

适用于有耗型德拜色散媒质电磁特性仿真的 RI-CDI-FDTD 方法及程序实现*

谢国大¹⁾²⁾ 侯桂林¹⁾²⁾ 牛凯坤¹⁾²⁾ 冯乃星¹⁾²⁾
方明¹⁾²⁾ 李迎松¹⁾²⁾ 黄志祥^{1)2)†}

1) (安徽大学电子信息工程学院, 合肥 230601)

2) (安徽大学, 智能计算与信号处理教育部重点实验室, 合肥 230601)

(2023 年 4 月 1 日收到; 2023 年 5 月 9 日收到修改稿)

提出了一种新的处理有耗型德拜色散媒质的单步蛙跳遵从发散隐式-时域有限差分 (complying divergence implicit FDTD, CDI-FDTD) 方法. 从频域下的 Maxwell 方程出发, 利用傅里叶变换将电磁场分量从频域转换到时域, 并采用递归积分 (recursive integration, RI) 方法对频域-时域转换过程中存在的积分项进行近似处理. 然后应用单步蛙跳隐式格式对时域 Maxwell 方程和辅助变量进行差分离散, 推导出有耗型德拜色散媒质的 RI-CDI-FDTD 算法的迭代公式. 接着利用 von Neumann 方法验证了基于 RI 方法的 CDI-FDTD 算法的无条件稳定特性, 最后通过数值算例验证了本文所提方法的正确性和有效性.

关键词: 德拜色散媒质, 遵从发散隐式-时域有限差分, 递归积分, 无条件稳定

PACS: 02.70.Bf, 02.70.-c, 87.16.A-

DOI: 10.7498/aps.72.20230501

1 引言

色散媒质是一种普遍存在于自然界中的物质, 如生物体、复合材料、等离子体、水等, 在生物医学、微波遥感、电磁防护、目标隐身等领域具有广泛应用^[1-5]. 利用电磁计算理论和方法模拟波在色散媒质中的传播, 研究色散媒质的电磁特性, 不仅是解决实际问题的关键, 也是计算电磁学领域的一个研究热点^[6,7]. 时域数值计算方法是计算电磁学领域的重要研究工具, 在现代电磁仿真中有着广泛的应用. 时域数值计算方法主要包括时域有限差分 (finite-difference time-domain, FDTD) 方法^[8,9]、时域有限元方法^[10,11]、时域边界积分方法^[12]等. 与频域方法相比, 时域数值计算方法具有适用于处理宽频带问题、非线性问题及易于处理各种材料特

性等优点, 在电磁波传输、天线设计、微波电路分析、电磁兼容性分析等领域具有重要的应用价值. 此外, 时域数值计算方法可以用于模拟和分析材料的电磁特性, 例如, FDTD 方法可通过数值离散求解 Maxwell 方程, 模拟电磁波在复杂色散媒质中的反射、透射、散射等现象, 表现出巨大的灵活性、鲁棒性和数值实现简单的特点. 然而传统的 FDTD 方法受 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 稳定性条件的影响, 即空间步长大小严格限制时间步长的取值范围. 为了保证包含复杂结构或者精细结构的电磁模型的精确仿真, 往往需要采用较高的网格分辨率 (最小工作波长与空间步长的比值), 考虑到 CFL 条件的影响, 时间步长的取值较小, 最终导致 FDTD 方法的计算效率不高^[13-15]. 为克服传统 FDTD 方法中 CFL 条件的限制, 一些无条件稳定方法, 如交替方向隐式时域有限差分 (alternating-direction-

* 国家自然科学基金 (批准号: 62201003, 2022YFA1404003, 62101002, U20A20164, 61901001) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zxhuang@ahu.edu.cn

implicit FDTD, ADI-FDTD) 方法, 局部一维时域有限差分 (locally one-dimensional, LOD-FDTD) 方法被提出 [16,17], 并成功应用于电磁波与色散媒质相互作用的仿真. 最近, 一步蛙跳 (leapfrog) ADI-FDTD (LADI-FDTD) 方法受到了广泛的关注 [18,19]. 该方法是对传统分裂步 ADI-FDTD 方法的进一步推导, 得到与显式 FDTD 方法类似的电场和磁场单步蛙跳更新方案. 同时, 数值分析表明该方法与传统 ADI-FDTD 方法具有相同的数值计算精度. 然而, LADI-FDTD 方法不服从发散性, 违反高斯定律, 计算精度有待进一步提高 [20]. 最近, 文献 [21, 22] 提出了一种无条件稳定遵从发散隐式-FDTD (complying divergence implicit FDTD, CDI-FDTD) 方法, 该方法的精度比 LADI-FDTD 方法更高. 然而, 该算法并未应用于色散媒质的计算中, 这在一定程度上限制了 CDI-FDTD 方法在实际电磁计算问题中的应用范围.

另外, 在利用 FDTD 方法处理色散媒质时, 由于介电常数是与频率相关的函数, 需要将电磁场频域本构关系转化到时域, 并整合到 FDTD 方法框架下进行场分量的迭代求解. 常用的处理方法如: 递归卷积方法、辅助微分方程方法、Z 变化方法等 [23–26], 能够有效地处理各种频域相关的色散模型. 然而, 采用这些方法所导出的场分量计算公式与传统 FDTD 方法的计算公式具有较大差异, 兼容性不高, 降低了 FDTD 方法对色散媒质建模的灵活性. 最近, 文献 [27] 报道了采用递归积分 (recursive integration, RI) 方法构建多级完美匹配层 (perfectly matched layer, PML) 技术的仿真工作, 并指出 RI 方法不改变传统 FDTD 方法中电磁场分量的数值迭代公式, 只在 PML 区域添加辅助变量即可, 数值实现容易且与传统 FDTD 方法的兼容性较高. 根据此工作, 文献 [28] 报道了采用递归积分方法处理德拜型色散媒质的仿真工作. 理论推导表明, RI 方法能够实现 FDTD 仿真中 PML 和德拜型色散媒质的一体化建模. 数值结果也验证了 RI 方法的正确性和有效性.

鉴于 CDI-FDTD 方法的无条件稳定和高精度的优点及 RI 方法的数值计算优势, 本文提出了一种基于 RI 方法的 CDI-FDTD 方法. 该方法能够有效模拟电磁波在三维德拜型色散中的传播和散射行为, 包括色散媒质板的反射、透射以及多层色散媒质的散射现象. RI-CDI-FDTD 方法不改变

传统 CDI-FDTD 方法的基本迭代公式, 只需要在色散媒质区域添加辅助变量即可. 因此 RI-CDI-FDTD 方法与传统 CDI-FDTD 方法具有较高的兼容性. 此外, 通过采用 von Neumann 方法验证了 RI-CDI-FDTD 算法处理有耗型德拜色散媒质的无条件稳定特性. 最后, 采用两种数值算例验证了本文所提方法的正确性和有效性.

2 方 法

一般有耗色散媒质中的麦克斯韦旋度方程可写成如下形式:

$$\mathbf{j}\omega\epsilon_r(\omega)\mathbf{E} = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)\mathbf{H} - \sigma\mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\mathbf{j}\omega\mu_0\mathbf{H} = (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\mathbf{E}, \quad (2)$$

其中, ω 表示角频率, $\epsilon_r(\omega)$ 为介电系数, 是频率相关的函数; \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 分别表示电场强度与磁场强度; σ 表示电导率; 矩阵 \mathbf{A}_1 和 \mathbf{A}_2 分别为

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

人体组织的频域电磁特性可采用德拜模型描述, 因此, (1) 式中与频率相关的相对介电常数 ϵ_r 为

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_0\epsilon_\infty + \epsilon_0 \frac{\Delta\epsilon}{1 + \mathbf{j}\omega\tau}, \quad (4)$$

其中, ϵ_0 为自由空间下的相对介电常数, ϵ_∞ 为无穷大频率下的相对介电常数, $\Delta\epsilon = \epsilon_s - \epsilon_\infty$, ϵ_s 为静态相对介电常数, τ 为德拜模型的驰豫时间. 通过将 (4) 式代入 (1) 式中, 可以得到

$$\mathbf{j}\omega\epsilon_0 \left(\epsilon_\infty + \frac{\Delta\epsilon}{1 + \mathbf{j}\omega\tau} \right) \mathbf{E} = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)\mathbf{H} - \sigma\mathbf{E}. \quad (5)$$

首先, 令 $s = \epsilon_\infty + \frac{\Delta\epsilon}{1 + \mathbf{j}\omega\tau}$, 将其代入 (5) 式得到

$$\mathbf{j}\omega\epsilon_0\mathbf{E} = \frac{1}{s}\mathbf{A}_1\mathbf{H} - \frac{1}{s}\mathbf{A}_2\mathbf{H} - \frac{1}{s}\sigma\mathbf{E}, \quad (6)$$

令 $\phi = (1 - s)/s$, 并代入 (6) 式中, 得到

$$\mathbf{j}\omega\epsilon_0\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)\mathbf{H} + \psi_{H1} - \psi_{H2} - \psi_E, \quad (7)$$

其中, $\psi_{H1} = \phi\mathbf{A}_1\mathbf{H}$, $\psi_{H2} = \phi\mathbf{A}_2\mathbf{H}$, $\psi_E = \phi\mathbf{E}$. (7) 式中前 3 项为带有有耗项的麦克斯韦方程 $\mathbf{j}\omega\epsilon_0\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)\mathbf{H}$, 其余辅助变量为色散

区域中电场分量的修正项.

将 (2) 式和 (7) 式从频域转换到时域, 得到

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \mathbf{E}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \mathbf{H} + \psi_{H1} - \psi_{H2} - \psi_E. \quad (9)$$

其中, μ_0 表示自由空间下的磁导系数.

对 (8) 式与 (9) 式应用单步蛙跳隐式差分离散格式^[29], 可得到如下方程.

第 1 步 ($n - 1/2 \rightarrow n + 1/2$), 电场 \mathbf{E} 的迭代公式为

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon_0\mu_0} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \right) \mathbf{h}^n = \mathbf{H}^n, \quad (10) \\ \mathbf{E}^{n+1/2} = \frac{2\varepsilon_0 - \sigma\Delta t}{2\varepsilon_0 + \sigma\Delta t} \mathbf{E}^{n-1/2} \\ + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_0 + \sigma\Delta t} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \mathbf{h}^n \\ + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_0 + \sigma\Delta t} (\psi_{h1}^n - \psi_{h2}^n - \sigma\psi_E^n). \quad (11) \end{aligned}$$

第 2 步 ($n \rightarrow n + 1$), 磁场 \mathbf{H} 的迭代公式为

$$\left(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \frac{\Delta t^2}{4\varepsilon_0\mu_0} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \right) \mathbf{e}^{n+1/2} = \mathbf{E}^{n+1/2}, \quad (12)$$

$$\mathbf{H}^{n+1} = \mathbf{H}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\mu_0} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \mathbf{e}^{n+1/2}, \quad (13)$$

式中 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 分别为电场强度和磁场强度输出的真实场量, \mathbf{h} 和 \mathbf{e} 分别为磁场和电场的辅助变量, $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 表示 3×3 的单位矩阵.

将 $\phi = (1 - s)/s$ 代入 $\psi_{h1} = \phi \mathbf{A}_1 \mathbf{h}$ 中, 得到

$$s(\psi_{h1} + \mathbf{A}_1 \mathbf{h}) = \mathbf{A}_1 \mathbf{h}, \quad (14)$$

将 $s = \varepsilon_\infty + \frac{\Delta\varepsilon}{1 + j\omega\tau}$ 代入 (14) 式, 得到

$$\left(\varepsilon_\infty + \frac{\Delta\varepsilon}{1 + j\omega\tau} \right) (\psi_{h1} + \mathbf{A}_1 \mathbf{h}) = \mathbf{A}_1 \mathbf{h}. \quad (15)$$

假定:

$$\mathbf{P}_{h1} = \frac{\Delta\varepsilon}{1 + j\omega\tau} (\psi_{h1} + \mathbf{A}_1 \mathbf{h}), \quad (16)$$

进一步推导 (16) 式得到

$$\mathbf{P}_{h1} = \frac{1}{j\omega} \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\tau} \psi_{h1} + \frac{\Delta\varepsilon}{\tau} \mathbf{A}_1 \mathbf{h} - \frac{1}{\tau} \mathbf{P}_{h1} \right). \quad (17)$$

将 (17) 式从频域转化为时域, 可得到

$$\mathbf{P}_{h1} = \int_0^t \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\tau} \psi_{h1} + \frac{\Delta\varepsilon}{\tau} \mathbf{A}_1 \mathbf{h} - \frac{1}{\tau} \mathbf{P}_{h1} \right) dt. \quad (18)$$

采用文献 [27] 提出的递归积分方法, (18) 式可

近似为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{h1}^n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\tau} \psi_{h1}^k + \frac{\Delta\varepsilon}{\tau} \mathbf{A}_1 \mathbf{h}^k - \frac{1}{\tau} \mathbf{P}_{h1}^k \right) \\ + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\tau} \psi_{h1}^n + \frac{\Delta\varepsilon}{\tau} \mathbf{A}_1 \mathbf{h}^n - \frac{1}{\tau} \mathbf{P}_{h1}^n \right), \quad (19) \end{aligned}$$

重新整理 (19) 式, 得到

$$\mathbf{P}_{h1}^n = \frac{\Delta\varepsilon\Delta t}{2\tau + \Delta t} \psi_{h1}^n + \frac{\Delta\varepsilon\Delta t}{2\tau + \Delta t} \mathbf{A}_1 \mathbf{h}^n + \frac{\Delta\varepsilon\Delta t}{2\tau + \Delta t} \mathbf{Q}_{h1}^{n-1}, \quad (20)$$

其中, \mathbf{Q}_{h1}^{n-1} 表达式为

$$\mathbf{Q}_{h1}^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\tau} \psi_{h1}^k + \frac{\Delta\varepsilon}{\tau} \mathbf{A}_1 \mathbf{h}^k - \frac{1}{\tau} \mathbf{P}_{h1}^k \right). \quad (21)$$

同时, 由 (15) 式可以推导出 ψ_{h1}^n 的时域表达式为

$$\psi_{h1}^n = \frac{1 - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_\infty} \mathbf{A}_1 \mathbf{h}^n - \frac{1}{\varepsilon_\infty} \mathbf{P}_{h1}^n, \quad (22)$$

将 (20) 式代入 (22) 式中, 得到

$$\begin{aligned} \psi_{h1}^n = \left(\frac{1}{\varepsilon_\infty + f} - 1 \right) \mathbf{A}_1 \mathbf{h}^n \\ - \frac{2\tau}{(\varepsilon_\infty + f)(2\tau + \Delta t)} \mathbf{Q}_{h1}^{n-1}, \quad (23) \end{aligned}$$

其中, $f = \frac{\Delta\varepsilon\Delta t}{2\tau + \Delta t}$.

根据 (21) 式, \mathbf{Q}_{h1} 的迭代公式可写成如下形式:

$$\mathbf{Q}_{h1}^n = \mathbf{Q}_{h1}^{n-1} + \Delta t \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\tau} \psi_{h1}^n + \frac{\Delta\varepsilon}{\tau} \mathbf{A}_1 \mathbf{h}^n - \frac{1}{\tau} \mathbf{P}_{h1}^n \right), \quad (24)$$

可以看出, (24) 式中包含 ψ_{h1}^n 与 \mathbf{P}_{h1}^n . 通过将 (20) 式和 (23) 式代入 (24) 式中, 可得到

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{h1}^n = \left(\frac{2\tau - \Delta t}{2\tau + \Delta t} - \frac{4f\tau}{(2\tau + \Delta t)(\varepsilon_\infty + f)} \right) \mathbf{Q}_{h1}^{n-1} \\ + \frac{2f}{\varepsilon_\infty + f} \mathbf{A}_1 \mathbf{h}^n. \quad (25) \end{aligned}$$

定义系数:

$$R_A = \frac{1}{\varepsilon_\infty + f} - 1, \quad R_B = \frac{2\tau}{(\varepsilon_\infty + f)(2\tau + \Delta t)},$$

$$R_C = \frac{2\tau - \Delta t}{2\tau + \Delta t} - \frac{4f\tau}{(2\tau + \Delta t)(\varepsilon_\infty + f)},$$

$$R_D = \frac{2f}{\varepsilon_\infty + f}.$$

则 (23) 式与 (25) 式可写成如下形式:

$$\psi_{h1}^n = R_A \times \mathbf{A}_1 \mathbf{h}^n - R_B \times \mathbf{Q}_{h1}^{n-1}, \quad (26)$$

$$\mathbf{Q}_{h1}^n = R_C \times \mathbf{Q}_{h1}^{n-1} + R_D \times \mathbf{A}_1 \mathbf{h}^n. \quad (27)$$

类似地, 采用以上推导方法, (11) 式中的辅助项 ψ_{h2} 和 ψ_E 以及辅助项 Q_{h2} 和 Q_E 的迭代形式如下:

$$\psi_{h2}^n = R_A \times A_2 h^n - R_B \times Q_{h2}^{n-1}, \quad (28)$$

$$Q_{h2}^n = R_C \times Q_{h2}^{n-1} + R_D \times A_2 h^n, \quad (29)$$

$$\psi_E^n = R_A \times E^{n-1/2} - R_B \times Q_E^{n-1}, \quad (30)$$

$$Q_E^n = R_C \times Q_E^{n-1} + R_D \times E^{n-1/2}. \quad (31)$$

最终, 有耗型德拜色散媒质的 RI-CDI-FDTD 方法的数值计算步骤可总结如下:

- 1) 通过 n 时刻的磁场分量 H 更新辅助变量 h ;
- 2) 通过 (26), (28) 和 (30) 式更新辅助变量 ψ_{h1} , ψ_{h2} 和 ψ_E ;
- 3) 通过 (27), (29) 和 (31) 式更新辅助变量 Q_{h1} , Q_{h2} 和 Q_E ;

- 4) 通过 (11) 式更新电场分量 E ;
- 5) 通过 (12) 式更新辅助变量 e ;
- 6) 通过 (13) 式更新磁场分量 H ;
- 7) 回到步骤 1)。

3 稳定性分析

为了分析本文所提方法的无条件稳定特性, 首先将 RI-CDI-FDTD 方法处理有耗型德拜色散媒质的数值迭代公式写成如下矩阵形式:

$$M_L P^{n+1} = M_R P^n, \quad (32)$$

其中, $P = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, Q_{h1_x}, Q_{h1_y}, Q_{h1_z}, Q_{h2_x}, Q_{h2_y}, Q_{h2_z}, Q_{E_x}, Q_{E_y}, Q_{E_z}, \psi_{h1_x}, \psi_{h1_y}, \psi_{h1_z}, \psi_{h2_x}, \psi_{h2_y}, \psi_{h2_z}, \psi_{E_x}, \psi_{E_y}, \psi_{E_z})$.

$$M_L = \begin{bmatrix} A_{L11} & A_{L12} & A_{L13} & A_{L14} & A_{L15} & A_{L16} & A_{L17} & A_{L18} \\ A_{L21} & A_{L22} & A_{L23} & A_{L24} & A_{L25} & A_{L26} & A_{L27} & A_{L28} \\ A_{L31} & A_{L32} & A_{L33} & A_{L34} & A_{L35} & A_{L36} & A_{L37} & A_{L38} \\ A_{L41} & A_{L42} & A_{L43} & A_{L44} & A_{L45} & A_{L46} & A_{L47} & A_{L48} \\ A_{L51} & A_{L52} & A_{L53} & A_{L54} & A_{L55} & A_{L56} & A_{L57} & A_{L58} \\ A_{L61} & A_{L62} & A_{L63} & A_{L64} & A_{L65} & A_{L66} & A_{L67} & A_{L68} \\ A_{L71} & A_{L72} & A_{L73} & A_{L74} & A_{L75} & A_{L76} & A_{L77} & A_{L78} \\ A_{L81} & A_{L82} & A_{L83} & A_{L84} & A_{L85} & A_{L86} & A_{L87} & A_{L88} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

其中, $A_{L11} = A_{L22} = A_{L33} = A_{L44} = A_{L55} = A_{L66} = A_{L77} = A_{L88} = I_{3 \times 3}$.

$$A_{L16} = \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_0 + \sigma\Delta t} \times I_{3 \times 3}, \quad A_{L17} = \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_0 + \sigma\Delta t} \times I_{3 \times 3}, \quad A_{L18} = \frac{2\Delta t\sigma}{2\varepsilon_0 + \sigma\Delta t} \times I_{3 \times 3},$$

$$A_{L21} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\Delta t D_z / \mu_0}{1 - \Delta t^2 D_z^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & \frac{\Delta t D_y / \mu_0}{1 - \Delta t^2 D_x^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} \\ \frac{\Delta t D_z / \mu_0}{1 - \Delta t^2 D_y^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & 0 & \frac{-\Delta t D_x / \mu_0}{1 - \Delta t^2 D_z^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} \\ \frac{-\Delta t D_y / \mu_0}{1 - \Delta t^2 D_x^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & \frac{\Delta t D_x / \mu_0}{1 - \Delta t^2 D_z^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & 0 \end{bmatrix},$$

M_L 矩阵中其余元素为 $0_{3 \times 3}$, 其中, $D_p = \partial / \partial p$ ($p = x, y, z$) 表示对 p 的空间的一阶导数算子。

$$M_R = \begin{bmatrix} A_{R11} & A_{R12} & A_{R13} & A_{R14} & A_{R15} & A_{R16} & A_{R17} & A_{R18} \\ A_{R21} & A_{R22} & A_{R23} & A_{R24} & A_{R25} & A_{R26} & A_{R27} & A_{R28} \\ A_{R31} & A_{R32} & A_{R33} & A_{R34} & A_{R35} & A_{R36} & A_{R37} & A_{R38} \\ A_{R41} & A_{R42} & A_{R43} & A_{R44} & A_{R45} & A_{R46} & A_{R47} & A_{R48} \\ A_{R51} & A_{R52} & A_{R53} & A_{R54} & A_{R55} & A_{R56} & A_{R57} & A_{R58} \\ A_{R61} & A_{R62} & A_{R63} & A_{R64} & A_{R65} & A_{R66} & A_{R67} & A_{R68} \\ A_{R71} & A_{R72} & A_{R73} & A_{R74} & A_{R75} & A_{R76} & A_{R77} & A_{R78} \\ A_{R81} & A_{R82} & A_{R83} & A_{R84} & A_{R85} & A_{R86} & A_{R87} & A_{R88} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

其中, $\mathbf{A}_{R11} = \frac{2\varepsilon_0 - \sigma\Delta t}{2\varepsilon_0 + \sigma\Delta t} \times \mathbf{I}_{3 \times 3}$, $\mathbf{A}_{R22} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$, $\mathbf{A}_{R51} = R_D \times \mathbf{I}_{3 \times 3}$, $\mathbf{A}_{R55} = R_C \times \mathbf{I}_{3 \times 3}$,

$$\mathbf{A}_{R12} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2\Delta t D_z / (2\varepsilon_0 + \sigma\Delta t)}{1 - \Delta t^2 D_z^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & \frac{2\Delta t D_y / (2\varepsilon_0 + \sigma\Delta t)}{1 - \Delta t^2 D_x^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} \\ \frac{2\Delta t D_z / (2\varepsilon_0 + \sigma\Delta t)}{1 - \Delta t^2 D_y^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & 0 & \frac{-2\Delta t D_x / (2\varepsilon_0 + \sigma\Delta t)}{1 - \Delta t^2 D_x^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} \\ \frac{-2\Delta t D_y / (2\varepsilon_0 + \sigma\Delta t)}{1 - \Delta t^2 D_y^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & \frac{2\Delta t D_x / (2\varepsilon_0 + \sigma\Delta t)}{1 - \Delta t^2 D_z^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{R32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{R_D \times D_y}{1 - \Delta t^2 D_x^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} \\ \frac{R_D \times D_z}{1 - \Delta t^2 D_y^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_D \times D_x}{1 - \Delta t^2 D_z^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{R33} = R_C \times \mathbf{I}_{3 \times 3},$$

$$\mathbf{A}_{R42} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_D \times D_z}{1 - \Delta t^2 D_z^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_D \times D_x}{1 - \Delta t^2 D_x^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} \\ \frac{R_D \times D_y}{1 - \Delta t^2 D_y^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{R44} = R_C \times \mathbf{I}_{3 \times 3},$$

$$\mathbf{A}_{R62} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{R_A \times D_y}{1 - \Delta t^2 D_x^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} \\ \frac{R_A \times D_z}{1 - \Delta t^2 D_y^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_A \times D_x}{1 - \Delta t^2 D_z^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{R63} = -R_B \times \mathbf{I}_{3 \times 3},$$

$$\mathbf{A}_{R72} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_A \times D_z}{1 - \Delta t^2 D_z^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_A \times D_x}{1 - \Delta t^2 D_x^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} \\ \frac{R_A \times D_y}{1 - \Delta t^2 D_y^2 / (4\varepsilon_0 \mu_0)} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{R74} = -R_B \times \mathbf{I}_{3 \times 3},$$

$\mathbf{A}_{R81} = R_A \times \mathbf{I}_{3 \times 3}$, $\mathbf{A}_{R85} = -R_B \times \mathbf{I}_{3 \times 3}$, \mathbf{M}_R 矩阵中其余元素为 $\mathbf{0}_{3 \times 3}$.

电磁波在空间域中的场分量可以表示为

$$\phi_{i,j,k}^n = \varphi \zeta^n \exp[j(k_x i \Delta x + k_y j \Delta y + k_z k \Delta z)], \quad (35)$$

其中, $\phi = E, H, Q_{h1}, Q_{h2}, Q_E, \psi_{h1}, \psi_{h2}, \psi_E, \varphi_\phi$ 表示场分量的幅值. ζ 表示时间增长因子, $k_p (p = x, y, z)$ 表示 p 方向的傅里叶波数. 下标 i, j, k 表示 Yee 网格的节点位置, $\Delta p (p = x, y, z)$ 表示离散化的网格尺寸.

利用二阶中心差分方法近似空间一阶偏导数, 得到

$$D_p \phi_{i,j,k}^n = \frac{\phi_{i,j,k}^n \left(p + \frac{\Delta p}{2}\right) - \phi_{i,j,k}^n \left(p - \frac{\Delta p}{2}\right)}{\Delta p} = \sigma_p \phi_{i,j,k}^n, \quad (36)$$

其中, $\sigma_p = 2j \sin(k_p \Delta p / 2) / \Delta p$ ($p = x, y, z$). 将

(36) 式代入 (32) 式, 得到

$$\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{M} \mathbf{P}^n = (\zeta \mathbf{M}_L - \mathbf{M}_R) \mathbf{P}^n. \quad (37)$$

为使 (37) 式存在非零解, 系数矩阵 \mathbf{M} 的行列式必须为 0. 同时, 为保证数值方法在迭代过程中保持稳定, 增长因子 ζ 的模值必须不大于 1. ζ 的表达式可以通过求解矩阵 \mathbf{M} 行列式得到. 然而, 由于 ζ 的表达式繁琐, 难以确定其数值范围. 可以看出, 矩阵 \mathbf{M} 中变量包括 $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \sigma, \varepsilon_\infty, \varepsilon_s, \tau$ 和 σ_p . 因此, 可以将数值算例中的参数 ($\varepsilon_\infty = 29.9, \varepsilon_s = 47.9, \tau = 43.6^{-12} \text{ s}, \sigma = 0.540 \text{ S/m}$) 代入矩阵 \mathbf{M} 中来确定增长因子 ζ 的模值范围. 此外, 为了与算例中使用的网格保持一致, 网格大小选择为: $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.2 \text{ mm}$. 需要注意的, σ_p 中 $k_p \Delta p / 2$ 的取值范围为 $0 - \pi$.

图 1 所示为 RI-CDI-FDTD 方法取不同的 CFLN 时, 增长因子 ζ 的模值大小, 其中 $\text{CFLN} = \Delta t_{\text{RI-CDI-FDTD}} / \Delta t_{\text{FDTD}}$, $\Delta t_{\text{RI-CDI-FDTD}}$ 为 RI-CDI-FDTD 方法的时间步长, Δt_{FDTD} 表示传统 FDTD 方法在 CFL 条件下的最大时间步长. 可以发现, ζ 的模值均不大于 1, 验证本文所提 RI-CDI-FDTD 方法的无条件稳定特性.

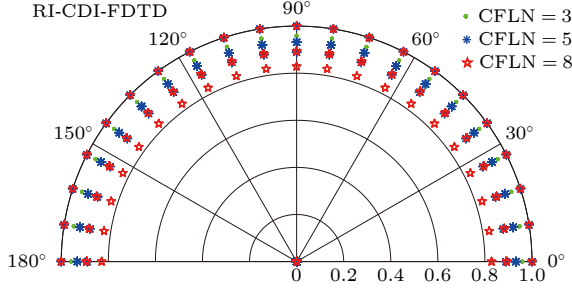


图 1 RI-CDI-FDTD 方法在 CFLN 分别取 3, 5, 8 时, ζ 的模值随 $k_p \Delta p/2$ 的变化

Fig. 1. Modulus value of the growth factor ζ varies with $k_p \Delta p/2$ when using the RI-CDI-FDTD method with CFLN of 3, 5 and 8.

4 数值计算

为了验证本文所提 RI-CDI-FDTD 方法处理色散媒质的正确性和有效性. 数值模拟了电磁波在有耗型德拜色散媒质中的反射、透射及散射特性, 并与解析方法和传统 FDTD 方法计算所得结果作比较.

4.1 波导模型

图 2 所示为在 x 和 y 方向计算空间尺寸为 $2 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$ 的矩形波导模型, 平面波沿 $+z$ 方向传播. 整个仿真空间在 z 方向为 24 mm , 两端设置 10 层的 CPML(convolutional perfectly matched layer) 进行截断, 色散介质的厚度为 1.4 mm . 空间步长设置为 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.2 \text{ mm}$, 高斯脉冲的时域形式为: $\text{pulse}(n) = 100 \times \exp[-(t - t_0)^2 / \tau^2]$ ($\tau = 0.1 \text{ ns}$, $t_0 = 5\tau$). 皮肤组织的德拜参数为: $\varepsilon_s = 47.9$, $\varepsilon_\infty = 29.9$, $\tau = 43.6 \text{ ps}$ 和 $\sigma = 0.540 \text{ S/m}$.

图 3 分别显示了解析方法、传统 FDTD 方法 (CFLN = 1) 及 RI-CDI-FDTD 方法 (CFLN = 3, 5, 8) 计算所得有耗型德拜色散媒质板的传输和反射系数随频率的变化曲线. 可以看出, 本文所提 RI-CDI-FDTD 方法采用不同时间步长计算的结果与传统的 FDTD 方法及解析方法计算结果一致, 验证了本文所提方法的正确性.

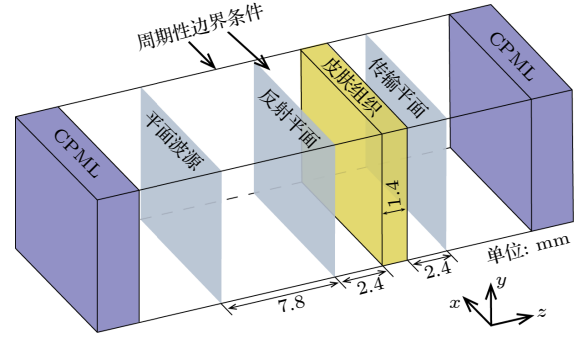


图 2 仿真三维波导模型

Fig. 2. Simulation of 3D waveguide model.

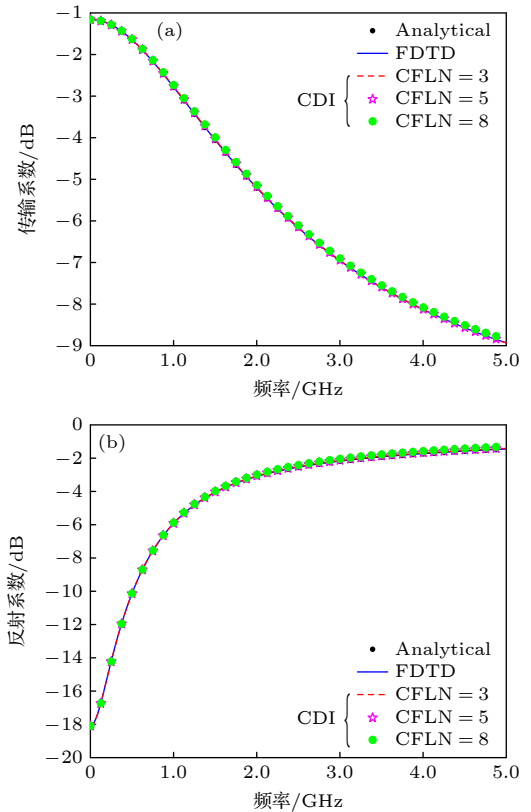


图 3 解析方法、传统 FDTD 方法 (CFLN = 1) 及 RI-CDI-FDTD 方法 (CFLN = 3, 5, 8) 计算所得色散介质板的传输和反射系数 (a) 传输系数; (b) 反射系数

Fig. 3. Transmission and reflection coefficients of a dispersive medium slab calculated by using analytical method, traditional FDTD method (CFLN=1), and RI-CDI-FDTD method (CFLN = 3, 5, 8): (a) Transmission coefficient; (b) reflection coefficient.

4.2 多层生物组织模型

图 4 所示为由厚度为 0.2 mm 的皮肤组织和厚度为 0.4 mm 的脂肪组织包围尺寸为 $18 \text{ mm} \times 13 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ 的骨头组织的仿真模型. 在数值仿真中, 空间步长设置为 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.2 \text{ mm}$,

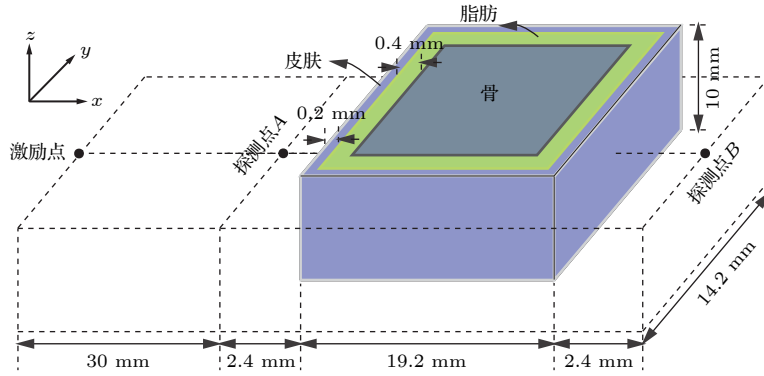


图 4 三维多层生物组织示意图

Fig. 4. 3D schematic of multi-layer biological tissue.

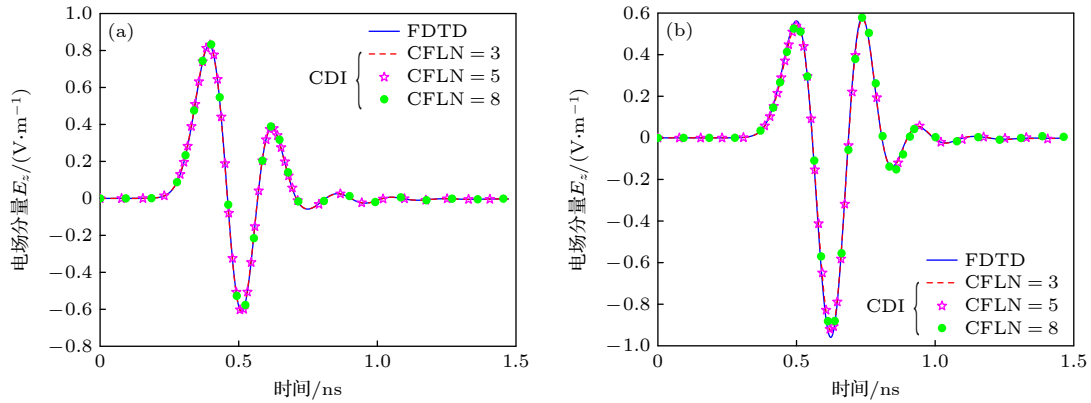


图 5 解析方法、传统 FDTD 方法 (CFLN = 1) 及 RI-CDI-FDTD 方法 (CFLN = 3, 5, 8) 计算所得探测的时域波形变化曲线 (a) A 点; (b) B 点

Fig. 5. Time-domain waveform variation curves of detection points calculated by analytical method, traditional FDTD method (CFLN = 1), and RI-CDI-FDTD method (CFLN = 3, 5, 8): (a) The detection point A; (b) the detection point B.

整个计算空间包含 $191 \times 351 \times 191$ 个 Yee 元胞, 用 10 层的 CPML 截断计算空间. 其中, 表 1 列出了皮肤、脂肪以及骨头的德拜参数^[30]. 激励源的时域表达形式与算例 1 相同, 其中激励源参数为: $\tau = 0.1$ ns, $t_0 = 4\tau$. 图 5 所示为 RI-CDI-FDTD 方法 (CFLN = 3, 5, 8) 与传统的 FDTD 方法计算所得探测点 A 和 B 的波形随时间的变化. 可以看出, 采用不同时间步长的 RI-CDI-FDTD 方法 (CFLN = 3, 5, 8) 计算结果与传统 FDTD 方法 (CFLN = 1) 计算结果一致, 再一次验证了本文所提方法的正确性. 为了验证 RI-CDI-FDTD 方法的长时间稳定特性, 将探测点 A 的记录时间延长到 600 ns, 如图 6

所示, 随着时间的延长, A 点记录的电场强度 E_z 振幅衰减到 0 并保持稳定, 证明了 RI-CDI-FDTD 方法的长时间稳定特性.

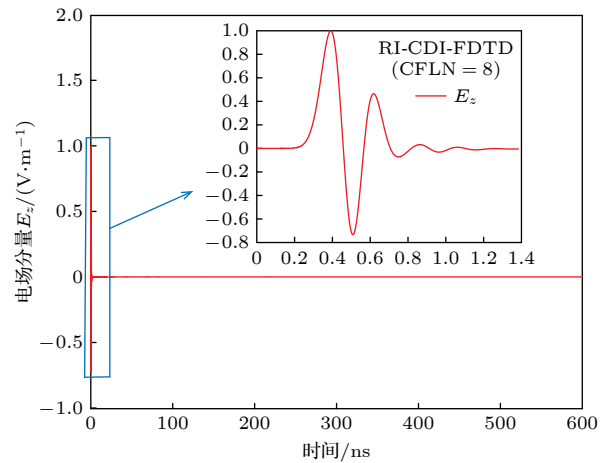


图 6 使用 RI-CDI-FDTD (CFLN = 8) 方法计算 A 点电场强度的时域波形图

Fig. 6. Waveform of the recorded E_z field versus time by the RI-CDI-FDTD method (CFLN = 8).

表 1 不同生物组织的参数

Table 1. Parameters of different biological tissues.

生物组织	$\sigma/(\text{S}\cdot\text{m}^{-1})$	ϵ_s	ϵ_∞	τ/ps	CPU time/s
皮肤	0.540	47.9	29.9	43.6	72.7038
脂肪	0.037	5.53	4.00	23.6	89.7149
骨头	0.104	14.2	7.36	34.1	29.9594

最后, 表 2 所示为 RI-CDI-FDTD 方法与传统 FDTD 方法的仿真时间对比, 可以发现, 当 RI-CDI-FDTD 方法的时间步长 ($CFLN = 3$) 是传统 FDTD 方法时间步长 ($CFLN = 1$) 的 3 倍时, RI-CDI-FDTD 方法的计算效率高于传统 FDTD 方法. 当 RI-CDI-FDTD 方法的时间步长取 $CFLN = 8$ 时, 计算效率方面的优势更加明显.

表 2 两种方法的仿真时间比较

Table 2. Comparison of simulation time between two methods.

方法	时间/s
RI-FDTD	621.5737
RI-CDI-FDTD ($CFLN = 3$)	562.0881
RI-CDI-FDTD ($CFLN = 5$)	352.1662
RI-CDI-FDTD ($CFLN = 8$)	219.5618

5 结 论

本文提出了一种用于模拟有耗型德拜色散媒质的 RI-CDI-FDTD 方法. RI-CDI-FDTD 方法不改变传统 CDI-FDTD 方法的数值迭代公式, 只需要对色散媒质区域中的场分量添加辅助变量即可, 数值实现容易且电磁建模灵活性较高. 同时, 本文采用 von Neumann 方法对 RI-CDI-FDTD 方法进行数值稳定性分析, 验证了其具有无条件稳定特性. 最后, 通过数值算例验证了该方法的正确性和有效性. 该项研究工作可为基于时域数值方法的复杂色散媒质建模与精确求解提供重要的数值仿真工具及理论指导.

参考文献

- [1] Cheng X, Shao W, Wang K, Wang B Z 2019 *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.* **18** 1931
- [2] Chakaroathai J 2018 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **67** 6076
- [3] Fang Y, Liu J F, Jiao Z H, Bai G H, Xi X L 2018 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **47** 173
- [4] Tian H M, He S M, Wang M Y, Li G P, Yu M X, Zhang S T, Xu J 2021 *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.* **20** 2392
- [5] Chen B Y, Zhang Y R, Wang L, Wang F F 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 144101 (in Chinese) [陈碧云, 张业荣, 王磊, 王芳芳 2016 物理学报 **65** 144101]
- [6] Chen W, Huang H, Yang L X, Bo Y, Huang Z X 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 060201 (in Chinese) [陈伟, 黄海, 杨利霞, 薄勇, 黄志祥 2023 物理学报 **72** 060201]
- [7] Yang L X, Liu C, Li Q L, Yan Y B 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 064101 (in Chinese) [杨利霞, 刘超, 李清亮, 闫玉波 2022 物理学报 **71** 064101]
- [8] Ge D B, Yan Y B 2005 *Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetic Waves* (3rd Ed.) (Xi'an: Xidian University Press) pp259–294 (in Chinese) [葛德彪, 闫玉波 2005 电磁波时域有限差分方法 (第三版) (西安: 西安电子科技大学出版社) 第259—294页]
- [9] Chen J, Wang J G, Xu N 2016 *Weakly Conditionally Stable Finite-Difference Time-Domain Method* (Beijing: Science Press) pp28–30 (in Chinese) [陈娟, 王建国, 许宁 2016 弱条件稳定时域有限差分方法 (北京: 科学出版社) 第28—30页]
- [10] Shemshadi A 2018 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **47** 647
- [11] Gong Z, Yang S 2021 *IEEE Trans. Magn.* **57** 1
- [12] Lasisi S O, Benson T M, Greenaway M T, Gradoni G, Cools K 2022 *IEEE J. Multiscale Multiphys. Comput. Techn.* **7** 161
- [13] Pereda A, Vielva L A, Vegas A, Prieto A 2001 *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* **49** 377
- [14] Park J, Jung K Y 2021 *Opt. Express* **29** 21639
- [15] Mou C H, Chen J, Fan K H, Lu Y 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 184101 (in Chinese) [牟春晖, 陈娟, 范凯航, 鲁艺 2022 物理学报 **71** 184101]
- [16] Feng N, Zhang Y, Zhu J, Zeng Q, Wang G P 2021 *IEEE Access* **9** 18550
- [17] Liu H, Zhao X, Wang X H, Yang S, Chen Z 2022 *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **64** 827
- [18] Liu S, Zou B, Zhang L M, Ren S L 2020 *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.* **19** 816
- [19] Fang M, Feng J, Xie G D, Lu Y C, Zhang X Q, Han J G, Huang Z X, Wu X L 2023 *IEEE Microw. Wirel. Compon. Lett.* **33** 375
- [20] Gan T H, Tan E L 2012 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **60** 5801
- [21] Tan E L 2021 *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.* **20** 853
- [22] Tan E L 2022 *Axioms* **11** 23
- [23] Xie G D, Fang M, Huang Z X, Wu X L, Ren X G, Feng N X 2023 *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* **71** 1009
- [24] Kurnaz O, Aksoy S 2022 *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **64** 2149
- [25] Kim Y J, Jung K Y 2021 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **69** 6600
- [26] Zhang Y, Feng N, Zhu J, Xie G, Yang L, Huang Z 2022 *Remote Sens.* **14** 2397
- [27] Giannopoulos A 2018 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **66** 2987
- [28] Xie G D, Fang M, Huang Z X, Ren X G, Wu X L 2022 *Comput. Phys. Commun.* **280** 108463
- [29] Liu S, Tan E L, Zou B, Zhang L M 2023 *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* **71** 522
- [30] Tekbas K, Costen F, Béranger J P, Himeno R, Yokota H 2016 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **65** 278

RI-CDI-FDTD method and program implementation for electromagnetic characteristics simulation of lossy Debye dispersive medium^{*}

Xie Guo-Da¹⁾²⁾ Hou Gui-Lin¹⁾²⁾ Niu Kai-Kun¹⁾²⁾ Feng Nai-Xing¹⁾²⁾

Fang Ming¹⁾²⁾ Li Ying-Song¹⁾²⁾ Huang Zhi-Xiang^{1)2)†}

1) (School of Electronic and Engineering, Anhui University, Hefei 230601, China)

2) (Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing, Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230601, China)

(Received 1 April 2023; revised manuscript received 9 May 2023)

Abstract

Dispersive media refer to a class of natural substances, including living organisms, composite materials, plasma and water, with diverse applications in areas such as biomedicine, microwave sensing, electromagnetic protection, and stealth technology. In the pursuit of investigating the electromagnetic properties of these media, time-domain numerical methods, including finite difference in time domain (FDTD), finite element method, and time domain boundary integral equation method, have been widely utilized. Time-domain numerical methods are preferred to their frequency-domain counterparts owing to their ability to handle nonlinear and wideband problems, as well as various material properties. The FDTD method, in particular, is a highly adaptable, robust, and easy-to-use numerical method that directly solves the Maxwell equations while also simulating the reflection, transmission, and scattering of electromagnetic waves in complex dispersion media. Nonetheless, the traditional FDTD method suffers low computational efficiency arising from the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) stability condition. To solve the problem of low computational efficiency, a new method, the complying divergence implicit finite-difference time-domain (CDI-FDTD) method with a one-step leapfrog scheme, is introduced for lossy Debye dispersive media. The Maxwell equations in the frequency domain form a starting point, and the Fourier transform is utilized to transform the electromagnetic field components from the frequency domain to the time domain. To approximate the integral terms arising from the frequency-to-time domain transformation, a recursive integration (RI) method is employed. Subsequently, the time-domain Maxwell equations and auxiliary variables are discretized with a one-step leapfrog implicit scheme. The iterative formula of the RI-CDI-FDTD algorithm for lossy Debye dispersive media is then derived. The RI-CDI-FDTD method does not change the formulas of the traditional CDI-FDTD method while only requiring to add auxiliary variables for updating field components to the dispersive medium region. The numerical implementation is straightforward, and the electromagnetic modeling is flexible. Moreover, the unconditional stability of the RI-CDI-FDTD algorithm is proven by using the von Neumann method. Finally, some numerical examples are presented to demonstrate the effectiveness and efficiency of the proposed method. In conclusion, our work contributes a crucial numerical simulation tool to accurately modeling complex dispersive media while providing a systemic stability analysis method for time-domain numerical methods.

Keywords: Debye dispersive medium, complying divergence implicit finite-difference time-domain method, recursive integration method, unconditionally stable

PACS: 02.70.Bf, 02.70.-c, 87.16.A-

DOI: 10.7498/aps.72.20230501

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 62201003, 2022YFA1404003, 62101002, U20A20164, 61901001).

[†] Corresponding author. E-mail: zxhuang@ahu.edu.cn

适用于有耗型德拜色散媒质电磁特性仿真的RI-CDI-FDTD方法及程序实现

谢国大 侯桂林 牛凯坤 冯乃星 方明 李迎松 黄志祥

RI-CDI-FDTD method and program implementation for electromagnetic characteristics simulation of lossy Debye dispersive medium

Xie Guo-Da Hou Gui-Lin Niu Kai-Kun Feng Nai-Xing Fang Ming Li Ying-Song Huang Zhi-Xiang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 150201 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230501

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

适用于一维精细结构电磁目标模拟的通用HIE-FDTD方法及程序实现

Universal HIE-FDTD method and program implementation for one-dimensional fine structure electromagnetic target simulation

物理学报. 2022, 71(18): 184101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220695>

基于时域有限差分法的核壳双金属纳米颗粒光吸收率反转行为

Reversal behavior of optical absorption rate of bimetallic core-shell nanoparticles based on finite-difference time-domain method

物理学报. 2021, 70(20): 207801 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210602>

一种新的基于频域有限差分方法的小周期有机太阳能电池的光电特性

Optical and electrical properties of short-pitch solar cells with finite-difference frequency-domain method

物理学报. 2018, 67(17): 178102 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180821>

非水平海底情况下海底地震波时域有限差分数值模拟

Seabed seismic wave simulation by finite difference time domain scheme in marine environment with complex seafloor topography

物理学报. 2021, 70(22): 224303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210634>

有耗介质层上多导体传输线的电磁耦合时域分析方法

Time domain hybrid method for coupling analysis of multi-conductor transmission lines on the lossy dielectric layer excited by ambient wave

物理学报. 2020, 69(6): 060701 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191214>

含石墨烯分界面有耗分层介质的传播矩阵

Propagation matrix for lossy stratified medium containing graphene sheet

物理学报. 2019, 68(24): 244101 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190823>