

一个具有共存吸引子的四阶混沌系统 动力学分析及 FPGA 实现^{*}

全旭 邱达 孙智鹏 张贵重 刘嵩[†]

(湖北民族大学智能科学与工程学院, 恩施 445000)

(2023 年 5 月 16 日收到; 2023 年 8 月 7 日收到修改稿)

为进一步探索共存吸引子中复杂的动力学行为, 构建了一个具有 4 种类型共存吸引子的四阶混沌系统, 该系统具有 4 个不稳定的平衡点. 采用相轨迹图、时域波形图、庞加莱映射、Lyapunov 指数谱和分岔图等方法对新系统的动力学行为进行分析. 实验结果表明: 随着参数的变化, 系统表现出稳定点、倍周期分岔、共存分岔模式、混沌危机等丰富的动力学行为. 当改变系统参数和忆阻参数时, 发现系统具有不同类型的共存吸引子, 例如: 两个周期吸引子共存、两个单涡卷混沌吸引子共存、两个双涡卷混沌吸引子共存、两个点吸引子共存. 特别地, 该系统还存在共存吸引子的旋转现象. 最后设计了一个非线性反馈控制器, 可使新系统在短时间内实现混沌同步. 采用现场可编程门阵列 (field-programmable gate array, FPGA) 硬件平台捕捉到的相图与数值仿真结果保持一致, 证明了该系统的可实现性.

关键词: 混沌系统, 共存吸引子, 旋转吸引子, 现场可编程门阵列

PACS: 05.45.Ac, 05.45.Gg

DOI: 10.7498/aps.72.20230795

1 引言

混沌是一种自然界中普遍存在的物理现象, Lorenz 在研究天气预报系统时发现了该现象并提出了著名的 Lorenz 混沌系统^[1]. 学者们以此系统为基础, 相继提出了 Chen 系统^[2]、Lü 系统^[3]、Bao 系统^[4]等, 极大地促进了混沌系统的研究和发展. 混沌系统因其复杂无序的性质被广泛应用于保密通信^[5,6]、图像加密^[7,8]、同步控制^[9,10]等领域. 1971 年, 蔡少棠^[11]首次提出忆阻器的概念, Strukov 等^[12]于 2008 年制造出了第一个忆阻器的实物, 验证了蔡少棠教授的猜想. 学者们利用忆阻器优良的非线性特性, 构建出了具有更加复杂动力学行为的四阶、五阶和更高阶的混沌系统, 并发现了多翼混沌吸引子^[13,14]、隐藏吸引子^[15,16]和共存吸引子^[17,18]

等不同种类的吸引子. 其中, 共存吸引子是由不同的状态变量初值将系统引向不同的吸引子, 形成多吸引子共存的多稳态现象. 共存吸引子可分为对称共存吸引子和非对称共存吸引子, 它使得系统运行轨迹变得不可预测, 从而更适用于信息安全领域, 因此对共存吸引子的研究具有重要的意义.

目前, 从构建混沌系统的角度来说, 构建具有共存吸引子的混沌系统主要有 3 种方法. 第 1 种是在三维系统中加入状态反馈控制器. 鲜永菊等^[19]将反馈控制器引入至三维混沌系统的第 3 个方程中, 构建了一个只有一个平衡点的四维超混沌系统, 该系统具有至少 12 种吸引子共存类型. 李木子等^[20]提出了一个含有两个反馈项的新五维超混沌系统, 该系统不存在任何平衡点, 即可以产生隐藏共存吸引子. 第 2 种是利用忆阻器替代混沌电路中的元器件或直接引入到混沌电路. 闵富红等^[21]

^{*} 恩施州科技支撑计划 (批准号: D20220015) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: liusong@hbmzu.edu.cn

利用两个双曲函数型忆阻器分别替代蔡氏电路的蔡氏二极管和电阻, 构建了一个具有多稳态特性的混沌电路. Ma 等^[22]设计了一个含有两个忆阻器的混沌电路, 该电路具有无穷多个平衡点, 并且可产生 7 种不同类型的吸引子. 第 3 种是将忆阻器引入到现有的混沌系统. Bao 等^[23]提出了一个具有 4 个线平衡点的忆阻混沌系统, 该系统可表现出无穷多个吸引子共存的超级多稳态现象. Yu 等^[24]将一个二次非线性磁控忆阻器作为反馈项, 提出了一种具有不同类型共存吸引子的五阶混沌系统. 李晓霞等^[25]将一个磁控忆阻器引入到四维 Lü 混沌系统, 构建了一个具有超级多稳定性的五维超混沌系统. 秦铭宏等^[26]将三次型磁控忆阻器引入三维混沌, 构建了一个具有无穷多共存吸引子的新四维混沌系统, 验证了系统状态变量的震荡幅度与初始值密切相关.

尽管具有共存吸引子的混沌系统已有文献报道, 但呈现旋转共存吸引子的混沌系统目前研究尚少. 本文结合之前学者的研究思路, 在三维混沌系统的基础上引入状态反馈控制器和磁控忆阻器, 构建了一个新四阶混沌系统. 该系统可以产生四种类型共存吸引子, 并且能够产生两种情况的旋转共存吸引子. 最后基于 SOPC (System-on-a-Programmable-Chip) 技术建立硬件实现平台, 物理实现了该系统, 验证了新系统的可行性.

2 新四阶混沌系统的构建

2.1 系统模型

忆阻器是一种无源两端元器件, 描述了磁通量

φ 和电荷 q 的关系, 本文选取文献^[27]提出的磁控忆阻器模型:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = u, \\ i = W(\varphi)u, \\ W(\varphi) = a_1 + b_1\varphi^2, \end{cases} \quad (1)$$

其中, φ 为磁通量, u 为施加在忆阻器两端的电压, i 为流过忆阻器两端的电流, $W(\varphi)$ 为磁通控制忆阻器的忆导函数, 正实数 a_1, b_1 为忆阻内部参数. 当 $a_1 = 1, b_1 = 0.02$ 时, 对模型 (1) 施加正弦激励电压 $v(t) = V_m \sin(2\pi t)$, 忆阻器的磁滞回线如图 1 所示. 当输入电压 $V_m = 2 \text{ V}$ 时, 输入频率 f 分别为 0.01, 0.02 和 0.03 Hz 时忆阻器的磁滞回线见图 1(a); 当输入频率 $f = 0.01 \text{ Hz}$ 时, 输入电压 V_m 分别为 1.5, 2.0 和 2.5 V 时忆阻器的磁滞回线见图 1(b).

Chen 等^[28]提出了一个特殊的三维自治二次类 Lorenz 混沌系统, 该系统具有两个稳定的结焦点, 其状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = -cy - xz, \\ \dot{z} = -b + xy, \end{cases} \quad (2)$$

其中 x, y, z 为状态变量, a, b, c 表示系统参数. 当系统参数固定为 $a = 10, b = 100, c = 11.2$, 且初始条件为 $(0.98, -1.82, -0.49)$ 时, 系统 (2) 可以显示一个类 Lorenz 混沌吸引子.

通过在系统 (2) 第 2 个方程的右侧添加一个反馈控制器 w , 同时增加磁控型忆导 $W(\varphi)$ 与 y 的乘积作为非线性项, 构建了一个新的四阶混沌系统, 其状态方程为

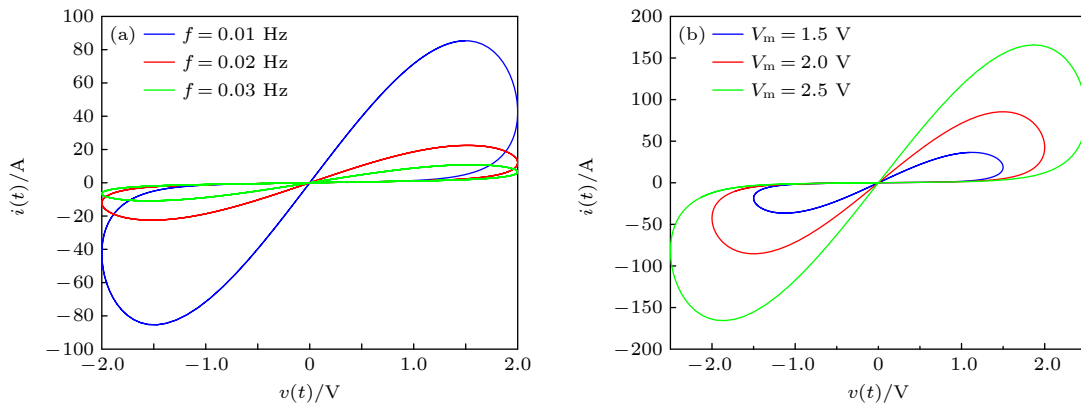


图 1 忆阻器的磁滞回线

Fig. 1. Hysteresis loop of memristor.

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = -cy - xz + dw - hWy, \\ \dot{z} = -b + xy, \\ \dot{w} = xz - ew, \end{cases} \quad (3)$$

式中, x, y, z 为系统状态变量, a, b, c, d, e, h 为系统参数. 当系统参数固定为 $a = 6, b = 41, c = 1, d = 0.5, e = 10, h = 1.1$, 初始值为 $(2, 2, 0.01, 0.01)$ 时, 系统 (3) 呈现双涡卷混沌吸引子, 如图 2 所示. 计算系统的 4 个 Lyapunov 指数分别为 $LE_1 = 0.595$, $LE_2 = -0.155$, $LE_3 = -6.685$ 和 $LE_4 = -12.240$, 其 Kaplan-Yorke 分数维 $D_L = 3.99$, 显然系统 (3) 有 1 个正的 Lyapunov 指数, 且 4 个指数之和小于 0, 说明新构建的系统是混沌的. 同时, 发现新系统关于 y 轴对称, 其对称性可从 $(x, y, z, w) \rightarrow (-x, y, -z, -w)$ 的不变性证实.

2.2 平衡点和稳定性分析

令 (3) 式的右侧等于 0, 计算其平衡点:

$$\begin{cases} a(y - x) = 0, \\ -cy - xz + dw - hWy = 0, \\ -b + xy = 0, \\ xz - ew = 0. \end{cases} \quad (4)$$

为了便于讨论, 取 $a = 6, b = 41, c = 1, d = 0.5, e = 10, h = 1.1$, 求解出系统具有 4 个平衡点, 分别为

$$P_1 = (6.403, 6.403, -2.254, -1443),$$

$$P_2 = (6.403, 6.403, -102.972, -65.933),$$

$$P_3 = (-6.403, -6.403, -2.254, 1.443),$$

$$P_4 = (-6.403, -6.403, -102.972, 65.933).$$

由于增加了系统的平衡点, 也为产生多共存吸引子提供了可能. 非零平衡点 P_1, P_3 对称的分布在 z 轴的两侧, 平衡点 P_2, P_4 的情况相同. 因为两组平衡点均关于 z 轴对称且都是方程的解, 具有相同的性质, 因此只需分别讨论平衡点 P_1 和 P_2 .

在平衡点 P_1 处, 系统对应的雅可比矩阵 J 为

$$J = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 & 0 \\ 2.254 & -2.146 & -6.403 & 0.907 \\ 6.403 & 6.403 & 0 & 0 \\ -2.254 & 0 & 6.403 & -10 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

求解其特征方程 $\det(\lambda I - J) = 0$, 得到相应的特征根为

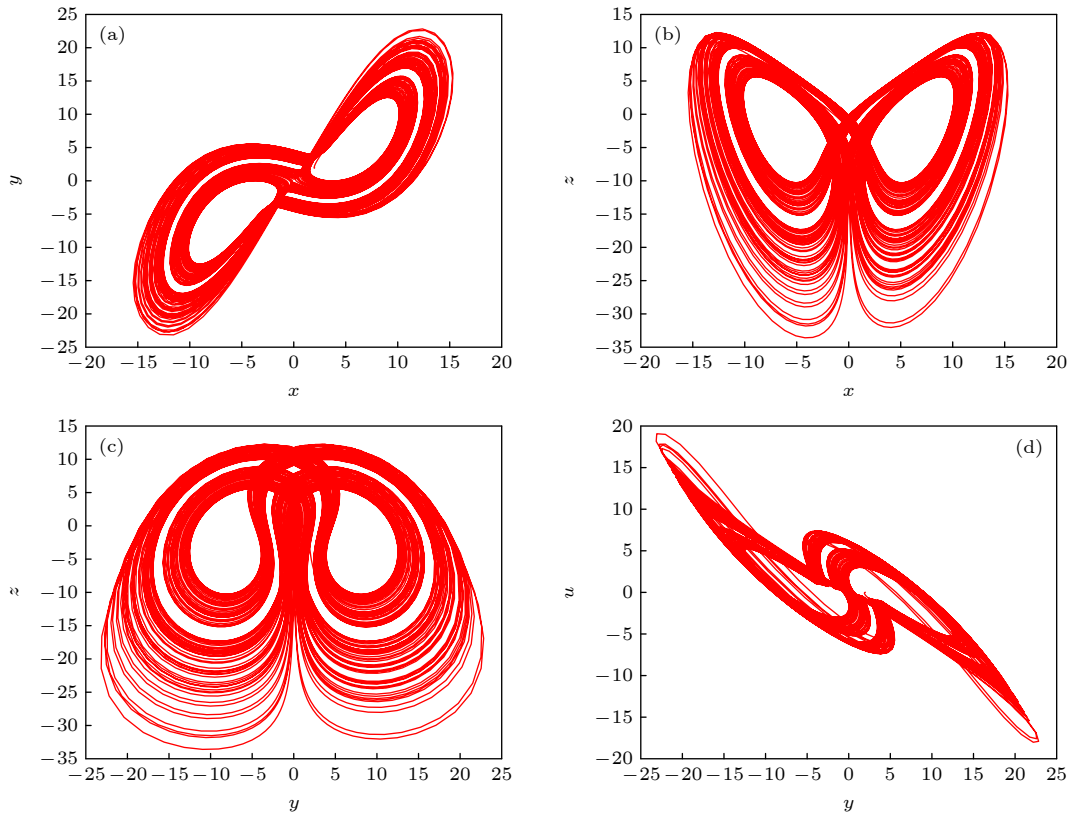


图 2 混沌吸引子各平面对称图 (a) x - y 平面; (b) x - z 平面; (c) y - z 平面; (d) y - w 平面

Fig. 2. Phase portraits of chaotic attractor: (a) x - y plane; (b) x - z plane; (c) y - z plane; (d) y - w plane.

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = 0.463 \pm 7.055i, \\ \lambda_3 = -10.741, \lambda_4 = -8.331. \end{cases} \quad (6)$$

因为 λ_1 和 λ_2 是一对含正实部的共轭复根, λ_3 和 λ_4 都是负实数, 因此平衡点 P_1 是一个不稳定的鞍焦点. 同理, 可求得系统在平衡点 P_2 处的 4 个特征根分别为 $\lambda_1 = -104.808$, $\lambda_{2,3} = -4.651 \pm 9.635i$, $\lambda_4 = 0.372$. 其中, λ_1 是负实数, λ_2 和 λ_3 是一对具有负实部的共轭复根, λ_4 为正实数, 因此平衡点 P_2 和 P_4 均为三维空间的一个鞍点. 综上, 系统 (3) 的 4 个平衡点均为不稳定平衡点.

系统 (3) 的耗散度 ∇V 计算如下:

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} \\ &= -a - c - h(a_1 + b_1 w^2) - e. \end{aligned} \quad (7)$$

当取参数 $a = 6$, $b = 41$, $c = 1$, $e = 10$, $h = 1.1$, 满足 $\nabla V < 0$, 表明系统 (3) 是耗散的.

2.3 时域波形图和庞加莱截面图

取参数 $a = 6$, $b = 41$, $c = 1$, $d = 0.5$, $e = 10$, $h =$

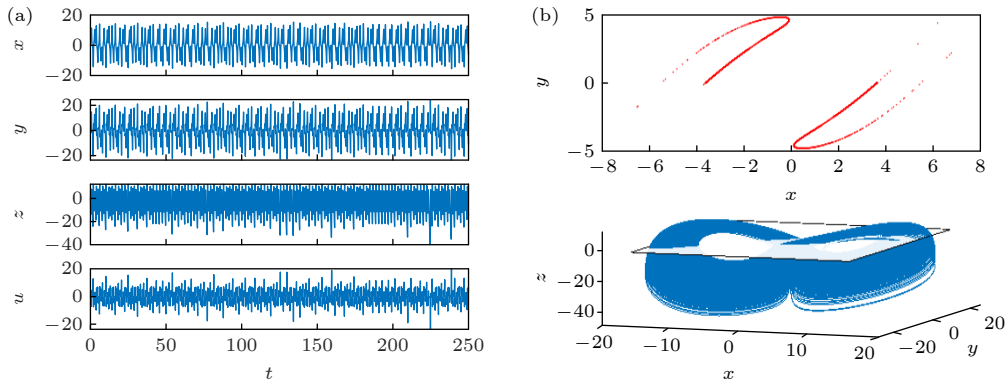


图 3 系统的时域波形图和庞加莱截面 (a) 时域波形图; (b) 在 $z = 0$ 截面上的 Poincaré 截面

Fig. 3. Time domain waveforms and Poincaré cross section of the system: (a) Time domain waveforms; (b) Poincaré map on $z = 0$ plane.

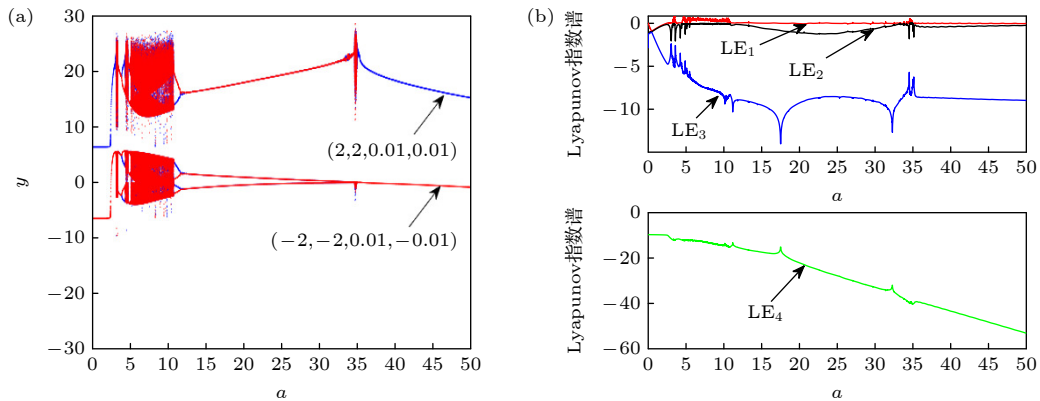


图 4 随系统参数 a 变化的混沌动力学 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数谱

Fig. 4. Chaotic dynamics varying with system parameters a : (a) Bifurcation diagram; (b) Lyapunov exponential spectra.

1.1, 初始值为 $(2, 2, 0.01, 0.01)$, 采用四阶龙格-库塔 (ODE45) 算法对系统 (3) 求解, 可得系统状态变量 x, y, z, w 的时域波形如图 3(a) 所示, 可以看出新系统为非周期系统. 系统 (3) 在 $z = 0$ 上的庞加莱映射如图 3(b) 所示, 图 3(b) 存在无数个具有分形结构的密集点, 表明系统具有复杂的动力学行为.

3 系统动力学分析

3.1 依赖系统参数变化的动力学行为

本节利用相轨迹图、Lyapunov 指数谱、分岔图、动力学地图等分析方法研究系统 (3) 的动力学行为.

首先选择 a 作为变化参数, 设置 $b = 41$, $c = 1$, $d = 0.5$, $e = 10$, $h = 1.1$, 初始值为 $Y_1 = (2, 2, 0.01, 0.01)$ 和 $Y_2 = (-2, -2, 0.01, -0.01)$, 状态变量 y 随参数 a 在区间 $(0, 50)$ 变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱如图 4 所示, 其中蓝色轨线对应初始值 Y_1 , 红色轨线对应初始值 Y_2 . 当 $a \in (0, 2.4)$

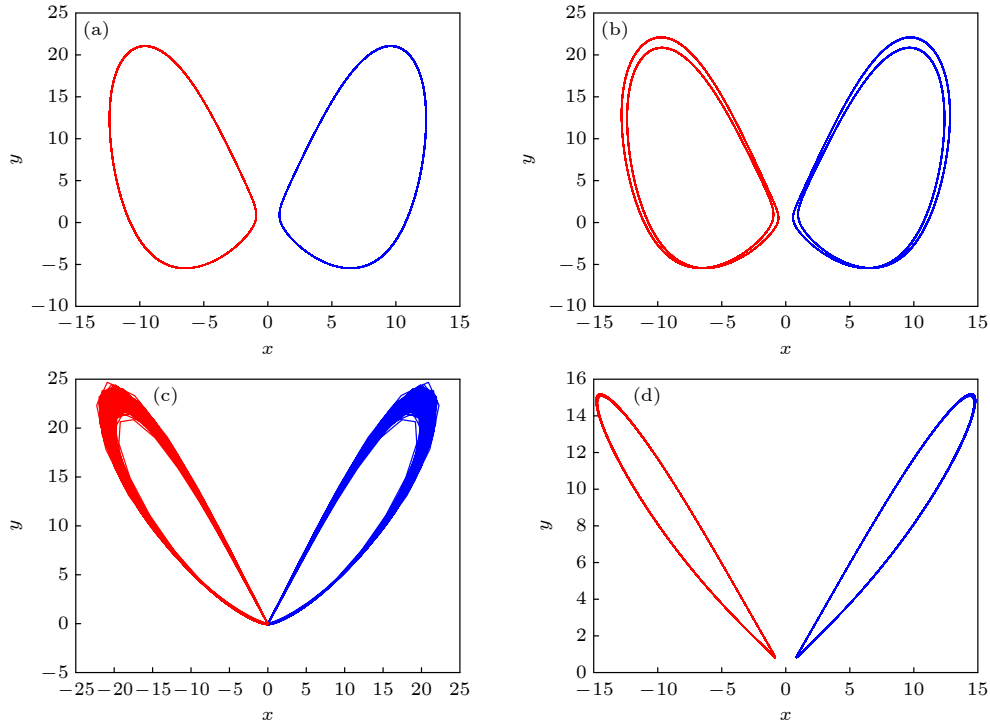


图 5 取 a 的不同值在 x - y 平面的相位图 (a) 周期 1 吸引子共存 ($a = 3$); (b) 周期 2 吸引子共存 ($a = 3.2$); (c) 单涡卷混沌吸引子共存 ($a = 34.93$); (d) 周期 1 吸引子共存 ($a = 50$)

Fig. 5. The phase diagram of different values in x - y plane: (a) Coexistence period 1 attractor coexistence ($a = 3$); (b) coexistence period 2 attractor coexistence ($a = 3.2$); (c) coexisting single scroll chaotic attractor ($a = 34.93$); (d) coexistence period 1 attractor coexistence ($a = 50$).

时, 4 个李氏指数均小于 0, 此时系统呈现点吸引子共存. 在 $a = 2.7$ 处, 系统进入周期状态, 随后经正向倍周期分岔进入窄共存混沌区域带. 在该混沌区域中存在若干大小不一的周期窗口, 系统表现出 2 个周期 1 吸引子共存, 2 个周期 2 吸引子共存的现象, 如图 5(a) 和图 5(b) 所示. 在 $a = 11.86$ 附近, 系统由混沌危机状态进入周期状态. 而在 $a \in (34.6, 35)$ 时, 计算系统的 4 个李氏指数分别为 $LE_1 = 0.105, LE_2 = -0.322, LE_3 = -8.735, LE_4 = -38.460$, 其中有 1 个指数大于 0, 系统表现出单涡卷混沌吸引子共存的现象, 如图 5(c) 所示. 当 $a > 35$ 时, LE_1 在 0 值上下波动, 系统的吸引子在共存混沌和共存周期 1 之间频繁切换. 当 $a = 50$ 时, $LE_1 = 0, LE_{2,3,4} < 0$, 此时系统呈现另一种类型的周期 1 吸引子共存, 如图 5(d) 所示.

选取 $b \in (10, 80)$, 初始条件为 $Y_1 = (2, 2, 0.01, 0.01)$ 和 $Y_2 = (-2, -2, 0.01, -0.01)$, 绘制出系统状态变量 y 随参数 b 变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱如图 6 所示, 其中蓝色轨线对应初始值 Y_1 , 红色轨线对应初始值 Y_2 . 由图 6(a) 可以看出: 随着参数 b 的不断增大, 系统 (3) 呈现出了不同运动

状态的吸引子共存行为. 系统以共存周期行为开始, 先后经历了倍周期分岔、切分岔和逆倍周期分岔等方式, 在周期状态和混沌状态中切换, 并最终稳定在周期状态.

在这里选取了 4 个典型的 b 值来模拟系统的动力学行为, 其中包括周期 1 吸引子共存、周期 2 吸引子共存、双涡卷混沌吸引子共存以及单涡卷混沌吸引子共存的现象, 分别如图 7(a)—(d) 所示. 综合上述分析, 可以看出: 相较于系统 (2), 由于忆阻非线性项和反馈项的引入, 新构建的系统 (3) 确实表现出更复杂的动力学行为.

图 8 描绘了参数 a 和参数 b 变化时系统 (3) 的动力学特征, 红色区域表示周期状态, 蓝色区域表示混沌状态. 从 $a = 0$ 开始, 纵向观察动力学地图的颜色变化, 系统 (3) 一开始处于周期状态. 当 $a = 2.2$ 时, 从红色 (周期) 变为蓝色 (混沌), 在 $a \in (2.3, 35.3)$ 区间中, 有成片的蓝色区域包含细长红色 (周期) 小区域, 说明系统 (3) 存在混沌与周期共存的状态. 特别地, 在红色区域内还存在几个线状和点状的蓝色区域, 说明系统 (3) 在混沌和周期之间多次转换.

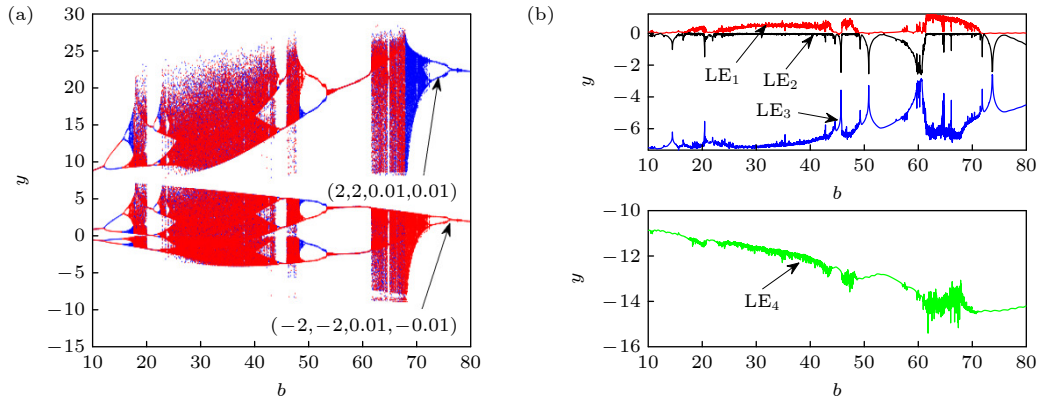

 图 6 随系统参数 b 变化的混沌动力学 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数谱

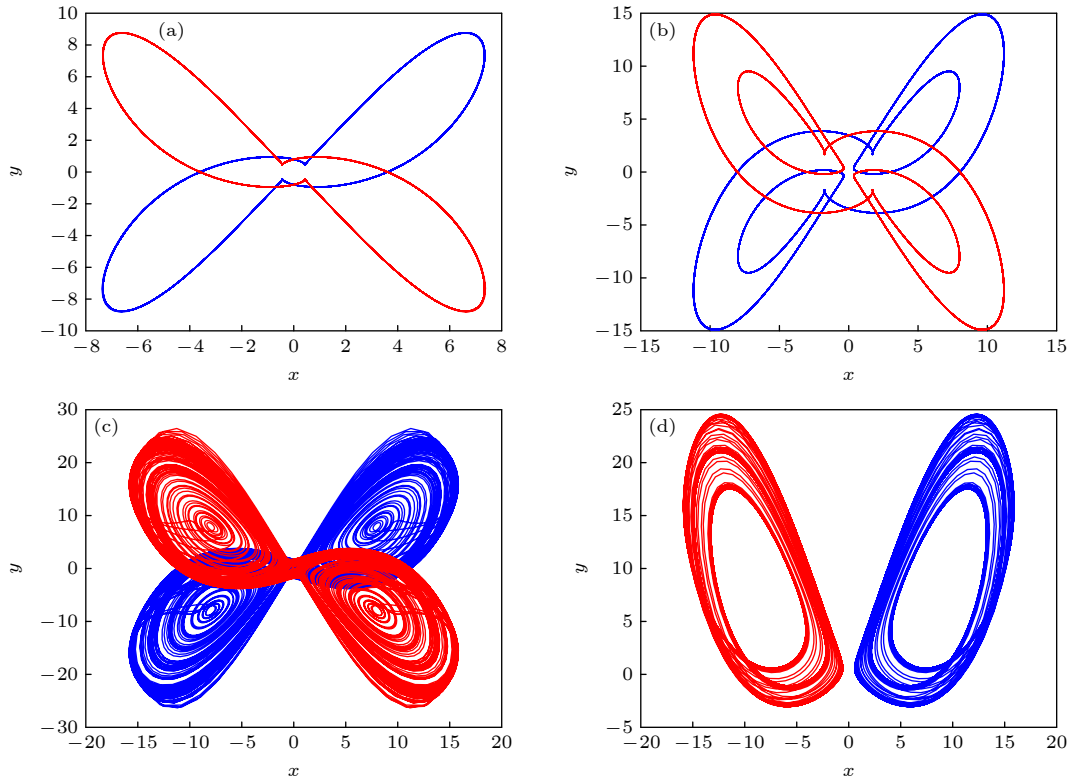
 Fig. 6. Chaotic dynamics varying with system parameters b : (a) Bifurcation diagram; (b) Lyapunov exponential spectrum.

 图 7 取 b 的不同值在 x - y 平面的相位图 (a) 周期 1 吸引子共存 ($b = 10$); (b) 周期 2 吸引子共存 ($b = 20.5$); (c) 双涡卷混沌吸引子共存 ($b = 62$); (d) 单涡卷混沌吸引子共存 ($b = 70$)

 Fig. 7. Phase diagram of different values of parameter b on x - y plane: (a) Coexisting period 1 attractor coexistence ($b = 10$); (b) coexisting period 2 attractor coexistence ($b = 20.5$); (c) coexisting double scroll chaotic attractor coexistence ($b = 62$); (d) coexisting single-scroll attractors coexistence ($b = 70$).

3.2 依赖忆阻参数变化的动力学行为

分别选取初始值为 $Y_1 = (2, 2, 0.01, 0.01)$ 和 $Y_2 = (-2, -2, 0.01, -0.01)$, 系统状态变量 y 随参数 a_1 变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱如图 9 所示, 其中蓝色轨线对应初始值 Y_1 , 红色轨线对应初始值 Y_2 . 由图 9 可以看出, 随着参数 a_1 的增大, 系统先经倍周期分岔由周期态进入混沌态, 然后经

逆倍周期分岔又由混沌态回到周期, 在周期区间也夹杂着窄的混沌区间. 而且系统还存在着周期吸引子共存、单涡卷混沌吸引子共存以及点吸引子共存等多稳态现象 (详见表 1 和图 10).

特别地, 从图 10(b)–(e) 可见, 随着 a_1 的增大, 出现了两种情况的共存吸引子旋转现象, 一对单涡卷混沌吸引子旋转, 一对周期 1 吸引子旋转. 旋转是指对吸引子进行翻转或对折, 从而改变吸引

子原来的位置. 在吸引子发生旋转的现象中, 不仅出现由于系统参数改变引起的旋转, 也存在由于系统初值改变引起的旋转. 这一现象在以往的文献中并不常见, 可见引入忆阻作为非线性项后丰富了系统的动力学行为.

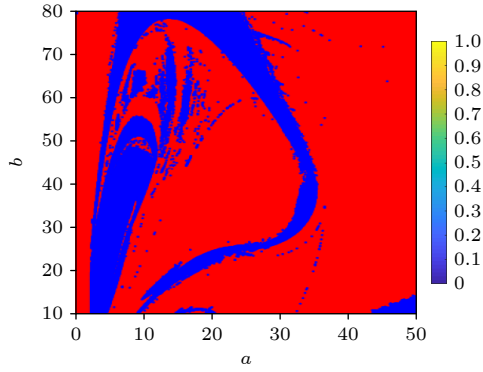


图 8 参数 a 和 b 的动力学地图

Fig. 8. Dynamic map of parameters a and b .

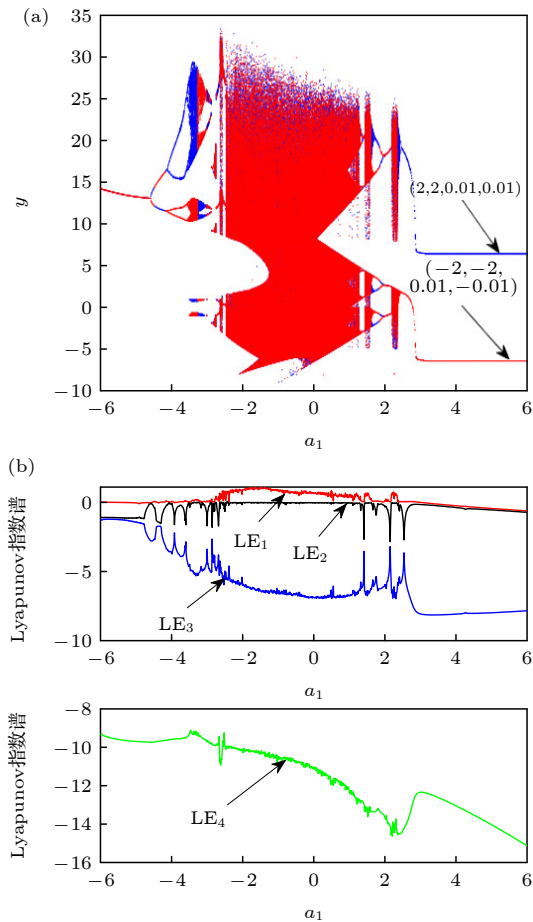


图 9 随系统参数 a_1 变化的混沌动力学 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数谱

Fig. 9. Chaotic dynamics varying with system parameters a_1 : (a) Bifurcation diagram; (b) Lyapunov exponential spectrum.

表 1 不同 a_1 值下的共存吸引子类型及图形编号
Table 1. Types and figure numbers of coexisting attractors under different a_1 values.

参数 a_1	运动状态	图9
-3.51	周期4	(a)
-3.30	单涡卷混沌	(b)
-3.23	单涡卷混沌	(c)
-2.73	周期1	(d)
-2.72	周期1	(e)
-2.75	双涡卷混沌	(f)
-2.38	周期2	(g)
1.60	混沌	(h)
3.01	稳定点	(i)

4 系统的非线性反馈控制设计

4.1 理论分析

随着混沌控制的研究发展, 学者们尝试采用不同的混沌控制方法如: 线性和非线性反馈控制法 [29,30]、自适应控制法 [31] 和脉冲控制法 [32] 等去实现混沌系统的同步. 本文采用非线性反馈控制法, 研究具有不同初值, 相同参数的两个新四阶混沌系统之间的同步问题, 具体实现思路是: 首先将 (3) 式的混沌系统作为驱动系统, (3) 式的复制系统作为响应系统, 然后将非线性反馈控制器 $\mu = [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4]^T$ 施加在响应系统上, 通过非线性反馈控制器消除驱动系统和响应系统的误差, 以达到混沌同步的目的.

驱动系统方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = -cy_1 - x_1z_1 + dw_1 - hWy_1, \\ \dot{z}_1 = -b + x_1y_1, \\ \dot{w}_1 = x_1z_1 - ew_1. \end{cases} \quad (8)$$

响应系统方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2) + \mu_1, \\ \dot{y}_2 = -cy_2 - x_2z_2 + dw_2 - hWy_2 + \mu_2, \\ \dot{z}_2 = -b + x_2y_2 + \mu_3, \\ \dot{w}_2 = x_2z_2 - ew_2 + \mu_4. \end{cases} \quad (9)$$

为了获得实现驱动系统和响应系统同步的控制器, 定义两个系统的状态误差变量为

$$\begin{cases} e_1 = x_2 - x_1, \quad e_2 = y_2 - y_1, \\ e_3 = z_2 - z_1, \quad e_4 = w_2 - w_1. \end{cases} \quad (10)$$

将 (9) 式与 (8) 式作差, 可得误差系统方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) + \mu_1, \\ \dot{e}_2 = -ce_2 + de_4 - x_2z_2 + x_1z_1 - hWe_2 + \mu_2, \\ \dot{e}_3 = x_2y_2 - x_1y_1 + \mu_3, \\ \dot{e}_4 = -ee_4 + x_2y_2 - x_1z_1 + \mu_4. \end{cases} \quad (11)$$

由上可得, 可通过设置适当的控制向量 μ 使误差系统 (11) 在原点处稳定, 从而实现驱动系统 (8) 式与响应系统 (9) 式的混沌同步. 选择控制器为

$$\begin{cases} \mu_1 = -ae_2, \\ \mu_2 = -de_4 + x_2z_2 - x_1z_1 + hWe_2, \\ \mu_3 = -x_2y_2 + x_1y_1 - ke_3, \\ \mu_4 = -x_2y_2 + x_1z_1, \end{cases} \quad (12)$$

其中, k 表示反馈控制增益, 将 (12) 式控制函数代入误差系统 (11) 可得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -ae_1, \quad \dot{e}_2 = -ce_2, \\ \dot{e}_3 = -ke_3, \quad \dot{e}_4 = -ee_4. \end{cases} \quad (13)$$

为了求解反馈增益 k 的取值范围, 构建 Lyapunov

函数如下:

$$V(e) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2), \quad (14)$$

式中, $V(e)$ 为正定函数. 结合 (13) 式, 对 (14) 式沿误差 e 求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3 + e_4\dot{e}_4 \\ &= -ae_1^2 - ce_2^2 - ke_3^2 - ee_4^2, \end{aligned} \quad (15)$$

式中, a, c, e 均为正值, 故当 $k > 0$ 时, 必有 $\dot{V}(e) < 0$, 即 $\dot{V}(e)$ 为负定函数. 根据 Lyapunov 稳定性定理, 误差系统 (11) 以指数速率收敛到平衡点处, 即对于任意给定初值, 均存在 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|(e, t)\| = 0$, 使驱动系统 (8) 式与响应系统 (9) 式达到同步.

4.2 数值模拟

本节通过在 Matlab 上进行数值仿真, 验证驱动系统 (8) 式与响应系统 (9) 式在非线性反馈控制器下是否达到同步. 首先, 选取系统参数为 $a = 6$,

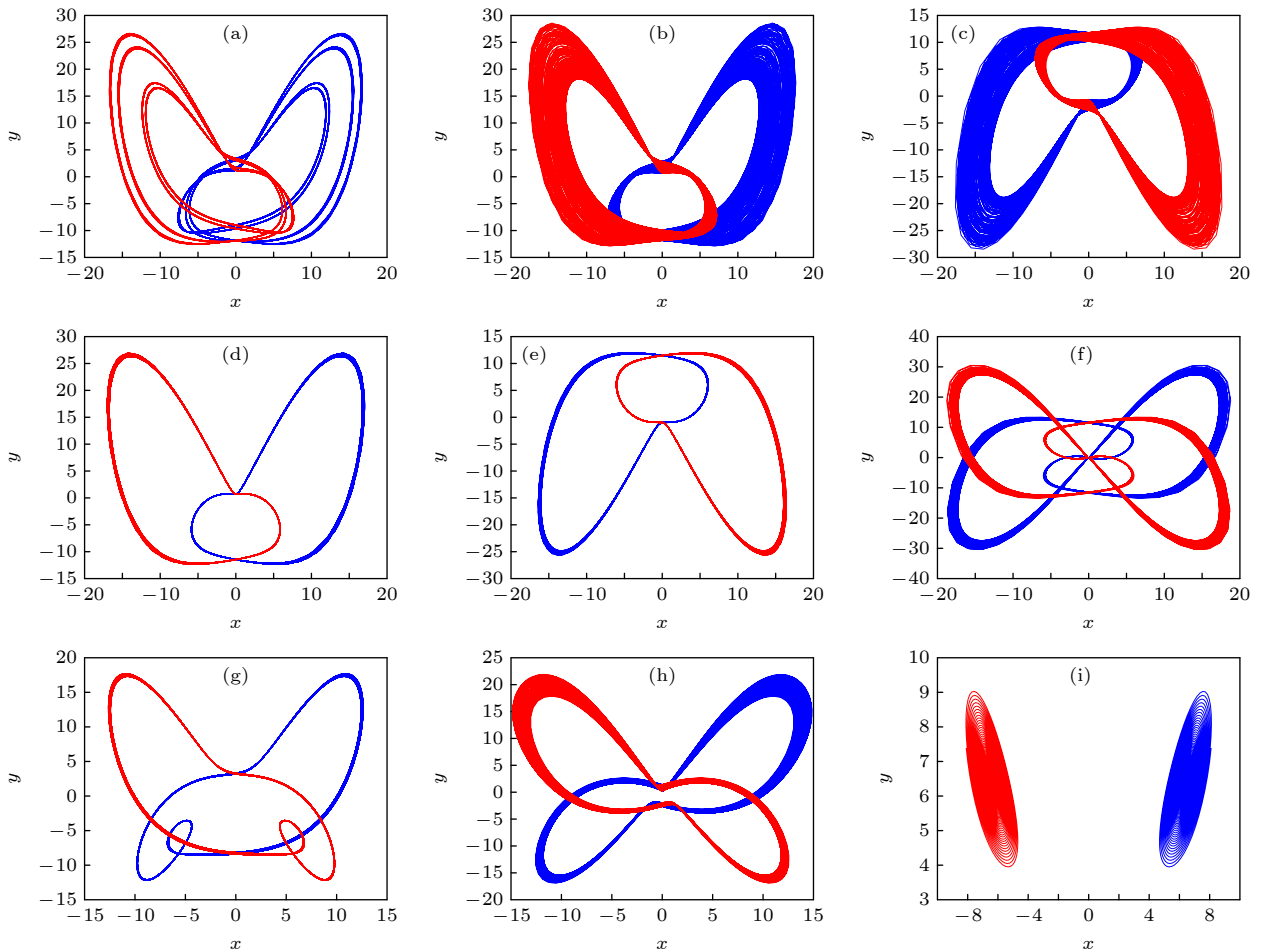


图 10 不同 a_1 值在 x - y 平面的相位图

Fig. 10. Phase diagram of different values of parameter a_1 on x - y plane.

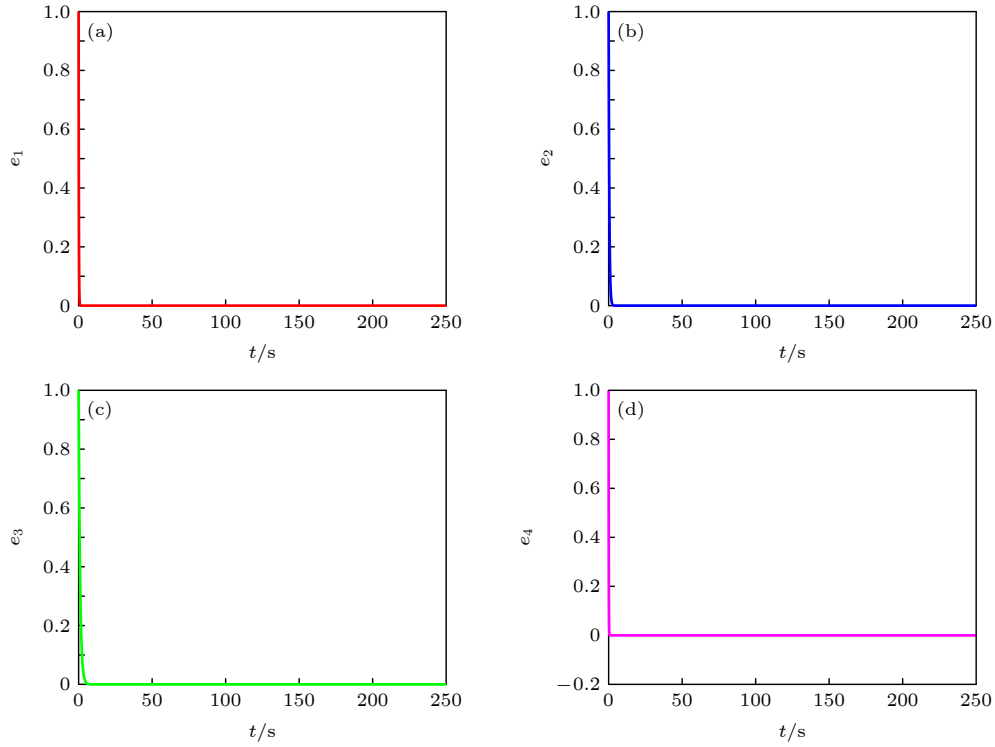

 图 11 混沌同步的误差收敛曲线 (a) e_1 ; (b) e_2 ; (c) e_3 ; (d) e_4

 Fig. 11. Error convergence curve of chaotic synchronization: (a) e_1 ; (b) e_2 ; (c) e_3 ; (d) e_4 .

$b = 41, c = 1, d = 0.5, e = 10, h = 1.1, k = 1, a_1 = 1, b_1 = 0.01$, 驱动系统 (8) 式的初始值为 $x_1(0) = 2, y_1(0) = 2, z_1(0) = 0.01, w_1(0) = 0.01$, 响应系统 (9) 式的初始值为 $x_2(0) = 3, y_2(0) = 3, z_2(0) = 1.01, w_2(0) = 1.01$, 步长设为 0.02, 仿真的同步误差收敛曲线如图 11 所示, 可以看出两个初值不同的系统在控制器作用下, 误差 e_1, e_2, e_3, e_4 在 1 s 前均已稳定在零点, 即驱动系统 (8) 式与响应系统 (9) 式实现了混沌同步.

5 FPGA 硬件实现

SOPC 是一种基于 FPGA 的实现方案, 系统的实现以 AC620 FPGA 开发板为核心, 如图 12 所示. 选用的 FPGA 为 ED4 CE10 F17, SDRAM 为 W9812 g6 KH-6, 大小为 128 M, DAC 为双通道 14 位 AD9767. 系统利用 Quartus II 17.1 软件定制开发, 搭建 SOPC 系统完成硬件设计.

选取系统参数: $a = 6, b = 41, c = 1, d = 0.5, e = 10, h = 1.1$, 迭代步长 $\Delta t = 0.001$, 采用 Euler 法对系统 (3) 进行离散化处理, 得到的差分方程如下:

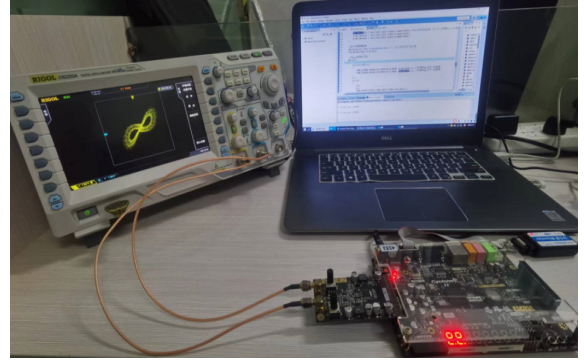


图 12 FPGA 实现设备

Fig. 12. FPGA implementation equipment.

$$\begin{cases}
 x(n+1) = x(n) + \Delta t(ay(n) - ax(n)), \\
 y(n+1) = y(n) + \Delta t(-by(n) - x(n)z(n) \\
 \quad + cw(n) - hy(n)(a_1 \\
 \quad + b_1w(n)w(n))), \\
 z(n+1) = z(n) + \Delta t(-d + x(n)y(n)), \\
 w(n+1) = w(n) + \Delta t(x(n)z(n) - ew(n)).
 \end{cases} \quad (16)$$

利用 C 语言编程, 将量化后的数据经 DAC 转换后输出到示波器, 结果如图 13 所示. 可以看出硬件实现结果与数值仿真相图基本一致, 验证了系统 (3) 的可实现性.

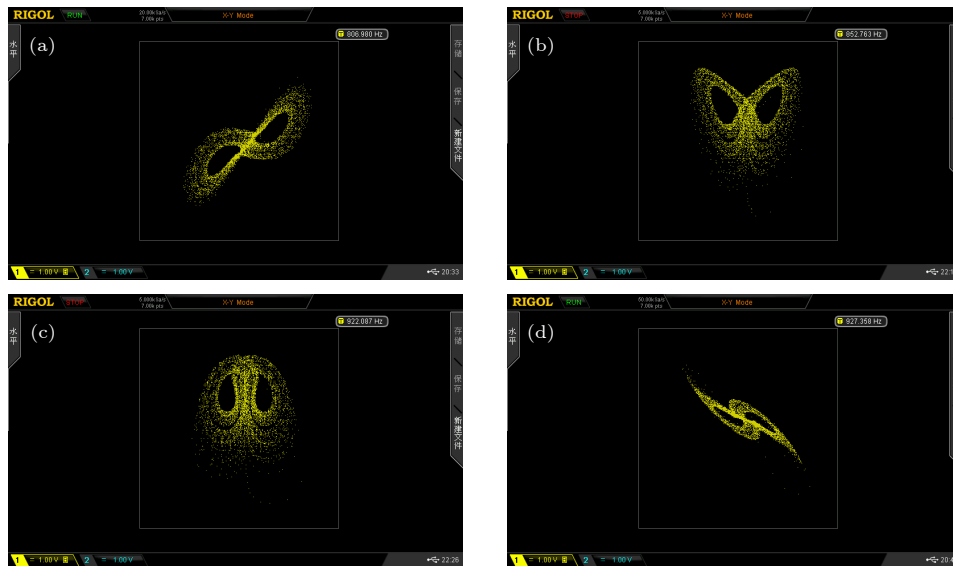


图 13 FPGA 硬件实现系统相图 (a) x - y 平面; (b) x - z 平面; (c) y - z 平面; (d) y - w 平面

Fig. 13. Realization of memristive chaotic attractor by FPGA hardware: (a) x - y plane; (b) x - z plane; (c) y - z plane; (d) y - w plane.

6 结 论

将忆阻非线性项和状态反馈控制器引入三维自治二次类 Lorenz 混沌系统, 构建了一个新四阶混沌系统. 通过数值分析发现该系统随着参数变化具有两个周期吸引子共存、两个单涡卷混沌吸引子共存、两个双涡卷混沌吸引子共存等多稳态现象, 同时还发现了共存的旋转吸引子. 其次, 设计了一个非线性反馈控制器, 实现了混沌系统的自同步. 最后, 通过 FPGA 硬件平台实现该系统, 实验结果与数值仿真结果保持一致, 验证了系统的可行性, 下一步将研究该系统在信息安全中的应用.

参考文献

- [1] Tucker W 1999 *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics* **328** 1197
- [2] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
- [3] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 659
- [4] Bao B C, Liu Z, Xu J P 2009 *J. Syst. Eng. Electron* **20** 1179
- [5] Lai Q, Wang Z L, Kamdem P D K 2022 *Mod Phys. Lett. B* **36** 1
- [6] Liu M T, Yu W X, Wang J N, Chen Y, Bian Y Y 2022 *Circuit World* **48** 1
- [7] Liu S, Wei Y P, Liu J Y, Zhang G P 2020 *J. Cent. Chin. Normal Univ. (Nat. Sci.)* **54** 36 (in Chinese) [刘嵩, 韦亚萍, 刘静漪, 张国平 2020 华中师范大学学报 (自然科学版) **54** 36]
- [8] Zhuang Z B, Li J, Liu J Y, Chen S Q 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 50 (in Chinese) [庄志本, 李军, 刘静漪, 陈世强 2020 物理学报 **69** 50]
- [9] Wu Q Q, Zheng Y T, Li T 2014 *Science Paper Online* **9** 130 (in Chinese) [吴庆庆, 郑雅婷, 李涛 2014 中国科技论文 **9** 130]
- [10] Yan M X, Lin J F, Xie J H 2021 *J. Nanjing Youdian Univ. (Nat. Sci.)* **41** 66 (in Chinese) [颜闽秀, 林建峰, 谢俊红 2021 南京邮电大学学报 (自然科学版) **41** 66]
- [11] Chua L O 1971 *IEEE Trans. Circuits Theor.* **18** 507
- [12] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, Stanley W R 2008 *Nature* **453** 80
- [13] Wang M J, Deng Y, Liao X H, Li Z J, Ma M L, Zeng Y C 2019 *Int. J. Nonlin. Mech.* **111** 149
- [14] Xu C B, He Y H, Wu X, Mo Y H 2020 *J. Harbin Eng. Univ.* **52** 92 (in Chinese) [徐昌彪, 何颖辉, 吴霞, 莫运辉 2020 哈尔滨工业大学学报 **52** 92]
- [15] Hu H Y, Cao Y H, Hao J, Li X J, Mou J 2022 *Multimed. Tools Appl.* **82** 4343
- [16] Guo Z G, Wen J J, Mou J 2022 *Mathematics* **11** 1
- [17] Xian Y J, Mo Y H, Xu C B, Wu X, He Y H 2020 *J. Huanan Ligong Univ. (Nat. Sci.)* **48** 32 (in Chinese) [鲜永菊, 莫运辉, 徐昌彪, 吴霞, 何颖辉 2020 华南理工大学学报 (自然科学版) **48** 32]
- [18] Wang X X, Zhang H H, Lai Q 2021 *Electron. Components Mater.* **40** 1208 (in Chinese) [王徐吁, 张宏昊, 赖强 2021 电子元件与材料 **40** 1208]
- [19] Xian Y J, Fu K R, Xu C B 2021 *J. Vibr. Shock* **40** 15 (in Chinese) [鲜永菊, 扶坤荣, 徐昌彪 2021 振动与冲击 **40** 15]
- [20] Li M Z, Xu R J, Yue L J 2021 *J. Dongbei Shida Univ. (Nat. Sci.)* **53** 120 (in Chinese) [李木子, 许荣今, 岳立娟 2021 东北师大学报 (自然科学版) **53** 120]
- [21] Min F H, Wang Z L, Cao G, Wang E R 2018 *Acta Electronica Sin.* **46** 9 (in Chinese) [闵富红, 王珠林, 曹戈, 王思荣 2018 电子学报 **46** 9]
- [22] Ma X J, Mou J, Li X, Banerjee S, Cao Y H, Wang J Y 2021 *Chaos Solit. Frac.* **152** 111363
- [23] Bao H, Wang N, Bao B C, Chen M, Jin P P, Wang G Y 2018 *Commun. Nonlinear Sci.* **57** 264
- [24] Yu F, Liu L, Qian S, Li L X, Huang Y Y, Shi C Q, Cai S, Wu X M, Du S C, Wan Q Z 2020 *Complexity* **2020** 1
- [25] Li X X, Zheng C, Wang X, Cao Y Z, Xu G Z 2022 *J. Harbin Eng. Univ.* **69** 163 (in Chinese) [李晓霞, 郑驰, 王雪, 曹樱子, 徐桂芝 2022 哈尔滨工业大学学报 **69** 163]
- [26] Qin M H, Lai Q, Wu Y H 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 160502 (in Chinese) [秦铭宏, 赖强, 吴永红 2022 物理学报 **71** 160502]

- [27] Li Q D, Zeng H Z, Li J 2015 *Nonlinear Dyn.* **79** 2295
 [28] Yang Q G, Wei Z C, Chen G R 2010 *Int. J. Bifur. Chao* **20** 1061
 [29] Sun K H, Wang Y, Liu X 2013 *J. Circuits Syst.* **18** 500 (in Chinese) [孙克辉, 汪艳, 刘璇 2013 *电路与系统学报* **18** 500]
 [30] Chen Z S, Sun K H, Zhang T S 2005 *Acta Phys. Sin.* **6** 2580
 (in Chinese) [陈志盛, 孙克辉, 张泰山 2005 *物理学报* **6** 2580]
 [31] Fu J C, Zhang Z H 2016 *Control Decision* **31** 1707 (in Chinese) [付景超, 张中华 2016 *控制与决策* **31** 1707]
 [32] Mao B X, Wang D X, Bu C X 2012 *J. Cent. Chin. Normal Univ. (Nat. Sci.)* **46** 297 (in Chinese) [毛北行, 王东晓, 卜春霞 2012 *华中师范大学学报 (自然科学版)* **46** 297]

Dynamic analysis and FPGA implementation of a fourth-order chaotic system with coexisting attractor^{*}

Quan Xu Qiu Da Sun Zhi-Peng Zhang Gui-Zhong Liu Song[†]

(College of Intelligent Systems Science and Engineering, Hubei Minzu University, Enshi 445000, China)

(Received 16 May 2023; revised manuscript received 7 August 2023)

Abstract

To further explore the complex dynamical behaviors in coexisting attractors, a fourth-order chaotic system with four types of coexisting attractors and four unstable equilibrium points is constructed in this paper. The dynamic behavior of the new system is analyzed by means of phase trajectory diagram, time domain waveform diagram, Poincaré map, Lyapunov exponent spectrum and bifurcation diagram. The experimental results show that as the parameters change, the system exhibits rich dynamic behaviors such as stable points, period-doubling bifurcations, coexisting bifurcation modes, and chaotic crises. When the system parameters and memristive parameters change, it is found that the system has different types of coexisting attractors, such as the coexistence of two periodic attractors, the coexistence of two single-scroll chaotic attractors, the coexistence of two double-scroll chaotic attractors, the coexistence of two point attractors. In particular, the system also has the rotation phenomenon of coexisting attractors. Finally, a nonlinear feedback controller is designed, which can make the new system achieve chaos synchronization in a short time. The phase diagram captured by the field-programmable gate array (FPGA) hardware platform is consistent with the numerical simulation results, which proves the feasibility of the system.

Keywords: chaotic system, coexistence attractor, rotating attractor, field-programmable gate array

PACS: 05.45.Ac, 05.45.Gg

DOI: [10.7498/aps.72.20230795](https://doi.org/10.7498/aps.72.20230795)

^{*} Project supported by the Enshi State Science and Technology Support Plan Project, China (Grant No. D20220015).

[†] Corresponding author. E-mail: liusong@hbmzu.edu.cn

一个具有共存吸引子的四阶混沌系统动力学分析及FPGA实现

全旭 邱达 孙智鹏 张贵重 刘嵩

Dynamic analysis and FPGA implementation of a fourth-order chaotic system with coexisting attractor

Quan Xu Qiu Da Sun Zhi-Peng Zhang Gui-Zhong Liu Song

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 190502 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230795

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230795>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一个具有超级多稳定性的忆阻混沌系统的分析与FPGA实现

Analysis and FPGA implementation of memristor chaotic system with extreme multistability

物理学报. 2022, 71(24): 240502 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221423>

具有无穷共存吸引子的简单忆阻混沌系统的分析与实现

Analysis and implementation of simple four-dimensional memristive chaotic system with infinite coexisting attractors

物理学报. 2022, 71(16): 160502 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220593>

一种具有隐藏吸引子的分数阶混沌系统的动力学分析及有限时间同步

Dynamic analysis and finite time synchronization of a fractional-order chaotic system with hidden attractors

物理学报. 2018, 67(5): 050502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172354>

基于现场可编程逻辑门阵列的磁控忆阻电路对称动力学行为分析

Dynamic analysis of symmetric behavior in flux-controlled memristor circuit based on field programmable gate array

物理学报. 2019, 68(13): 130502 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190453>

基于Julia分形的多涡卷忆阻混沌系统

Julia fractal based multi-scroll memristive chaotic system

物理学报. 2018, 67(9): 090502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172761>

基于指数加权-核在线序列极限学习机的混沌系统动态重构研究

Dynamic reconstruction of chaotic system based on exponential weighted online sequential extreme learning machine with kernel

物理学报. 2019, 68(10): 100503 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190156>