

专题: 华南师范大学建校暨物理学科建立 90 周年

路径积分传播子测量的研究进展*

田礼漫¹⁾²⁾ 温永立^{1)2)†} 王云飞¹⁾²⁾ 张善超¹⁾²⁾ 李建锋¹⁾²⁾
杜镜松¹⁾²⁾ 颜辉¹⁾²⁾³⁾ 朱诗亮¹⁾²⁾³⁾

1) (华南师范大学物理学院, 原子亚原子结构与量子调控教育部重点实验室, 广州 510006)

2) (华南师范大学, 广东省量子调控工程与材料重点实验室, 广州 510006)

3) (华南师范大学物理前沿科学研究院, 粤港量子物质联合实验室, 广州 510006)

(2023 年 5 月 31 日收到; 2023 年 9 月 19 日收到修改稿)

传播子在路径积分理论中扮演着核心角色, 因此在路径积分理论可使用的多个现代量子物理领域中有重要价值. 然而, 由于其一直未能在实验中被直接测量, 基于路径积分表述研究量子系统的实验进展受到了严重制约. 最近, 基于波函数直接测量方法, 我们提出了传播子测量方案, 并利用单光子实验首次成功实现了传播子的实验测量. 此外, 在这项研究中还首次演示了量子力学的最小作用量原理. 该研究成功解决了路径积分实验研究中的技术难题. 本文综述了此领域的研究进展, 具体为简述波函数直接测量的基本概念和研究进展, 并详细介绍传播子测量的理论模型、实验设计和实验结果. 最后, 介绍了一个重要的应用范例, 即通过传播子测量实现最小作用量原理的实验演示. 本文综述的传播子测量研究进展, 将为今后使用该方法开展相关实验研究提供重要的参考.

关键词: 量子测量, 传播子, 路径积分, 最小作用量原理**PACS:** 03.65. Ta, 03.65.-w**DOI:** 10.7498/aps.72.20230902

1 引言

1948 年, 费曼根据最小作用量原理提出了量子力学的路径积分表述^[1-3], 这是继薛定谔的波动力学和海森伯的矩阵力学之后的第三种量子力学表述方式. 路径积分对现代量子物理学的发展发挥了巨大作用, 是量子场论、量子统计、量子引力等多个领域的基础. 传播子是路径积分理论的核心物理量, 它是获取量子系统重要信息 (如波函数、量子态演化、作用量、拓扑不变量和配分函数) 的重要工具. 然而, 自从提出路径积分以来, 其主要作为研究量子系统的理论工具, 实验研究基本空缺. 基于路径积分表述的量子实验需要对传播子进行

测量, 但在我们的工作^[4]之前, 国际上未有关于传播子测量的实验报告, 这是限制路径积分实验研究推进的主要原因.

传播子描述了量子系统从初态演化到末态的概率幅, 与波函数一样, 都是复值. 而传统的正交投影量子测量模型^[5]仅能对实数物理量进行测量. 1988 年 Aharonov 等^[6]提出了弱测量概念, 他们发现在该测量框架下, 弱值可以把测量信号显著放大, 这种放大效应后来被广泛应用于量子精密测量和微小量测量中. 2011 年 Lundeen 等^[7]巧妙利用弱值是复值这个性质, 把弱值与波函数进行关联, 最终把波函数的实部和虚部分别对应到实验可探测量中, 实现了对单光子空间波函数的直接测量. 这种测量方法具有简洁、直接的优势, 也被称为

* 广东省基础与应用基础研究基金区域联合基金-青年基金项目 (批准号: 2022A1515110921) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: ylwen@m.scnu.edu.cn

直接测量法, 被广泛应用到各类量子态测量实验中, 也有不少研究对这种测量技术进行了重要的推广和优化. 由于传播子和波函数在数学形式和物理性质方面具有相似性, 我们自然可以问一个重要科学问题: 是否可以基于波函数的直接测量方法来研究传播子的实验测量方法? 我们研究组^[4]于2017年开展了此问题的研究, 并于2023年发表了研究结果: 基于波函数的直接测量方法, 提出了实现路径积分传播子测量的理论模型; 类似波函数的直接测量方法, 传播子的实部和虚部分别从可测量算符的期望值得到. 根据这个理论模型, 我们基于单光子设计了传播子的实验测量系统, 成功测量了单光子在自由空间及谐振势中的传播子, 这是传播子的首次实验测量, 为基于路径积分的实验研究解决了关键的技术问题. 此外, 该研究基于传播子的测量对路径积分中的最小作用量原理进行了演示, 通过测量所得的传播子进行分析, 得到了单光子的经典路径, 首次实现了量子力学中的最小作用量原理实验演示. 传播子是现代量子物理中的重要物理量之一, 对其进行实验测量为未来基于路径积分的量子系统实验研究提供了方法, 是推动路径积分从理论研究逐步走向实验研究的途径.

本文旨在综述传播子测量方法的相关研究进展. 第2节概述弱值的概念、波函数直接测量法及其进展, 重点介绍该方法实现复值物理量测量的主要思想. 第3节简要介绍最小作用量原理的沿革以及路径积分理论和传播子的基本概念. 第4节先介绍传播子测量的理论模型, 然后以光学系统为例介绍实现传播子测量的实验设计, 并展示测量所得传播子实验数据. 第5节介绍基于传播子的测量实现最小作用量原理实验演示, 这是传播子测量的重要应用范例. 最后, 对传播子测量的研究进行总结并展望未来的研究方向.

2 波函数的直接测量法

波函数是描述量子系统状态的复值函数, 通过波函数可得出量子系统的各种性质, 是量子理论的核心. 一般而言, 量子可测量的算符是厄密算符, 测量结果也必为实数, 而波函数是复数, 通过传统的正交投影测量方法难以对其直接测量, 量子态层析^[8,9]是测量波函数较成熟和常用的方法, 它通过对一系列算符的投影测量结果重构出系统的密度

矩阵或波函数. 然而, 量子态层析有局限性, 由于它需要大量的测量次数和复杂的重构算法, 在高维量子态测量中复杂度较高. 近年来, 一种基于弱值来直接测量波函数的方法被提出. 弱值是弱测量模型中的概念, 一开始研究者们主要关注弱值的信号放大效应. 后来, 弱值是复值的这个特性被应用到波函数的测量中, 这种测量方法因为具有简洁和直接的优势而受到广泛的关注, 其测量方案和技术也在后续很多研究工作中得到了优化与推广. 本节先介绍弱值与弱测量的基本概念, 然后介绍基于它们发展出来的波函数直接测量方法的研究进展.

2.1 量子弱测量

量子弱测量最早是1988年由Aharonov等^[6]提出的, 在该模型中, 测量可看作是待测系统和指针的相互作用过程, 由哈密顿量 $H = -g(t)\hat{q}\hat{A}$ 描述, 其中 \hat{A} 为待测量的算符, \hat{q} 为指针态的位置算符, $g(t)$ 表示耦合的强度. 待测系统和指针的预选态分别为 $|\phi_{\text{in}}\rangle = \sum_j a_j |j\rangle$ 和 $|\psi\rangle = e^{-\Delta^2 p^2}$, 这里的 Δ 是动量空间中高斯型波包的宽度. 将相互作用演化算符 $\hat{U} = e^{-i\int \hat{H} dt}$ 作用在系统和指针初态上, 假设耦合强度很小, 只保留演化算符级数展开的一阶项, 再将系统投影到后选择态 $|\phi_{\text{f}}\rangle$ 上:

$$\begin{aligned} |f\rangle &= \langle\phi_{\text{f}}|(1 + i\hat{q}\hat{A})|\phi_{\text{in}}\rangle e^{-\Delta^2 p^2} \\ &\approx \langle\phi_{\text{f}}|\phi_{\text{in}}\rangle e^{i\theta\hat{q}\frac{\langle\phi_{\text{f}}|\hat{A}|\phi_{\text{in}}\rangle}{\langle\phi_{\text{f}}|\phi_{\text{in}}\rangle}} e^{-\Delta^2 p^2} \\ &= \langle\phi_{\text{f}}|\phi_{\text{in}}\rangle e^{-\Delta^2(p - \theta\langle\hat{A}\rangle_w)^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

对于一个可观测量 \hat{A} 的弱值由 $\langle\hat{A}\rangle_w = \frac{\langle\phi_{\text{f}}|\hat{A}|\phi_{\text{in}}\rangle}{\langle\phi_{\text{f}}|\phi_{\text{in}}\rangle}$ 定义. 观察(1)式可知, 指针态的偏移量正比于弱值, 而当预选择态和后选择态接近正交时, 弱值就是一个很大的值, 可以超越 \hat{A} 的本征值取值范围, 这个效应也被称作弱值放大效应, 这个理论模型之后在光子偏振态的测量中被首次验证^[10]. 放大效应后来主要应用于一些微小量的测量中, 弱值可以让待测量在测量仪器上的信号显著放大, 进而提高测量的精度, 这种放大效应在光的自旋霍尔效应^[11]、光束的偏转^[12–14]、角度的偏移^[15,16]、相位的偏移^[17,18]、频率的偏移^[19]、时间的偏移^[20,21]、单光子非线性效应^[22]以及其他各领域^[23,24]的实验中得到了应用, 此外研究者们也对弱值放大效应本身进行了深入的讨论^[25–28].

除放大效应的性质以外, 弱值是复值这个性质也逐渐被研究者们关注, 并将其应用到波函数的测量中. Lundeen 和 Resch^[29] 研究发现弱测量中湮灭算符 (或自旋下降算符) 在指针态下的期望值与弱值是正比关系, 湮灭算符 (或自旋下降算符) 的期望值则可以分解成两个可测量算符期望值的叠加, 如此, 弱值的虚部和实部也可被分别测出. 其后, 这个理论研究结果应用到了光子的空间波函数的测量中^[7], 在此实验研究中, 待测量算符为光子的空间位置投影算符 $\hat{\pi}_x = |x\rangle\langle x|$, 指针为光子的偏振态, 相互作用中指针态用 $\hat{\sigma}_y$ 描述, 弱测量的相互作用演化算符为 $U = e^{-i\theta\hat{\pi}_x\hat{\sigma}_y} \approx \hat{I} - i\sin\theta\hat{\pi}_x\hat{\sigma}_y$, 选取后选择态为动量空间的本征态 $|p\rangle$, 这时的弱值可表示为 $\langle\hat{\pi}_x\rangle_w = \frac{\langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle}{\langle p|\psi\rangle} = \frac{e^{ipx/\hbar}\psi(x)}{\phi(p)}$, $\psi(x)$ 和 $\phi(p)$ 分别是 x 位置的波函数和动量空间 p 的波函数. 可以取 $p=0$ 使 $e^{ipx/\hbar} = 1$, $|p=0\rangle$ 与任意本征态 $|x\rangle$ 的内积均为常数, 上式便简化为

$$\langle\hat{\pi}_x\rangle_w = \frac{\psi(x)}{\phi(0)} = k\psi(x), \quad (2)$$

这里 k 是一个与 x 无关的常数, 因此便得到了波函数 $\psi(x)$ 与弱值 $\langle\hat{\pi}_x\rangle_w$ 的正比关系, 只要测量出弱值便能得到波函数. 而弱值则可以由指针态的湮灭算符期望值得出:

$$\langle\hat{\pi}_x\rangle_w = \frac{2}{\sin\theta} \langle f|\hat{\sigma}_-|f\rangle = \frac{1}{\sin\theta} (\langle f|\hat{\sigma}_x|f\rangle - i\langle f|\hat{\sigma}_y|f\rangle). \quad (3)$$

在实验中, 指针在 $\hat{\sigma}_x$ 和 $\hat{\sigma}_y$ 的期望值可分别通过测量光子在 $\pm 45^\circ$ 斜偏振和左/右旋偏振态的投影概率差求得, 因此光子的空间波函数的实部和虚部就可以分别直接从实验测量结果中得到:

$$\begin{aligned} \text{Re}[\psi(x)] &= \frac{1}{\phi(0)\sin\theta} \langle f|\hat{\sigma}_x|f\rangle, \\ \text{Im}[\psi(x)] &= \frac{1}{\phi(0)\sin\theta} \langle f|\hat{\sigma}_y|f\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

这种测量方法具有简便性和直接性, 待测波函数直接正比于实验可观测量, 不需要大量的投影测量次数和复杂的重构算法, 因此称为直接测量法. 随后, 直接测量法得到了广泛的应用和推广, 例如, 它在光子偏振态^[30]、光子轨道角动量态^[31]、密度矩阵^[32]、Bohmian 轨迹^[33–35]、高维度量子态^[36]、纠缠量子态^[37]、多粒子量子态^[38]、几何相位^[39] 等多个领域的测量中得到应用, 也有研究提出了免扫描的直接

测量法^[40], 大大提升了高维量子态的测量效率, 此外, 研究者们也对这种方法进行了深入讨论以及推广^[41–51].

2.2 任意耦合强度的直接测量法

基于弱值对波函数直接测量的方法要求待测系统与指针的耦合足够小, 这样会导致从指针提取待测系统信息的信号强度很弱, 在一些噪声较大的系统中难以获得较好的信噪比. 2016 年 Vallone 和 Dequal^[52] 的研究发现, 波函数直接测量法中弱耦合并不是必要的, 这个耦合可以是任意强度. 特别是, 当系统和测量仪器之间的耦合最大时, 这种强测量的测量精度优于弱测量, 同时还保留了弱测量方案中的简洁性和直接性. 这里以空间波函数测量的模型为例, 在没有弱耦合近似的情况下, 待测系统和指针相互作用的演化算符可表示为

$$\hat{U} = e^{-i\theta\hat{\pi}_x\hat{\sigma}_y} = \hat{I}_\pi\hat{I}_\sigma - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\hat{\pi}_x\hat{I}_\sigma - i\sin\theta\hat{\pi}_x\hat{\sigma}_y, \quad (5)$$

其中, $\hat{\sigma}_y$ 为光子偏振对应的泡利算符, 待测空间波函数为 $|\psi\rangle$, 系统与指针的联合初态为 $|\Psi_{\text{in}}\rangle = |\psi\rangle \otimes |0\rangle_P$, 其中指针态为二维量子比特 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. 在弱测量中 θ 要求足够小, 现在让耦合强度最大 $\theta = \pi/2$. 经过测量过程演化后将系统投影到零横向动量的态 $|p_0\rangle$ 上, 波函数的实部和虚部就能分别表示为

$$\begin{aligned} \text{Re}[\psi(x)] &= \frac{1}{2\phi(0)} (\langle f|\hat{\sigma}_x|f\rangle + 2\langle f|\hat{P}_1|f\rangle), \\ \text{Im}[\psi(x)] &= -\frac{1}{2\phi(0)} \langle f|\hat{\sigma}_y|f\rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\phi(0)$ 是与 x 无关的常数, $\hat{P}_1 = |1\rangle\langle 1|$ 是指针态 $|1\rangle$ 的投影算符. 对比 (4) 式和 (6) 式, 实验观测结果和待测波函数之间少了 $1/\sin\theta$ 这个系数, 由于在弱测量情况下 $\sin\theta$ 是一个小量, 强测量方案的信号强度比弱测量方案有着 $1/\sin\theta$ 倍的放大, 因此强测量方案的测量精度也就相应得到了显著提升. 由于强测量方案具备明显的优势, 后来也被广泛地应用, 例如, 应用在光子时域波函数的测量^[53]、光子二维横向空间波函数测量^[54]、高维波函数^[42,55–57] 以及混合态的测量^[58,59], 也有研究者在离子系统中观察到从弱测量到强测量的过渡^[60].

3 最小作用量原理和费曼路径积分

3.1 最小作用量原理沿革

最小作用量原理被科学家看作是物理学, 甚至

是自然界中最具普适性的基本原理, 它具备简洁和统一的科学美学特征, 在物理学乃至科学发展史中有着极其重要的地位. 自然界总是以最节省的方式达到它的目的, 这就是最小作用量原理的核心思想. 这个原理以及其变体几乎渗透到物理学中的每个角落.

最小作用量原理在物理学中的应用可追溯到费马原理. 17 世纪, 费马在研究光的折射现象时提出, “光的传播总是沿着花费时间最小的路线”, 这是最小作用量原理思想研究自然界问题的第一个成功范例. 其后, 科学家莫培督 (Maupertuis) 对这种极值思想进一步推广和总结, 他认为, “自然界总是以一种最节省的方式运行”, 并提出了作用量的概念, 为最小作用量原理的数学形式构建了一个雏形. 几乎同一时期, 欧拉也基于这种极值思想提出了物体运动的变分方程, 拉格朗日受欧拉的启发, 得出了分析力学的核心方程——欧拉-拉格朗日方程, 后来数学家哈密顿将其总结成为哈密顿原理:

$$\delta S = \delta \int_0^t L dt = 0, \quad (7)$$

这是后来物理学中最小作用量原理常用的数学形式.

19 世纪末, 著名物理学家亥姆霍兹 (Helmholtz) 把最小作用量原理应用于热力学和电动力学, 并证明据此可以推导出麦克斯韦方程组. 他进一步把该原理看作是支配整个物理学领域统一的基本原理, 即试图把这一原理推广到物理学的所有领域中, 他提出, “最小作用量原理很可能是关于一切自然过程的普遍性原理……它作为具有启发性和指导性的原理, 在我们寻求新现象的规律时将具有极高的价值”. 此后, 普朗克、诺特、希尔伯特、薛定谔、费曼等众多物理学家或数学家在亥姆霍兹指引的方向上不懈努力, 取得了丰硕的成果, 极大地推动了现代物理学的发展. 历史上有一个故事, 数学家希尔伯特知道了爱因斯坦关于广义相对论研究的初步思想后, 利用最小作用量原理, 比爱因斯坦还早十几天推导出广义相对论场方程, 即现在称为爱因斯坦-希尔伯特场方程的广义相对论场方程. 另一方面, 数学家诺特把该原理和对称性结合, 推导出诺特定理, 给出了物理学中的另一块基石——对称性和守恒律的关系. 因此, 最小作用量原理担当着物理学的核心角色, 它可以推导出物理学中几乎全部关键的物质运动方程.

3.2 路径积分与传播子

路径积分^[3]是量子力学的一种表述方法, 其完整方法框架由理查德·费曼^[1]于 1948 年提出, 它以最小作用量原理^[61]为核心, 通过传播子和路径的泛函积分来描述量子系统的运动和演化. 路径积分在量子物理的发展中具有承前启后的作用, 一方面, 它通过最小作用量原理形象地描述了经典力学和量子力学的关联, 另一方面, 它把时间和空间同等化处理, 更易于从非相对论推广到相对论的协变形式, 因此极大地推动了现代量子场论的发展.

在路径积分理论中, 一个粒子从初始时刻 t_a 的起始位置 x_a 到末时刻 t_b 的末位置 x_b 的概率幅由传播子描述: $K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \langle x_b | \hat{T}(t_b - t_a) | x_a \rangle$, 其中 $\hat{T}(t_b - t_a)$ 是时间演化算符. 在量子力学中, 粒子并不会以特定的一条路径运动, 而是同时沿着所有可能的路径运动至终点, 路径积分的提出基于两个基本假设: 1) 所有可能的路径概率都相等; 2) 虽然路径的概率相等, 但其相位不同, 其相位角等于作用量 S 和 \hbar 的比值. 任意的一条路径 $x(t)$ 的贡献可以用一个复振幅表示: $\varphi[x(t)] = C e^{(i/\hbar)S[x(t)]}$, 其中 $S[x(t)]$ 为路径 $x(t)$ 的作用量, 它是路径拉格朗日量的时间积分: $S[x(t)] = \int L[\dot{x}(t), x(t), t] dt$. 传播子则可对所有路径的贡献进行积分求得:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \mathcal{N} \int_{x_a}^{x_b} e^{(i/\hbar)S[x(t)]} \mathcal{D}x(t). \quad (8)$$

对于那些作用量 S 远大于 \hbar 的路径, 它们的概率相等, 但是相位变化剧烈, 在叠加之后其贡献相干相消. 当一条路径与其临近路径在一级近似上全都给出相同相位时, 这些路线不会相互抵消, 而是干涉相长, 这就是最小作用量原理 $\delta S = 0$ 确定的路径. 在宏观世界中, \hbar 是一个趋近于 0 的微小量, 作用量与它的比值 S/\hbar 便趋近于无穷大, 路径很容易相消, 只有满足 $\delta S = 0$ 的路径才是稳定的路径, 因此宏观世界中物体运动轨迹就是唯一确定的. 路径积分以一种简洁、图像化的方式重新诠释了量子力学, 它通过最小作用量原理解释了经典力学与量子力学之间的“过渡”^[62]. 路径积分在提出以后, 在物理学的多个关键领域有着重要的影响^[63–74].

4 传播子的直接测量

4.1 传播子测量理论方案

传播子测量的理论方案如图 1 所示, 设粒子在 t 时刻的横向位置波函数可以表示为 $|\psi(t)\rangle = \sum_{j=1}^d \psi(x_j, t)|x_j\rangle$, 选取一个量子比特为指针, 指针两个本征态为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$. 系统与指针的联合初态为 $|\phi_{in}\rangle = |\psi\rangle|0\rangle$. 在初始时刻 t_a , 利用一个相互作用过程将待测系统和指针进行耦合, 这个耦合操作可以用一个演化算符表示: $\hat{U}(\theta) = e^{-i\theta\hat{\pi}_x\hat{\sigma}_y}$, 这里 $\hat{\pi}_x = |x\rangle\langle x|$ 和 $\hat{\sigma}_{x,y,z}$ 分别是空间位置 x 的投影算符和作用在指针态上的泡利矩阵, θ 表示耦合强度. 这里选取 $\theta = \pi/2$, 也就是强测量的情况. 经过耦合后, 系统的联合态可写为

$$|\phi_a\rangle = e^{-i\theta\hat{\pi}_{x_a}\hat{\sigma}_y}|\phi_{in}\rangle = [|\psi\rangle - \psi(x_a, t_a)|x_a\rangle]|0\rangle - \psi(x_a, t_a)|x_a\rangle|1\rangle. \quad (9)$$

然后, 系统进入势场 $V(x)$ 的演化区域, 粒子从 t_a 时刻演化到 t 时刻的演化算符为: $\hat{T}(t-t_a) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^t \hat{H} dt'\right)$, 其中哈密顿量为 $\hat{H} = \hat{p}_x^2/2m + V(x)$, 经演化后的系统状态为

$$|\phi_t\rangle = [\hat{T}(t-t_a)|\psi\rangle - \psi(x_a, t_a)\hat{T}(t-t_a)|x_a\rangle]|0\rangle - \psi(x_a, t_a)\hat{T}(t-t_a)|x_a\rangle|1\rangle, \quad (10)$$

此时, 对系统进行后选择, 将系统投影到空间位置的本征态 $\langle x_m|$, 这样指针末态 $|f\rangle = \langle x_m|\phi_t\rangle$ 便可以

写为

$$|f\rangle = [\langle x_m|\hat{T}(t-t_a)|\psi\rangle - \psi(x_a, t_a)\langle x_m|\hat{T}(t-t_a)|x_a\rangle]|0\rangle - \psi(x_a, t_a)\langle x_m|\hat{T}(t-t_a)|x_a\rangle|1\rangle. \quad (11)$$

利用传播子的定义式 $K(x_m, t; x_a, t_a) = \langle x_m|\hat{T}(t-t_a)|x_a\rangle$ 将 (11) 式简化为

$$|f\rangle = [\psi(x_m, t) - \psi(x_a, t_a)K(x_m, t; x_a, t_a)]|0\rangle - \psi(x_a, t_a)K(x_m, t; x_a, t_a)|1\rangle. \quad (12)$$

这样传播子的信息就相当于存储到了指针中, 传播子的提取方法类似于波函数的直接测量法, 测量出末态 $|f\rangle$ 在 $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{P}_1 = |1\rangle\langle 1|$ 这些算符的期望值:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[\langle f|\hat{\sigma}_x|f\rangle - i\langle f|\hat{\sigma}_y|f\rangle - \langle f|\hat{P}_1|f\rangle] \\ &= -\psi^*(x_m, t)\psi(x_a, t_a)K(x_m, t; x_a, t_a), \end{aligned} \quad (13)$$

最后就能得到传播子:

$$K(x_m, t; x_a, t_a) = \frac{K'(x_m, t; x_a, t_a)}{\psi^*(x_m, t)\psi(x_a, t_a)}, \quad (14)$$

其中 $K'(x_m, t; x_a, t_a) = \frac{1}{2}[-\langle f|\hat{\sigma}_x|f\rangle + i\langle f|\hat{\sigma}_y|f\rangle] + \langle f|\hat{P}_1|f\rangle$. 从 (14) 式可知, 如果要测量出传播子, 还需要对波函数 $\psi(x_m, t)$ 和 $\psi(x_a, t_a)$ 进行测量, 此处可以直接采用波函数直接测量法对其进行测量. 然而, 由于 $\psi(x_m, t)$ 是经过 $\hat{T}(t-t_a)$ 的波函数, 而 $\hat{T}(t-t_a)$ 是未知的, $\psi(x_m, t)$ 有可能等于零, 在此情况下, 上述的测量方法就无法测出传播子

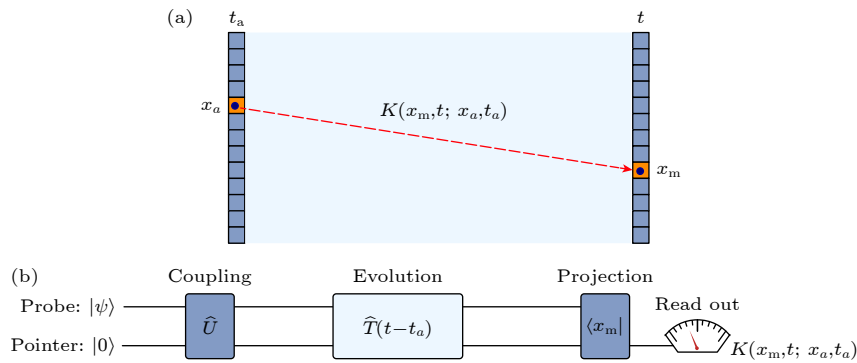


图 1 路径积分示意图及测量方法 (a) 传播子, 粒子从 (x_a, t_a) 传播到 (x_m, t) ; (b) 测量传播子的量子线路. 为了测量 $K(x_m, t; x_a, t_a)$, 首先需要制备量子态 $|\psi\rangle$ 和指针 $|0\rangle$. 然后, 在 t_a 时刻, 耦合操作 \hat{U} 将系统的位置波函数与指针进行耦合. 演化之后, 将系统投影到 t 时刻的位置 x_m 上, 从指针读出 $K(x_m, t; x_a, t_a)$

Fig. 1. Path integration diagram and measurement method: (a) Propagators: the propagation from (x_a, t_a) to (x_m, t) ; (b) protocol to measure the propagators. To measure $K(x_m, t; x_a, t_a)$, the quantum state $|\psi\rangle$ and pointer $|0\rangle$ are prepared first. Then, at time t_a , a coupling operation \hat{U} couples the positional wave function of the probe system with the pointer. After the evolution, the system is projected to position x_m at t , and $K(x_m, t; x_a, t_a)$ can be read out from the pointer.

$K(x_m, t; x_a, t_a)$, 但传播子是反映哈密顿量的信息, 与波函数无关. 为了解决这个问题, 在 t_a 时将系统分为两部分 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$, 这两部分经过不同的演化, 演化算符 $\hat{T}_1(t - t_a) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^t \left[\frac{p^2}{2m} + V(x, t')\right] dt'\right\}$, 对应需要测量的传播子 $K(x_m, t; x_a, t_a) = \langle x_m | \hat{T}_1(t - t_a) | x_a \rangle$. 对于 $|\phi_2\rangle$ 这一部分的演化可以认为是缓慢的, 经过 $\hat{T}_2(t - t_a) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^t \frac{p^2}{2m} dt'\right)$ 演化后的系统变化非常微小, 可以近似为 $\hat{T}_2(t - t_a) |\psi\rangle \approx |\psi\rangle$. 在 t_b 时刻对态 $|\phi_2\rangle$ 的指针执行一个旋转操作, 其演化算符为 $e^{i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_y} |\phi_2\rangle$, 然后投影至 $|0\rangle$ 态, 而 $|\phi_1\rangle$ 将投影到 $|1\rangle$ 态, 最后得到:

$$\begin{aligned} |\phi'_1\rangle &= |1\rangle \langle 1 | \phi_1\rangle = -\psi(x_a, t_a) \hat{T}_1(t - t_a) |x_a\rangle |1\rangle, \\ |\phi'_2\rangle &= |0\rangle \langle 0 | e^{i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_y} |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{T}_2(t - t_a) |\psi(x_a, t_a)\rangle |0\rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

合并这两个态 $|\phi'\rangle = |\phi'_1\rangle + |\phi'_2\rangle$. 将合并后的态 $|\phi'\rangle$ 投影到后选择态 $\langle x_m |$ 上得到指针末态并利用近似条件 $\langle x_m | \hat{T}_2(t - t_a) |\psi\rangle \approx \psi(x_m, t_a)$ 得:

$$\begin{aligned} |f'\rangle &= \langle x_m | \phi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(x_m, t_a) |0\rangle \\ &\quad - \psi(x_a, t_a) K(x_m, t; x_a, t_a) |1\rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

通过测量处于位置 x_m 和时间 $t = z/c$ (c 为真空中光速) 处的指针态结束演化. 最终得到传播子的表达式为

$$K(x_m, t; x_a, t_a) = \frac{K''(x_m, t; x_a, t_a)}{\sqrt{2} \psi^*(x_m, t_a) \psi(x_a, t_a)}, \quad (17)$$

其中, $K''(x_m, t; x_a, t_a) = -\langle f' | \hat{\sigma}_x | f'\rangle + i \langle f' | \hat{\sigma}_y | f'\rangle$, $\psi^*(x_m, t_a)$ 和 $\psi(x_a, t_a)$ 都是 t_a 时刻的空间波函数, 可认为是按需制备的初态波函数, 保证其在所需探测位置不为零.

4.2 直接测量传播子的实验设计

根据 4.1 节的传播子测量方案, 可设计测量传播子的实验. 在 4.1 节的传播子测量方案中, 需要对待测系统的空间模式和一个二维指针进行耦合, 并且还需要对待测系统进行位置后选择, 由于光子的空间模式调控和测量的技术和设备相对较成熟, 且光子的传播与演化受到环境的影响较小, 因此比较适合用于演示上述传播子的测量方案. 下面基于光学系统介绍实现传播子测量的实验设计.

光子是无静止质量的相对论性粒子, 而 4.1 节

中的传播子是基于有静止质量粒子的哈密顿量讨论的, 所以这里需要先对光子在垂直于传播方向上的空间波函数演化做一个近似. 光子的哈密顿量可以写为 $H = c|\mathbf{p}| = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$, x, y 是光子的横向空间坐标, z 为光子的传播方向, 动量 p_z 与光子的波长有关, $p_z = \hbar k_z = 2\pi\hbar/\lambda$. 选取光子的高斯波包为横向空间波函数 $|\psi(x, y)|^2 = \mathcal{N}_G e^{-(x^2+y^2)/(a_x^2+a_y^2)}$, 其中 \mathcal{N}_G 是归一化常数. 动量不确定度 $p_x (p_y)$ 是 $\hbar/a_x (\hbar/a_y)$, 这里选取光子的波长为 $\lambda = 795 \text{ nm}$ 并且 $a_x = a_y \approx 0.4 \text{ mm}$, 在此条件下, 光子在传播方向上的动量远大于横向的动量不确定度, 也就是 $p_z \gg p_x, p_y$, 此时哈密顿量可以近似为

$$H \approx \frac{c\hat{p}_x^2}{2p_z} + \frac{c\hat{p}_y^2}{2p_z} + cp_z. \quad (18)$$

把 p_z 看成一个常数, 演化时间就与 z 方向的位置成正比: $t = z/c$, c 为真空中光速. 这里仅考虑 x 方向的演化, 波函数 $\psi(x, t)$ 可以用类薛定谔方程描述:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \frac{c\hat{p}_x^2}{2p_z} \psi(x, t). \quad (19)$$

将 $\frac{c\hat{p}_x^2}{2p_z}$ 类比于 $\frac{\hat{p}_x^2}{2m}$ 就能得到光子等效质量 $m = \frac{p_z}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda c}$, 光子便能看作是有质量的非相对论性粒子.

测量传播子 $K(x, t; x_a, t_a)$ 的实验方案示意图如图 2 所示. 波长为 795 nm、横向为高斯模的相干光从单模光纤中出射, 经过半波片 (HWP) 和偏振分束器 (PBS) 将光的偏振变成垂直偏振 $|0\rangle$. D 型反射镜将光反射到空间光调制器 (SLM) 上, 中途经过一个半波片将垂直偏振光旋转成斜偏振光, 其偏振态可以写为 $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. 利用 SLM 对空间位置 x_a 的光产生一个相移, 经过调制后的偏振态就变为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\pi}|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|0\rangle + |1\rangle) = -|-\rangle$, 这个调制相当于么正演化 $\hat{U} = e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y}$. SLM 反射出的光再次经过 HWP 对偏振进行一个逆变换, 没有经过 SLM 调制的光偏振从 $|+\rangle$ 被还原为 $|0\rangle$, 经过 SLM 调制的光偏振从 $|-\rangle$ 变成了 $|1\rangle$, 这样就利用半波片和空间光调制器 (SLM) 将横向空间波函数与指针耦合在一起了, 假设在 SLM 上调制完成的瞬间为时刻 t_a .

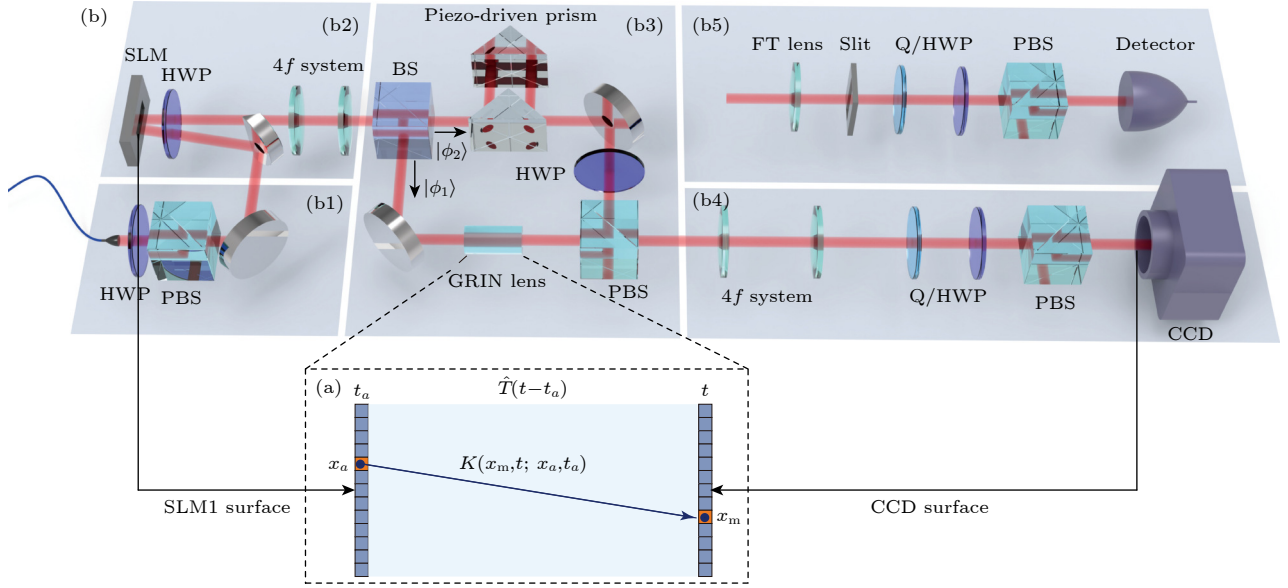


图 2 实验示意图 (a) 演化和探测区域; (b1) 初态制备; (b2) 系统位置波函数与指针耦合; (b3) 态的演化; (b4) 位置的后选择与指针的读出; (b5) 波函数的测量

Fig. 2. Schematic diagram of the experiment: (a) The evolution and detection region; (b1) initial state preparation; (b2) coupling of wave function and pointer; (b3) state evolution; (b4) post-selection of position and the readout of the pointer; (b5) measurement of the wave function.

调制完成的光经过 $4f$ 成像系统 (焦距分别为 450, 150 mm) 将位于 SLM 表面位置的光子的波前投影到演化区域的起点. $50:50$ 的 BS 将光路分成两路 $|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$, $|\phi_1\rangle$ 这一部分会进入演化区域, 其演化算符为 $\hat{T}(t-t_a)$, 设计一个与折射率成正比的有效势场 $V(x)$, 使用变折射率 (GRIN) 透镜就能实现产生谐振势, GRIN 的入射端到出射端就是 t_a 时刻的位置到 t 时刻的位置, 光在折射率均匀的空气中的演化就相当于光在自由空间的演化. 演化后, 光通过 PBS 将 $|\phi_1\rangle$ 态投影到指针态 $|1\rangle$, 只有透射端出来的光会被探测. $|\phi_2\rangle$ 这部分通过 HWP 和 PBS, 反射端的光投影到 $|-\rangle$ 态并与 $|\phi_1\rangle$ 这部分透射的光合并. 压电驱动棱镜用于稳定这两个光路之间的光程差. 图 2(b4) 中的 $4f$ 成像系统 (焦距分别为 50, 100 mm) 将 t 处的波前投影到电荷耦合元件 (CCD) 相机成像表面, 通过调节 CCD 的纵向位置就可以测量不同 t 时刻的光的空间分布, CCD 上像素的位置表示 x 的投影位置. 用四分之一波片或半波片 (Q/HWP) 和 PBS 得到的两个线偏振 ($|+\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)$, $|-\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle - |1\rangle)$) 和两个圆偏振 ($|R\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle + i|1\rangle)$, $|L\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle - i|1\rangle)$) 来读取指针的期望值 $\langle f|\hat{\sigma}_y|f\rangle$, $\langle f|\hat{\sigma}_x|f\rangle$, CCD 测到的 4 个基矢强度量表示为 $\{P_+, P_-, P_R, P_L\}$, 把得到的期望值

$\langle f|\hat{\sigma}_x|f\rangle = P_+ - P_-$, $\langle f|\hat{\sigma}_y|f\rangle = P_R - P_L$ 代入到方程 (17) 中就可以得到 $K''(x_m, t; x_a, t_a)$. 由于 $K''(x_m, t; x_a, t_a)$ 包含 t_a 时刻的波函数, 因此要进一步提取出 $K(x_m, t; x_a, t_a)$ 需要测量出波函数 $\psi(x_j, t_a)$. 图 2(b5) 是综合 Vallone^[52] 和 Lundeen^[7] 的研究方法设计的波函数测量系统. 当测量波函数时, 图 2(b3) 出射的光子直接进入图 2(b5) 所示的系统, 然后光子通过一个傅里叶变换透镜 (FT lens), 这个透镜的焦平面为光子的动量分布函数, 在透镜光轴位置放置一个狭缝, 这样就可以仅让横向动量为零的光子通过, 这个操作相当于把系统投影到了动量后选择态 $|p_0\rangle$. 在狭缝后面放置 HWP/QWP 和 PBS 用于偏振态的投影, 然后用光电探测器 (Detector) 探测光功率, 将其在偏振态 $\{|+\rangle, |-\rangle, |R\rangle, |L\rangle, |1\rangle\}$ 测得的光功率代入 (6) 式, 便可以求得波函数 $\psi(x_j, t_a)$. 最后, 再利用 (17) 式就得到了传播子 $K(x_m, t; x_a, t_a)$.

4.3 传播子实验测量结果

本节介绍传播子实验测量结果. 对比文献 [4] 中的单光子实验结果, 本文中的数据是之前未发表的相干光数据, 在实验设计上也稍有不同. 原则上本文介绍的实验由光的一阶关联函数确定, 相干光和单光子的实验现象一样, 但单光子的实验难度更大.

对于光子的传播而言, 势能函数与折射率相关. 测量自由空间中的传播子, 可以让光子在空气中传播, 对应于图 2 所示的实验系统, 仅需要把图 2(b3) 中的渐变折射率透镜移除即可. 在此情况下, 光子自由演化的哈密顿量为 $\hat{H}_0 = \hat{p}^2/(2m)$. 自由空间中, 光子从起点 (x_a, t_a) 传播至 (x, t) 的传播子表达式为

$$K_f(x, t; x_a, t_a) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \exp\left(\frac{im(x - x_a)^2}{2\hbar \Delta t}\right), \quad (20)$$

其中 $\Delta t = t - t_a$. 假设 $t_a = 0$ 为初始时刻, 选择 $x_a = 0$ 的位置作为固定的初始点, 通过调整图 2 中 CCD 的纵向位置可以调节 t . CCD 在 4 个不同偏振态 $(|+\rangle, |-\rangle, |R\rangle, |L\rangle)$ 的成像可测得 $K''(x, t; x_a, t_a) = \psi^*(x, t_a)\psi(x, t_a)K(x, t; x_a, t_a)$, 图 3 给出了 $t = 20 \text{ mm}/c$ 时 $K''(x, t; x_a, t_a)$ 和 $\psi(x, t_a)$ 的实验结果. 因为传播子类似于波函数, 不同的全局相位并不改变其物理实质, 因此对于固定的起点而言, $\psi(x_a, t_a)$ 可看作是一个常数, 通过对传播子进行归一化便可忽略此项, 无需额外对其进行测量. 通过 $K''(x, t; x_a, t_a)$ 和 $\psi(x, t_a)$ 便能得到 $K(x, t; x_a, t_a)$.

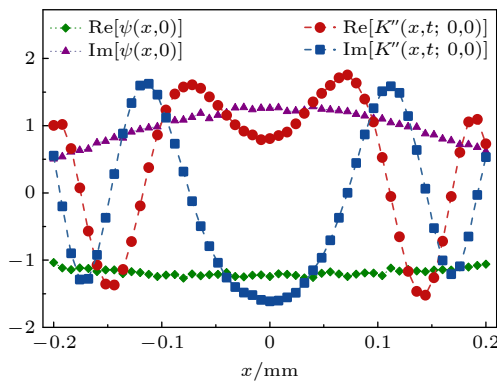


图 3 $t = 20 \text{ mm}/c$ (c 为真空中的光速) 的 $K''(x, t; 0, 0)$ 和波函数 $\psi(x, 0)$ 的实验测量结果. 蓝色方块和红色圆点分别展示了 $K''(x, t; 0, 0)$ 的实部和虚部. 绿色菱形和紫色三角形分别展示了 $\psi(x, 0)$ 的实部与虚部

Fig. 3. Measured wave function of single photon and $K''(x, t = 20 \text{ mm}/c; 0, 0)$. The green diamond and purple triangle represent the real and imaginary parts of the wave function, respectively. The red dot and the blue square show the real and imaginary parts of the $K''(x, t = 20 \text{ mm}/c; 0, 0)$ at $t = 20 \text{ mm}/c$.

图 4 给出了在固定初始位置 $x_a = 0$ 和初始时刻 $t_a = 0$ 的情况下, $K_f(x, t; x_a, t_a)$ 以 x 和 t 为变量的理论和实验的结果对比. 实验中通过改变探测

器 CCD 的位置来改变演化时间 t , 从 $t = 0 \text{ mm}/c$ 到 $t = 30 \text{ mm}/c$ 每隔 $1 \text{ mm}/c$ 测量出 $K_f(x, t; x_a, t_a)$ 以 x 为变量的曲线, 图 4(a) 和图 4(b) 分别是通过 (20) 式计算得到的 $K_f(x, t; x_a, t_a)$ 的实部和虚部的理论结果, 图 4(c) 和图 4(d) 分别是实验测得的 $K_f(x, t; x_a, t_a)$ 的实部和虚部.

图 5 所示为图 4 中选取 $t = \{10 \text{ mm}/c, 20 \text{ mm}/c, 30 \text{ mm}/c\}$ 这 3 个特定时刻的 $K_f(x_b, t_b; x_a, t_a)$ 的理论和实验结果, 红色和蓝色的实线表示传播子实部和虚部的理论曲线, 红色的圆点和蓝色的方块是实验测到的数据, 误差棒是 3 次重复测量得到的标准差. 为了更准确地对比理论和实验的结果, 以实验测量的传播子在 $x = 0$ 位置的相位为准, 图 4 和图 5 的理论计算结果都整体乘以一个相位因子, 使得理论结果和实验结果的全局相位统一. 从图 4 和图 5 可以看出, $K_f(x, t; x_a, t_a)$ 的实验测量结果与理论计算结果高度吻合, 这说明 4.1 节和 4.2 节所述的理论和实验方案可以准确地测量出传播子.

5 最小作用量原理的实验演示

传播子是路径积分理论中的关键物理量, 实现了对传播子的测量为对路径积分的基本概念进行实验研究提供了可能性. 其中最小作用量原理是路径积分中的核心原理, 因此基于传播子的测量演示最小作用量原理是对路径积分基本概念的最直观、最接近本质的实验研究. 本节将介绍如何通过传播子的实验结果实现对最小作用量原理的实验演示.

根据路径积分公式 (8), 传播子可以通过对所有可能路径的贡献进行积分求得, 而所有路径叠加的结果等同于振幅相位最稳定的路径, 该路径是满足最小作用量原理的经典路径. 通过对实验所得的路径振幅进行分析, 找出满足 $\delta S/\delta x(t) = 0$ 的路径, 然后将其与通过拉格朗日方程计算出来的经典路径进行对比, 若两者结果相符合, 则验证了路径积分中的最小作用量原理. 然而, 由于 $\delta S/\delta x(t) = 0$ 是变分方程, 对于离散且有限的实验数据而言, 寻找满足这个方程的实验结果比较困难, 因此有必要把它转化为更加直观的微分方程. 参考文献 [1], 路径可以离散化为相继发生的事件, 在起点 (x_a, t_a) 和终点 (x_b, t_b) 设置一个途径点 (x, t) , 在此情况下, 路径的振幅可以表示为传播子的连乘:

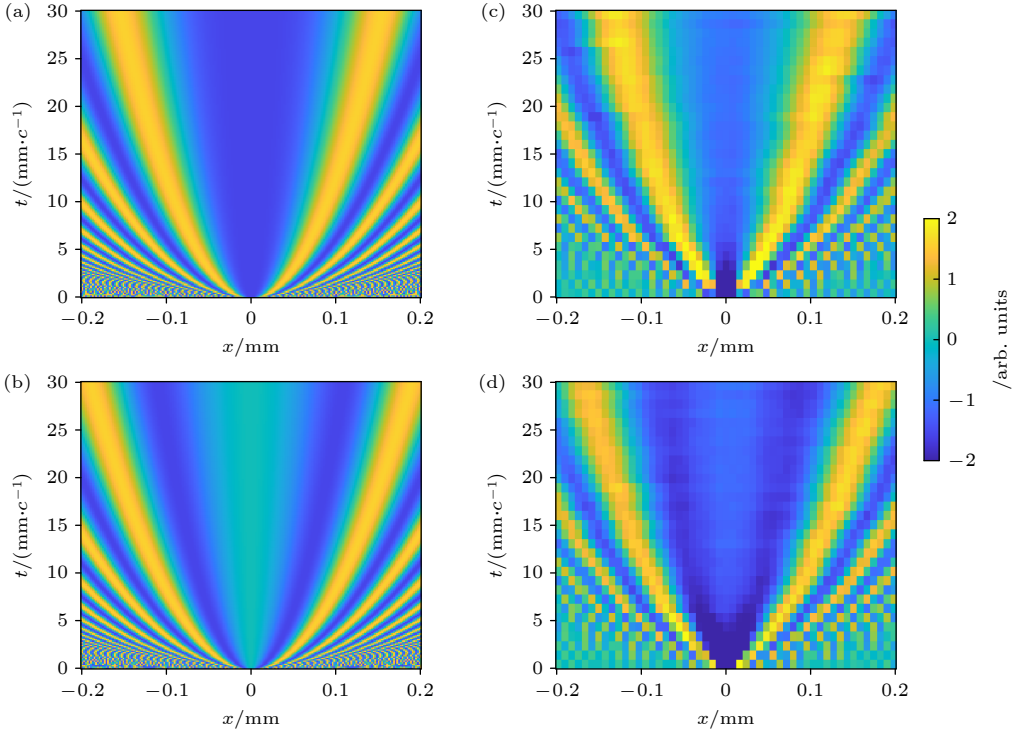


图 4 $K_f(x, t; x_a, t_a)$ 以 x 和 t 为变量的理论与实验结果. 纵轴是演化时间 t , 横轴是横向位置 x , 颜色代表实部或者虚部的幅度大小. 对演化时间 t 每间隔 $1 \text{ mm}/c$ 从 0 测量到 $30 \text{ mm}/c$, 横向位置每间隔 $8 \mu\text{m}$ 从 -0.2 mm 测量到 0.2 mm

Fig. 4. Theoretical and experimental results of $K_f(x, t; x_a, t_a)$ over time. The vertical axis is the evolution time t , the horizontal axis is the transverse position x . The colormaps represent the magnitude of the real or imaginary part of $K_f(x, t; x_a, t_a)$. Evolution time is measured from 0 to $30 \text{ mm}/c$ at $1 \text{ mm}/c$ interval. Transverse positions are measured from -0.2 mm to 0.2 mm at $8 \mu\text{m}$ intervals.

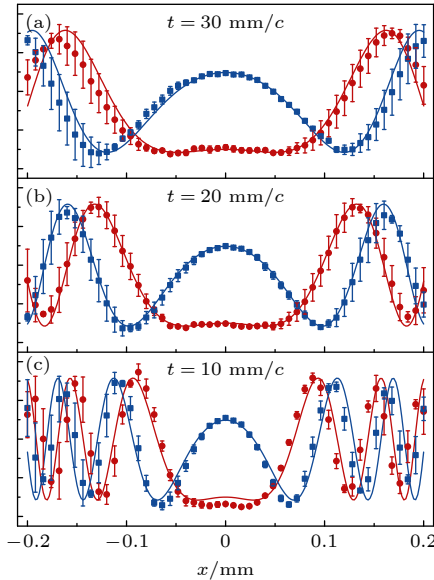


图 5 在自由空间中测到的传播子. 红线和蓝线是理论计算的传播子实部和虚部的结果, 红色圆圈和蓝色方块是实验测到的数据

Fig. 5. Measured propagators of photons in free space. The red and blue lines are the results of theoretical calculations of the real and imaginary parts of the propagators, and the red circles and blue squares are experimentally measured data.

$$\varphi(x, t) = K(x_b, t_b; x, t) K(x, t; x_a, t_a) = \mathcal{N} e^{(i/\hbar)S(x, t)}. \quad (21)$$

这样路径振幅便转化为关于 x 和 t 函数. φ 对变量 x 求偏导可得:

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} = \mathcal{N} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} e^{(i/\hbar)S(x, t)}. \quad (22)$$

由于 $\mathcal{N} \frac{\hbar}{i} e^{(i/\hbar)S}$ 始终不为零, 因此当 $\partial \varphi(x, t)/\partial x = 0$ 时, $\partial S(x, t)/\partial x = 0$. 可以把 $\delta S/\delta x(t) = 0$ 表述为: 对于任意时刻 t 都满足 $\partial S(x, t)/\partial x = 0$. 最小作用量原理的判别条件便可转化为

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{Re}[\varphi(x, t)] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \text{Im}[\varphi(x, t)] = 0. \quad (23)$$

因此, 在实验中, 只需要测量出传播子 $K(x_b, t_b; x, t)$ 和 $K(x, t; x_a, t_a)$, 然后再通过 (21) 式和 (23) 式就能确定经典路径在 t 时刻经过的 x 方向位置. 不断改变 t 进行测量, 就能最终描绘出经典路径 $x_{cl}(t)$. 事实上, 在实验中这个判别条件还可以进一步优化^[4], 仅需用 $K''(x_b, t_b; x, t)$ 和 $K''(x, t; x_a, t_a)$ 的实验数据便能求出经典路径, 这样可以省略波函数测量的步骤. 在这个优化后的方案中, 假设 $\mathcal{M} =$

$\frac{K''(x_b, t_b; x, t)K''(x, t; x_a, t_a)}{|K''(x_b, t_b; x, t)K''(x, t; x_a, t_a)|}$, 最小作用量原理的判别条件便可表示为

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{Re}[\mathcal{M}(x, t)] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \text{Im}[\mathcal{M}(x, t)] = 0. \quad (24)$$

在图 2 所示的实验中, 通过选择在 SLM 上相位调制位置来确定初始位置 x_a , 将初始位置 x_a 固定, 移动 CCD 相机的纵向位置来调节 t , 就可测得 $K''(x, t; x_a, t_a)$. 调整 SLM 后 $4f$ 透镜系统的成像位置, 使得 t 时刻变成 \hat{U} 的初始时刻, 然后通过改变 SLM 的相位调节位置 x , 此时 x 就是变化的起点, 终点 x_b 固定, 在 CCD 上读取终点 x_b 的测量结果, 便可以测量出 $K''(x_b, t_b; x, t)$. 测到 $K''(x, t; x_a, t_a)$ 和 $K''(x_b, t_b; x, t)$ 之后, 利用 (24) 式求 $\mathcal{M}(x, t)$ 在 x 方向上的极值, 就可以得到经典路径 $x_{cl}(t)$.

光子在自由空间中的经典路径如图 6 所示. 选取初始位置 $x_a = 0$ 作为固定起点, 选取 $x_b = \{-0.08 \text{ mm}, 0, 0.08 \text{ mm}\}$ 这 3 个终点位置. 图 6 中的实线是根据拉格朗日方程计算出自由空间中光子传播的经典路径, 可见在经典力学中, 自由传播粒子的经典路径是直线. 其中离散的点是通过实验测量的传播子通过 (23) 式计算得到不同中间时刻的经典路径所在位置, 实验中选取了 7 个中间时刻进行测量, x 方向的测量间隔为 $2.66 \mu\text{m}$, 误差棒表示 3 次重复实验的标准差. 从图 6 可以看出, 实验结果与理论结果高度一致, 这意味着通过传播子的实验数据准确地得到了光子自由空间中的经典路径.

对于光子的传播而言, 势能函数与折射率相关, 选取横向折射率为二次型函数分部的光学材料 (GRIN 透镜) 放置于图 2(b3) 所示的相应位置中, 那么光子传播的哈密顿量就变为 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, 其中 $\omega \approx 0.208 \text{ (c/mm)}$. 在此情况下, 可测量光子在谐振势中演化的传播子, 然后再利用 (24) 式得到光子在谐振势场中的经典路径, 实验结果如图 7 所示. 选取 3 个起点位置 $x_a = \{-0.053 \text{ mm}, 0, 0.053 \text{ mm}\}$ 和一个固定终点位置 $x_b = 0$, 通过拉格朗日方程可以求出相应的 3 条经典路径, 如图 7 中的实线所示, 而图中的离散点则为实验结果, 实验中路径演化的总时长为 $1.5 \pi/\omega$, 其中每隔 $0.1 \pi/\omega$ 选取一个中间时刻点测量得出对应的经典位置, 误差棒表示 3 次重复实验的标准差. 从结果可看出, 通过实验所测的传播子数据准确地得到了光子在谐振势中的经典路径.

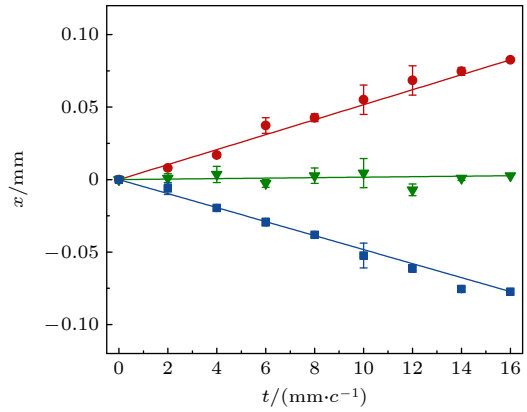


图 6 由最小作用量原理得到的光子自由演化时的经典路径. 实线展示的是理论计算所得的自由演化的经典路径, 离散点为通过传播子的实验数据求得的自由演化的经典路径位置

Fig. 6. The classical path of photons in free evolution derived from the principle of least action. The solid line shows the classical path in free evolution obtained from the theoretical calculation, and the discrete point is the classical path position in free evolution obtained from the experimental data of the propagator.

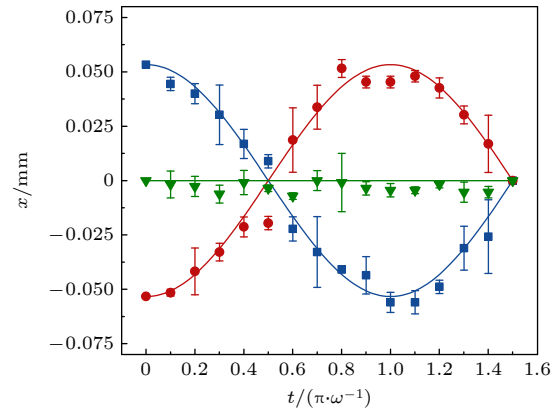


图 7 在谐振子势场中的经典路径. 实线展示的是理论计算所得的在谐振势中的经典路径, 离散点为通过传播子的实验数据求得的在谐振势中的经典路径位置

Fig. 7. Classical trajectories in the harmonic potential. The solid line shows the classical path in the harmonic potential obtained by theoretical calculation, and the discrete point is the classical path position in the harmonic potential obtained by the experimental data of the propagator.

图 6 和图 7 的结果表明, 通过传播子测量技术, 可以在路径积分的框架下演示最小作用量原理. 最小作用量原理是物理学中的普适性原理, 路径积分把这一原理引入到量子力学中, 对量子理论做了一个全新的阐述. 实验演示最小作用量原理是传播子测量的一个重要的应用范例, 它有望为此后基于路径积分表述探索量子-经典、量子-广义相对论等交叉领域的研究提供新的思路.

6 总结与展望

本文综述了传播子测量的理论和实验进展,介绍了传播子测量在量子力学中最小作用量原理演示中的应用. 传播子是费曼路径积分的关键物理量,实现传播子的实验测量有重要的科学意义,它为路径积分相关的量子现象的实验研究铺平了道路. 在当今物理学界,路径积分是多个研究领域中的重要理论基础,它在描述量子场论、量子多体、量子引力、凝聚态物理等多个方向的物理现象中有着独特的优势,因此传播子的测量技术有望在日后应用到这些基础物理问题的观测和量子模拟的研究中. 此外,本文介绍的基于传播子测量得出光子经典路径的方法,也有望为一些经典-量子交叉领域的研究提供新的思路. 在光学实验中,已经首次成功测量了传播子. 当前,物理学界对多种不同类型的量子系统的操控和测量技术正在快速发展. 因此,将传播子的测量技术推广至其他热门量子实验系统中,也是一个有意义的研究方向. 路径积分传播子具有广泛的应用,本综述对将来进行传播子测量技术的研究有参考价值.

参考文献

- [1] Feynman R P 1948 *Rev. Mod. Phys.* **20** 367
- [2] Feynman R P 2005 *Feynman's Thesis—A New Approach to Quantum Theory* (Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd) pp1–69
- [3] Feynman R P, Hibbs A R, Styer D F 2010 *Quantum Mechanics and Path Integrals* (Chelmsford: Courier Corporation) pp1–384
- [4] Wen Y L, Wang Y F, Tian L M, Zhang S C, Li J F, Du J S, Yan H, Zhu S L 2023 *Nat. Photonics* **17** 717
- [5] Von Neumann J 2018 *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (New Edition) (Princeton: Princeton university press) pp271–288
- [6] Aharonov Y, Albert D Z, Vaidman L 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1351
- [7] Lundeen J S, Sutherland B, Patel A, Stewart C, Bamber C 2011 *Nature* **474** 188
- [8] Hofheinz M, Wang H, Ansmann M, Bialczak R C, Lucero E, Neeley M, O'Connell A D, Sank D, Wenner J, Martinis J M, Cleland A N 2009 *Nature* **459** 546
- [9] Cramer M, Plenio M B, Flammia S T, Somma R, Gross D, Bartlett S D, Landon-Cardinal O, Poulin D, Liu Y K 2010 *Nat. Commun.* **1** 149
- [10] Ritchie N W M, Story J G, Hulet R G 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 1107
- [11] Hosten O, Kwiat P 2008 *Science* **319** 787
- [12] Starling D J, Dixon P B, Jordan A N, Howell J C 2009 *Phys. Rev. A* **80** 041803
- [13] Zhou L, Turek Y, Sun C P, Nori F 2013 *Phys. Rev. A* **88** 053815
- [14] Zhou X X, Xiao Z C, Luo H L, Wen S C 2012 *Phys. Rev. A* **85** 043809
- [15] Rodenburg B, Mirhosseini M, Magaña-Loaiza O S, Boyd R W 2014 *JOSA B* **3** 1
- [16] Magaña-Loaiza O S, Mirhosseini M, Rodenburg B, Boyd R W 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 200401
- [17] Starling D J, Dixon P B, Williams N S, Jordan A N, Howell J C 2010 *Phys. Rev. A* **82** 011802
- [18] Xu X Y, Kedem Y, Sun K, Vaidman L, Li C F, Guo G C 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 033604
- [19] Starling D J, Dixon P B, Jordan A N, Howell J C 2010 *Phys. Rev. A* **82** 063822
- [20] Brunner N, Simon C 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 010405
- [21] Strübi G, Bruder C 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 083605
- [22] Hallaji M, Feizpour A, Dmochowski G, Sinclair J, Steinberg A M 2017 *Nat. Phys.* **13** 540
- [23] Du S J, Peng Y G, Feng H R, Han F, Yang L W, Zheng Y J 2020 *Chin. Phys. B* **29** 074202
- [24] Zhang C Y, Fang M F 2021 *Chin. Phys. B* **30** 010303
- [25] Dressel J, Malik M, Miatto F M, Jordan A N, Boyd R W 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 307
- [26] Pfeifer M, Fischer P 2011 *Opt. Express* **19** 16508
- [27] Qiu J D, Li Z X, Xie L G, Luo L, He Y, Ren C L, Zhang Z Y, Du J L 2021 *Chin. Phys. B* **30** 064216
- [28] Fang S Z, Dai Y, Jiang Q W, Tan H T, Li G X, Wu Q L 2021 *Chin. Phys. B* **30** 060601
- [29] Lundeen J S, Resch K J 2005 *Phys. Lett. A* **334** 337
- [30] Salvail J Z, Agnew M, Johnson A S, Bolduc E, Leach J, Boyd R W 2013 *Nat. Photonics* **7** 316
- [31] Malik M, Mirhosseini M, Lavery M P J, Leach J, Padgett M J, Boyd R W 2014 *Nat. Commun.* **5** 3115
- [32] Thekkadath G S, Giner L, Chalich Y, Horton M J, Banker J, Lundeen J S 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 120401
- [33] Xiao Y, Kedem Y, Xu J S, Li C F, Guo G C 2017 *Opt. Express* **25** 14463
- [34] Xiao Y, Wiseman H M, Xu J S, Kedem Y, Li C F, Guo G C 2019 *Sci. Adv.* **5** eaav9547
- [35] Cohen E, Pollak E 2018 *Phys. Rev. A* **98** 042112
- [36] Bolduc E, Gariépy G, Leach J 2016 *Nat. Commun.* **7** 10439
- [37] Pan W W, Xu X Y, Kedem Y, Wang Q Q, Chen Z, Jan M, Sun K, Xu J S, Han Y J, Li C F, Guo G C 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 150402
- [38] Chen M C, Li Y, Liu R Z, Wu D, Su Z E, Wang X L, Li L, Liu N L, Lu C Y, Pan J W 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 030402
- [39] Kobayashi H, Tamate S, Nakanishi T, Sugiyama K, Kitano M 2010 *Phys. Rev. A* **81** 012104
- [40] Shi Z M, Mirhosseini M, Margiewicz J, Malik M, Rivera F, Zhu Z Y, Boyd R W 2015 *Optica* **2** 388
- [41] Maccone L, Rusconi C C 2014 *Phys. Rev. A* **89** 022122
- [42] Mirhosseini M, Magaña-Loaiza O S, Hashemi Rafsanjani S M, Boyd R W 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 090402
- [43] Xu L, Xu H C, Jiang T, Xu F X, Zheng K M, Wang B, Zhang A N, Zhang L J 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 180401
- [44] Piacentini F, Avella A, Levi M P, Gramegna M, Brida G, Degiovanni I P, Cohen E, Lussana R, Villa F, Tosi A, Zappa F, Genovese M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 170402
- [45] Shojaei E, Jackson C S, Riofrío C A, Kalev A, Deutsch I H 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 130404
- [46] Bamber C, Lundeen J S 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 070405
- [47] Wu S J 2013 *Sci. Rep.* **3** 1193
- [48] Kocsis S, Braverman B, Ravets S, Stevens M J, Mirin R P,

- Shalm L K, Steinberg A M 2011 *Science* **332** 1170
- [49] Wen Y L, Zhang S C, Yan H, Zhu S L 2022 *Chin. Phys. B* **31** 034206
- [50] Wen Y L, Zhang S C, Yan H, Zhu S L 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 110301 (in Chinese) [温永立, 张善超, 颜辉, 朱诗亮 2021 物理学报 **70** 110301]
- [51] Romito A, Gefen Y 2014 *Phys. Rev. B* **90** 085417
- [52] Vallone G, Dequal D 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 040502
- [53] Zhang S C, Zhou Y R, Mei Y F, Liao K Y, Wen Y L, Li J F, Zhang X D, Du S W, Yan H, Zhu S L 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 190402
- [54] Zhang C R, Hu M J, Hou Z B, Tang J F, Zhu J, Xiang G Y, Li C F, Guo G C, Zhang Y S 2020 *Phys. Rev. A* **101** 012119
- [55] Zhang C R, Hu M J, Xiang G Y, Zhang Y S, Li C F, Guo G C 2020 *Chin. Phys. Lett.* **37** 080301
- [56] Zhou Y Y, Zhao J, Hay D, McGonagle K, Boyd R W, Shi Z M 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 040402
- [57] Yang M, Xiao Y, Liao Y W, Liu Z H, Xu X Y, Xu J S, Li C F, Guo G C 2020 *Laser Photonics Rev.* **14** 1900251
- [58] Calderaro L, Foletto G, Dequal D, Villoresi P, Vallone G 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 230501
- [59] Knarr S H, Lum D J, Schneeloch J, Howell J C 2018 *Phys. Rev. A* **98** 023854
- [60] Pan Y M, Zhang J, Cohen E, Wu C W, Chen P X, Davidson N 2020 *Nat. Phys.* **16** 1206
- [61] Rojo A, Bloch A 2018 *The Principle of Least Action: History and Physics* (Cambridg: Cambridge University Press) pp1–266
- [62] Zhu S L, Wen Y L, Yan H 2023 *Physics* **52** 502 (in Chinese) [朱诗亮, 温永立, 颜辉 2023 物理 **52** 502]
- [63] Salières P, Carré B, Le Déroff L, Grasbon F, Paulus G G, Walther H, Kopold R, Becker W, Milosevic D B, Sanpera A, Lewenstein M 2001 *Science* **292** 902
- [64] Gibbons G W, Hawking S W, Perry M J 1978 *Nucl. Phys. B* **138** 141
- [65] Fujikawa K 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 1195
- [66] Ord G N, Gualtieri J A 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 250403
- [67] Caldeira A O, Leggett A J 1983 *Physica A* **121** 587
- [68] Mühlbacher L, Rabani E 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 176403
- [69] Pollock E L, Ceperley D M 1984 *Phys. Rev. B* **30** 2555
- [70] Reisenberger M P, Rovelli C 1997 *Phys. Rev. D* **56** 3490
- [71] Hartle J B, Hawking S W 1983 *Phys. Rev. D* **28** 2960
- [72] Ashtekar A, Campiglia M, Henderson A 2010 *Phys. Rev. D* **82** 124043
- [73] Fujikawa K 1982 *Phys. Rev. D* **25** 2584
- [74] Hartle J B, Hawking S W 1976 *Phys. Rev. D* **13** 2188

SPECIAL TOPIC — The 90th Anniversary of South China Normal University and Physics Discipline

Research progress of measurement of propagators in path integrals*

Tian Li-Man¹⁾²⁾ Wen Yong-Li^{1)2)†} Wang Yun-Fei¹⁾²⁾ Zhang Shan-Chao¹⁾²⁾
Li Jian-Feng¹⁾²⁾ Du Jing-Song¹⁾²⁾ Yan Hui¹⁾²⁾³⁾ Zhu Shi-Liang¹⁾²⁾³⁾

1) (*Key Laboratory of Atomic and Subatomic Structure and Quantum Control (Ministry of Education),
School of Physics, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)

2) (*Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Engineering and Quantum Materials,
South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)

3) (*Guangdong-Hong Kong Joint Laboratory of Quantum Matter, Frontier Research Institute for Physics,
South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)

(Received 31 May 2023; revised manuscript received 19 September 2023)

Abstract

The propagator plays a central role in path integral theory and therefore has significant value in various fields of modern quantum physics, where path integral representations can be used. However, owing to the fact that it has not been directly measured in experiment, progress of experimental studies of quantum systems based on path integral representations has been seriously limited. Recently, we proposed a propagator measurement scheme based on the direct measurement of the wave function and successfully performed the first experimental measurement of the propagator by using a single photon experiment. Furthermore, in this study, the quantum principle of least action is demonstrated for the first time. This research successfully addresses the technical challenges of path integral experimental studies. In this work, we review the research progress in this field, including a brief introduction to the basic concepts and research progress of direct wave function measurement, and a detailed description of the theoretical model, experimental design, and experimental results of propagator measurement. Finally, we introduce an important application example, which can serve as the experimental demonstration of the quantum principle of least action through propagator measurement. The research progress of propagator measurement reviewed in this work will provide important references for future experimental studies by using this method.

Keywords: quantum measurement, propagator, path integrals, quantum principle of least action

PACS: 03.65. Ta, 03.65.–w

DOI: 10.7498/aps.72.20230902

* Project supported by the Regional Joint Funds of Basic and Applied Basic Research of Guangdong Province, China (Grant No. 2022A1515110921).

† Corresponding author. E-mail: ylwen@m.scnu.edu.cn

路径积分传播子测量的研究进展

田礼漫 温永立 王云飞 张善超 李建锋 杜镜松 颜辉 朱诗亮

Research progress of measurement of propagators in path integrals

Tian Li-Man Wen Yong-Li Wang Yun-Fei Zhang Shan-Chao Li Jian-Feng Du Jing-Song Yan Hui
Zhu Shi-Liang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 200305 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230902

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230902>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

利用Kapitza–Dirac脉冲操控简谐势阱中冷原子测量重力加速度

Measurement of gravity acceleration by cold atoms in a harmonic trap using Kapitza–Dirac pulses

物理学报. 2019, 68(20): 203701 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190749>

中间测量对受驱单量子比特统计复杂度的影响

Influence of intermediated measurements on quantum statistical complexity of single driven qubit

物理学报. 2020, 69(23): 230301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200802>

基于辅助单比特测量的量子态读取算法

A quantum state readout method based on a single ancilla qubit

物理学报. 2021, 70(21): 210303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211066>

无指针 δ -淬火直接测量法测量量子密度矩阵

Scheme of directly measuring quantum density matrix by δ -quench method

物理学报. 2021, 70(11): 110301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210269>

基于金刚石NV色心的纳米尺度磁场测量和成像技术

Nanoscale magnetic field sensing and imaging based on nitrogen–vacancy center in diamond

物理学报. 2018, 67(13): 130701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180243>

基于测量的量子计算研究进展

Research progress of measurement–based quantum computation

物理学报. 2021, 70(21): 210301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210923>