

国防科技大学建校 70 周年专题

基于双光子干涉的量子全息理论框架*

徐耀坤^{1)†} 孙仕海²⁾ 曾瑶源¹⁾ 杨俊刚¹⁾ 盛卫东¹⁾ 刘伟涛^{3)‡}

1) (国防科技大学电子科学学院, 长沙 410073)

2) (中山大学电子与通信工程学院, 深圳 518100)

3) (国防科技大学理学院, 长沙 410073)

(2023 年 7 月 31 日收到; 2023 年 10 月 6 日收到修改稿)

Hong-Ou-Mandel 干涉可以更好地抵抗相位噪声的干扰. 近年来基于双光子干涉的量子全息提出, 通过待测量子态和标准量子态的二阶干涉, 可以将待测光子的波函数信息解译出来. 为了更好地理解和发展该方法, 本文建立了量子全息的理论框架. 根据不同的待测态和参考态, 分别研究了利用单光子态或相干态作参考, 测量待测的单光子态和相干态. 本文讨论的所有情况下, 待测态的波函数信息以相似的数学形式反映在归一化的二阶关联函数中. 通过简洁算法便可提取待测态波函数的信息. 该量子全息也保持了 Hong-Ou-Mandel 干涉的鲁棒性, 相位噪声并不影响测量结果.

关键词: 量子全息, Hong-Ou-Mandel 干涉, 归一化二阶关联函数, 鲁棒性**PACS:** 42.50.-p, 42.40.-i, 42.30.-d, 42.50.Dv**DOI:** 10.7498/aps.72.20231242

1 引言

自 1987 年 Hong-Ou-Mandel (HOM) 干涉首次实现以来^[1], 这种双光子干涉迅速成为量子领域研究的热点. 作为一种反直觉的量子现象, 研究人员相继地探究其非经典的物理本质, 实现了不同玻色子和费米子在不同光子自由度的干涉实验^[2–5]. 作为一项具有量子特性的技术, HOM 干涉已经被应用于测量无关的量子密钥分发^[6–8]、量子中继器^[9,10]以及量子精密测量^[11–13]等量子信息各个领域.

在一个典型的 HOM 干涉装置中, 两个全同光子分别进入分束器的两个输入端口. 经过分束器后, 存在 4 种可能性: 两个光子同时透射, 两个光子同时被反射, 以及一个光子被反射另一个光子透射. 由于前两种情况不可区分, 且分束器本身性质决定了这两种情况之间有 π 相位, 产生相消干涉,

导致两个光子同时从一个输出口出射, 产生光子的聚束效应. 如果在输出口进行符合测量将没有符合计数结果. 在 HOM 干涉实验中, 为了获得完美的干涉结果, 要求两个光子在各个维度上具有不可区分性. 如果两个光子在任意维度上存在差异, 将会破坏相消干涉, 并产生一定的符合计数. 从另一个角度分析, HOM 干涉中的符合测量可以作为测量光子之间差异性的一种有效手段^[14–19]. 具体地, 通过测量待测光子和标准光子干涉后的二阶关联函数 (干涉图样), 可以获得待测光子的信息. 注意, 在最初的 HOM 干涉实验中, 将光子当作一个整体进行测量. 而在量子全息中, 为了获得待测光子在特定自由度 (如空间、时间、频率等) 的波函数信息, 需要做自由度内的可分辨的测量, 例如空间分辨单光子探测^[14]、时间分辨单光子探测^[15]、频率分辨单光子探测^[16]. 量子全息已经实现了单光子空间波函数、单光子频率波函数、相干态时域波函数的

* 国家自然科学基金 (批准号: 62001484, 62171458) 和国防科技大学科研计划 (批准号: ZK21-11) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yaokun.xu@nudt.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: wtliu@nudt.edu.cn

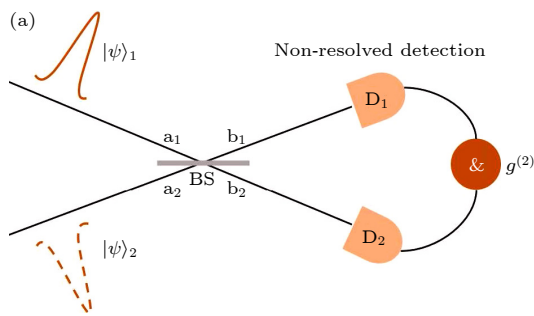
测量^[14–19]. 相比于经典全息方法, 量子全息可以更好地抵抗相位噪声的干扰, 展现出更强的鲁棒性^[15].

为了更好地丰富和完善量子全息理论, 本文建立了该理论的统一框架, 按照从一般 HOM 干涉 (光子自由度内非分辨探测) 到基于 HOM 干涉的量子全息 (光子自由度内分辨探测) 的思路, 结构安排如下: 首先从基础的 HOM 干涉理论开始, 分析在不同输入量子态下的干涉特性, 并分析其鲁棒性; 然后, 根据不同待测量子态和参考量子态, 建立基于 HOM 干涉的量子全息统一理论, 包括待测态和参考态分别为单光子态和相干态的所有组合情况. 通过理论分析发现量子态之间的差异性将以相似的形式反映在归一化的二阶关联函数中, 通过简洁的算法便可以解算出待测量子态的信息.

2 HOM 干涉的一般理论

为了更好地理解量子全息理论, 首先分析在不同量子态输入情况下的 HOM 干涉特性及鲁棒性. 典型的 HOM 干涉装置如图 1(a) 所示. 量子态 $|\psi\rangle_1$ 和 $|\psi\rangle_2$ 分别从分束器的 a_1 和 a_2 口输入, 经过干涉后在分束器输出口 b_1 和 b_2 进行符合测量. 根据量子光学, 在输出口的归一化二阶关联函数为

$$g^{(2)} = \frac{G_{1,2}^{(2)}}{G_1^{(1)} G_2^{(1)}} = \frac{\langle E^{(-)}(q_1) E^{(-)}(q_2) E^{(+)}(q_2) E^{(+)}(q_1) \rangle}{\langle E^{(-)}(q_1) E^{(+)}(q_1) \rangle \langle E^{(-)}(q_2) E^{(+)}(q_2) \rangle}, \quad (1)$$



其中, $E^{(+)}(q_i)$ 和 $E^{(-)}(q_i)$ ($i = 1, 2$) 代表输出口电场算符的正频部分和负频部分; q 为广义坐标, 可以代表空间、时间、频率等不同维度, 不同的 q 值代表在同一维度下的不同取值; $\langle \cdot \rangle$ 表示对量子态取平均; $G_{1,2}^{(2)}$ 为分束器两个输出口之间的二阶关联函数, $G_i^{(1)}$ 为分束器不同输出口 ($i = 1, 2$) 的一阶关联函数. HOM 干涉一般理论中, 将光子当作一个整体, 即没有考虑光子在坐标等维度上的分布. 在不考虑特定维度 (如空间、频率等) 分辨测量时, 可忽略 q . 并且在模式相同情况下, 用输出口的湮灭算子 \hat{b}_i ($i = 1, 2$) 代替电场的正频部分, 产生算子 \hat{b}_i^\dagger ($i = 1, 2$) 代替电场的负频部分. (1) 式简化为

$$g^{(2)} = \frac{G_{1,2}^{(2)}}{G_1^{(1)} G_2^{(1)}} = \frac{\langle \psi_{\text{in}} | \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \hat{b}_1 | \psi_{\text{in}} \rangle}{\langle \psi_{\text{in}} | \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 | \psi_{\text{in}} \rangle \langle \psi_{\text{in}} | \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 | \psi_{\text{in}} \rangle}, \quad (2)$$

其中, $|\psi\rangle_{\text{in}} = |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2$ 为输入态. 对于无损耗的分束器, 考虑等比分束情况, 即透射率等于反射率, $\hat{b}_1 = 1/\sqrt{2}(\hat{a}_2 + \hat{a}_1)$, $\hat{b}_2 = 1/\sqrt{2}(\hat{a}_2 - \hat{a}_1)$, 其中 \hat{a}_1^\dagger (\hat{a}_1) 和 \hat{a}_2^\dagger (\hat{a}_2) 为分束器输入口的产生 (湮灭) 算子. 在不同输入态的情况下, 归一化的二阶关联函数值不同, 下面将分别讨论.

2.1 单光子 Fock 态之间的 HOM 干涉

最初的 HOM 干涉实验是采用自发参量下转换产生的单光子完成的, 要求两个光子在频率、偏振、空间模式、时间模式等各个维度上不可区分.

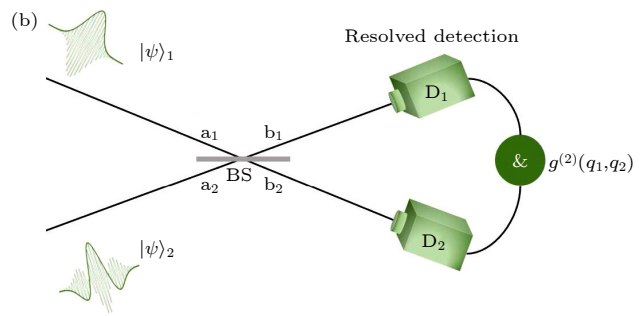


图 1 Hong-Ou-Mandel 干涉装置图 (a) 一般 Hong-Ou-Mandel 装置图. 量子态分别入射分束器的两个输入口 a_1 和 a_2 , 发生干涉后, 通过两个单光子探测器在输出口 b_1 和 b_2 进行测量. 根据单光子探测结果后选择出符合测量结果. (b) 基于 Hong-Ou-Mandel 干涉的量子全息. 两个输入的量子态发生干涉后, 在输出口 b_1 和 b_2 做自由度内可分辨的单光子测量, 并通过后选择筛选出符合测量结果

Fig. 1. Setup of Hong-Ou-Mandel interference: (a) General Hong-Ou-Mandel setup. The two input states enter input ports of beam splitter (BS) a_1 and a_2 , respectively. After passing through the BS, the photon is recorded by single photon detectors at output ports b_1 and b_2 , respectively. According to the single photon detection results, the coincidence counts are postselected. (b) Quantum holography based on Hong-Ou-Mandel interference. After interference at the BS, degree of freedom (DOF) resolved detections are applied at the output ports b_1 and b_2 , respectively. According to the single photon detection results, the DOF resolved coincidence counts are postselected.

该情况下输入态表示为 $|\psi_{\text{in}}\rangle = |1, 1\rangle$. 二阶关联函数为

$$G_{1,2}^{(2)} = \langle 1, 1 | (\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger)(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1^\dagger)(\hat{a}_2 - \hat{a}_1) \times (\hat{a}_2 + \hat{a}_1)/4 | 1, 1 \rangle. \quad (3)$$

利用对易关系 $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$ 和产生湮灭算子的性质 $(\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle)$ 和 $(\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle)$, 计算得到 $G_{1,2}^{(2)} = 0$. 在出口 1 的一阶关联函数值为

$$G_1^{(1)} = \langle 1, 1 | (\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger)(\hat{a}_2 + \hat{a}_1)/2 | 1, 1 \rangle. \quad (4)$$

同样利用对易关系和产生湮灭算子的性质, 得到 $G_1^{(1)} = 1$. $G_2^{(1)}$ 的计算类似, 也为 1. 因此

$$g^{(2)} = \frac{G_{1,2}^{(2)}}{G_1^{(1)}G_2^{(1)}} = 0. \quad (5)$$

还可以通过量子态的演化过程分析符合计数的结果. 当分束器的输入为两个全同的单光子时, 演化过程为

$$\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |00\rangle \xrightarrow{\text{BS}} (\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1^\dagger - \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2^\dagger)/2 |00\rangle \\ = (|2_{b_1}\rangle - |2_{b_2}\rangle)/\sqrt{2}, \quad (6)$$

可以看出, 两个光子要么同时从出口 1 出射, 要么同时从出口 2 出射. 这种现象称作光子聚束效应, 显然不会产生符合计数结果.

当两个输入光路之间存在相位噪声干扰时, 输入态表示为 $|\psi_{\text{in}}\rangle = |1, 1e^{i\phi_n}\rangle$, 其中 ϕ_n 表示随机的相位噪声. 通过简单的计算可以发现, 在这种情况下 $G_{1,2}^{(2)}$, $G_1^{(1)}$ 和 $G_2^{(1)}$ 的数值保持不变, 意味着干涉结果不受相位噪声影响. 此外, 通过量子态的演化可以清晰地展示这种鲁棒性. 当有相位噪声时, 输出态为 $(|2_{b_1}\rangle - |2_{b_2}\rangle)e^{i\phi_n}/\sqrt{2}$. 可以看出, 相位噪声作为双光子波函数中的全局相位, 不会对干涉结果产生影响.

2.2 相位随机相干态之间的 HOM 干涉

利用相位随机的相干态也可以完成 HOM 干涉实验, 此类干涉已经广泛地应用于测量设备无关的量子密钥分发协议中. 相位随机是指没有确定的相位关系, 实验实现方式就是在两者之间有在 $0-2\pi$ 之间均匀分布的随机相位 ϕ_r . 此外, 在量子密钥分发协议中用“独立”一词表示两个相干态之间没有确定的相位关系, 即存在随机相位, 两种表述物理含义相同. 相干态记作 $|\alpha\rangle$, 输入的量子态表示为 $|\psi_{\text{in}}\rangle = |\alpha, \alpha e^{i\phi_r}\rangle$. 因此二阶关联函数为

$$G_{1,2}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \alpha, \alpha e^{i\phi_r} | (\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger)(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1^\dagger) \times (\hat{a}_2 - \hat{a}_1)(\hat{a}_2 + \hat{a}_1)/4 | \alpha, \alpha e^{i\phi_r} \rangle d\phi_r \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} |\alpha|^4 [1 - \cos(2\phi_r)] d\phi_r = \frac{1}{2} |\alpha|^4, \quad (7)$$

计算中利用相干态的本征方程 $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. 在出口 1 的一阶关联函数值为

$$G_1^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \alpha, \alpha e^{i\phi_r} | (\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger)(\hat{a}_2 + \hat{a}_1)/2 \times | \alpha, \alpha e^{i\phi_r} \rangle d\phi_r \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\alpha|^2 [1 + \cos(\phi_r)] d\phi_r = |\alpha|^2. \quad (8)$$

采用同样的方法计算, $G_2^{(1)} = |\alpha|^2$. 因此

$$g^{(2)} = \frac{G_{1,2}^{(2)}}{G_1^{(1)}G_2^{(1)}} = 0.5. \quad (9)$$

如果两个输入光路之间存在相位干扰, 输入态表示为 $|\psi_{\text{in}}\rangle = |\alpha, \alpha e^{i(\phi_r + \phi_n)}\rangle$.

$$G_{1,2}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\alpha|^4/2 [1 - \cos[2(\phi_r + \phi_n)]] d\phi_r \\ = |\alpha|^4/2, \\ G_1^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\alpha|^2 [1 + \cos(\phi_r + \phi_n)] d\phi_r = |\alpha|^2, \\ G_2^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\alpha|^2 [1 - \cos(\phi_r + \phi_n)] d\phi_r = |\alpha|^2.$$

此时 $g^{(2)}$ 仍然是 0.5, 说明输入为相干态时, 干涉结果不受相位噪声影响.

2.3 单光子 Fock 态与相干态的 HOM 干涉

当一路为单光子态, 另一路为相干态时, 输入态表示为 $|\psi_{\text{in}}\rangle = |1, \alpha\rangle$, 此时二阶关联函数为

$$G_{1,2}^{(2)} = \langle 1, \alpha | (\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger)(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1^\dagger)(\hat{a}_2 - \hat{a}_1)(\hat{a}_2 + \hat{a}_1)/4 | 1, \alpha \rangle \\ = \frac{1}{4} |\alpha|^4. \quad (10)$$

在出口 1 的一阶关联函数值为

$$G_1^{(1)} = \langle 1, \alpha | (\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger)(\hat{a}_2 + \hat{a}_1)/2 | 1, \alpha \rangle \\ = \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + 1). \quad (11)$$

同理, $G_2^{(1)} = (|\alpha|^2 + 1)/2$. 因此二阶关联函数为

$$g^{(2)} = \frac{G_{1,2}^{(2)}}{G_1^{(1)}G_2^{(1)}} = \frac{|\alpha|^4}{(|\alpha|^2 + 1)^2}. \quad (12)$$

注意, 在这种情况下, 二阶关联函数随着相干

态的平均光子数 $|\alpha|^2$ 变化. 当 $|\alpha|^2 \ll 1$ 时, 相干态可以看作是单光子态, $g_{\min}^{(2)} = 0$. 当 $|\alpha|^2 = 1$ 时, 相干态的平均光子数为 1, $g^{(2)} = 0.25$. 当 $|\alpha|^2 \gg 1$ 时, 相干态可以看作是经典的强光, $g_{\max}^{(2)} = 1$.

如果存在相位噪声的干扰, 输入态可以表示为 $|\psi_{\text{in}}\rangle = |1, \alpha e^{i\phi_n}\rangle$. ϕ_n 不会影响相干态的平均光子数的数值, 即 $|\alpha|^2 = |\alpha e^{i\phi_n}|^2$, 因此这种情况下的 HOM 干涉同样不受干扰.

3 基于 HOM 干涉的量子全息

当输入两路的光子在某个自由度上存在差异性时, 就会破坏以上理论的归一化二阶关联函数值, 光子之间的差异性也会反映在干涉结果中. 从另一个角度, 可以从干涉的结果中解译光子之间的差异性, 这便是 HOM 量子全息的基本思想. 注意, 在第 2 节分析的一般理论中, 将光子看作一个整体, 并不做自由度 (空域、时域、频域等) 内的区分探测. 但若要获取光子之间在某个自由度内的差异性, 则需要对同一广义坐标不同 q 值之间进行测量, 才可以获得更丰富的信息. 因此, 在 HOM 量子全息中, (1) 式中保留 q_i , 且在模式相同情况下简化为

$$g^{(2)}(q_1, q_2) = \frac{G_{1,2}^{(2)}(q_1, q_2)}{G_1^{(1)}(q_1)G_2^{(1)}(q_2)} = \frac{\langle \psi_{\text{in}} | \hat{b}_1^\dagger(q_1) \hat{b}_2^\dagger(q_2) \hat{b}_2(q_2) \hat{b}_1(q_1) | \psi_{\text{in}} \rangle}{\langle \psi_{\text{in}} | \hat{b}_1^\dagger(q_1) \hat{b}_1(q_1) | \psi_{\text{in}} \rangle \langle \psi_{\text{in}} | \hat{b}_2^\dagger(q_2) \hat{b}_2(q_2) | \psi_{\text{in}} \rangle}, \quad (13)$$

其中, $G_{1,2}^{(2)}(q_1, q_2)$ 表示两个输出口不同坐标之间的二阶关联函数, $G_i^{(1)}(q_i)$ 是在第 i 个输出口坐标 q_i 处的一阶关联函数. 接下来依次分析如何通过 $g^{(2)}(q_1, q_2)$ 获取待测量子态的信息.

3.1 测量单光子态波函数

考虑结构信息, 单光子可以表示为

$$|\psi_{\text{test}}\rangle = \int \psi_{\text{test}}(q) |1_q\rangle dq, \quad (14)$$

其中, $\psi_{\text{test}}(q)$ 为单光子的波函数, $|1_q\rangle$ 表示单光子位于坐标 q 处. 可以通过已知的单光子态或相干态作为参考, 去提取待测单光子态的信息.

参考态为单光子态. 参考态表示为 $|\psi_{\text{ref}}\rangle = \int \psi_{\text{ref}}(q) |1_q\rangle dq$, 其中, $\psi_{\text{ref}}(q)$ 是参考单光子的波函

数. 为了刻画待测态和参考态之间的差异性, 待测态的波函数表示为 $\psi_{\text{test}}(q) = \psi_{\text{ref}}(q) \frac{\psi_{\text{test}}(q)}{\psi_{\text{ref}}(q)} = \psi_{\text{ref}}(q) T(q) e^{i[\phi(q) + \phi_n]}$, 采用振幅 $T(q)$ 和相位 $\phi(q)$ 表示量子态之间的差异性, ϕ_n 表示两路之间的相位噪声. 二阶关联函数为

$$G_{1,2}^{(2)}(q_1, q_2) = \frac{1}{4} |\psi_{\text{ref}}(q_1)|^2 |\psi_{\text{ref}}(q_2)|^2 |T(q_1)|^2 + \frac{1}{4} |\psi_{\text{ref}}(q_1)|^2 |\psi_{\text{ref}}(q_2)|^2 |T(q_2)|^2 - \frac{1}{2} |\psi_{\text{ref}}(q_1)|^2 |\psi_{\text{ref}}(q_2)|^2 T(q_1) \times T(q_2) \cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)]. \quad (15)$$

输出口 1 的一阶关联函数值为

$$G_1^{(1)}(q_1) = \frac{1}{2} |\psi_{\text{ref}}(q_1)|^2 [T^2(q_1) + 1]. \quad (16)$$

输出口 2 的一阶关联函数值为

$$G_2^{(1)}(q_2) = \frac{1}{2} |\psi_{\text{ref}}(q_2)|^2 [T^2(q_2) + 1]. \quad (17)$$

归一化的二阶关联函数为

$$g^{(2)}(q_1, q_2) = \frac{G_{1,2}^{(2)}(q_1, q_2)}{G_1^{(1)}(q_1)G_2^{(1)}(q_2)} = \frac{T^2(q_1) + T^2(q_2) - 2T(q_1)T(q_2) \cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)]}{[T^2(q_1) + 1][T^2(q_2) + 1]}. \quad (18)$$

可以看出, 通过归一化的方法将 $\psi_{\text{ref}}(q)$ 消掉, 量子态之间的差异信息 $T(q)$ 和 $\phi(q)$ 反映在干涉图样中, 同时相位噪声 ϕ_n 并不会破坏干涉结果. 如果量子态之间仅存在相位之间的差异, 即 $T(q) = 1$, 则 $g^{(2)}(q_1, q_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)]$. 若量子态之间不存在任何差异, 即 $T(q) = 1$ 且 $\phi(q) = 0$, 则 $g^{(2)}(q_1, q_2) = 0$, 和 (5) 式的结论一致.

参考态为相干态. 考虑到空间结构, 参考态表示为一系列位于 q 处相干态的直积, $|\psi_{\text{ref}}\rangle = \prod_q |\alpha_{\text{ref}}(q)\rangle$. 待测单光子态的波函数同样可以表示为 $\psi_{\text{test}}(q) = \alpha_{\text{ref}}(q) \frac{\psi_{\text{test}}(q)}{\alpha_{\text{ref}}(q)} = \alpha_{\text{ref}}(q) T(q) e^{i[\phi(q) + \phi_n]}$. 注意, 相干态的本征方程为 $\hat{a}(q) \prod_{q'} |\alpha(q')\rangle = \alpha(q') \prod_{q'} |\alpha(q')\rangle$. 二阶关联函数为

$$G_{1,2}^{(2)}(q_1, q_2) = \frac{1}{4} |\alpha_{\text{ref}}(q_1)|^2 |\alpha_{\text{ref}}(q_2)|^2 [1 - 2T(q_1)T(q_2) \times \cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)] + T^2(q_1) + T^2(q_2)]. \quad (19)$$

输出口 1 的一阶关联函数值为

$$G_1^{(1)}(q_1) = \frac{1}{2} |\alpha_{\text{ref}}(q_1)|^2 [1 + T^2(q_1)]. \quad (20)$$

输出口 2 的一阶关联函数值为

$$G_2^{(1)}(q_2) = \frac{1}{2} |\alpha_{\text{ref}}(q_2)|^2 [1 + T^2(q_2)]. \quad (21)$$

归一化的二阶关联函数为

$$g^{(2)}(q_1, q_2) = \frac{G_{1,2}^{(2)}(q_1, q_2)}{G_1^{(1)}(q_1)G_2^{(1)}(q_2)} = 1 - \frac{T^2(q_1)T^2(q_2) + 2T(q_1)T(q_2)\cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)]}{(T^2(q_1) + 1)(T^2(q_2) + 1)}. \quad (22)$$

通过归一化处理, $\alpha_{\text{ref}}(q)$ 被消掉. 量子态之间的差异性信息全部反映在干涉图样中. 同样, 相位噪声 ϕ_n 并不会对干涉结果产生影响.

如果量子态的波函数之间仅存在相位差异, 即 $T(q) = 1$, 则 $g^{(2)}(q_1, q_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)]$. 若波函数之间无差异, 即 $T(q) = 1$, $\phi(q) = 0$, 此时相干态的平均光子数为 1, 则 $g^{(2)}(q_1, q_2) = 0.25$. 若 $\psi_{\text{test}}(q) = 1$ 且 $\alpha_{\text{ref}}(q) = \alpha$, 则有 $T(q) = 1/\alpha$, $g^{(2)}(q_1, q_2) = |\alpha|^4/(1 + |\alpha|^2)^2$, 和 (12) 式一致.

3.2 测量相干态波函数

考虑光子的结构信息, 待测的相干态表示为

$$|\psi_{\text{test}}\rangle = \prod_q |\beta_{\text{test}}(q)\rangle. \quad (23)$$

下面分析如何通过已知的单光子态或相干态作为参考, 提取待测相干态的波函数信息.

参考态为单光子态. 参考态可以表示为 $|\psi_{\text{ref}}\rangle = \int \psi_{\text{ref}}(q)|1_q\rangle dq$. 同样, 待测态的波函数可以表示为

$$\beta_{\text{test}}(q) = \psi_{\text{ref}}(q) \frac{\beta_{\text{test}}(q)}{\psi_{\text{ref}}(q)} = \psi_{\text{ref}}(q) T(q) e^{i[\phi(q) + \phi_n]}.$$

二阶关联函数为

$$G_{1,2}^{(2)}(q_1, q_2) = \frac{1}{4} |\psi_{\text{ref}}(q_1)|^2 |\psi_{\text{ref}}(q_2)|^2 [T^2(q_1)T^2(q_2) - 2T(q_1)T(q_2)\cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)] + T^2(q_1) + T^2(q_2)]. \quad (24)$$

输出口 1 的一阶关联函数值为

$$G_1^{(1)}(q_1) = \frac{1}{2} |\psi_{\text{ref}}(q_1)|^2 [1 + T^2(q_1)]. \quad (25)$$

输出口 2 的一阶关联函数值为

$$G_2^{(1)}(q_2) = \frac{1}{2} |\psi_{\text{ref}}(q_2)|^2 [1 + T^2(q_2)]. \quad (26)$$

因此归一化的二阶关联函数为

$$g^{(2)}(q_1, q_2) = \frac{G_{1,2}^{(2)}(q_1, q_2)}{G_1^{(1)}(q_1)G_2^{(1)}(q_2)} = 1 - \frac{2T(q_1)T(q_2)\cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)] + 1}{(T^2(q_1) + 1)(T^2(q_2) + 1)}. \quad (27)$$

通过归一化的方法, 消掉参考态波函数 $\psi_{\text{ref}}(q)$ 的影响, 差异性信息全部反映在干涉图案中. 注意, 相位噪声 ϕ_n 对干涉图样没有影响.

如果量子态波函数之间仅存在相位差异, 即 $T(q) = 1$, 则 $g^{(2)}(q_1, q_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)]$. 如果两个态的波函数相同, 即 $T(q) = 1$ 且 $\phi(q) = 0$, 此时相干态的平均光子数为 1, 则 $g^{(2)}(q_1, q_2) = 0.25$. 如果 $\psi_{\text{ref}}(q) = 1$, $\beta_{\text{test}}(q) = \beta$, 且仅存在相位差异, 则 $T(q) = \beta$, $g^{(2)}(q_1, q_2) = |\beta|^4/(1 + |\beta|^2)^2$, 与 (12) 式结论一致.

参考态为相位随机相干态. 参考态表示为 $|\psi_{\text{ref}}\rangle = \prod_q |\alpha_{\text{ref}}(q)\rangle$. 此时, 待测态的波函数表示为 $\beta_{\text{test}}(q) = \alpha_{\text{ref}}(q) \frac{\beta_{\text{test}}(q)}{\alpha_{\text{ref}}(q)} = \alpha_{\text{ref}}(q) T(q) e^{i[\phi(q) + \phi_r + \phi_n]}$. ϕ_r 为服从 $0-2\pi$ 之间均匀分布的随机相位. 根据 ϕ_r 的分布计算二阶关联函数

$$G_{1,2}^{(2)}(q_1, q_2) = \frac{1}{4} |\alpha_{\text{ref}}(q_1)|^2 |\alpha_{\text{ref}}(q_2)|^2 \{1 + T^2(q_1) + T^2(q_2) + T^2(q_1)T^2(q_2) - 2T(q_1) \times T(q_2) \cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)]\}. \quad (28)$$

输出口 1 的一阶关联函数值为

$$G_1^{(1)}(q_1) = \frac{1}{2} |\alpha_{\text{ref}}(q_1)|^2 [T^2(q_1) + 1]. \quad (29)$$

输出口 2 的一阶关联函数值为

$$G_2^{(1)}(q_2) = \frac{1}{2} |\alpha_{\text{ref}}(q_2)|^2 [T^2(q_2) + 1]. \quad (30)$$

因此归一化的二阶关联函数为

$$g^{(2)}(q_1, q_2) = \frac{G_{1,2}^{(2)}(q_1, q_2)}{G_1^{(1)}(q_1)G_2^{(1)}(q_2)} = 1 - \frac{2T(q_1)T(q_2)\cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)]}{(T^2(q_1) + 1)(T^2(q_2) + 1)}. \quad (31)$$

通过归一化的方法, 将参考态波函数 $\alpha_{\text{ref}}(q)$ 的影响消除. 差异性信息全部反映在干涉图案中. 注意, 相位噪声 ϕ_n 对干涉图样没有影响.

如果量子态之间仅存在相位差异, 即 $T(q) = 1$, 则 $g^{(2)}(q_1, q_2) = 1 - \frac{1}{2} \cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)]$. 如果量子态之间不可区分, 即 $T(q) = 1$ 且 $\phi(q) = 0$, 则 $g^{(2)}(q_1, q_2) = 0.5$, 与 (9) 式结论一致.

综上, 已经分析了基于 HOM 量子全息的 4 种情况, 如表 1 所列. 通过测量不同广义坐标之间的归一化二阶关联函数, 可以获得量子态之间的差异性信息 $T(q)$ 和 $\phi(q)$, 同时消除了参考态波函数的影响. 需要强调的是, HOM 全息中两个光子仅在某一维度 q 上波函数具有差异性, 而在其他维度上光子波函数相同. 利用 HOM 干涉测量的是待测光子在某一维度下波前的相对变化, 即两个点 q_1 和 q_2 的相位差 $[\phi(q_1) - \phi(q_2)]$, 并不是绝对相位. 因此在这种测量中可以消除整体随机相位 ϕ_n 的影响. 在文献 [14] 中, 通过计算 HOM 干涉后的双光子波函数来解读波前测量的物理含义, 经过干涉后的双光子波函数具有交换反对称性, 因此波函数的模方保留了不同坐标之间的相位差异性.

在抵抗相位噪声方面, 量子全息 (二阶干涉) 相比于经典全息 (一阶干涉) 在单光子探测条件下具有更明显的优势. 经典全息以 Mach-Zehnder 干涉仪为例, 单次测量结果正比于 $\cos[\phi(q_1) + \phi_n]$. 在单光子水平下, 需要通过多次测量获取 $\phi(q_1)$ 的分布. 然而在多次测量过程中, 由于平台振动等因素产生的整体随机相位噪声 ϕ_n 是随着时间变化的, 因此最终的测量结果正比于 $\cos[\phi(q_1) + \phi_n(q_1)]$, 包含一项随坐标 q_1 变化的相位噪声 $\phi_n(q_1)$. 相比之下, 量子全息中的符合测量结果只与相位差 $[\phi(q_1) - \phi(q_2)]$ 有关, 随机的整体相位噪声 ϕ_n 不会对符合计数结果产生影响. 因此量子全息方式可以更好地抵抗此类相位噪声的干扰.

4 归一化二阶关联函数值分布与重构算法

根据理论公式 (18), (22), (27) 和 (31) 式, 计算在特定 $T(q)$ 和 $\phi(q)$ 情况下的归一化二阶关联函数 (干涉结果), 结果如图 2 所示. 其中图 2(a) 和图 2(b) 为设定的相位和振幅. 图 2(c)—(f) 依次为不同量子态输入的情况下, $g^{(2)}(q_1, q_2)$ 的数值分布. 以一维的振幅和相位为例, 在 HOM 全息中通过不同坐标点 q_1 和 q_2 之间的符合测量, 形成了二维的测量结果 (图 2(c)—(f)). 具体地, 图 2(c)—(f) 的函数值表示在不同量子态情况下, 探测器 1 位于 q_1 并且探测器 2 位于 q_2 时的归一化符合计数率. 在具体的实验中, 通过测量不同坐标之间的符合计数率获得图 2(c)—(f) 的分布.

根据归一化的二阶关联函数值, 可以直接反解量子态之间的差异性. 根据不同的待测态和参考态分别介绍重构算法. 1) 利用单光子态全息单光子态. 步骤 1, 计算振幅. 从单路的计数率和参考态信息获取振幅分布. 步骤 2, 利用振幅分布和 (18) 式计算相位分布. 2) 利用相干态全息单光子态. 步骤 1, 计算振幅. 令 $q_1 = q_2 = q$, 此时 $g^{(2)}(q_1 = q_2) = 1/(T(q)^4 + 2T(q)^2 + 1)$. 振幅分布可以直接从图 2(d) 的对角线获得. 步骤 2, 利用振幅分布和 (22) 式计算相位分布. 3) 利用单光子态全息相干态. 步骤 1, 计算振幅. 令 $q_1 = q_2 = q$, 此时 $g^{(2)}(q_1 = q_2) = T(q)^4/(T(q)^4 + 2T(q)^2 + 1)$. 振幅分布可以直接从图 2(e) 的对角线获得. 步骤 2, 利用振幅分布和 (27) 式计算相位分布. 4) 利用相位随机相干态全息相干态. 步骤 1, 计算振幅. 令 $q_1 = q_2 = q$, 此时 $g^{(2)}(q_1 = q_2) = (T(q)^4 + 1)/(T(q)^4 + 2T(q)^2 + 1)$.

表 1 Hong-Ou-Mandel 量子全息的 4 种情况
Table 1. Four combinations in Hong-Ou-Mandel Holography.

待测态	参考态	归一化的二阶关联函数
$ \psi_{\text{test}}\rangle = \int \psi_{\text{test}}(q) 1_q\rangle dq$	$ \psi_{\text{ref}}\rangle = \int \psi_{\text{ref}}(q) 1_q\rangle dq$	$\frac{T^2(q_1) + T^2(q_2) - 2T(q_1)T(q_2)\cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)]}{[T^2(q_1) + 1][T^2(q_2) + 1]}$
$ \psi_{\text{test}}\rangle = \int \psi_{\text{test}}(q) 1_q\rangle dq$	$ \psi_{\text{ref}}\rangle = \prod_q \alpha_{\text{ref}}(q)\rangle$	$1 - \frac{T^2(q_1)T^2(q_2) + 2T(q_1)T(q_2)\cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)]}{(T^2(q_1) + 1)(T^2(q_2) + 1)}$
$ \psi_{\text{test}}\rangle = \prod_q \beta_{\text{test}}(q)\rangle$	$ \psi_{\text{ref}}\rangle = \int \psi_{\text{ref}}(q) 1_q\rangle dq$	$1 - \frac{2T(q_1)T(q_2)\cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)] + 1}{(T^2(q_1) + 1)(T^2(q_2) + 1)}$
$ \psi_{\text{test}}\rangle = \prod_q \beta_{\text{test}}(q)\rangle$	$ \psi_{\text{ref}}\rangle = \prod_q \alpha_{\text{ref}}(q)\rangle$	$1 - \frac{2T(q_1)T(q_2)\cos[\phi(q_1) - \phi(q_2)]}{(T^2(q_1) + 1)(T^2(q_2) + 1)}$

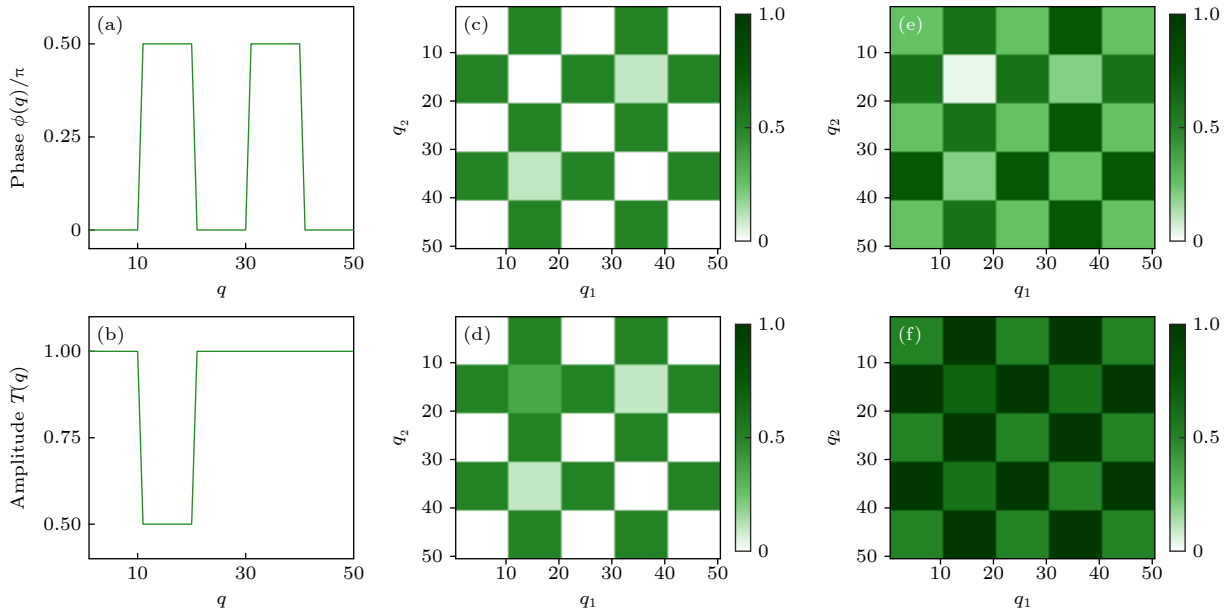


图 2 不同待测态和参考态下的归一化二阶关联函数值分布 (a) 相位; (b) 振幅; (c) 利用单光子态测量单光子态波函数的全息图; (d) 利用相干态测量单光子态波函数的全息图; (e) 利用单光子态测量相干态波函数的全息图; (f) 利用相位随机相干态测量相干态波函数的全息图

Fig. 2. Ideal normalized second-order correlation function of different quantum states: (a) Phase; (b) amplitude; (c) hologram of single photon state wave function measurement using single photon state; (d) hologram of single photon state wave function measurement using coherent state; (e) hologram of coherent state wave function measurement using single photon state; (f) hologram of coherent state wave function measurement using random phase coherent state.

振幅分布可以直接从图 2(f) 的对角线获得. 步骤 2, 利用振幅分布和 (31) 式计算相位分布. 此外, 根据 $\psi_{\text{test}}(q) = \psi_{\text{ref}}(q)T(q)e^{i[\phi(q)+\phi_n]}$, $T(q)$ 全部为正值, 负值部分归结为相位中存在 $e^{i(2k+1)\pi}$ 相位差 (其中 k 取整数). 尽管 $T(q)$ 全部以偶次方项出现在单路计数率和符合计数率中, 但并不影响重构的准确性. 本文提出的波函数重构方法, 充分利用二阶关联函数值分布的特点, 仅通过简单的运算就可以获取振幅和相位信息. 相比单光子全息工作中采用的最优化方法^[14], 十分简洁. 在具体的重构计算中, 仅涉及二次方程求根和三角函数运算, 且振幅均为正值, 因此重构结果具有唯一性. 在振幅和相位信息提取算法中, 首先通过单路计数或者归一化二阶关联函数的对角线获取振幅分布, 再结合干涉图样计算相位分布. 注意在单光子态和单光子态干涉的情况下, 由于光子聚束效应, 当 $q_1 = q_2$, 符合计数为 0, 因此无法从干涉图样的对角线提取振幅信息.

5 结 论

本文建立了基于 HOM 干涉的量子全息理论框架, 如表 1 所列. 通过测量归一化的二阶关联函

数, 可以获取待测态的波函数信息, 同时消除了参考态波函数的影响. 该全息方式的鲁棒性得益于 HOM 干涉方式以及符合测量方法. 如果已知参考态波函数信息, 利用量子全息方法, 可以直接进行量子态层析以及量子过程层析^[20–22]. 该量子全息方法也可应用于其他成像或者光学过程中, 尤其是在单光子水平下可以更好地抵抗相位干扰.

参考文献

- [1] Hong C K, Ou Z Y, Mandel L 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 2044
- [2] Mandel L 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** S274
- [3] Kaplan A E K, Krajewska C J, Proppe A H, et al. 2023 *Nat. Photonics* **17** 775
- [4] Lopes R, Imanaliev A, Aspect A, Cheneau M, Boiron D, Westbrook C I 2015 *Nature* **520** 66
- [5] Kobayashi T, Ikuta R, Yasui S, et al. 2016 *Nat. Photonics* **10** 441
- [6] Lo H K, Curty M, Qi B 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 130503
- [7] Liu Y, Chen T Y, Wang L J, et al. 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 130502
- [8] Tang Y L, Yin H L, Chen S J, et al. 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 190501
- [9] Duan L M, Lukin M D, Cirac J I, Zoller P 2001 *Nature* **414** 413
- [10] Lvovsky A I, Sanders B C, Tittel W 2009 *Nat. Photonics* **3** 706
- [11] Boto A N, Kok P, Abrams D S, Braunstein S L, Williams C P, Dowling J P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2733

- [12] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2011 *Nat. Photonics* **5** 222
- [13] Edamatsu K, Shimizu R, Itoh T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 213601
- [14] Chrapkiewicz R, Jachura M, Banaszek K, Wasilewski W 2016 *Nat. Photonics* **10** 576
- [15] Xu Y K, Sun S H, Liu W T, Liu J Y, Chen P X 2019 *Phys. Rev. A* **100** 042317
- [16] Thiel V, Davis A, Sun K, D'Ornellas P, Jin X M, Smith B 2020 *Opt. Express* **28** 19515
- [17] Orre V V, Goldschmidt E A, Deshpande A, et al. 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 123603
- [18] Thekkadath G S, Bell B A, Patel R B, Kim M S, Walmsley I A 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 023601
- [19] Jin R B, Gerrits T, Fujiwara M, Wakabayashi R, et al. 2015 *Opt. Express* **23** 28836
- [20] Qin Z Z, Prasad A S, Brannan T, MacRae A, Lezama A, Lvovsky A I 2015 *Light Sci. Appl.* **4** e298
- [21] Lvovsky A I, Raymer M G 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 299
- [22] Anis A, Lvovsky A I 2012 *New J. Phys.* **14** 105021

SPECIAL TOPIC—The 70th anniversary of National University of Defense Technology

General theory of quantum holography based on two-photon Interference^{*}

Xu Yao-Kun^{1)†} Sun Shi-Hai²⁾ Zeng Yao-Yuan¹⁾ Yang Jun-Gang¹⁾

Sheng Wei-Dong¹⁾ Liu Wei-Tao^{3)‡}

¹⁾ (College of Electronic Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

²⁾ (School of Electronics and Communication Engineering, Sun Yat-Sen University, Shenzhen 518100, China)

³⁾ (College of Sciences, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 31 July 2023; revised manuscript received 6 October 2023)

Abstract

As a kind of quantum phenomenon, Hong-Ou-Mandel (HOM) interference is more robust against phase noise. Because of this feature, robust quantum holography emerges, through which wave function of interested photon can be retrieved according to HOM interference pattern. For better understanding and developing this method, we derive a theoretical framework of robust HOM holography. In the quantum holography scheme, test state and reference state interfere at beam splitter (BS). Then, degree of freedom (DOF) resolved detections (such as spatial resolved detection, temporal resolved detection or spectrum resolved detection) are used at the BS output ports, respectively. Based on the single photon detection results, the DOF resolved coincidence counts are postselected, producing interference patterns. The information of the test states is retrieved from the patterns. According to different test states and reference states, four combinations are analysed, including measuring the wave function of single photon state by using standard single photon state or coherent state and measuring the wave function of coherent state through using standard single photon state or coherent state. In all cases, information of the test states is reflected in normalized second-order correlation function or interference patterns in similar forms. Specially, the wave function of test states can be directly retrieved from the interference patterns, with no complex algorithm required. Besides, phase noise from environment has no influence on this kind quantum holography. Comparison between traditional holography and quantum holography is made and analysed.

Keywords: quantum holography, Hong-Ou-Mandel interference, normalized second-order correlation function, robustness

PACS: 42.50.-p, 42.40.-i, 42.30.-d, 42.50.Dv

DOI: 10.7498/aps.72.20231242

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 62001484, 62171458) and the Research Program of National University of Defense Technology, China (Grant No. ZK21-11).

[†] Corresponding author. E-mail: yaokun.xu@nudt.edu.cn

[‡] Corresponding author. E-mail: wliu@nudt.edu.cn

基于双光子干涉的量子全息理论框架

徐耀坤 孙仕海 曾瑶源 杨俊刚 盛卫东 刘伟涛

General theory of quantum holography based on two-photon Interference

Xu Yao-Kun Sun Shi-Hai Zeng Yao-Yuan Yang Jun-Gang Sheng Wei-Dong Liu Wei-Tao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 214207 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20231242

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20231242>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

纠缠光子对的级联Hong-Ou-Mandel干涉研究及其在多时延参数测量中的应用

Cascaded Hong-Ou-Mandel interference of entangled photon pairs and its application in multiple delay parameters measurement

物理学报. 2021, 70(12): 120302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210071>

强聚焦泵浦产生纠缠光子的Hong-Ou-Mandel干涉

Hong-Ou-Mandel interference of entangled photons generated under pump-tight-focusing condition

物理学报. 2022, 71(5): 054201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211783>

连续变量Einstein-Podolsky-Rosen纠缠态光场在光纤信道中分发时纠缠的鲁棒性

Entanglement robustness of continuous variable Einstein-Podolsky-Rosen-entangled state distributed over optical fiber channel

物理学报. 2022, 71(9): 094202 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212380>

三量子比特Dicke模型中的两体和三体纠缠动力学

The dynamics of the bipartite and tripartite entanglement in the three-qubit Dicke model

物理学报. 2021, 70(4): 040301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201602>

具有弱依赖组的复杂网络上的级联失效

Cascading failures on complex networks with weak interdependency groups

物理学报. 2022, 71(11): 110505 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210850>

基于时间序列的网络失效模型

Network failure model based on time series

物理学报. 2022, 71(8): 088901 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212106>