

## 热噪声环境下偶极场驱动量子比特动力学\*

熊凡<sup>1)</sup> 陈永聪<sup>1)†</sup> 敖平<sup>2)‡</sup>

1) (上海大学物理系, 定量生命科学国际研究中心, 上海 200444)

2) (四川大学生物医学工程学院, 成都 610065)

(2023 年 4 月 18 日收到; 2023 年 6 月 5 日收到修改稿)

量子计算相比于经典计算在处理某些复杂性问题时具有与生俱来的独特优势, 从而受到广泛关注. 要想实现大规模的量子计算, 最关键的在于不断提高量子比特的保真度. 由于量子比特的脆弱性, 环境热噪声对其保真度具有极大影响. 本文基于偶极场驱动量子比特的方式, 采取随机动力学结构分解方法, 并应用久保-爱因斯坦涨落耗散定理研究热噪声环境下的量子比特控制问题. 偶极场具有 3 个方向的分量, 而不仅仅只限于一个平面, 这种控制方式可以更加灵活地控制量子态. 在不考虑噪声的情况下, 量子态能够 100% 的到达目标态. 而在噪声环境中, 热噪声会使得实际终态和目标终态存在由热涨落造成的偏差, 成为影响量子保真度的主要因素. 为此本文利用蒙特卡罗优化算法对驱动场进行优化, 以此来进一步提高量子比特保真度. 该方法的可行性在数值计算中得到了验证, 可以为实验提供新的解决方案, 用以进一步指导和评估实验.

**关键词:** 量子比特, 偶极场, 热噪声, 保真度**PACS:** 03.67.Lx, 03.65.Yz, 42.50.Lc**DOI:** 10.7498/aps.72.20230625

## 1 引言

量子计算是一种应用量子体系特有的性质 (如叠加态和纠缠态) 对量子信息单元进行计算的新型模式. 量子态巨大的希尔伯特空间, 使其能够执行经典计算机无法实现的操作<sup>[1]</sup>. 在处理一些复杂度大的特定问题时, 量子计算理论上具有更大的优势. 例如非结构化搜索问题和整数素因数分解问题, 通过利用特定的量子算法 (Grover 算法<sup>[2]</sup> 和 Shor 算法<sup>[3]</sup>), 量子计算具有指数级的加速效果, 这些发现引起了广泛的关注, 为量子计算的发展提供了重要的动力.

要想实现具有通用性、可扩展性以及容错性的大规模量子计算机, 需要完成 7 个基本阶段, 其中首当其冲的就是对单个量子比特的运算<sup>[4]</sup>. 换言之,

实现量子计算的首要任务就是对量子比特的精心制备和精确调控. 目前, 可以作为量子比特的物理系统包括超导量子比特<sup>[5–8]</sup>、半导体量子比特<sup>[9,10]</sup>、离子阱系统<sup>[11,12]</sup> 和金刚石氮-空位 (nitrogen-vacancy, NV) 色心<sup>[13,14]</sup> 等, 这些物理系统在退相干时间和可扩展性方面各自占有优势. 在量子计算的研究中, 一个重要的问题是如何设计最优的量子控制方法, 以实现高效、精确、稳定的量子态演化和信息处理. 一种常用的相干控制手段是应用精确定制的交流脉冲<sup>[15,16]</sup>, 绝热跟随 (adiabatic following) 在原则上是相干控制的另一种方法<sup>[17,18]</sup>, 这种方法主要依赖于哈密顿量随时间演化的慢性, 并可能由于非绝热转变而遭受一些损失. 2000 年, Emmanouilidou 等<sup>[19]</sup> 在两能级系统的背景下, 研究和解决了在各种物理约束下量子态随时间演化的控制问题, 提出一种穿越绝热屏障的量子控制方法<sup>[20,21]</sup>,

\* 国家自然科学基金 (批准号: 16Z103060007) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [chenyongcong@shu.edu.cn](mailto:chenyongcong@shu.edu.cn)‡ 通信作者. E-mail: [aoping@sjtu.edu.cn](mailto:aoping@sjtu.edu.cn)

该方法可以消除非绝热跃迁, 使得量子态能 100% 到达目标态.

量子比特的控制需要一个开放的量子系统, 不可避免地会与环境发生相互作用, 从而引发量子退相干<sup>[22]</sup>, 这将使得量子比特保真度降低. 由此可见, 环境热噪声是量子计算走向规模化的一大阻碍. 在对其最优控制领域, 常用的量子优化算法包括 GRAPE<sup>[23]</sup> (gradient ascent pulse engineering) 方法以及 Krotov 方法<sup>[24]</sup>, 其中 GRAPE 是通过梯度下降算法来不断调整控制脉冲的形状, 使得目标函数值越来越小, 直至收敛到最优解. 该算法需要大量的计算资源且计算时间较长. 其次, 对于复杂的系统, 使用 GRAPE 方法进行优化可能会遇到局部极小值问题, 导致最终结果不是全局最优解, 且性能容易受到系统模型随机性或确定性错误的影响<sup>[25]</sup>. Krotov 方法相对 GRAPE 方法则具有更高的收敛速度, 这是因为 Krotov 方法可以利用上一次迭代的结果, 对下一次的迭代进行优化, 随迭代次数单调增长, 需要的计算资源更少, 无需线性搜索且具有更好的鲁棒性等优点<sup>[26]</sup>. 但是相对于 GRAPE 方法, Krotov 方法的适用范围更加有限, 它只适用于一部分的量子控制问题, 如纯态控制、谱控制等. Krotov 方法相对于 GRAPE 方法需要更多的手动调整, 比如需要手动选择一些物理意义明确的控制场, 需要对演化过程中的噪声进行模拟等. 它们的优点是都可用于非马尔可夫 (non-Markovian) 环境的量子控制优化<sup>[27,28]</sup>.

本文所采用的蒙特卡罗优化算法通过随机性的抽样和搜索过程, 能够在整个参数空间中进行更全面的探索, 从而避免陷入局部极小值. 此外, 量子动力学的传统主流研究方法一般采用概率 Lindblad 主方程<sup>[29]</sup> (probabilistic Lindblad master equation) 来研究开放量子系统的退相干和量子耗散现象. 然而 Lindblad 主方程实质上遵循马尔可夫过程, 会忽视系统与热库耦合引起的记忆效应, 因此无法解决如低温下量子有色噪声中的滞后问题<sup>[30,31]</sup>.

本文主要以单个量子比特为研究对象, 基于敖平等<sup>[19]</sup>在两能级系统的研究工作基础上, 使用偶极场驱动量子比特的方式, 采取随机动力学结构分解方法, 并应用久保-爱因斯坦涨落耗散定理研究了热噪声环境下的量子比特控制问题. 通过引入布洛赫球 (Bloch sphere) 直观地展示了量子态的演化过程, 并利用蒙特卡罗优化算法对磁场的傅里叶

分量形式进行优化, 以此来提高量子比特的保真度. 该方案能够从完全量子力学的角度进行证明, 为热噪声环境下的量子控制提供新的优化方案, 用以指导和评估实验.

## 2 量子比特控制

### 2.1 量子态的运动方程

量子比特是具有两个可独立操控量子态的量子系统. 就单个量子比特而言可以看作一个两能级系统, 以一个在磁场中自旋为 1/2 的粒子<sup>[32]</sup>为例, 其哈密顿量可以写成如下形式:

$$\hat{H}_s = -\frac{1}{2} [\mathbf{B}(t) \cdot \hat{\sigma} + B_0(t) \hat{I}], \quad (1)$$

其中  $\hat{\sigma}$  是泡利矩阵,  $\hat{I}$  是  $2 \times 2$  的单位矩阵,  $\mathbf{B}(t)$  和  $B_0(t)$  是含时的实函数, 对应着与系统耦合的控制场. 为了更直观讨论量子比特, 通过引入布洛赫球, 每个量子态都可以用布洛赫球上的一个布洛赫矢量来表示:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle, \langle \sigma_z \rangle) \\ &= (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha). \end{aligned} \quad (2)$$

系统的量子态两个组成部分通常写成

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-i\gamma/2) \begin{bmatrix} \cos(\alpha/2) \exp(-i\beta/2) \\ \sin(\alpha/2) \exp(+i\beta/2) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中  $\alpha$ ,  $\beta$  和  $\gamma$  是含时的实函数,  $\alpha$  和  $\beta$  分别表示布洛赫矢量的极角和方位角,  $\gamma$  是整体相位. 量子态随时间的演化遵循薛定谔方程:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle. \quad (4)$$

显然, 哈密顿量的 4 个参数并不是由波函数的 3 个参数唯一确定的,  $B_0$  可以具有任意的时间依赖关系, 哈密顿量的其他参数可以写成:

$$\begin{aligned} B_1(t)/\hbar &= -[(\dot{\gamma} + B_0/\hbar) \sin \alpha \cos \beta - \dot{\alpha} \sin \beta], \\ B_2(t)/\hbar &= -[(\dot{\gamma} + B_0/\hbar) \sin \alpha \sin \beta + \dot{\alpha} \cos \beta], \\ B_3(t)/\hbar &= -[\dot{\beta} + (\dot{\gamma} + B_0/\hbar) \cos \alpha]. \end{aligned} \quad (5)$$

为了简化问题, 可以让  $B_0 = 0$ , 由此可以得到量子态的运动方程:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= (B_1 \sin \beta - B_2 \cos \beta) / \hbar, \\ \dot{\beta} &= (-B_3 + B_1 \cos \beta \cot \alpha - B_2 \sin \beta \cot \alpha) / \hbar, \\ \dot{\gamma} &= (-B_1 \cos \beta \csc \alpha - B_2 \sin \beta \csc \alpha) / \hbar. \end{aligned} \quad (6)$$

(6) 式表明, 量子态的运动可以完全由外场的 3 个场分量控制, 该外场可以是一种虚拟的物理驱动场, 不同的控制方式所对应的驱动场的形式不尽相同. 在考虑一个自旋为 1/2 的粒子在磁场中运动的物理模型时, 这里的驱动场就是一个真实的磁场, 通过调节磁场的 3 个场分量, 从而控制量子态的转变. 磁场的 3 个场分量可以由一个磁偶极子提供, 通过控制磁偶极子的转动从而控制磁场的 3 个分量. 对于这样一个系统, 驱动场可以写为如下的形式:

$$\mathbf{B}(t) = M\mathbf{B}_d, \quad (7)$$

其中  $M$  是自旋粒子的磁矩,  $\mathbf{B}_d$  是磁偶极子产生的磁场. 接下来展示的是如何通过磁偶极子的旋转使得量子态由初始态到达我们所需的目标态.

## 2.2 磁偶极场

在由磁偶极子驱动的量子比特系统中, 磁偶极子通常可以由最简单的环形电流构成, 其所产生的磁场可以表示为如下形式:

$$\mathbf{B}_d = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3}, \quad (8)$$

其中  $\mu_0$  是真空磁导率,  $\mathbf{m}$  是磁偶极子的磁矩,  $\hat{\mathbf{r}}$  和  $r$  分别是单位向量以及偶极子与量子比特的距离.

磁偶极子可以应用在多种量子比特系统中, 通过改变它的位置、方向和大小来实现对量子比特的控制. 为了方便讨论, 假定磁偶极子与量子比特沿  $y$  轴放置, 其在量子比特所在位置产生的磁场可以表示为

$$B_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta \cos \phi}{r^3}, \quad (9a)$$

$$B_y = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m \sin \theta \sin \phi}{r^3}, \quad (9b)$$

$$B_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \cos \theta}{r^3}, \quad (9c)$$

其中  $\theta$  和  $\phi$  分别是磁偶极子磁矩的极角和方位角. 自旋量子比特在磁场中的运动是由泡利矩阵和外部磁场的相互作用决定. 泡利矩阵描述了自旋在不同方向上的投影, 并与外部磁场相互作用, 产生能量差异. 在外部磁场的作用下, 自旋会绕着磁场方向发生进动, 因此这就要求初始时刻和终止时刻的磁场方向分别与量子比特的初态和末态相平行. 其对应关系如下:

$$\tan \beta = -2 \tan \phi, \quad (10a)$$

$$\cos \alpha = -\frac{\cos \theta}{\sqrt{3 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + 1}}. \quad (10b)$$

在选定量子比特的初态和末态后即可求得所对应的初始时刻和终止时刻的磁场方向. 若要使得量子态在偶极场的控制下精确到达目标终态而不发生较大的进动, 就要求偶极子在开始和结束短暂时间内有较小的变化速度, 且满足

$$\dot{\theta}(t_i) = \dot{\phi}(t_i) = \dot{\theta}(t_f) = \dot{\phi}(t_f) = 0. \quad (11)$$

由此, 可以构造出一条磁偶极子的变化轨迹:

$$\theta(t) = \theta(t_i) + \frac{1}{2}[\theta(t_f) - \theta(t_i)] \left[ 1 - \cos \frac{\pi(t - t_i)}{T_s} \right], \quad (12)$$

$$\phi(t) = \phi(t_i) + \frac{1}{2}[\phi(t_f) - \phi(t_i)] \left[ 1 - \cos \frac{\pi(t - t_i)}{T_s} \right], \quad (13)$$

其中  $T_s = t_f - t_i$  表示初始时刻到终止时刻的总时间. 磁矩在初始时刻的方向为  $(\theta_i, \phi_i)$ , 在经过时间  $T_s = t_f - t_i$  后到达  $(\theta_f, \phi_f)$ .

## 2.3 量子调控过程的优化

由于量子比特在短时间内容易发生退相干, 这就要求提高量子态的演化速度, 因此需要对磁偶极子的运动轨迹进行优化. 可以将上述偶极子的变化形式作傅里叶变换, 由此可以得到磁场的傅里叶分量形式:

$$B_{j,n} = \frac{2}{T_s} \int_{t_i}^{t_f} \left[ B_j(t) \cos \frac{n\pi(t - t_i)}{T_s} \right] dt, \quad j = \theta, \phi. \quad (14)$$

在得到磁场的傅里叶分量后, 偶极子的磁场形式可以近似为

$$B(t) = \sum_{n=0}^N B_{j,n} \cos \frac{n\pi(t - t_i)}{T_s}, \quad (15)$$

其中  $N$  是傅里叶分量的数量, 由于较多的傅里叶分量容易在实验上造成困难, 因此需要选取尽可能少的傅里叶分量以达到量子比特的高保真度.

将磁场进行傅里叶变换后, 得到的几个傅里叶分量用以确定初始磁场, 然后通过蒙特卡罗优化算法在傅里叶分量的系数  $B_{j,n}$  上加上一个随机变量, 其随机性满足正态分布, 以此来寻找合适的路径使得初始量子态在短时间内高保真度的到达目标态. 在这里实际终态和目标终态的重叠度是衡量量子保真度的依据, 因此保真度的定义可以表示为

$$f = |\langle \Omega(t_f) | \Omega_f \rangle|^2, \quad (16)$$

其中  $\Omega(t_f)$  是实际量子终态,  $\Omega_f$  是目标终态.  $\Omega(t_f)$  和  $\Omega_f$  的内积的具体形式为

$$\begin{aligned} \langle \Omega(t_f) | \Omega_f \rangle &= \cos \frac{\alpha(t_f)}{2} \cos \frac{\alpha_f}{2} \exp \left\{ \frac{i}{2} [\beta(t_f) - \beta_f] \right\} \\ &+ \sin \frac{\alpha(t_f)}{2} \sin \frac{\alpha_f}{2} \exp \left\{ \frac{i}{2} [\beta_f - \beta(t_f)] \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

## 2.4 环境热噪声的影响

上述过程均发生在无环境噪声的理想情况下, 而在实际的量子比特调控过程中不可避免的存在环境噪声, 量子比特易与环境发生耦合, 引起量子退相干从而影响量子比特的保真度, 因此, 在通过偶极场调控量子比特的过程中, 需要考虑环境噪声的影响. 这里定义量子态的态矢量  $X \equiv (\alpha, \beta)^\dagger$ , 通过引入系统势能

$$H_0(\alpha, \beta, \mathbf{B}) = \langle \psi(t) | \hat{H}_s | \psi(t) \rangle = -\frac{1}{2} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{r}(t), \quad (18)$$

在无噪声的情况下, 将运动方程进行随机动力学结构分解<sup>[33]</sup>, 量子态的演化方程可以改写为

$$\dot{\zeta}(t) = \frac{1}{2} \nabla_X [n(t) \cdot \xi(t)] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \xi_x(t) \cos \alpha \cos \beta + \xi_y(t) \cos \alpha \sin \beta - \xi_z(t) \sin \alpha \\ -\xi_x(t) \sin \alpha \sin \beta + \xi_y(t) \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (23)$$

其方差可以写为

$$\langle \zeta(t) \zeta^\dagger(t) \rangle_\xi \equiv [2\delta(t-t') k_B T] \times \mathbf{S}, \quad (24)$$

其中,  $\mathbf{S}$  是一个对称半正定矩的  $2 \times 2$  矩阵, 对应于随机动力学结构分解中的耗散矩阵. 其具体形式如下:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \eta_x \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \eta_y \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \eta_z \sin^2 \alpha & (\eta_y - \eta_x) \sin(2\alpha) \sin(2\beta) / 4 \\ (\eta_y - \eta_x) \sin(2\alpha) \sin(2\beta) / 4 & \eta_x \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \eta_y \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \end{bmatrix}. \quad (25)$$

对于典型的开放系统, 根据久保-爱因斯坦涨落耗散定理 (Kubo-Einstein's fluctuation-dissipation theorem) 可知涨落总是伴随着耗散<sup>[35]</sup>. 因此可以在方程 (19) 的左边增加一项  $S\dot{X}$  进行修正. 在环境的影响下, 确定性的量子态演化方程 (19) 变成如下含有随机项的随机运动方程:

$$(\mathbf{S} + \mathbf{A}) \dot{X} = -\nabla_X H_0(\alpha, \beta, \mathbf{B}(t)) + \zeta(t, \alpha, \beta), \quad (26)$$

此方程即为在噪声环境下量子态演化的随机动力学方程的形式. 对于该方法的详细讨论可以参考 Ao 等<sup>[33,36]</sup> 的工作. 以费米环境 (Fermionic environment)

$$A\dot{X}(t) = -\nabla_X H_0(\alpha, \beta, \mathbf{B}(t)), \quad (19)$$

其中  $\nabla_X = (\partial_\alpha, \partial_\beta)^\dagger$ ,  $\mathbf{A}$  是一个  $2 \times 2$  的反对称矩阵, 具体形式为

$$\mathbf{A} \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

它是一个横向矩阵, 相当于电磁场中的洛伦兹力.

在实际情况下, 环境噪声总是存在的. 由温度引起的热噪声会使得控制场  $\mathbf{B}(t)$  具有一个高斯涨落, 即

$$\mathbf{B}(t) \rightarrow \mathbf{B}(t) + \xi(t), \quad (21)$$

其中  $\xi(t)$  是一个三分量的随机场, 表示随机热噪声<sup>[34]</sup>. 根据爱因斯坦关系, 热噪声的强度与系统的温度成正比. 在经典极限下, 热噪声可以被建模为高斯白噪声, 其方差具有马尔可夫性:

$$\langle \xi_j(t) \xi_{j'}(t') \rangle = [2\delta(t-t') k_B T] \delta_{jj'} \eta_j; \quad j, j' = x, y, z, \quad (22)$$

其中  $\delta(t)$  是狄拉克函数,  $\eta_j$  是黏滞系数, 表示热接触力的强度,  $k_B$  是玻尔兹曼常数,  $T$  是环境的温度. 因此, 随机场  $\xi(t)$  的存在相当于在方程 (19) 的右边增加了一项随机噪声矢量, 具体形式为

中的欧姆热库 (Ohmic bath) 为例<sup>[37,38]</sup>, 欧姆热库可以表示为如下形式:

$$J_j(\omega) = \eta_j \omega \exp \left( \frac{-|\omega|}{\omega_c} \right), \quad (27)$$

其中  $\omega_c$  是其谱函数的一些截断值, 而环境的影响则可以归类到这样一组耗散谱中, 由于热噪声引起的热涨落, 因此需要引入一个“绝热项”, 于是将方程 (18) 进一步修正, 其系统势能可写为

$$H = H_0 - \sum_j \left( \frac{\eta_j \omega_c}{4\pi} \right) \eta_j^2, \quad (28)$$

这是为了抵消整体相位的绝热效应, 因此方程 (26)



可变为

$$(\mathbf{S} + \mathbf{A}) \dot{\mathbf{X}} = -\nabla_{\mathbf{X}} \left[ H_0(\alpha, \beta, \mathbf{B}) - \sum_j \left( \frac{\eta_j \omega_c}{4\pi} \right) \eta_j^2 \right] + \zeta(t, \alpha, \beta). \quad (29)$$

## 2.5 热噪声环境下的量子调控优化

由于环境噪声的存在, 量子态在演化的过程中, 实际终态和目标终态会存在一个由涨落造成的偏差  $\tilde{X}$ , 其具体形式可以表示为

$$\tilde{X}(t_f, t_i) = \int_{t_i}^{t_f} A^{-1}(\alpha(t), \beta(t)) \zeta(t) dt. \quad (30)$$

为了方便计算, 一些绝热项和耗散项的高阶修正项已被忽略. 在 (30) 式中,  $\int_{t_i}^{t_f} A^{-1}(\alpha(t), \beta(t)) dt$  和  $\int_{t_i}^{t_f} \zeta(t) dt$  的值都是确定的, 与量子态的运动轨迹有关. 其中, 最为关键的是偏差  $\tilde{X}$  的加权均方差, 在热噪声环境中, 其具体形式如下:

$$\langle \tilde{X}^\dagger W \tilde{X} \rangle_\xi = (k_B T) \int_{t_i}^{t_f} dt \text{Tr} \{ W(t_f) \mathbf{D}[\alpha(t), \beta(t)] \}, \quad (31)$$

其中  $\mathbf{D}$  是扩散矩阵, 它与摩擦矩阵  $\mathbf{S}$  有关, 可表示为

$$\mathbf{D} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{A}^{-1}. \quad (32)$$

$\mathbf{W}$  是一个权重矩阵, 其与终态  $\Omega(t_f)$  的极角  $\alpha$  和方位角  $\beta$  有关, 可以表示为

$$\mathbf{W}(t_f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \alpha(t_f) \end{bmatrix}. \quad (33)$$

在噪声环境下, 需要对无噪声环境下量子比特的保真度公式 (16) 进行修正, 可以定义为

$$f = |\langle \Omega(t_f) | \Omega_f \rangle|^2 \exp \left( -\langle \tilde{X}^\dagger W \tilde{X} \rangle_\xi / 4 \right), \quad (34)$$

其中  $\langle \tilde{X}^\dagger W \tilde{X} \rangle_\xi$  由方程 (31) 给出, 因子  $1/4$  是为了匹配  $|\langle \Omega | \Omega' \rangle|^2$  在  $\Omega - \Omega'$  处的二阶泰勒展开. 指数项  $\exp(-\langle \tilde{X}^\dagger W \tilde{X} \rangle_\xi / 4)$  即为涨落项, 表示在噪声环境中热涨落对量子保真度的影响.

## 3 结 果

本节主要展示的是利用偶极场控制量子比特, 分别在无噪声和有热噪声的情况下对量子比特的保真度进行优化. 通过数值计算得到量子态的演化

路径, 并引入布洛赫球, 直观展现了量子态的演化过程.

图 1 所示是在无噪声环境下量子态不同的演化轨迹. 在不考虑噪声的环境下, 自旋与磁场相偏置, 引起自旋粒子发生拉莫尔 (Lamor) 进动, 其演化时间  $t = \hbar / (M B_d)$ , 由普朗克常数  $\hbar$ 、自旋粒子的磁偶极矩  $M$  以及磁场强度  $B_d$  共同决定, 表明  $B_d = 1 \text{ T}$  时, 时间  $t$  的尺度是  $10^{-11} \text{ s}$  的量级 [39], 其中  $M \sim 10^{-4} \text{ eV/T}$ . 磁场强度  $B_d$  可以通过调节磁偶极子的磁矩大小  $m$  和其与量子比特的距离  $r$  确定. 实验中控制量子比特的磁场大小可以根据具体的实验需求而变化. 自旋量子比特通常所需的磁场强度在几百微特斯拉到几特斯拉的范围, 本文选取的磁场强度  $B_d = 0.4 \text{ T}$ , 在实验允许的合理范围之内 [40].

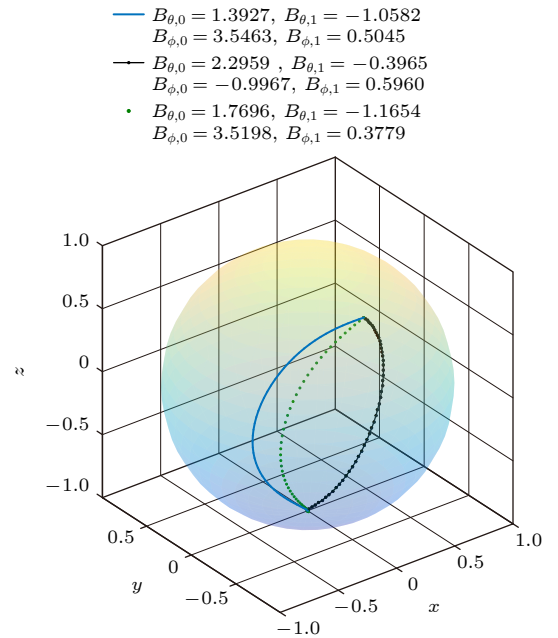


图 1 在无噪声环境下, 初态为  $(\pi/2, \pi/6)$ , 末态为  $(\pi, \pi/3)$  的量子态在布洛赫球上不同的演化轨迹, 其保真度都为 1  
Fig. 1. In the noiseless environment, the quantum states with initial state  $(\pi/2, \pi/6)$  and final state  $(\pi, \pi/3)$  have different evolutionary trajectories on the Bloch sphere. They all have a fidelity of 1.

首先设置量子态的初态  $(\alpha_i, \beta_i)$  和终态  $(\alpha_f, \beta_f)$ , 从而确定磁偶极子的磁矩初始方向  $(\theta_i, \phi_i)$  和终止方向  $(\theta_f, \phi_f)$ . 这里设置的初态为  $(\pi/2, \pi/6)$ , 末态为  $(\pi, \pi/3)$ , 在数值计算中, 令  $\hbar = 1, T_s = 0.5$ . 利用方程 (12) 和方程 (13) 得到磁偶极子的初始轨迹, 接下来通过方程 (15) 和方程 (16) 对磁场的形式进行傅里叶变换, 得到磁场的傅里叶分量的形式, 这里

选取傅里叶分量  $N = 2$ , 将其作为初值. 将最终得到的磁场形式代入量子态的运动方程 (6), 利用欧拉法数值求解出每一时刻的量子态, 得到量子态的演化路径, 并通过 (17) 式计算实际终态和目标终态的重叠度来衡量无噪声环境下量子比特的保真度.

接着通过蒙特卡罗优化算法, 对磁场的傅里叶分量进行优化, 以此来提高量子比特的保真度. 最终通过优化得到图 1 中 3 条量子态演化轨迹其量子比特保真度都为 1. 表明在不考虑噪声的情况下, 利用偶极场驱动量子比特的方式可以 100% 的控制量子态到达目标态.

在考虑热噪声的情况下, 量子态的演化时间受普朗克常数  $\hbar$  和温度  $T_B$  的影响, 对于这样一个系统,  $B_d = 1$  T 所对应的温度  $T_B = 1$  K, 时间  $t$  的尺度也是  $\hbar/(k_B T_B) \sim 10^{-11}$  s 的量级. 在数值计算中, 令  $\hbar = 1$  且  $\hbar \gg \eta$ , 要求黏滞系数  $\eta$  的值很小来实现较长的相干时间, 在此令  $\eta_x = 0.08$ ,  $\eta_y = 0.01$ ,  $\eta_z = 0.01$ .  $k_B = 1$ , 环境温度  $T = 0.1$  K,  $T_s = 0.5$ . 在热噪声环境的影响下, 其控制方式与在无噪声环境下相同, 所不同的是量子态演化方程变成如下含有随

机项的随机运动方程 (26), 热噪声所带来的热涨落会使得实际终态和目标终态存在偏差, 利用 (34) 式可以计算出噪声环境不同轨迹对量子保真度的影响. 通过改变磁场的傅里叶分量  $B_{j,n}$  来寻找量子态的不同运动轨迹, 以此降低热噪声影响, 从而提高量子比特在热噪声环境下的保真度.

设置的初态为  $(\pi/2, \pi/6)$ , 末态为  $(\pi, \pi/3)$ , 利用蒙特卡罗优化算法对磁场的傅里叶分量进行优化, 这里选取傅里叶分量  $N = 2$ , 通过求解量子态的运动方程, 从而得到在热噪声环境下量子态不同的演化轨迹如图 2 所示, 通过方程 (34) 可以看到, 由于热噪声的影响, 存在一个指数形式涨落项  $\exp(-\langle \tilde{X}^\dagger W \tilde{X} \rangle_\xi / 4)$ , 即热涨落会造成实际终态和目标终态存在偏差, 使得量子态不能 100% 的到达目标态. 这 3 条演化轨迹的保真度分别为 0.9996, 0.9995 和 0.9996.

为说明该方法的普适性, 选取了不同的初态对量子比特进行调控, 如图 3 所示是初态为  $(\pi/2, \pi/6)$ , 末态为  $(\pi, \pi/3)$  时量子态的不同演化路径, 其保真度分别为 0.9988, 0.9996 和 0.9986.

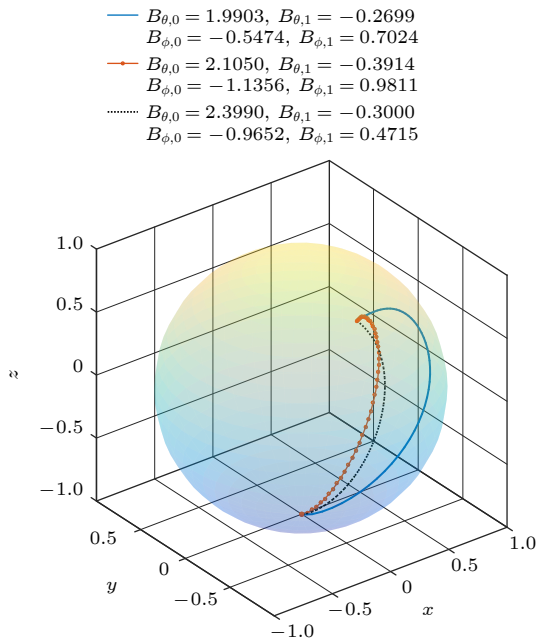


图 2 噪声环境下, 初态为  $(\pi/2, \pi/6)$ , 末态为  $(\pi, \pi/3)$  的量子态在布洛赫球上不同的演化轨迹, 其保真度分别为实线: 0.9996; 点实线: 0.9995; 点线: 0.9996

Fig. 2. In the noisy environment, the quantum states of the initial state  $(\pi/2, \pi/6)$  and the final state  $(\pi, \pi/3)$  have different evolution tracks on the Bloch sphere. Their fidelity is respectively solid line: 0.9996; dot solid line: 0.9995; dot line: 0.9996.

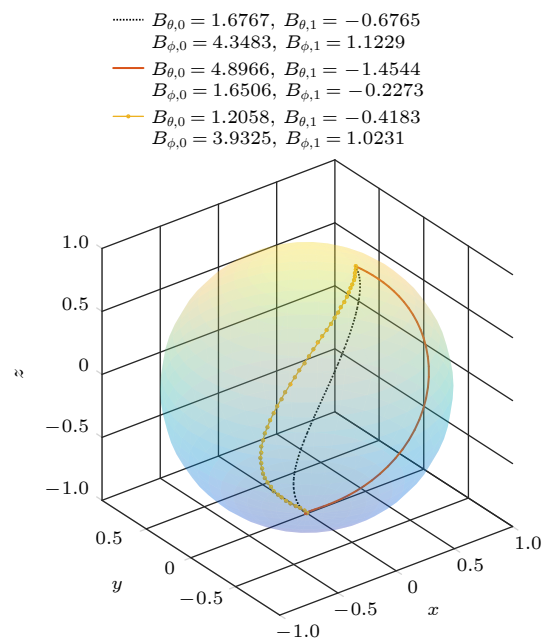


图 3 噪声环境下, 初态为  $(\pi/2, \pi/6)$ , 末态为  $(\pi, \pi/3)$  的量子态在布洛赫球上不同的演化轨迹, 其保真度分别为点线: 0.9988; 实线: 0.9996; 点实线: 0.9986

Fig. 3. In the noisy environment, the quantum states of the initial state  $(\pi/2, \pi/6)$  and the final state  $(\pi, \pi/3)$  have different evolution tracks on the Bloch sphere. Their fidelity is respectively dot line: 0.9988; solid line: 0.9996; dot solid line: 0.9986.

## 4 讨 论

本文主要研究了偶极场驱动下的量子比特动力学问题. 在无噪声环境下, 通过磁偶极子转动所产生的偶极场具有 3 个方向的分量, 而不仅仅只限于一个平面, 根据数值计算的结果表明这种控制方式可以更加灵活的控制量子态并避免系统发生非绝热跃迁, 从而在短时间内使得量子态 100% 到达目标态.

在考虑噪声环境的情况下, 采用随机动力学结构分解研究了热噪声环境下的量子比特控制的优化问题, 并利用久保-爱因斯坦涨落耗散定理构造了噪声环境下量子态演化的随机动力学方程, 提出了一种在热噪声环境下量子控制的优化方案, 以此来提高量子比特的保真度, 最后通过布洛赫球可视化的展现了量子态的演化轨迹. 根据数值计算的结果可以看出热噪声带来的热涨落项使得量子比特的实际终态和目标终态存在偏差, 成为影响保真度的主要因素, 而热涨落的大小与温度以及量子态的运动轨迹有关, 因此可以通过降低温度以及优化量子态的运动轨迹来提高量子比特的保真度.

本文所计算的温度为 100 mK, 在高温条件下, 热涨落会更加显著, 热噪声对量子比特的影响可能会增大. 通过蒙特卡罗优化算法可以对量子态的演化轨迹进行优化从而降低热噪声对量子比特的保真度的影响. 该算法具有跳出局部极小值的能力, 可以全局搜索最优解, 并提供相对较好的性能. 在高温条件下, 蒙特卡罗优化算法仍然适用, 对于提高量子比特的的工作温度具有指导意义. 在低温条件下, 热噪声的影响相对较小, 量子噪声的影响较为显著, 我们将在未来的工作中考虑这一影响.

该方案可以应用于多种通过磁场控制的量子比特系统中. 例如, 在半导体量子比特<sup>[41]</sup>中, 可以通过在量子点或量子阱附近引入一个磁性粒子或使用一个纳米磁铁控制磁场. 通过对磁场的精细控制, 可以实现半导体量子比特的单比特甚至多比特操作. 磁偶极场的控制也可以通过外加静态磁场和微波控制磁场等方式实现. 在 N-V 色心量子比特<sup>[42]</sup>中, 通过外加一个外加静态磁场, 可以让量子比特的自旋轴沿着磁场方向排列, 然后通过施加微波来控制量子比特的状态. 这些控制方式可能等效为一种偶极场, 偶极场是一种真实存在的物理约束场, 其形式比较直观, 在实验上比较利于设计.

该方法也可以用来解决低温下量子有色噪声的相关问题, 通过 Caldeira 和 Leggett<sup>[43]</sup>使用过的影响泛函 (influence function)<sup>[44]</sup> 可以验证该方法的有效性. 随着不断发展的量子控制技术, 本工作在将来或许有更多的应用场景, 也可以推广到多量子比特系统中.

特别感谢上海纳诺巴伯纳米科技有限公司对本研究的帮助与支持.

## 参考文献

- [1] Ladd T D, Jelezko F, Laflamme R, Nakamura Y, Monroe C, O'Brien J L 2010 *Nature* **464** 45
- [2] Grover L K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 325
- [3] Shor P W 1994 *SIAM J. Comput.* **26** 1484
- [4] Devoret M H, Schoelkopf R J 2013 *Science* **339** 1169
- [5] Chiorescu I, Nakamura Y, Harmans C J, Mooij J E 2003 *Science* **299** 1869
- [6] Blais A, Huang R S, Wallraff A, Girvin S M, Schoelkopf R J 2004 *Phys. Rev. A* **69** 062320
- [7] Koch J, Yu T M, Gambetta J, et al. 2007 *Phys. Rev. A* **76** 042319
- [8] Arute F, Arya K, Babbush R, et al. 2019 *Nature* **574** 505
- [9] Kastner J H, Richmond M, Grosso N, et al. 2004 *Nature* **430** 429
- [10] Veldhorst M, Yang C H, Hwang J C, et al. 2015 *Nature* **526** 410
- [11] Haffner H, Roos C, Blatt R 2008 *Phys. Rep.* **469** 155
- [12] Ballance C J, Harty T P, Linke N M, Sepiol M A, Lucas D M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 060504
- [13] Balasubramanian G, Neumann P, Twitchen D, et al. 2009 *Nat. Mater.* **8** 383
- [14] Doherty M W, Manson N B, Delaney P, Jelezko F, Wrachtrup J, Hollenberg L C L 2013 *Phys. Rep.* **528** 1
- [15] Ahn J, Weinacht T C, Bucksbaum P H 2000 *Science* **287** 463
- [16] He Y, Gorman S K, Keith D, Kranz L, Keizer J G, Simmons M Y 2019 *Nature* **571** 371
- [17] Sarandy M S, Lidar D A 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 250503
- [18] Barends R, Shabani A, Lamata L, et al. 2016 *Nature* **534** 222
- [19] Emmanouilidou A, Zhao X G, Ao P, Niu Q 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 1626
- [20] Guéry-Odelin D, Ruschhaupt A, Kiely A, Torrontegui E, Martínez-Garaot S, Muga J G 2019 *Rev. Mod. Phys.* **91** 045001
- [21] Berry M V 2009 *J. Phys. A Math. Theor.* **42** 365303
- [22] Zurek W H 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 715
- [23] Khaneja N, Reiss T, Kehlet C, Schulte-Herbrüggen T, Glaser S J 2005 *J. Magn. Reson.* **172** 296
- [24] Konnov A I, Krotov V F 1999 *Autom. i Telemekhanika* **10** 77
- [25] Wu R B, Chu B, Owens D H, Rabitz H 2018 *Phys. Rev. A* **97** 042122
- [26] Eitan R, Mundt M, Tannor D J 2011 *Phys. Rev. A* **83** 053426
- [27] Hwang B, Goan H S 2012 *Phys. Rev. A* **85** 032321
- [28] Rebentrost P, Serban I, Schulte-Herbrüggen T, Wilhelm F K 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 090401
- [29] Manzano D 2020 *AIP. Adv.* **10** 025106
- [30] Benedetti C, Paris M G A, Maniscalco S 2014 *Phys. Rev. A* **89** 012114
- [31] Bhattacharya S, Chaudhury P, Chattopadhyay S, Chaudhri J

- R 2008 *Phys. Rev. E* **78** 021123
- [32] Alscher A, Grabert H 1999 *J. Phys. A Math. Gen.* **32** 4907
- [33] Ao P 2004 *J. Phys. A Math. Gen.* **37** L25
- [34] Chen Y C, Lebowitz J L, Liverani C 1989 *Phys. Rev. B* **40** 4664
- [35] Kubo R 1966 *Rep. Prog. Phys.* **29** 255
- [36] Kwon C, Ao P, Thouless D J 2005 *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* **102** 13029
- [37] Chen Y C 1987 *J. Stat. Phys.* **47** 17
- [38] Liu X M 2022 *M. S. Dissertation* (Shanghai: Shanghai University) (in Chinese) [刘学铭 2022 硕士学位论文 (上海: 上海大学)]
- [39] Wesenberg J H, Ardavan A, Briggs G A, Morton J J, Schoelkopf R J, Schuster D I, Mohmer K 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 070502
- [40] Takeda K, Noiri A, Nakajima T, Yoneda J, Kobayashi T, Tarucha S 2021 *Nat. Nanotechnol.* **16** 965
- [41] Pla J J, Tan K Y, Dehollain J P, Lim W H, Morton J J L, Jamieson D N, Dzurak A S, Morello A 2012 *Nature* **489** 541
- [42] Tetienne J P, Rondin L, Spinicelli P, Chipaux M, Debuisschert T, Roch J F, Jacques V 2012 *New. J. Phys.* **14** 103033
- [43] Caldeira A O, Leggett A J 1983 *Ann. Phys.* **149** 374
- [44] Feynman R P, Vernon Jr F L 1963 *Ann. Phys.* **24** 118

## Qubit dynamics driven by dipole field in thermal noise environment\*

Xiong Fan<sup>1)</sup>    Chen Yong-Cong<sup>1)†</sup>    Ao Ping<sup>2)‡</sup>

1) (Shanghai Center for Quantitative Life Sciences, Physics Department, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

2) (College of Biomedical Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

( Received 18 April 2023; revised manuscript received 5 June 2023 )

### Abstract

Quantum computing is a new way to process quantum information by using superposition and entanglement of the quantum system. Quantum state's vast Hilbert space allows it to perform operations that classical computers cannot. The quantum computing has unique advantages in dealing with some complex problems, so it has attracted wide attention. Computing a single qubit is the first of seven fundamental stages needed to achieve a large-scale quantum computer that is universal, scalable and fault-tolerant. In other words, the primary task of quantum computing is the careful preparation and precise regulation of qubits. At present, the physical systems that can be used as qubits include superconducting qubits, semiconductor qubits, ion trap systems and nitrogen-vacancy (NV) color centers. These physical systems have made great progress of decoherence time and scalability. Owing to the vulnerability of qubits, ambient thermal noise can cause quantum decoherence, which greatly affects the fidelity of qubits. Improving the fidelity of qubits is therefore a key step towards large-scale quantum computing. Based on the dipole field driven qubit, the stochastic dynamic structure decomposition method is adopted and the Kubo-Einstein fluctuation-dissipation theorem is used to study the qubit control in a thermal noise environment. The dipole field has components in three directions, not just in one plane, which allows more flexible control of quantum states. Without considering the noise, the quantum state can reach the target state 100%. In the noisy environment, thermal noise will cause the deviation between the actual final state and the target final state caused by thermal fluctuation, which becomes the main factor affecting the quantum fidelity. The influence of thermal noise is related to temperature and the evolution trajectory of quantum state. Therefore, this paper proposes an optimal scheme to improve the qubit fidelity in the thermal noise environment. The feasibility of this method is verified by numerical calculation, which can provide a new solution for further guiding and evaluating the experiment. The scheme is suitable for qubit systems of various physical control fields, such as semiconductor qubits and nitrogen vacancy center qubits. This work may have more applications in the development of quantum manipulation technology and can also be extended to multi-qubit systems, the details of which will appear in the future work.

**Keywords:** qubits, dipole fields, thermal noise, fidelity

**PACS:** 03.67.Lx, 03.65.Yz, 42.50.Lc

**DOI:** 10.7498/aps.72.20230625

\* Project supported by the Nation Natural Science Foundation of China (Grant No. 16Z103060007).

† Corresponding author. E-mail: [chenyongcong@shu.edu.cn](mailto:chenyongcong@shu.edu.cn)

‡ Corresponding author. E-mail: [aoping@sjtu.edu.cn](mailto:aoping@sjtu.edu.cn)



## 热噪声环境下偶极场驱动的量子比特动力学

熊凡 陈永聪 敖平

### Qubit dynamics driven by dipole field in thermal noise environment

Xiong Fan Chen Yong-Cong Ao Ping

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 170302 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230625

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230625>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 光纤 $1/f$ 热噪声的实验研究

Experimental study on  $1/f$  intrinsic thermal noise in optical fibers

物理学报. 2019, 68(5): 054205 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181838>

#### 硅基半导体量子计算研究进展

New progress of silicon-based semiconductor quantum computation

物理学报. 2022, 71(23): 230301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221900>

#### 基于软件定义量子通信的自由空间量子通信信道参数自适应调整策略

Parameters adaptive adjustment strategy of quantum communication channel in free-space based on software-defined quantum communication

物理学报. 2019, 68(14): 140302 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190462>

#### 实验条件不完美对薛定谔猫态制备的影响

Effect of imperfect experimental condition on generation of Schrödinger cat state

物理学报. 2018, 67(23): 234203 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180381>

#### 级联环境下三量子比特量子关联动力学研究

Dynamics of quantum correlation for three qubits in hierarchical environment

物理学报. 2021, 70(10): 100301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202133>

#### 多功能量子远程传态网络

A multifunctional quantum teleportation network

物理学报. 2021, 70(10): 104203 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201749>