodic and unsteady at $Re = 15000$ for Case T2a: (a) Stream function contours at time steps $t = 6000000$; (b) velocity phase diagram at the velocity monitoring point; (c) velocity over time at the velocity monitoring point.

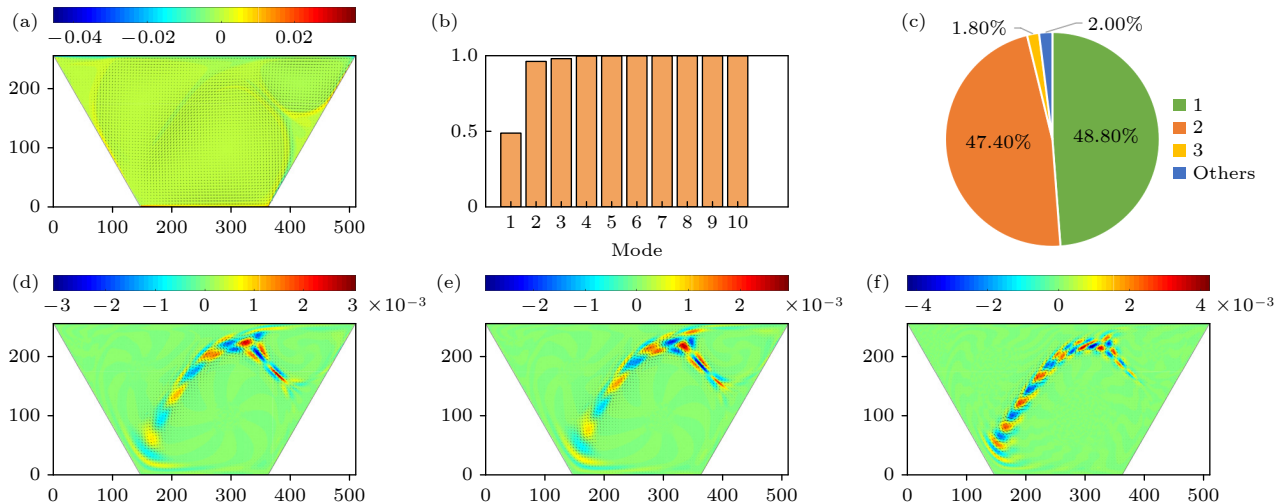


图 23 Case T2a 条件下, $Re = 15000$ 时的各阶模态图 (a) 速度平均场模态图; (b) 前 n 阶模态的能量占比; (c) 各阶模态的能量占比; (d)—(f) 一阶、二阶、三阶速度模态图

Fig. 23. Each order of mode for Case T2a when $Re = 15000$: (a) The mean field modal diagrams of velocity; (b) energy share of the first n order of mode for velocity; (c) energy share of each order of mode for velocity; (d)–(f) the first-order, second-order and third-order mode of velocity.

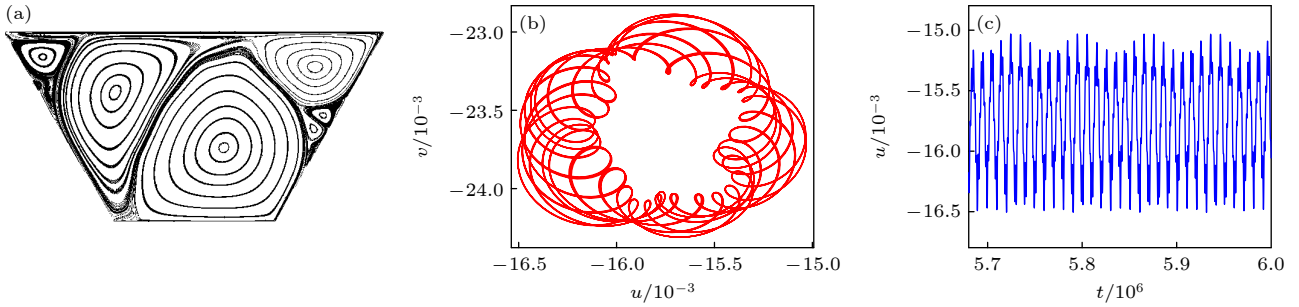


图 24 Case T2a 条件下, $Re = 20000$ 时呈现非周期非稳态流动 (a) 时间步 $t = 6000000$ 时的流场图; (b) 监控点处速度相图; (c) 速度监控点处速度随时间的变化

Fig. 24. Stream function contours are non-periodic and unsteady at $Re = 20000$ for Case T2a: (a) Stream function contours at time steps $t = 6000000$; (b) velocity phase diagram at the velocity monitoring point; (c) velocity over time at the velocity monitoring point.

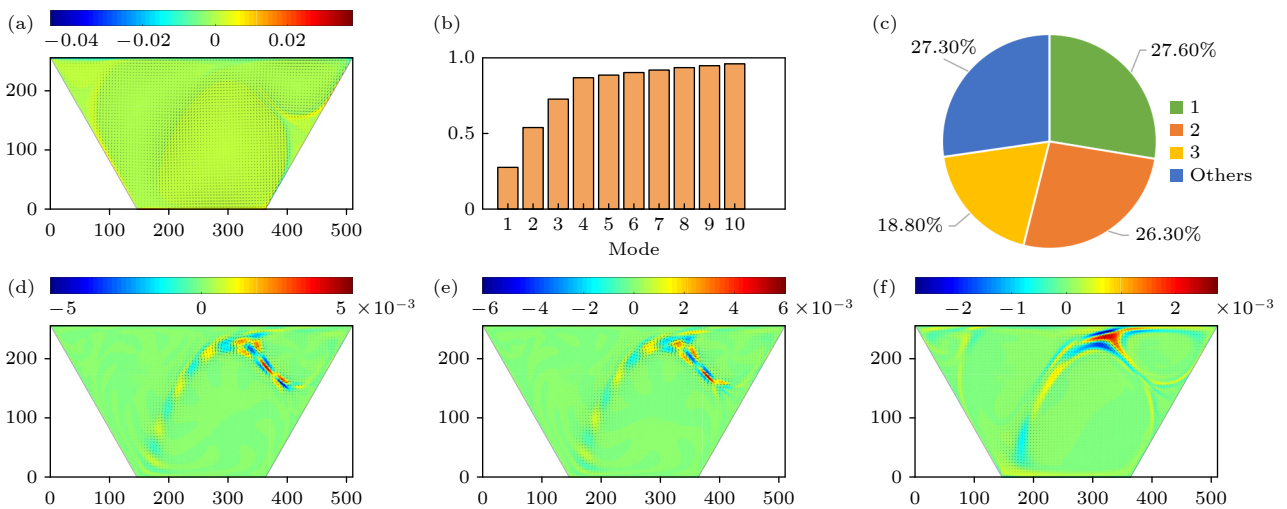


图 25 Case T2a 条件下, $Re = 20000$ 时的各阶模态图 (a) 速度平均场模态图; (b) 前 n 阶模态的能量占比; (c) 各阶模态的能量占比; (d)–(f) 一阶、二阶、三阶速度模态图

Fig. 25. Each order of mode for Case T2a when $Re = 20000$: (a) The mean field modal diagrams of velocity; (b) energy share of the first n order of mode for velocity; (c) energy share of each order of mode for velocity; (d)–(f) the first-order, second-order and third-order mode of velocity.

挤压, 梯形右边的流场变化仍然较小. 监控点处速度相图由图 24(b) 所示, 速度变化图像呈现出花瓣类不规则的图形, 速度变化类似周期. 从图 24(c) 可以看出, 在 5680000—6000000 时间步之间, 水平速度随时间步变化呈现出有一定规律的图像, 但每个周期中的峰值略有不同.

对 $Re = 20000$ 的流场进行模态分析, 结果如图 25(b) 和图 25(c) 所示, 前 3 阶模态能量分别占据了总能量的 1/4, 能量占比约为 73%, 可以明显看出与周期性非稳态流动时能量占比有较大区别. 0—3 阶模态的流场模态的速度场云图如图 25(a) 和图 25(d)–(f) 所示, 其中一阶和二阶模态的峰值分布区域的形状基本相同, 三阶模态是略有不同, 一

阶和二阶模态时速度峰值位于右上角二级涡的下边缘附近, 三阶模态时速度峰值位于右二级涡的左侧区域.

在 $Re = 25000$ 且时间步为 8000000 时, 如图 26(a) 所示, 流场处于非周期非稳态流动. 相较于 $Re = 20000$ 的情况下, 流场结构几乎无变化, 左三级涡下方的 2 个小涡明显可见, 左二级涡仍持续向一级涡方向进行挤压, 左右边界的小涡附近均产生了一些不规则的小涡. 监控点处速度相图如图 26(b) 所示, 速度变化图线十分紊乱无规律. 速度随时间的变化如图 26(c) 所示, 在 7500000 到 8000000 时间步内, 水平速度随时间变化无规律, 可以看出, 此时流动为非周期非稳态流动.

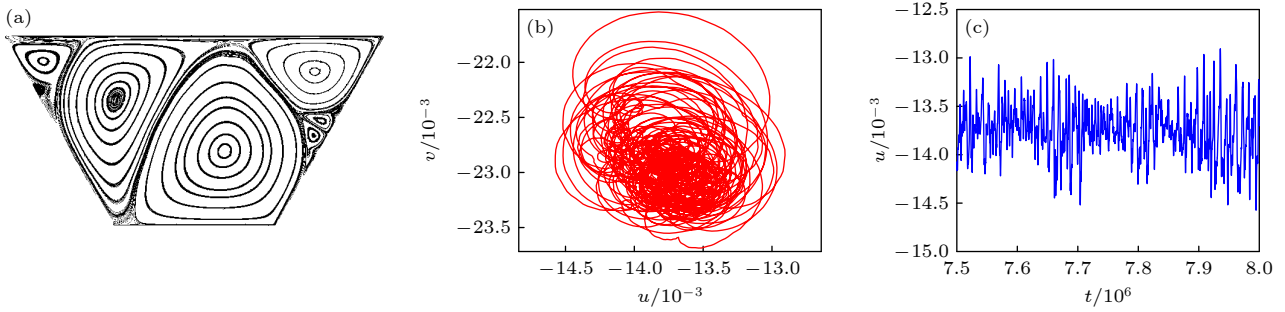


图 26 Case T2a 条件下, $Re = 25000$ 时呈非周期非稳态流动 (a) 时间步 $t = 8000000$ 时的流场图; (b) 监控点处速度相图; (c) 速度监控点处速度随时间的变化

Fig. 26. Stream function contours are non-periodic and unsteady at $Re = 25000$ for Case T2a: (a) Stream function contours at time steps $t = 8000000$; (b) velocity phase diagram at the velocity monitoring point; (c) velocity over time at the velocity monitoring point.

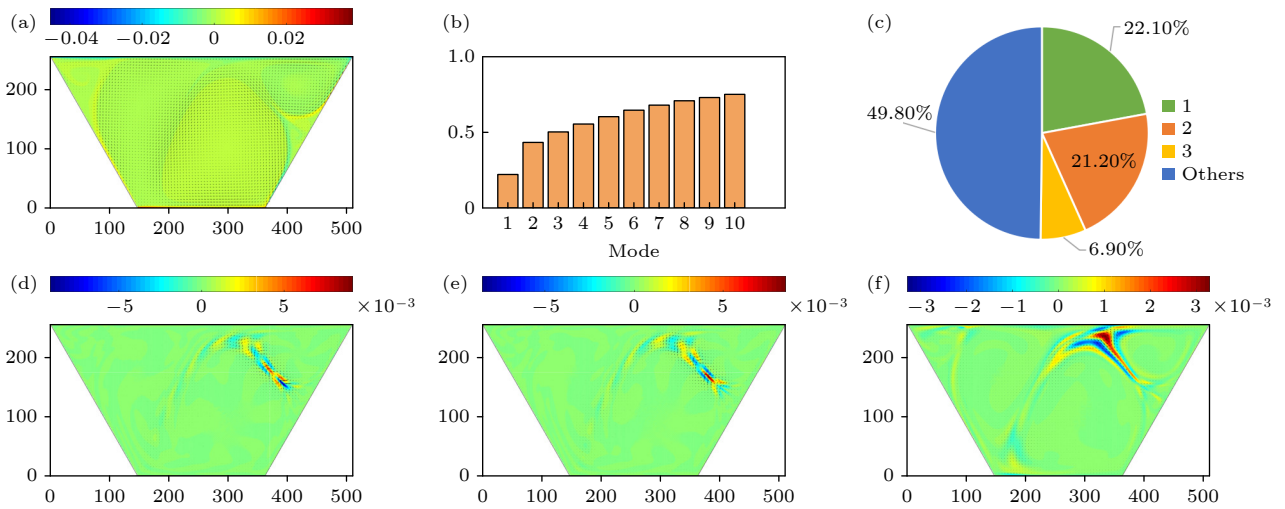


图 27 Case T2a 条件下, $Re = 25000$ 时的各阶模态图 (a) 速度平均场模态图; (b) 前 n 阶模态的能量占比; (c) 各阶模态的能量占比; (d)–(f) 一阶、二阶、三阶速度模态图

Fig. 27. Each order of mode for Case T2a when $Re = 25000$: (a) The mean field modal diagrams of velocity; (b) energy share of the first n order of mode for velocity; (c) energy share of each order of mode for velocity; (d)–(f) the first-order, second-order and third-order mode of velocity.

对 Case T2a 下 $Re = 25000$ 的流场进行模态分析, 如图 27(b) 和图 27(c) 所示, 前 3 阶模态能量占比相较于 $Re = 20000$ 时明显减少, 能量占比仅为 50%, 可以明显看出当 Re 增大时, 流场中各阶模态逐渐增多, 此时流场处于非周期非稳态流动. 0–3 阶模态的流场模态的速度场云图如图 27(a) 和图 27(d)–(f) 所示, 与 $Re = 20000$ 时较为相似.

3.4 上下壁面反向同速双驱动下雷诺数对梯形空腔流的影响

3.4.1 稳态流动

在梯形上壁面向右驱动且下壁面向左驱动时 (Case T2b), Re 为 1000–5000 的流场呈现出稳态

流动, 如图 28 所示, 整体流场结构较简单. 当 $Re = 1000$ 时, 流场中仅有 2 个明显的涡, 一个一级大涡位于梯形正中间部分, 几乎占据了所有的梯形区域, 在梯形左边界靠上的部分, 还有一个逐渐增大的二级涡. 当 Re 增大到 3200 时, 梯形上边界靠左的附近出现了一个扁长形状的涡, 以及梯形右下角附近出现了一个十分小的涡. 由表 6 可以看出, 随着 Re 的增大, 一级涡的涡心位置变化不大, 在缓慢的向右下角方向移动, 二级涡也随之向右上角方向移动, 此时流场仍处于稳态流动. 不同 Re 下梯形竖直中线速度变化如图 29 所示, 可见 Re 越高, 速度的变化越缓慢, 此时流场中线的竖直速度的最大值均大于前 3 种情况的竖直速度. 相对 Case T1a,

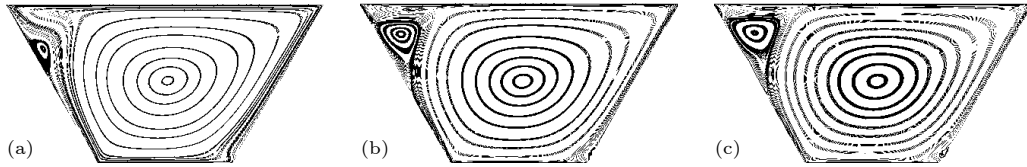


图 28 Case T2b 条件下, Re 为 1000—5000 时的流场形态 (a) $Re = 1000$; (b) $Re = 3200$; (c) $Re = 5000$

Fig. 28. Stream function contours of Reynolds numbers from 1000 to 5000 for Case T2b: (a) $Re = 1000$; (b) $Re = 3200$; (c) $Re = 5000$.

表 6 Case T2b 条件下, $Re = 1000, 3200, 5000$ 时流场中的涡心位置

Table 6. The first, second and third primary eddies characteristics at $Re = 1000, 3200, 5000$ for Case T2b.

Re	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3		y_3	
					x_{3l}	x_{3r}	y_{3l}	y_{3r}
1000	259.99	132.44	59.83	183.94	—	—	—	—
3200	260.97	131.12	66.16	206.26	84.50	369.55	245.42	14.67
5000	261.42	130.74	65.46	208.22	88.80	365.54	246.86	14.39

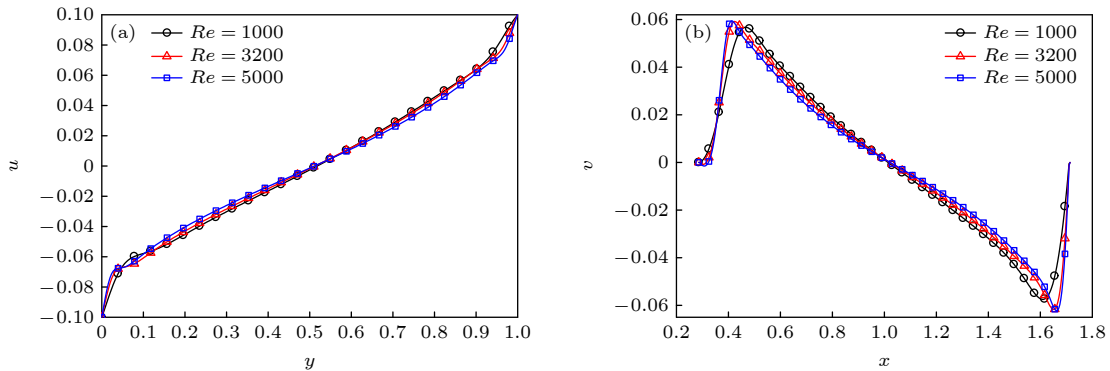


图 29 Case T2b 条件下, Re 为 1000—5000 时, (a) $x = 1$ 的中线上, 纵坐标 y 和水平速度 u 的关系; (b) $y = 0.5$ 的中线上, 横坐标 x 和竖直速度 v 的关系

Fig. 29. (a) Variation of the velocity u magnitude along $x = 1$, (b) variation of the velocity v magnitude along $y = 0.5$ at $Re = 1000-5000$ for Case T2b.

由于上下壁面有着反向同速的驱动速度, 梯形空腔中整体为顺时针流动的大涡, 因此流场结构较为简单, 类似 Case T1a 时 $Re = 1000$ 时的流场形态。

3.4.2 周期性非稳态流动

$Re = 6000$ 且时间步为 3000000 时, 如图 30(a) 所示, 流场处于周期性非稳态流动. 相较于 $Re = 5000$ 的情况下, 流场有较大的变化, 从一个中心一级大涡变成了 3 个大涡, 分别是梯形下半部分的一级涡, 以及一级涡上分布于梯形左右两侧的 2 个二级涡. 除了 3 个大涡之外, 周边还遍布了 6 个小涡, 分别位于梯形上边界居中的位置和左边界附近. 选取监控点处的速度相图如图 30(b) 所示, 速度变化图像无特定的几何特征, 曲线无规律, 但仍是封闭图形, 如图 30(c) 可以看出, 在 1800000—3000000 时间步之间, 水平速度随时间步变化呈现出非常规

律的周期图像, 但一个周期内速度变化无规律, 约 130000 时间步为一个周期。

使用 POD 方法对流场中的速度进行模态分析, 如图 31(b) 和图 31(c) 所示, 一阶模态为其主要模态, 能量占比高达 86.80%, 前两阶模态能量占比与 Case T2a 的周期性非稳态流动时类似, 能量占比在 97% 以上. 其中 0—3 阶模态的流场模态的速度场云图如图 31(a) 和图 31(d)—(f) 所示, 从一阶和二阶模态的结果来看, 峰值分布区域位于右上涡的下边界和左边界附近, 峰值分布区域的形状略微相似, 但模态值相反, 而三阶模态时峰值主要位于梯形中间靠右区域。

3.4.3 非周期非稳态流动

在 Re 大于 8000 时, 流场处于非周期非稳态流动. $Re = 8000$ 时, 相较于 $Re = 6000$ 的情况下,

流场结构变化不大, 如图 32(a) 所示, 中心的 3 个大涡变化较小, 左二级涡下方逐渐被一级涡挤压成竖长形状, 一级涡的下方靠近下边界附近产生了一

个扁长形状的涡, 右边界中间附近产生了 23 个相互挤压的小涡. 此时监控点处速度相图如 32(b) 所示, 速度变化图线呈现出光滑但是紊乱的图形,

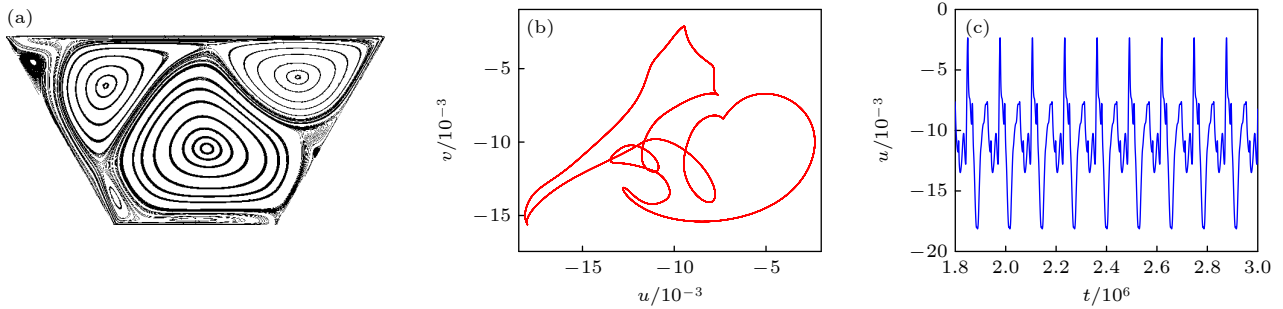


图 30 Case T2b 条件下, $Re = 6000$ 时呈现周期性非稳态流动 (a) 时间步 $t = 3000000$ 时的流场图; (b) 监控点处速度相图; (c) 速度监控点处速度随时间的变化

Fig. 30. Stream function contours are periodic and unsteady at $Re = 6000$ for Case T2b: (a) Stream function contours at time steps $t = 3000000$; (b) velocity phase diagram at the velocity monitoring point; (c) velocity over time at the velocity monitoring point.

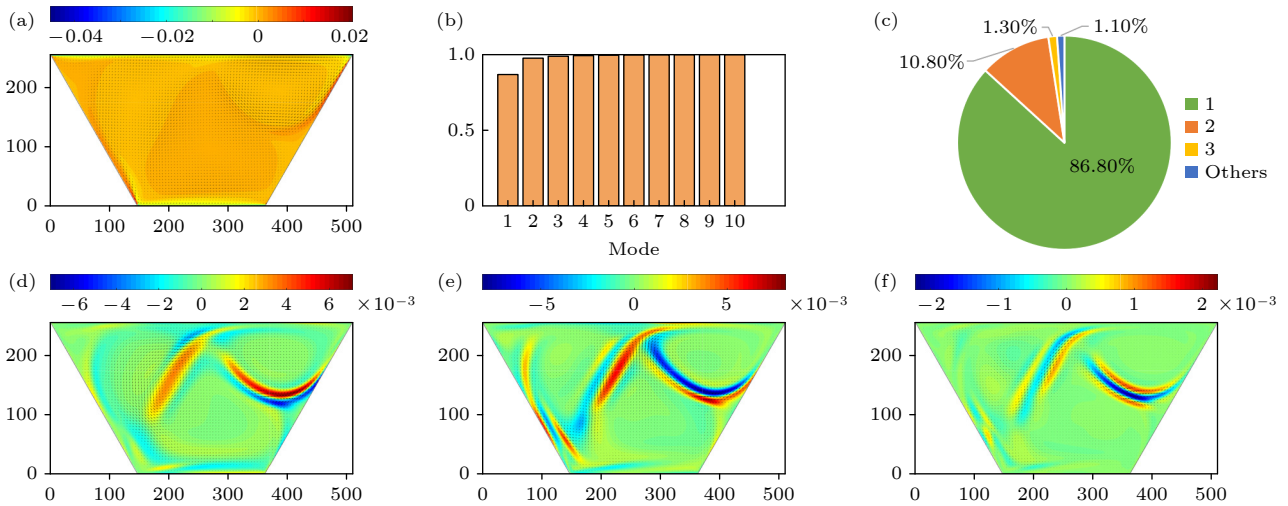


图 31 Case T2b 条件下, $Re = 6000$ 时的各阶模态图 (a) 速度平均场模态图; (b) 前 n 阶模态的能量占比; (c) 各阶模态的能量占比; (d)–(f) 一阶、二阶、三阶速度模态图

Fig. 31. Each order of mode for Case T2b when $Re = 6000$: (a) The mean field modal diagrams of velocity; (b) energy share of the first n order of mode for velocity; (c) energy share of each order of mode for velocity; (d)–(f) the first-order, second-order and third-order mode of velocity.

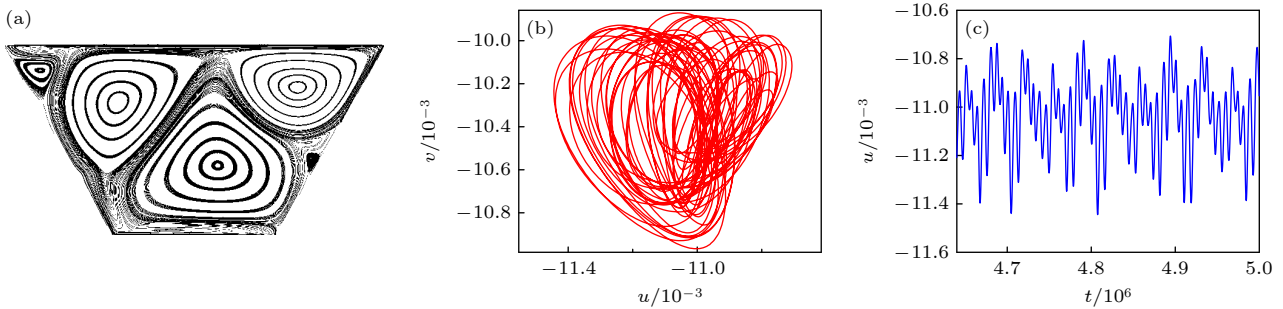


图 32 Case T2b 条件下, $Re = 8000$ 时呈现非周期非稳态流动 (a) 时间步 $t = 5000000$ 时的流场图; (b) 监控点处速度相图; (c) 速度监控点处速度随时间变化图

Fig. 32. Stream function contours are non-periodic and unsteady at $Re = 8000$ for Case T2b: (a) Stream function contours at time steps $t = 5000000$; (b) velocity phase diagram at the velocity monitoring point; (c) velocity over time at the velocity monitoring point.

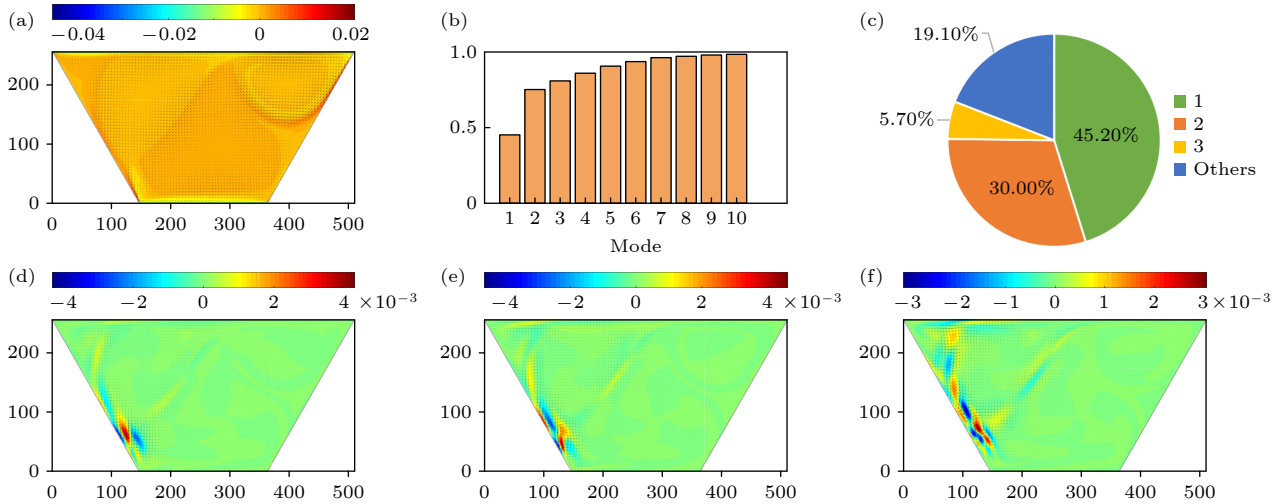


图 33 Case T2b 条件下, $Re = 8000$ 时的各阶模态图 (a) 速度平均场模态图; (b) 前 n 阶模态的能量占比; (c) 各阶模态的能量占比; (d)—(f) 一阶、二阶、三阶速度模态图

Fig. 33. Each order of mode for Case T2b when $Re = 8000$: (a) The mean field modal diagrams of velocity; (b) energy share of the first n order of mode for velocity; (c) energy share of each order of mode for velocity; (d)–(f) the first-order, second-order and third-order mode of velocity.

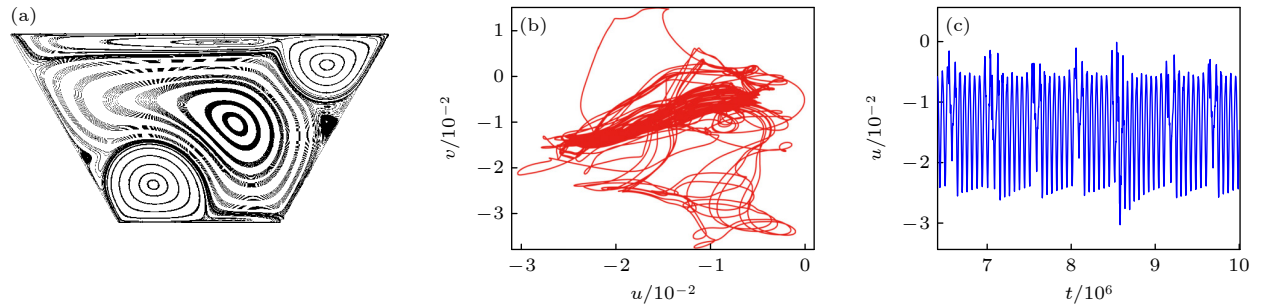


图 34 Case T2b 条件下, $Re = 10000$ 时呈现非周期性非稳态流动 (a) 时间步 $t = 10000000$ 时的流场图; (b) 监控点处速度相图; (c) 速度监控点处速度随时间的变化

Fig. 34. Stream function contours are non-periodic and unsteady at $Re = 10000$ for Case T2b: (a) Stream function contours at time steps $t = 10000000$; (b) velocity phase diagram at the velocity monitoring point; (c) velocity over time at the velocity monitoring point.

图线无明显规律. 速度随时间变化的图像如图 32(c) 所示, 在 4600000—5000000 时间步内, 水平速度随时间变化无规律.

对 Case T2b 下 $Re = 8000$ 的流场使用 POD 方法进行模态分析, 如图 33(b) 和图 33(c) 所示, 相较于 $Re = 6000$ 时的周期性非稳态流动, 此时的一阶模态占比显著减小, 仅占总能量的 45%, 可以明显看出与周期性非稳态流动时能量占比有较大区别. 其中 0—3 阶模态的流场模态的速度场云图如图 33(a) 和图 33(d)—(f) 所示, 其中一阶、二阶时模态图类似, 速度峰值位于左壁面靠下附近, 三阶模态时速度峰值的位置逐渐向上移动.

在 Re 增大到 10000 时, 流场仍处于非周期非稳态流动. 此时流场如图 34(a) 所示, 一级大涡位

于梯形中心, 涡心位置靠近右上方, 2 个二级涡分别位于梯形的左下角和右上角, 这是由于梯形上下壁面反向驱动时, 流体运动时受到了两侧壁面的阻碍, 因此在角落附近形成不稳定的涡旋. 同时在上壁面附近, 有着较薄的层状涡, 左右边界附近分布着 3 个小涡. 监控点处速度相图如图 34(b) 所示, 速度变化图线杂乱不规则. 速度随时间变化的图像如图 34(c) 所示, 在 6400000—10000000 时间步内, 水平速度随时间变化无规律.

对 $Re = 10000$ 的流场进行 POD 模态分析, 如图 35(b) 和图 35(c) 所示, 相较于 $Re = 8000$ 时的非周期性非稳态流动, 此时的一阶模态占比仅占总能量的 23%, 可以明显看出 Re 增大时, 前几阶的模态占比显著减少, 流场结构复杂. 其中 0—3

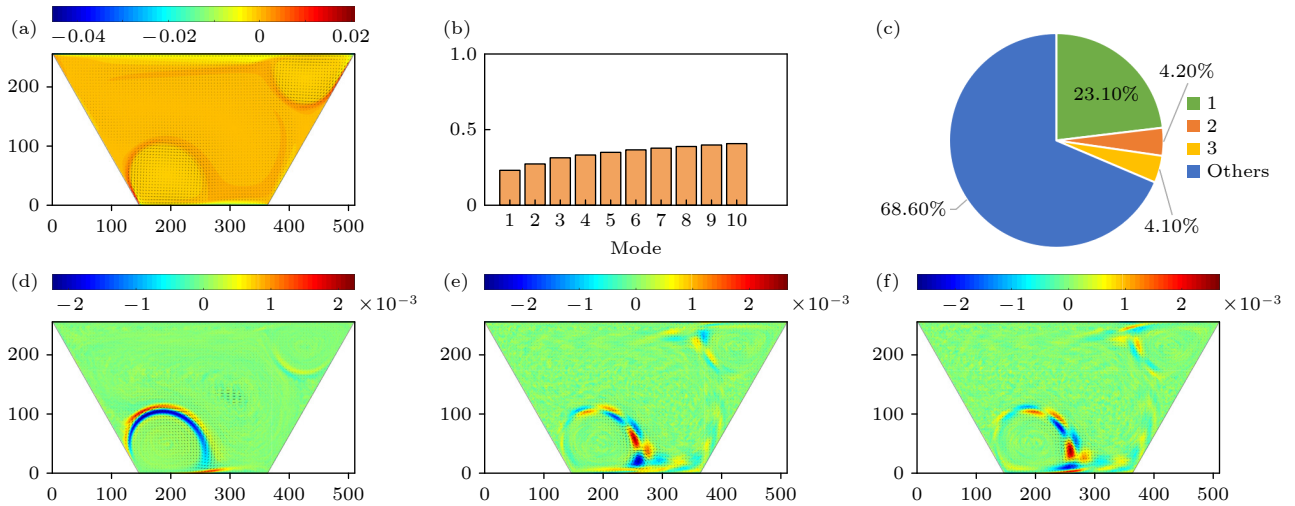


图 35 Case T2b 条件下, $Re = 10000$ 时的各阶模态图 (a) 速度平均场模态图; (b) 前 n 阶模态的能量占比; (c) 各阶模态的能量占比; (d)–(f) 一阶、二阶、三阶速度模态图

Fig. 35. Each order of mode for Case T2b when $Re = 10000$: (a) The mean field modal diagrams of velocity; (b) energy share of the first n order of mode for velocity; (c) energy share of each order of mode for velocity; (d)–(f) the first-order, second-order and third-order mode of velocity.

阶模态的流场模态的速度场云图如图 35(a) 和图 35(d)–(f) 所示, 前 3 阶模态中速度峰值均位于左下角二级涡的右上边界附近, 流场内模态分布复杂无规则。

4 结 论

采用格子 Boltzmann 方法对不同 Re , 以及上、下壁面单、双驱动的梯形空腔流场进行了详细的模拟与分析, 选取了 Re 在 1000–25000 之间进行模拟, 并采用 POD 方法对流场进行模态分析. 4 种不同驱动情况下不同 Re 的流场形态如图 36 所示, 从下至上分别为 Case T1a, T1b, T2a, T2b. 在 $Re = 5000$ 时, 4 种情况均为稳态流动, 当 Re 增大到 6000 时, T2b 由于下壁面有着向左的驱动速度, 使得流场在较低 Re 时就处于周期性非稳态流动. 随着 Re 增大到 8500, T1a 处于周期性非稳态流动, 此时 T2b 处于非周期非稳态流动. 在 $Re = 11500$ 时, T1b 处于周期性非稳态流动, 相对 T1a 时进入非稳态流动时的 Re 较大, 由于上、下壁面长度不同, 可见上壁面驱动对于梯形空腔中的影响较下壁面驱动大. 增大 Re 至 12500 和 15000 时, T2a 处于周期性非稳态流动, 此时其他 3 种情况下流场均处于非周期非稳态流动. 由于 T2a 中上、下壁面有着同向的驱动速度, 使得流场中的涡相互抑制和挤压, 在较低 Re 下流场更趋于稳态流动. 因此

对于顶盖单驱动梯形空腔流, 也可以通过改变下壁面的驱动速度方向, 对流场的流动状态进行促进或抑制。

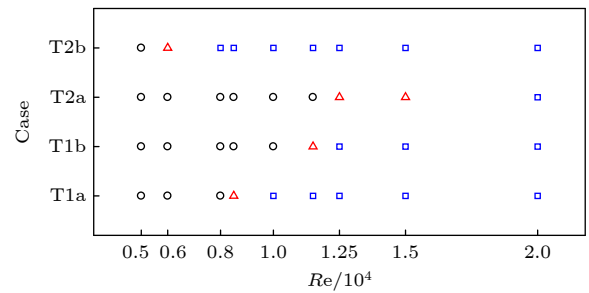


图 36 4 种驱动情况下, Re 对流场形态的影响图. 黑色圆圈表示流场处于稳态流动状态, 红色三角形表示流场处于周期性非稳态流动状态, 蓝色方框表示流场处于非周期性非稳态流动状态

Fig. 36. Effect of Reynolds number on the flow pattern for four different cases. The black circle indicates that the flow field is steady, the red triangle shows that the flow field is periodic but still unsteady, and the blue box indicates that the flow field is non-periodic and unsteady.

参考文献

- [1] Peng Y F, Shiau Y H, Hwang R R 2003 *Comput. Fluids* **32** 337
- [2] Isaev S A, Baranov P A, Sudakov A G, et al. 2008 *Thermophys. Aeromech.* **15** 463
- [3] Balachandar S, Eaton J K 2010 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **42** 111
- [4] Kuhlmann H C, Romanò F 2019 *The Lid-Driven Cavity* (Austria: Springer International Publishing) p233

- [5] Nonino C, Del Giudice S 1988 *Int. J. Numer. Methods Eng.* **25** 313
- [6] Alleborn N, Raszillier H, Durst F 1999 *Int. J. Heat Mass Tran.* **42** 833
- [7] Talebi F, Mahmoudi A H, Shahi M 2010 *Int. Commun. Heat Mass* **37** 79
- [8] Chowdhury M, Kumar B V R 2023 *J. Nonnewton. Fluid Mech.* **312** 104975
- [9] Ribbens C J, Watson L T, Wang C Y 1994 *J. Comput. Phys.* **112** 173
- [10] McQuain W D, Ribbens C J, Wang C Y, et al. 1994 *Comput. Fluids* **23** 613
- [11] Ismael M A, Chamkha A J 2015 *Numer. Heat Transfer, Part A* **68** 312
- [12] Mebarek-Oudina F, Laouira H, Hussein A K, et al. 2022 *Mathematics* **10** 929
- [13] Mondal P, Mahapatra T R 2021 *Int. J. Mech. Sci.* **208** 106665
- [14] Kareem A K, Mohammed H A, Hussein A K, et al. 2016 *Int. Commun. Heat Mass* **77** 195
- [15] Rashad A M, Sivasankaran S, Mansour M A, et al. 2017 *Numer. Heat Transfer, Part A* **71** 1223
- [16] Darr J H, Vanka S P 1991 *Phys. Fluids* **3** 385
- [17] Paramane S B, Sharma A 2008 *Numer. Heat Transfer, Part B* **54** 84
- [18] Zhang H, Ren F, Hu H B 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 184703 (in Chinese) [张恒, 任峰, 胡海豹 2021 物理学报 **70** 184703]
- [19] Yang F, Shi X, Guo X, et al. 2012 *Energy Procedia* **16** 639
- [20] Nagendra K, Lakshmisha K N 2009 *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow* **19** 790
- [21] Perumal D A, Dass A K 2011 *Comput. Math. Appl.* **61** 3711
- [22] Nemati H, Farhadi M, Sedighi K, et al. 2010 *Int. Commun. Heat Mass* **37** 1528
- [23] Guo X, Zhong C, Zhuo C, et al. 2014 *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **28** 215
- [24] Patil D V, Lakshmisha K N, Rogg B 2006 *Comput. Fluids* **35** 1116
- [25] Hou S, Zou Q, Chen S, et al. 1995 *J. Comput. Phys.* **118** 329
- [26] Chai Z H, Shi B C, Zheng L 2006 *Chin. Phys.* **15** 1855
- [27] Yuana K A, Budiana E P 2019 *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* **546** 052088
- [28] Perumal D A, Dass A K 2008 *WIT Trans. Eng. Sci.* **59** 45
- [29] Bo A N, Mellibovsky F, Bergada J M, et al. 2020 *Appl. Math. Modell.* **82** 469
- [30] Shahid H, Yaqoob I, Khan W A, et al. 2021 *Int. Commun. Heat Mass* **129** 105658
- [31] Perumal D A 2018 *Therm. Sci. Eng. Prog.* **6** 48
- [32] Guo Y, Bennacer R, Shen S, et al. 2010 *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow* **20** 130
- [33] Shahid H, Yaqoob I, Khan W A, et al. 2021 *Int. Commun. Heat Mass* **128** 105552
- [34] An B, Bergada J M, Mellibovsky F 2019 *J. Fluid Mech.* **875** 476
- [35] An B, Guo S, Bergada J M 2023 *Appl. Sci.* **13** 888
- [36] Sidik N A C, Munir F A 2012 *Arab. J. Sci. Eng.* **37** 1723
- [37] Zhang T, Shi B, Chai Z 2010 *Compu. Fluids* **39** 1977
- [38] Qian Y H, D'Humières D, Lallemand P 1992 *EPL* **17** 479
- [39] Ziegler D P 1993 *J. Stat. Phys.* **71** 1171
- [40] Guo Z L, Zheng C G, Shi B C 2002 *Chin. Phys.* **11** 366
- [41] Guo Z L, Zheng C G, Shi B C 2002 *Phys. Fluids* **14** 2007

GPU based lattice Boltzmann simulation and analysis of two-dimensional trapezoidal cavity flow*

Chen Bai-Hui¹⁾²⁾³⁾ Shi Bao-Chang^{1)2)3)†} Wang Lei⁴⁾⁵⁾ Chai Zhen-Hua¹⁾²⁾³⁾

1) (School of Mathematics and Statistics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

2) (Hubei Key Laboratory of Engineering Modeling and Scientific Computing,
Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

3) (Institute of Interdisciplinary Research for Mathematics and Applied Science,
Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

4) (School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China)

5) (Center for Mathematical Science, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China)

(Received 21 March 2023; revised manuscript received 16 April 2023)

Abstract

In this study, we utilize the lattice Boltzmann method to investigate the flow behavior in a two-dimensional trapezoidal cavity, which is driven by both sides on the upper wall and lower wall. Our calculations are accelerated through GPU-CUDA software. We conduct an analysis of the flow field mode by using proper orthogonal decomposition. The effects of various parameters, such as Reynolds number (Re) and driving direction, on the flow characteristics are examined through numerical simulations. The results are shown below. 1) For the upper wall drive (T1a), the flow field remains stable, when the Re value varies from 1000 to 8000. However, when $Re = 8500$, the flow field becomes periodic but unstable. The velocity phase diagram at the monitoring point is a smooth circle, and the energy values of the first two modes dominate the energy of the whole field. Once Re exceeds 10000, the velocity phase diagram turns irregular and the flow field becomes aperiodic and unsteady. 2) For the lower wall drive (T1b), the flow is stable when Re value is in a range of 1000–8000, and it becomes periodic and unsteady when $Re = 11500$. The energy values of the first three modes appear relatively large. When Re is greater than 12500, the flow field becomes aperiodic and unsteady. At this time, the phase diagram exhibits a smooth circle, with the energy values of the first two modes almost entirely dominating the entire energy. 3) For the case of upper wall and lower wall moving in the same direction at the same speed (T2a), the flow field remains stable when Re changes from 1000 to 10000. When Re varies from 12500 to 15000, the flow becomes periodic and unstable. The velocity phase diagram is still a smooth circle, with the first two modes still occupying a large portion of the energy. Once Re exceeds 20000, the energy proportions of the first three modes significantly decrease, and the flow becomes aperiodic and unsteady. 4) For the case in which the upper wall and lower wall are driven in opposite directions at the same velocity (T2b), the flow field remains stable when Re changes from 1000 to 5000. When $Re = 6000$, the energy of the first mode accounts for 86%, and the flow field becomes periodic but unstable. When Re exceeds 8000, the energy proportions of the first three modes decrease significantly, and the flow field becomes aperiodic and unsteady.

Keywords: lattice Boltzmann method, trapezoidal cavity, two-sided driven, GPU-CUDA computing

PACS: 47.85.-g, 47.15.Rq, 47.11.-j

DOI: 10.7498/aps.72.20230430

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12072127, 51836003).

† Corresponding author. E-mail: shibc@hust.edu.cn

基于GPU的二维梯形空腔流的格子Boltzmann模拟与分析

陈百慧 施保昌 汪垒 柴振华

GPU based lattice Boltzmann simulation and analysis of two-dimensional trapezoidal cavity flow

Chen Bai-Hui Shi Bao-Chang Wang Lei Chai Zhen-Hua

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 154701 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230430

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230430>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于格子Boltzmann方法的幂律流体二维顶盖驱动流转捩研究

Transitions of power-law fluids in two-dimensional lid-driven cavity flow using lattice Boltzmann method

物理学报. 2021, 70(18): 184703 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210451>

基于格子Boltzmann方法的二维气泡群熟化过程模拟

Lattice Boltzmann method based simulation of two dimensional bubble group ripening process

物理学报. 2022, 71(11): 110504 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20212183>

三维不可压缩流的12速多松弛格子Boltzmann模型

Three-dimensional 12-velocity multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model of incompressible flows

物理学报. 2019, 68(23): 234701 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190984>

耦合界面力的两相流相场格子Boltzmann模型

Phase field lattice Boltzmann model for two-phase flow coupled with additional interfacial force

物理学报. 2018, 67(22): 224701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181230>

倾斜多孔介质方腔内纳米流体自然对流的格子Boltzmann方法模拟

Numerical simulation of natural convection of nanofluids in an inclined square porous enclosure by lattice Boltzmann method

物理学报. 2020, 69(16): 164401 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200308>

复杂微通道内气泡在浮力作用下上升行为的格子Boltzmann方法模拟

Lattice Boltzmann simulations of rising bubble driven by buoyancy in a complex microchannel

物理学报. 2018, 67(23): 234701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181311>