

非厄米 Su-Schrieffer-Heeger 链边缘态和趋肤效应依赖的电子输运特性*

杨艳丽¹⁾ 段志磊²⁾ 薛海斌^{2)†}

1) (晋中信息学院数理教学部, 晋中 030800)

2) (太原理工大学物理学院, 太原 030024)

(2023 年 8 月 8 日收到; 2023 年 9 月 13 日收到修改稿)

在非互易 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 链中, 电子在胞内的跳跃振幅依赖于其跳跃方向, 因而, 该非厄米 SSH 链同时存在非平庸拓扑边缘态和非厄米趋肤效应. 相应地, 如何探测非厄米 SSH 链的边缘态和趋肤效应成为非厄米物理学的一个重要课题. 本文研究了非厄米 SSH 链的非平庸拓扑边缘态和非厄米趋肤效应对其零能附近电子输运特性的依赖关系. 研究发现当电子在零能附近透射率峰的峰值远小于 1 时, 非厄米 SSH 链具有左趋肤效应; 反之, 零能附近电子透射率峰的峰值远大于 1 时, 非厄米 SSH 链则具有右趋肤效应. 特别是, 在非平庸拓扑边缘态区域内, 非厄米 SSH 链的趋肤效应被进一步增强. 另外, 当非厄米 SSH 链与左、右导线之间的电子隧穿耦合强度由弱到强改变时, 零能附近电子反射率谷的数目将从 2 个变为 0, 此特性可以用来探测非厄米 SSH 链具有非平庸拓扑边缘态. 上述结果在理论上为探测非厄米 SSH 链的非平庸拓扑边缘态和非厄米趋肤效应类型提供了一种可选择的方案.

关键词: 边缘态, 非厄米趋肤效应, 非厄米 Su-Schrieffer-Heeger 链, 反射率, 透射率**PACS:** 73.20.-r, 73.23.-b**DOI:** 10.7498/aps.72.20231286

1 引言

非厄米概念和拓扑思想之间的协同效应, 即非厄米系统的拓扑性质是近年来一个非常活跃的研究领域^[1-5]. 特别是, 在非厄米系统中发现了许多厄米系统无对应的特殊拓扑性质. 例如, 在非厄米拓扑相中普遍存在的特殊点^[2,4-8]、超越通常体边对应关系^[9-16]的缺陷边缘态^[14,15], 以及非厄米系统在开边界情形下本征态以指数衰减形式定域在其边界附近的非厄米趋肤效应^[3,17-31]. 其中, 非厄米趋肤效应定义了非布洛赫的体边对应关系, 并建立了基于广义布里渊区的非布洛赫能带理论. 因而, 非

厄米 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 链^[32]的非厄米趋肤效应引起人们极大的研究兴趣, 并且该特性已经在拓扑电路^[9]、光子晶格^[10,19,23]、力学超材料^[11]、光波导^[17]、光子晶体^[18]、冷原子^[21]、声子晶体^[22]中观察到. 虽然在经典和量子模拟器中实验设计非厄米模型取得了巨大进展, 但是在实验和理论上如何探测非厄米 SSH 链的缺陷边缘态仍然是非厄米物理学的重要课题之一. 例如, 在一个耗散 Aharonov-Bohm 链中, 态的边界动力学特性可以用来探测其非平庸拓扑边缘态^[33]. 最近, 在厄米 SSH 链系统中, 利用电子在零能附近透射率峰个数随着其与源极、漏极之间隧穿耦合强度的变化可以用来判断该系统是否具有非平庸拓扑态^[34-36]. 但是, 如何基于

* 山西省应用基础研究计划 (批准号: 20210302123184, 201601D011015)、山西省高等学校优秀青年学术带头人支持计划 (批准号: 163220120-S) 和山西省高等学校教学改革创新项目 (批准号: J20221492) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xuehaibin@tyut.edu.cn

电子输运特性探测非厄米 SSH 链的缺陷边缘态仍然是一个开放的课题. 特别是, 非厄米 SSH 链的非平庸拓扑边缘态对其非厄米趋肤效应的影响尚未被揭示.

本文将研究非厄米 SSH 链非平庸拓扑边缘态和趋肤效应依赖的电子输运性质, 并探寻如何基于电子输运特性探测其非平庸拓扑边缘态和趋肤效应. 研究发现, 电子在零能附近透射率峰的峰值是否远小于或者远大于 1, 可以用来判断非厄米 SSH 链是左趋肤效应还是右趋肤效应, 并且非厄米趋肤效应在非平庸拓扑边缘态区域内被进一步增强. 另外, 非厄米 SSH 链的非平庸拓扑边缘态可以通过逐渐改变其与源极、漏极之间的电子隧穿耦合强度, 观察电子在零能附近反射率谷的数目变化来判断.

2 理论模型与研究方法

2.1 耦合导线的非厄米 SSH 链

一般情形下, 一维 SSH 链系统的非厄米性通过格点上的增益/损耗平衡和两个格点之间的不对称定向跳跃这两种方式进行设计^[1-3]. 在本文中, 考虑后一种设计方案, 即两个格点之间的非互易跳跃, 如图 1 所示, 则在紧束缚近似下非厄米 SSH 链的哈密顿量可表示为^[13-15,32,37]

$$H_{\text{NH,SSH}} = \sum_{n=1}^N \left[(v + \gamma) d_{n,A}^\dagger d_{n,B} + (v - \gamma) d_{n,B}^\dagger d_{n,A} \right] + \sum_{n=1}^{N-1} w \left(d_{n+1,A}^\dagger d_{n,B} + d_{n,B}^\dagger d_{n+1,A} \right), \quad (1)$$

其中, $d_{n,A}^\dagger$ ($d_{n,B}^\dagger$) 和 $d_{n,A}$ ($d_{n,B}$) 分别表示在第 n 个原胞的 A 子格 (B 子格) 上产生和湮灭一个电子; $v - \gamma$ 表示胞内电子从 A 子格到 B 子格的跳跃振幅, 相应地, $v + \gamma$ 则表示胞内电子从 B 子格到 A 子格的跳跃振幅; w 表示胞间电子的跳跃振幅;



图 1 非厄米 SSH 链与左、右导线耦合系统的示意图, 其中, 小的实心圆 (红色) 表示 A 子格, 大的实心圆 (绿色) 表示 B 子格, 空心圆 (黑色) 表示导线上的原子

Fig. 1. Schematic diagram of the non-Hermitian SSH chain coupled to the left and right leads. The small solid circles (red) represent the A sublattices, the large solid circles (green) represent the B sublattices, the hollow circles (black) represent atoms on the leads.

N 是非厄米 SSH 链的原胞总数.

当非厄米 SSH 链与左、右导线耦合时, 左、右电极的哈密顿量和其相应的电子隧穿耦合哈密顿量可以表示为

$$H_L = t_0 \sum_{j=-\infty}^{-1} \left(a_{L,j}^\dagger a_{L,j-1} + \text{H.c.} \right), \quad (2)$$

$$H_R = t_0 \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_{R,j+1}^\dagger a_{R,j} + \text{H.c.} \right), \quad (3)$$

$$H_T = t_L a_{L,-1}^\dagger d_{1,A} + t_R a_{R,1}^\dagger d_{N,B} + \text{H.c.}, \quad (4)$$

式中, $a_{\alpha,j}^\dagger$ 和 $a_{\alpha,j}$ 分别表示在 α 导线的第 j 个原子上产生和湮灭一个电子, 其中, $\alpha = L$ 和 $\alpha = R$ 分别表示左电极 (源极) 和右电极 (漏极); t_0 为左、右导线上相邻原子之间的跳跃振幅, t_L 和 t_R 分别表示非厄米 SSH 链与左、右电极之间的电子隧穿耦合振幅. 因此, 所研究系统的总哈密顿量可以表示为

$$H = H_{\text{NH,SSH}} + H_L + H_R + H_T. \quad (5)$$

2.2 电子的反射率和透射率

为计算电子通过非厄米 SSH 链的反射率和透射率, 假设电子从左导线 (源极) 入射. 利用每个子格 (原子) 的瓦尼尔态, 将与左、右导线耦合的非厄米 SSH 链的波函数 $|\psi\rangle$ 写为^[34-36]

$$|\psi\rangle = \sum_{j=-\infty}^{-1} a_{L,j,k} |L,j\rangle + \sum_{j=1}^{\infty} a_{R,j,k} |R,j\rangle + \sum_{n=1}^N (d_{n,A,k} |n,A\rangle + d_{n,B,k} |n,B\rangle), \quad (6)$$

其中, $|\alpha,j\rangle$ 表示 α 导线上第 j 个原子的瓦尼尔态, $a_{\alpha,j,k}$ 则表示相应的瓦尼尔态 $|\alpha,j\rangle$ 的概率幅; $|n,\beta\rangle$ 表示非厄米 SSH 链第 n 个原胞内 β 子格 ($\beta = A, B$) 的瓦尼尔态, $d_{n,\beta,k}$ 则表示相应的瓦尼尔态 $|n,\beta\rangle$ 的概率幅, k 为入射电子的波矢. 将与左、右导线

耦合的非厄米 SSH 链的哈密顿量 (5) 式和其波函数 (6) 式代入定态薛定谔方程 $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, 这里 $E = 2t_0 \cos(ka)$ 表示入射电子的能量, a 为相应的晶格常数, 由方程两边同一瓦尼尔态的系数相等并利用传输矩阵方法可得

$$Ea_{L,-1,k} = t_0a_{L,-2,k} + t_L d_{1,A,k}, \quad (7)$$

$$Ea_{R,1,k} = t_0a_{R,2,k} + t_R d_{N,B,k}, \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} a_{R,1,k} \\ d_{N,B,k} \end{pmatrix} = T_{\text{total}} \begin{pmatrix} d_{1,A,k} \\ a_{L,-1,k} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

其中:

$$T_{\text{total}} = \mathbf{M}_R (\mathbf{M}_{\text{NH-SSH}})^{N-1} \mathbf{M}_L, \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} \frac{E}{t_R} & -\frac{v-\gamma}{t_R} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_{\text{NH-SSH}} = \begin{bmatrix} \frac{E}{v+\gamma} & \frac{E}{w} - \frac{w}{v+\gamma} & -\frac{E}{v+\gamma} & \frac{v-\gamma}{w} \\ & \frac{E}{w} & & -\frac{v-\gamma}{w} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_L = \begin{bmatrix} \frac{E}{v+\gamma} & -\frac{t_L}{v+\gamma} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

为方便计算电子的反射率和透射率, 将晶格常数 a 和导线上相邻原子之间的跳跃振幅 t_0 取为 1, 并将左、右导线上第 j 个原子的概率幅展成平面波的形式:

$$\begin{cases} a_{L,j,k} = e^{-ikj} + re^{ikj}, & j \leq -1, \\ a_{R,j,k} = te^{ikj}, & j \geq 1, \end{cases} \quad (14)$$

其中, r 和 t 分别表示电子的反射和透射振幅. 将 (14) 式代入 (7)–(9) 式中, 并将 $r, d_{1,A,k}, d_{N,B,k}, t$ 看成 4 个未知数, 相应地, 可以求解出 r 和 t 的数值. 因而, 电子的反射率和透射率可以分别表示为 $R = |r|^2$ 和 $T = |t|^2$.

3 结果与讨论

3.1 非厄米 SSH 链的边缘态和缠绕数

对于非厄米 SSH 链, 在动量空间中, 其哈密顿量 (1) 式在周期性边界条件下可以表示为

$$\mathbf{H}_{\text{NH,SSH}} = \sum_k \psi_k^\dagger \mathbf{H}_{\text{NH,SSH}}(k) \psi_k, \quad (15)$$

其中, $\psi_k = (d_{A,k}, d_{B,k})^\top$, $\mathbf{H}_{\text{NH,SSH}}(k)$ 是一个非对角矩阵:

$$\mathbf{H}_{\text{NH-SSH}}(k) = \begin{bmatrix} 0 & v + \gamma + we^{-ik} \\ v - \gamma + we^{ik} & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

由图 2 可知, 在非厄米 SSH 链的非平庸拓扑相变区域内, 其能量本征值为实数, 如图 2(a1), (b1) 以及图 2(a2), (b2) 所示. 因此, 可以通过相似变换来求解其非平庸拓扑相变点 [14,15,37]. 首先, 将非厄米 SSH 链的波函数写为

$$|\Psi\rangle_{\text{NH-SSH}} = [\Psi_{1,A}, \Psi_{1,B}, \Psi_{2,A}, \Psi_{2,B}, \dots, \Psi_{N,A}, \Psi_{N,B}]^\top. \quad (17)$$

在实空间中, 本征方程 $\mathbf{H}_{\text{NH-SSH}}|\Psi\rangle_{\text{NH-SSH}} = E_{\text{NH-SSH}}|\Psi\rangle_{\text{NH-SSH}}$ 等价于

$$\bar{\mathbf{H}}_{\text{NH-SSH}}|\bar{\Psi}\rangle_{\text{NH-SSH}} = E_{\text{NH-SSH}}|\bar{\Psi}\rangle_{\text{NH-SSH}}, \quad (18)$$

其中, $|\bar{\Psi}\rangle_{\text{NH-SSH}} = \mathbf{S}^{-1}|\Psi\rangle_{\text{NH-SSH}}$, $\bar{\mathbf{H}}_{\text{NH-SSH}} = \mathbf{S}^{-1} \times \mathbf{H}_{\text{NH-SSH}} \mathbf{S}$. 其次, 将相似变化矩阵 \mathbf{S} 选取为一对角矩阵, 其对角元为

$$\{1, r, r, r^2, r^2, \dots, r^{N-1}, r^{N-1}, r^N\}, \quad (19)$$

其中 $r = \sqrt{(v-\gamma)/(v+\gamma)}$. 此时, 哈密顿量 $\bar{\mathbf{H}}_{\text{NH-SSH}}$ 在 k 空间中可以表示为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}_{\text{NH-SSH}}(k) &= (\bar{v} + \bar{w} \cos k) \sigma_x + \bar{w} \sin k \sigma_y \\ &= \bar{h}_x \sigma_x + \bar{h}_y \sigma_y, \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $\bar{v} = \sqrt{(v-\gamma)(v+\gamma)}$, $\bar{w} = w$, σ_x 和 σ_y 分别为 x 和 y 分量的泡利矩阵. 相应地, 拓扑相变点的条件为 $|\bar{v}| = |\bar{w}|$, 即:

$$\gamma^2 - v^2 = \pm w^2, \quad (21)$$

因此, 当 $\gamma < w$ 时, 拓扑相变点为 $v = \pm \sqrt{\gamma^2 + w^2}$; 当 $\gamma > w$ 时, 拓扑相变点为 $v = \pm \sqrt{\gamma^2 - w^2}$.

为了研究非厄米 SSH 链的非平庸拓扑边缘态性质, 本文采用边缘态依赖的缠绕数描述该性质, 其中, 左、右边缘态的缠绕数分别定义为 $\bar{W}_L = \bar{W} \cdot W_L$ 和 $\bar{W}_R = \bar{W} \cdot W_R$. 这里, W_L 和 W_R 为布洛赫缠绕数, 其定义为 [14,15]

$$W_L = \frac{1}{2\pi} \int dk \cdot \partial_k h_{\text{for}}, \quad (22)$$

$$W_R = \frac{1}{2\pi} \int dk \cdot \partial_k h_{\text{back}}, \quad (23)$$

式中, $h_{\text{for}} = v - \gamma + we^{ik}$ 是 (16) 式中向前跳跃的项, 而 $h_{\text{back}} = v + \gamma + we^{-ik}$ 则是 (16) 式中向后

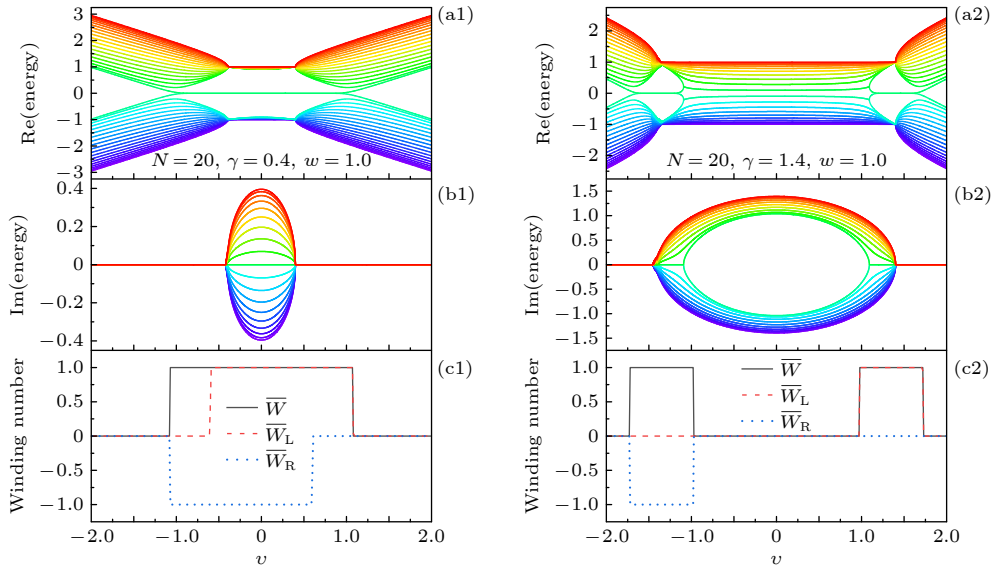


图 2 (a1), (a2) 非厄米 SSH 链的能谱图实部; (b1), (b2) 非厄米 SSH 链的能谱图虚部; (c1), (c2) 非厄米 SSH 链的不同缠绕数随着 v 的变化图. 其中, (a1), (b1), (c1) $\gamma = 0.4$; (a2), (b2) 和 (c2) $\gamma = 1.4$. 非厄米 SSH 链的其他参数选取为 $w = 1.0$, $N = 20$.
 Fig. 2. (a1), (a2) Real part of the energy spectrum of the non-Hermitian SSH chain; (b1), (b2) imaginary part of the energy spectrum of the non-Hermitian SSH chain; (c1), (c2) the different winding number of the non-Hermitian SSH chain as a function of the value of v . Here, (a1), (b1), (c1) $\gamma = 0.4$; (a2), (b2), (c2) $\gamma = 1.4$. The other parameters of the non-Hermitian SSH chain are chosen as $w = 1.0$ and $N = 20$.

跳跃的项; \bar{W} 为非布洛赫缠绕数:

$$\bar{W} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \partial \bar{\phi}(k) dk, \quad (24)$$

其中, $\bar{\phi}(k) = \tan^{-1}(\bar{h}_y/\bar{h}_x)$. 左、右边缘态的缠绕数 $\{\bar{W}_L, \bar{W}_R\}$ 可以完备地描述一维非厄米 SSH 链的边缘态性质. 当 $\bar{W}_L = 1$ 且 $\bar{W}_R = 0$ 时, 仅左边缘态存在; 当 $\bar{W}_L = 0$ 且 $\bar{W}_R = 1$ 时, 仅右边缘态存在; 当 $\bar{W}_L = 1$ 且 $\bar{W}_R = 1$ 时, 左、右边缘态均存在.

分 $\gamma < w$ 和 $\gamma > w$ 两种情况, 讨论 v 的取值对非厄米 SSH 链非平庸拓扑边缘态性质的影响. 为方便讨论, 在本文中, 将胞间电子的跳跃振幅选取为能量单位, 即 $w = 1.0$, 非厄米 SSH 链的元胞数选取为 $N = 20$. 当 $\gamma < w$ 时, 这里选取 $\gamma = 0.4$, 在非平庸拓扑相区域, 如图 2(c1) 中 $\bar{W} = 1$ 的区域, 存在 3 种不同类型的边缘态: 仅存在左边缘态、仅存在右边缘态, 以及左、右边缘态均存在, 即其波函数的概率幅从非厄米 SSH 链的左端 (左边缘态) 或右端 (右边缘态) 或两端 (左、右边缘态) 向中间的子格位置快速衰减. 为进一步研究 v 的取值对零能左、右边缘态的影响, 图 3 给出了零能附近的本征值的本征态波函数概率幅的绝对值随子格 n 和 v 值变化的相图. 当 $v > 0$ 且其值趋于 0 时, 非厄米 SSH 链的左、右边缘态均存在, 即其概率幅从左、右两端的子格向中间子格以指数形式快速衰

减, 其中, 左边缘态概率幅的绝对值大于其右边缘态; 反之, 非厄米 SSH 链在 $v < 0$, 且其值趋于 0 的情形下右边缘态概率幅的绝对值大于其左边缘态, 如图 3(a) 所示. 当 v 的绝对值 $|v|$ 较大时, 对于 $v > 0$ 的情形, 左边缘态概率幅的绝对值大于其右边缘态约 5 个量级, 此时, 右边缘态将非常不明显;

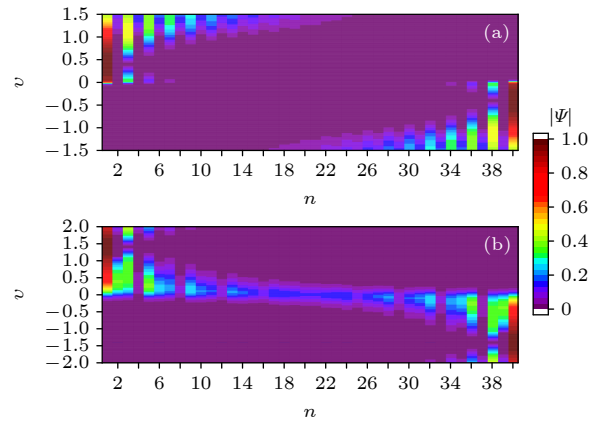


图 3 非厄米 SSH 链在零能附近的本征值的本征态波函数概率幅的绝对值随子格 n 和 v 值变化的相图 (a) $\gamma = 0.4$; (b) $\gamma = 1.4$; 非厄米 SSH 链的其他参数选取为 $w = 1.0$, $N = 20$

Fig. 3. Absolute value of probability amplitudes of the wave functions of the nearly zero-energy eigenstates of the non-Hermitian SSH chain as a function of the sublattice n and the value of v : (a) $\gamma = 0.4$; (b) $\gamma = 1.4$. The other parameters of the non-Hermitian SSH chain are chosen as $w = 1.0$ and $N = 20$.

而当 $v < 0$ 时, 右边缘态概率幅的绝对值则大于其左边缘态约 5 个量级, 相应地, 左边缘态将非常不明显, 如图 3(a) 所示. 此特性是由于非厄米 SSH 链的趋肤效应引起, 将在 3.2 节讨论. 另外, 从图 3(a) 还可以看出, 当 v 的值接近拓扑相变点 ($\pm\sqrt{\gamma^2 + w^2}$) 时, 非厄米 SSH 链在 $v > 0$ 情形下将仅存在左边缘态, 而在 $v < 0$ 情形下将仅存在右边缘态. 对于 $\gamma > w$ 的情形, 在非平庸拓扑边缘态区域内, 非厄米 SSH 链在 $v > 0$ 情形下仅存在左边缘态; 而在 $v < 0$ 情形下则仅存在右边缘态, 如图 3(b) 所示. 此外, 当 $v = \gamma$ 时, 在非厄米 SSH 链的第 1 个元胞内, 电子从 A 子格到 B 子格的跳跃振幅为 0, 因而边缘态的波函数概率幅将局域在非厄米 SSH 链最左端的子格上, 即第 1 个子格上; 而当 $v = -\gamma$ 时, 在非厄米 SSH 链的最后一个元胞内, 即第 N 个元胞内, 电子从 B 子格到 A 子格的跳跃振幅为 0, 相应地, 边缘态的波函数概率幅则局域在非厄米 SSH 链最右端的子格上, 第 $2N$ 个子格上.

3.2 非厄米 SSH 链的趋肤效应和异常透射率

在非厄米 SSH 链中, 趋肤效应和电子透射率异常是其区别于厄米 SSH 链的两个重要物理现象.

这里需要指出的是, 与非厄米 SSH 链的非平庸拓扑边缘态不同的是, 趋肤效应是非厄米 SSH 链的所有本征态 (包含边缘态) 波函数在每个子格上的概率分布均向其一端的子格上集中. 首先研究 v 的数值对非厄米 SSH 链趋肤效应的影响.

当 $\gamma < w$ 时, 例如 $\gamma = 0.4$, 对于一个有限长的非厄米 SSH 链, 在 v 值较小 ($v = \pm 0.01$) 的情形下, 其未出现非厄米趋肤效应, 如图 4(a1) 和图 4(a2) 所示; 而仅当 $|v|$ 大于某一数值时, 才能观察到非厄米趋肤效应, 如图 4 所示. 另外, 由图 4 可知, 非厄米 SSH 链在左、右边缘态区域 ($v = 0.2$) 和左边缘态区域 ($v = 0.7$) 内均存在明显的趋肤效应, 如图 4(b1), (b2) 以及图 4(d1), (d2) 所示. 尤其是, 当 $v = \pm\gamma$ 时, 非厄米 SSH 链的趋肤效应达到最强, 对于 $v = \gamma$ 的情形, 其本征态波函数的概率幅仅集中在最左端的 3 个子格上, 如图 4(c1) 所示; 而对于 $v = -\gamma$ 的情形, 其本征态波函数的概率幅则仅集中在最右端的 3 个子格上, 如图 4(c2) 所示. 这里, 特别需要说明的是, 由于 v 是厄米参数, 继续增大其绝对值会减弱系统非互易跳跃的不对称性, 从而减弱其非厄米趋肤效应, 如图 4(e1) 和图 4(e2) 所示. 特别是, 当 v 的绝对值足够大时, 对于一个有限长的非厄米 SSH 链, 其趋肤效应将消失.

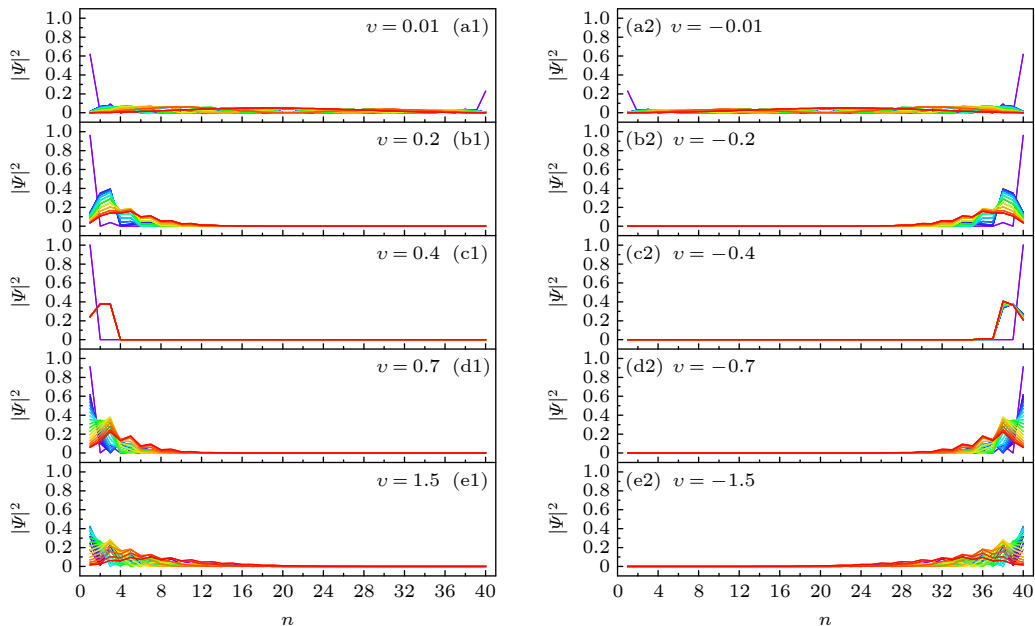


图 4 非厄米 SSH 链的本征态波函数在每个子格上的概率分布图 (a1) $v = 0.01$; (a2) $v = -0.01$; (b1) $v = 0.2$; (b2) $v = -0.2$; (c1) $v = 0.4$; (c2) $v = -0.4$; (d1) $v = 0.7$; (d2) $v = -0.7$; (e1) $v = 1.5$; (e2) $v = -1.5$; 非厄米 SSH 链的其他参数选取为 $\gamma = 0.4$, $w = 1.0$, $N = 20$

Fig. 4. Distribution of probabilities of the wave functions of the non-Hermitian SSH chain: (a1) $v = 0.01$; (a2) $v = -0.01$; (b1) $v = 0.2$; (b2) $v = -0.2$; (c1) $v = 0.4$; (c2) $v = -0.4$; (d1) $v = 0.7$; (d2) $v = -0.7$; (e1) $v = 1.5$; (e2) $v = -1.5$. The other parameters of the non-Hermitian SSH chain are chosen as $\gamma = 0.4$, $w = 1.0$ and $N = 20$.

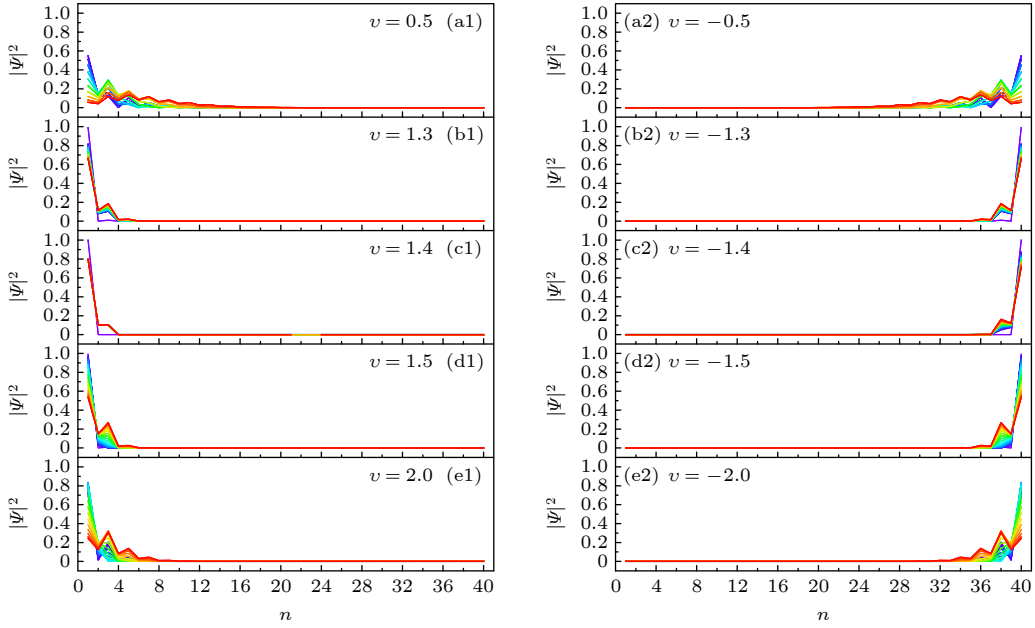


图 5 非厄米 SSH 链的本征态波函数在每个子格上的概率分布图 (a1) $v = 0.5$; (a2) $v = -0.5$; (b1) $v = 1.3$; (b2) $v = -1.3$; (c1) $v = 1.4$; (c2) $v = -1.4$; (d1) $v = 1.5$; (d2) $v = -1.5$; (e1) $v = 2.0$; (e2) $v = -2.0$; 非厄米 SSH 链的其他参数选取为 $\gamma = 1.4$, $w = 1.0$, $N = 20$

Fig. 5. Distribution of probabilities of the wave functions of the non-Hermitian SSH chain: (a1) $v = 0.5$; (a2) $v = -0.5$; (b1) $v = 1.3$; (b2) $v = -1.3$; (c1) $v = 1.4$; (c2) $v = -1.4$; (d1) $v = 1.5$; (d2) $v = -1.5$; (e1) $v = 2.0$; (e2) $v = -2.0$. The other parameters of the non-Hermitian SSH chain are chosen as $\gamma = 1.4$, $w = 1.0$ and $N = 20$.

对于 $\gamma > w$ 的情形, 例如 $\gamma = 1.4$, 非厄米 SSH 链的左趋肤效应在其左边缘态区域内 (例如 $v = 1.3$ 和 $v = 1.5$), 比其在非边缘态区域内 (例如 $v = 0.5$ 和 $v = 2.0$) 更加明显, 如图 5(a1), (b1), (d1), (e1) 所示. 相应地, 非厄米 SSH 链的右趋肤效应在其右边缘态区域内 (例如 $v = -1.3$ 和 $v = -1.5$), 比其在非边缘态区域内 (例如 $v = -0.5$ 和 $v = -2.0$) 更加明显, 如图 5(a2), (b2), (d2), (e2) 所示. 同样, 当 $v = \pm\gamma$ 时, 非厄米 SSH 链的趋肤效应达到最强, 如图 5(c1), (c2) 所示.

其次, 研究 v 的数值对非厄米 SSH 链电子透射率的影响. 在非厄米 SSH 链中, 由于电子从左电极 (源极) 到右电极 (漏极) 的向前跳跃振幅不等于从右电极 (漏极) 到左电极 (源极) 的向后跳跃振幅, 因而, 其电子透射率的数值将不等于 1. 为了方便讨论电子透射率异常的情况, 这里将胞内电子从 A 子格到 B 子格的跳跃振幅 ($v - \gamma$) 和其从 B 子格到 A 子格的跳跃振幅 ($v + \gamma$) 分别重新写为^[13] $v - \gamma = \mu e^\phi$, $v + \gamma = \mu e^{-\phi}$. 当 $(v - \gamma)(v + \gamma) > 0$ 时, $\mu = \sqrt{(v - \gamma)(v + \gamma)}$, $e^\phi = \sqrt{(v - \gamma)/(v + \gamma)}$, $e^{-\phi} = \sqrt{(v + \gamma)/(v - \gamma)}$; 当 $(v - \gamma) < 0$, $(v + \gamma) > 0$ 时, $\mu = i\sqrt{(\gamma + v)(\gamma - v)}$, $e^\phi = i\sqrt{(\gamma - v)/(\gamma + v)}$,

$e^{-\phi} = -i\sqrt{(\gamma + v)/(\gamma - v)}$; 当 $(v - \gamma) > 0$, $(v + \gamma) < 0$ 时, $\mu = i\sqrt{(\gamma + v)(\gamma - v)}$, $e^\phi = -i\sqrt{(\gamma - v)/(\gamma + v)}$, $e^{-\phi} = i\sqrt{(\gamma + v)/(\gamma - v)}$. 相应地, 电子通过非厄米 SSH 链的归一化透射率可以表示为 $T_N = T/|e^\phi|^{2N}$, 相应地, 归一化透射率 T_N 的最大值为 1.

对于厄米 SSH 链的零能非平庸拓扑边缘态, 可以通过其零能附近的电子透射率来探测^[34-36], 而非厄米 SSH 链的趋肤效应又与其电子透射率的异常相关, 因而, 非厄米 SSH 链的电子输运特性为探测其边缘态和趋肤效应提供了一个可选择的思路, 即从电子输运的角度, 讨论如何探测非厄米 SSH 链的边缘态和趋肤效应.

3.3 非厄米 SSH 链边缘态和趋肤效应的探测

对于本文考虑的有限长的非厄米 SSH 链, 两个非平庸拓扑边缘态的能量本征值之差实际上并不为零. 因此, 当非厄米 SSH 链与左、右导线之间的电子隧穿振幅处于弱耦合区域时, 非厄米 SSH 链与导线之间的弱电子隧穿过程对其能级结构影响较小. 因而, 在零能附近电子透射率峰/反射率谷的能量位置可以反映相应边缘态的能级位置.

但是, 当非厄米 SSH 链与左、右导线之间的隧穿振幅处于强耦合区域时, 导线与非厄米 SSH 链之间的强电子隧穿过程会强烈地影响非厄米 SSH 链的能级结构. 此时, 非厄米 SSH 链在零能附近无能级, 相应地, 弱耦合情形观察到的电子透射率峰/反射率谷将在强耦合情形下消失. 另一方面, 由 3.2 节可知, 非厄米 SSH 链的趋肤效应与其电子透射率的异常相关. 因此, 这里选取非厄米 SSH 链与左、右导线之间的电子隧穿耦合振幅 t_L 和 t_R 为可调的物理变量, 研究与非厄米 SSH 链边缘态和趋肤效应相关联的电子透射率和反射率特性.

首先, 讨论在 $\gamma < w$ 情形下非厄米 SSH 链与左、右导线耦合的情况, 例如, $\gamma = 0.4$. 当非厄米 SSH 链与左、右导线弱耦合时, 即 $t_L = t_R$ 的数值较小时, 对于 $v > 0$ 的情形, 非厄米 SSH 链的左趋肤效应体现在其本征态波函数在每个子格上的概率幅更加集中在其左端的几个子格上. 相应地, 电子从左电极隧穿到非厄米 SSH 链, 再从非厄米 SSH 链隧穿出到达右电极的概率将指数衰减. 因此, 在零能附近可以观察到两个峰值远小于 1 的电子透射率峰, 如图 6(a1) 所示. 反之, 当 $v < 0$ 时, 非厄

米 SSH 链的右趋肤效应则体现在其本征态波函数在每个子格上的概率幅更加集中在其右端的几个子格上, 相应地, 电子从左电极隧穿到非厄米 SSH 链, 再隧穿出非厄米 SSH 链到达右电极的概率将指数增大. 因而, 可以在零能附近观察到两个峰值远大于 1 的电子透射率峰, 如图 6(a2) 所示. 事实上, 对于 $\gamma = 0.4$ 和 $v = 0.5$ 的情形, 其归一化透射率因子为 $|e^\phi| = 1/3 < 1$, 相应的透射率 $T \ll 1$; 而对于 $\gamma = 0.4$ 和 $v = -0.5$ 的情形, 相应的归一化透射率因子为 $|e^\phi| = 3 > 1$, 因而, 其透射率 $T \gg 1$. 因此, 对于非厄米 SSH 链的趋肤效应类型, 可以通过其电子透射率是否远大于或者远小于 1 来判断. 例如, 当电子透射率远小于 1 时, 对应于左趋肤效应; 而电子透射率远大于 1, 则对应于右趋肤效应.

从图 6(a1) 和图 6(a2) 可以看出: 随着非厄米 SSH 链与左、右导线的电子隧穿耦合振幅 t_L 和 t_R 的逐渐增大, 在弱耦合情形下, 零能附近两个尖锐的透射率峰首先被逐渐展宽但其峰值不变; 然后, 这两个尖锐的峰将逐渐合并为一个半宽较宽的峰值不变的透射率峰; 当电子隧穿耦合振幅 t_L 和 t_R 继续增大时, 这个透射率峰的半宽将被继续展宽,

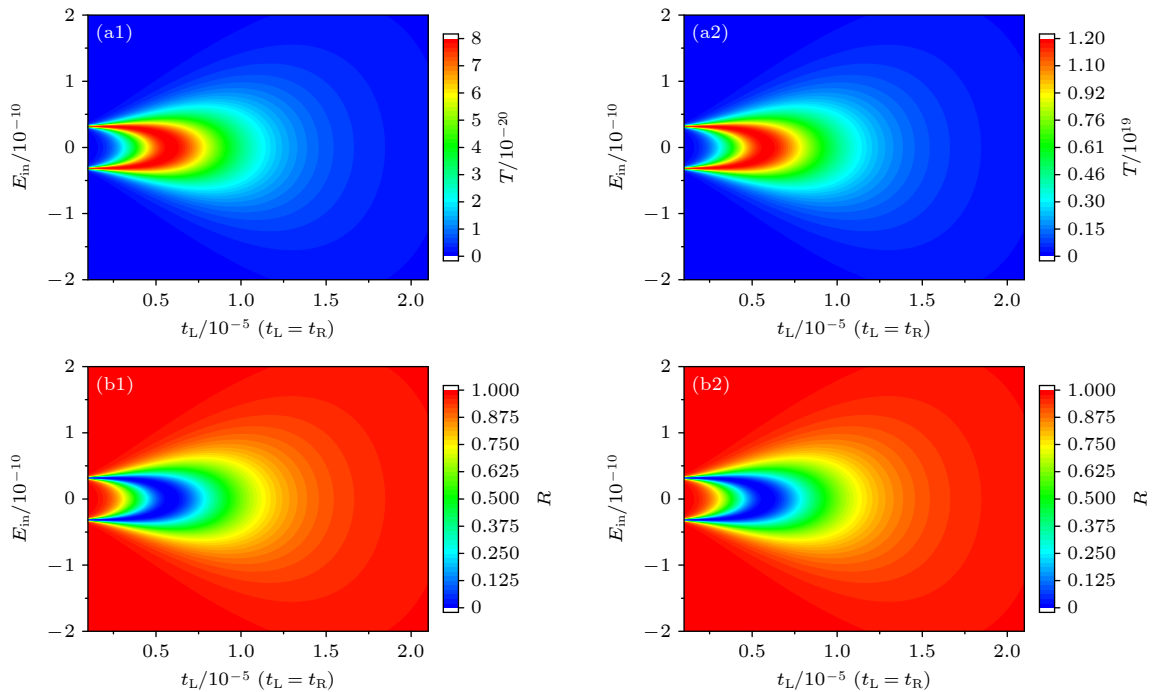


图 6 非厄米 SSH 链的电子透射率和反射率随不同隧穿耦合振幅和入射电子能量变化的相图 (a1), (b1) $v = 0.5$; (a2), (b2) $v = -0.5$; 非厄米 SSH 链的其他参数选取为 $\gamma = 0.4$, $w = 1.0$, $N = 20$

Fig. 6. Transmission probabilities and reflection probabilities of the non-Hermitian SSH chain as a function of the amplitude of tunneling coupling and the energy of incident electron: (a1), (b1) $v = 0.5$; (a2), (b2) $v = -0.5$. The other parameters of the non-Hermitian SSH chain are chosen as $\gamma = 0.4$, $w = 1.0$ and $N = 20$.

并且其峰值也将减小; 最后, 这个半宽很宽的电子透射率峰将完全消失. 另外, 对于非厄米 SSH 链, 电子从左电极隧穿到非厄米 SSH 链后, 其在胞内从 A 子格到 B 子格的跳跃振幅将被增强或衰减, 相应的其在零能附近透射率峰的峰值也不再等于 1. 但是, 对于在左电极 (源极) 和非厄米 SSH 链界面反射的电子, 其在相邻格点的隧穿振幅不会被增强或者衰减, 因而, 其在零能附近相应反射率谷的谷值可以等于 0, 如图 6(b1) 和图 6(b2) 所示. 特别是, 随着电子隧穿耦合振幅 t_L 和 t_R 的逐渐增大, 在零能附近反射率谷的数目变化与透射率峰的数目变化规律相同, 如图 6(a1), (b1) 以及图 6(a2), (b2) 所示. 因此, 对于非厄米 SSH 链的非平庸拓扑边缘态, 可以通过调节非厄米 SSH 链与左、右导线之间的电子隧穿耦合振幅 t_L 和 t_R , 观察电子在零能附近反射率谷的数目变化来确定其是否存在非平庸拓扑边缘态.

对于 $\gamma > w$ 的情形, 电子在零能附近的透射率和反射率随着非厄米 SSH 链与左、右导线之间电子隧穿耦合振幅 t_L 和 t_R 变化的规律与 $\gamma < w$ 情形相同, 但其 t_L 和 t_R 的取值不同, 如图 7 所示. 下面,

讨论非厄米 SSH 链在零能附近电子输运特性的物理机制.

当非厄米 SSH 链与左、右导线耦合时, 其能级结构将受到非厄米 SSH 链与左、右导线之间电子隧穿耦合振幅 t_L 和 t_R 数值大小的影响. 当 t_L 和 t_R 数值很小时, 电子在非厄米 SSH 链与导线之间的隧穿过程被强烈压制. 此时, 电子隧穿过程对非厄米 SSH 链的能级结构影响较小. 相应地, 零能附近边缘态反射率谷对应的能量位置与非厄米 SSH 链的能级一一对应, 如图 8(a1) 和图 8(b1) 所示. 若继续增大 t_L 和 t_R 的数值使其到达某一值时, 非厄米 SSH 链的能级结构将受到其与左、右导线之间电子隧穿过程的强烈影响. 这里将左、右导线分别用瓦尼尔态 $|L\rangle$ 和 $|R\rangle$ 表示, 再通过研究非厄米 SSH 链与瓦尼尔态 $|L\rangle$ 和 $|R\rangle$ 耦合的系统能谱, 定性模拟非厄米 SSH 链在其与左、右导线强耦合情形下的能级结构. 在左电极的瓦尼尔态 $|L\rangle$ 、非厄米 SSH 链子格的瓦尼尔态 $\{|1, A\rangle, |1, B\rangle, \dots, |n, A\rangle, |n, B\rangle\}$ 、右电极的瓦尼尔态 $|R\rangle$ 组成的完备基下, 由 (5) 式可知, 上面系统哈密顿量的矩阵形式为

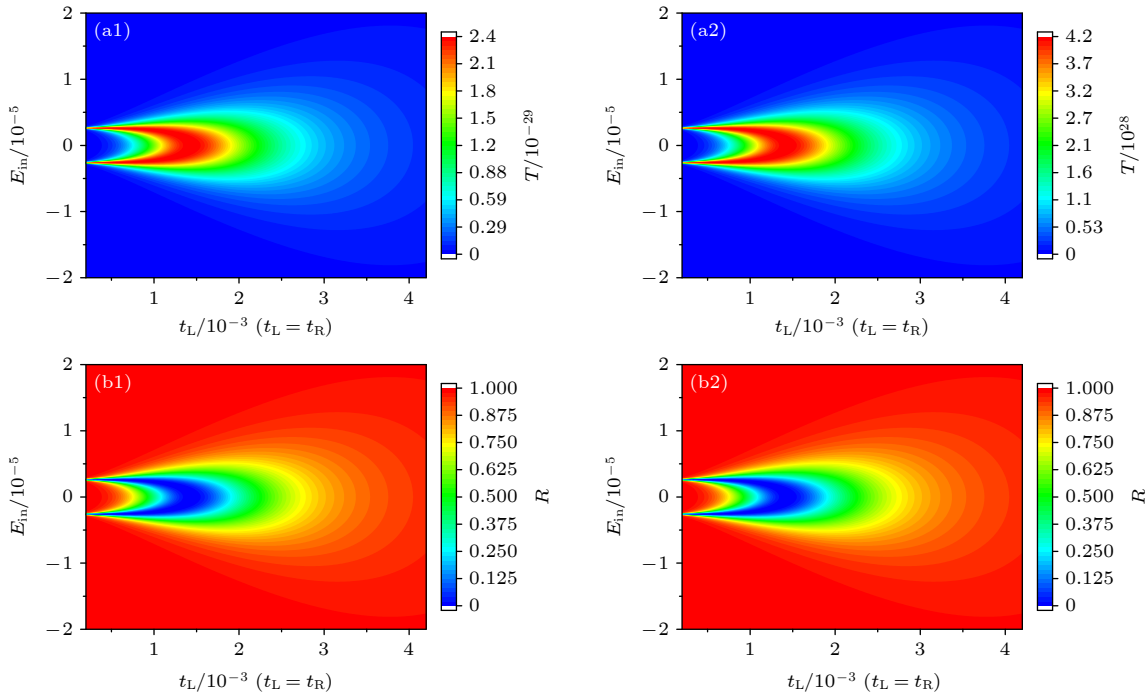


图 7 非厄米 SSH 链的电子透射率和反射率随不同隧穿耦合振幅和入射电子能量变化的相图 (a1), (b1) $v = 1.3$; (a2), (b2) $v = -1.3$; 非厄米 SSH 链的其他参数选取为 $\gamma = 1.4$, $w = 1.0$, $N = 20$

Fig. 7. Transmission probabilities and reflection probabilities of the non-Hermitian SSH chain as a function of the amplitude of tunneling coupling and the energy of incident electron: (a1), (b1) $v = 1.3$; (a2), (b2) $v = -1.3$. The other parameters of the non-Hermitian SSH chain are chosen as $\gamma = 1.4$, $w = 1.0$ and $N = 20$.

判断边缘态是否存在. 例如, 当电子在弱耦合情形下的 2 个零能附近反射率谷在强耦合情形下消失, 则说明非厄米 SSH 链存在边缘态. 另外, 对于非厄米 SSH 链的趋肤效应, 可以通过其电子透射率是否远小于 1 或远大于 1 来判断其趋肤效应的类型, 即电子透射率远小于 1 对应于左趋肤效应, 而电子透射率远大于 1 则对应于右趋肤效应.

4 结 论

本文研究了非厄米 SSH 链的非平庸拓扑边缘态性质和其趋肤效应, 并基于零能附近的电子输运特性给出了探测其边缘态和趋肤效应类型的理论方案. 研究发现, 非厄米 SSH 链的趋肤效应类型与其电子在零能附近透射率峰的峰值密切相关, 例如, 当电子在零能附近透射率峰的峰值远小于 1 时, 非厄米 SSH 链具有左趋肤效应; 反之, 当电子在零能附近透射率峰的峰值远大于 1 时, 非厄米 SSH 链则具有右趋肤效应. 特别是, 在非平庸拓扑边缘态区域内, 非厄米 SSH 链的边缘态将进一步增强其趋肤效应. 另外, 当非厄米 SSH 链与左、右导线之间的电子隧穿耦合振幅处于弱耦合区域时, 在零能附近可以观察到 2 个电子反射率谷; 而在其强耦合区域时, 电子在零能附近的反射率谷将消失. 此特性可以用来探测非厄米 SSH 链的非平庸拓扑边缘态. 上述结果为探测非厄米 SSH 链的非平庸拓扑边缘态和非厄米趋肤效应类型提供了一种可选择的理论方案.

参考文献

- [1] Ashida Y, Gong Z, Ueda M 2020 *Adv. Phys.* **69** 249
- [2] Bergholtz E J, Budich J C, K Flore K 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 015005
- [3] Zhang X, Zhang T, Lu M H, Chen Y F 2022 *Adv. Phys. -X* **7** 2109431
- [4] Li A, Wei H, Cotrufo M, Chen W, Mann S, Ni X, Xu B, Chen J, Wang J, Fan S, Qiu C W, Alù A, Chen L 2023 *Nat. Nanotechnol.* **18** 706
- [5] Banerjee A, Sarkar R, Dey S, Narayan A 2023 *J. Phys. Condens. Matter* **35** 333001
- [6] Heiss W D 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 444016
- [7] Mandal I, Bergholtz E J, 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 186601
- [8] Wang Q, Chong Y D 2023 *J. Opt. Soc. Am. B* **40** 1443
- [9] Helbig T, Hofmann T, Imhof S, Abdelghany M, Kiessling T, Molenkamp L W, Lee C H, Szameit A, Greiter M, Thomale R 2020 *Nat. Phys.* **16** 747
- [10] Xiao L, Deng T, Wang K, Zhu G, Wang Z, Yi W, Xue P 2020 *Nat. Phys.* **16** 761
- [11] Ghataka A, Brandenbourgera M, van Wezela J, Coulaissa C 2020 *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* **117** 29561
- [12] Lee T E 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 133903
- [13] Jin L, Song Z 2019 *Phys. Rev. B* **99** 081103(R)
- [14] Wang X R, Guo C X, Kou S P 2020 *Phys. Rev. B* **101** 121116(R)
- [15] Wang X R, Guo C X, Du Q, Kou S P 2020 *Chin. Phys. Lett.* **37** 117303
- [16] Jezequel L, Delplace P 2023 *Phys. Rev. Lett.* **130** 066601
- [17] Zeuner J M, Rechtsman M C, Plotnik Y, Lumer Y, Nolte S, Rudner M S, Segev M, Szameit A 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 040402
- [18] Weimann S, Kremer M, Plotnik Y, Lumer Y, Nolte S, Makris K G, Segev M, Rechtsman M C, Szameit A 2017 *Nat. Mater.* **16** 433
- [19] Weidemann S, Kremer M, Helbig T, Hofmann T, Stegmaier A, Greiter M, Thomale R, Szameit A 2020 *Science* **368** 311
- [20] Liu S, Shao R, Ma S, Zhang L, You O, Wu H, Xiang Y J, Cui T J, Zhang S 2021 *Research* **2021** 5608038
- [21] Liang Q, Xie D, Dong Z, Li H, Li H, Gadway B, Yi W, Yan B 2022 *Phys. Rev. Lett.* **129** 070401
- [22] Zhou Q, Wu J, Pu Z, Lu J, Huang X, Deng W, Ke M, Liu Z, 2023 *Nat. Commun.* **14** 4569
- [23] Feng Y, Liu Z, Liu F, Yu J, Liang S, Li F, Zhang Y, Xiao M, Zhang Z 2023 *Phys. Rev. Lett.* **131** 013802
- [24] Zhang H, Chen T, Li L, Lee C H, Zhang X 2023 *Phys. Rev. B* **107** 085426
- [25] Lee C H, Thomale R 2019 *Phys. Rev. B* **99** 201103(R)
- [26] Okuma N, Kawabata K, Shiozaki K, Sato M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 086801
- [27] Lin Z, Lin Y, Yi W 2022 *Phys. Rev. B* **106** 063112
- [28] Zeng Q B 2022 *Phys. Rev. B* **106** 235411
- [29] Li J R, Luo C, Zhang L L, Zhang S F, Zhu P P, Gong W J 2023 *Phys. Rev. A* **107** 022222
- [30] Tang C, Yang H, Song L, Yao X, Yan P, Cao Y 2023 *Phys. Rev. B* **108** 035410
- [31] Kokhanchik P, Solnyshkov D, Malpuech G 2023 *Phys. Rev. B* **108** L041403
- [32] Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J 1980 *Phys. Rev. B* **22** 2099
- [33] Li H, Yi W 2022 *Phys. Rev. A* **106** 053311
- [34] Zhang L Y, Xue H B, Chen B, Chen J B, Xing L L 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 077301 (in Chinese) [张蓝云, 薛海斌, 陈彬, 陈建宾, 邢丽丽 2020 物理学报 **69** 077301]
- [35] Xue H B, Duan Z L, Chen B, Chen J B, Xing L L 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 087301 (in Chinese) [薛海斌, 段志磊, 陈彬, 陈建宾, 邢丽丽 2021 物理学报 **70** 087301]
- [36] Ye C Z, Zhang L Y, Xue H B 2022 *Chin. Phys. B* **31** 027304
- [37] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803

Edge states and skin effect dependent electron transport properties of non-Hermitian Su-Schrieffer-Heeger chain*

Yang Yan-Li¹⁾ Duan Zhi-Lei²⁾ Xue Hai-Bin^{2)†}

1) (*Teaching Center of Fundamental Courses, Jinzhong College of Information, Jinzhong 030800, China*)

2) (*College of Physics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China*)

(Received 8 August 2023; revised manuscript received 13 September 2023)

Abstract

In the non-reciprocal Su-Schrieffer-Heeger (SSH) chain, the hopping amplitude of an electron in the intra-cell depends on its hopping direction. Consequently, the non-Hermitian SSH chain has both non-trivial topological edge state and non-Hermitian skin effect. However, how to detect the non-trivial topological edge states and non-Hermitian skin effect has become an important topic in non-Hermitian physics. In this paper, we study the relationships of the non-trivial topological edge states and the non-Hermitian skin effect of non-Hermitian SSH chain with their electron transport properties in the vicinity of the zero energy. It is demonstrated that when the peak value of the electron transmission probability in the vicinity of the zero energy is much smaller than 1, the non-Hermitian SSH chain has a left-non-Hermitian skin effect; while that in the vicinity of the zero energy is much larger than 1, the non-Hermitian SSH chain has a right-non-Hermitian skin effect. In particular, the skin effect of non-Hermitian SSH chain can be further enhanced in the region of non-trivial topological edge states. Moreover, with the increase of the electron tunneling coupling amplitudes between the non-Hermitian SSH chain and the left and right leads from the weak coupling regime to the strong coupling one, the number of the dips of reflection probability in the vicinity of the zero energy will change from two to zero. Therefore, these results theoretically provide an alternative scheme for detecting non-trivial topological edge states and non-Hermitian skin effect types of the non-Hermitian SSH chain.

Keywords: edge states, non-Hermitian skin effect, non-Hermitian Su-Schrieffer-Heeger chain, reflection probability, transmission probability

PACS: 73.20.-r, 73.23.-b

DOI: [10.7498/aps.72.20231286](https://doi.org/10.7498/aps.72.20231286)

* Project supported by the Applied Basic Research Program of Shanxi Province, China (Grant Nos. 20210302123184, 201601D011015), the Outstanding Innovative Academic Leader of Higher Learning Institutions of Shanxi Province, China (Grant No. 163220120-S), and the Teaching Reform and Innovation Project of Colleges and Universities in Shanxi Province, China (Grant No. J20221492).

† Corresponding author. E-mail: xuehaibin@tyut.edu.cn



非厄米Su-Schrieffer-Heeger链边缘态和趋肤效应依赖的电子输运特性

杨艳丽 段志磊 薛海斌

Edge states and skin effect dependent electron transport properties of non-Hermitian Su-Schrieffer-Heeger chain

Yang Yan-Li Duan Zhi-Lei Xue Hai-Bin

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 247301 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20231286

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20231286>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

无序非厄米Su-Schrieffer-Heeger中的趋肤效应

Skin effect in disordered non-Hermitian Su-Schrieffer-Heeger

物理学报. 2022, 71(22): 227402 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221151>

自旋轨道耦合Su-Schrieffer-Heeger原子链系统的电子输运特性

Electron transport through Su-Schrieffer-Heeger chain with spin-orbit coupling

物理学报. 2021, 70(8): 087301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201742>

量子点-Su-Schrieffer-Heeger原子链系统的电子输运特性

Electron transport through a quantum-dot-Su-Schrieffer-Heeger-chain system

物理学报. 2020, 69(7): 077301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191871>

三聚化非厄密晶格中具有趋肤效应的拓扑边缘态

Topological edge states with skin effect in a trimerized non-Hermitian lattice

物理学报. 2019, 68(10): 104206 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190112>

畴壁系统中的非厄米趋肤效应

Non-Hermitian skin effect in a domain-wall system

物理学报. 2022, 71(17): 170306 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221087>

一维对称非厄米自旋轨道耦合Su-Schrieffer-Heeger模型的拓扑性质

Topological properties of the one-dimensional γ -symmetric non-Hermitian spin-orbit-coupled Su-Schrieffer-Heeger model

物理学报. 2022, 71(17): 177302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220796>