

具有层级结构集体影响力的多数投票模型*

陈奕多¹⁾ 韵雨婷¹⁾ 关剑月^{1)2)†} 吴枝喜^{1)2)3)‡}

1) (兰州大学物理科学与技术学院, 兰州 730000)

2) (兰州理论物理中心, 兰州 730000)

3) (兰州大学, 量子理论及应用基础教育部重点实验室, 兰州 730000)

(2023年7月19日收到; 2023年10月5日收到修改稿)

多数投票模型是观点动力学研究中的常用模型, 本文在多数投票模型的基础上引入了具有层级结构的集体影响力, 以节点周边层级结构上的节点的度衡量中心节点的观点权重, 即为集体影响力参数. 通过蒙特卡罗模拟, 研究了具有集体影响力的多数投票模型在 ER (Erdos and Rényi) 随机网络与无标度网络上观点的演化, 发现系统观点均出现了有序-无序相变, 且相比原始多数投票模型更容易趋于无序, 即相变临界点更小. 原因是考虑具有层级结构的集体影响力时, 系统的集体影响力参数值整体减小, 且分布数目随着参数值的增大而减少, 呈“长尾”趋势, 占少数的高影响力个体使周围节点的观点产生跟随现象, 随着噪声参数的增大, 当少数的高影响力个体趋于无序时, 整个系统也会趋于无序, 即系统更容易达到无序状态. 最后通过有限尺寸标度法, 发现无论在 ER 随机网络或在无标度网络中, 具有集体影响力的多数投票模型的相变均为 Ising 模型普适类.

关键词: 多数投票模型, 集体影响力, 复杂网络, 相变

PACS: 02.50.Le, 05.65.+b, 89.75.-k

DOI: 10.7498/aps.73.20231164

1 引言

随着信息化进程的加快, 整个社会充斥着爆炸般的信息, 令人应接不暇, 观点的传播逐渐成为复杂网络科学中倍受关注的研究方向. 近期的研究中: Calvelli 等^[1] 研究了具有反从众性的 Sznajd 模型, 证明该模型在各个维度上的相变都属于 Ising 模型普适类; Pires 和 Crokidakis^[2] 研究了考虑个体的激活 (activation) 与停用 (deactivation) 的观点动力学, 证明在这种动力学下系统存在三种转变, 相变行为分别属于 Ising 模型普适类与接触过程 (contact process) 普适类; Khalil 和 Galla^[3] 研究了 Voter 模型中的狂热者, 分析了各种影响因

素下多模态 (multimodel) 和单模态 (unimodel) 的转换; Liu 等^[4] 研究了协同演化网络中极化的出现, 通过理论分析预测了 3 个不同极化阶段的相变, 不仅可以解释实验观测的标度率, 还可以定量预测标度指数. 在观点动力学的常用模型中, 多数投票模型是一个具有上下对称性的非平衡态模型^[5-14], 随着噪声参数的增大, 该模型呈现出有序-无序相变, 且在低维度的规则晶格上, 多数投票模型的相变属于 Ising 模型普适类^[7].

在复杂网络的研究中, 中心性是判断网络中节点重要性的指标, 可以量化节点在网络中的重要程度, 从而找出整个网络中更具影响力的个体^[15,16]. 传统的多数投票模型中个体观点的翻转概率主要考虑了自身节点的观点值与周围多数观点值的对

* 国家自然科学基金 (批准号: 11975111, 12047501, 12247101) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: guanjy@lzu.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: wuzhx@lzu.edu.cn

齐程度, 这里周围邻居对该节点的影响程度是相同的. 但是在现实生活当中每个人的影响力是不同的, 所以不仅需要考虑邻居节点自身的影响力, 还要考虑邻居节点在近邻、次近邻与次次近邻……的辐射圈中的影响力. 也就是说, 影响力的作用具有间隔性, 节点并不只对与自身有直接联系的节点产生作用. 考虑到被高度中心节点包围的低度节点仍可能对网络的动力学产生较大影响, 个体的影响力不仅与自身的度有关, 还与周边节点的度有很大的关系, 常用的度中心性不一定能正确地描述节点的影响力. 对于网络中这样的问题, Wang 等^[17]研究了如何向无标度网络中添加新边以增强同步, Morone 和 Makse^[18]提出了集体影响力的概念, 个体不再只受周围邻居的影响, 也可能会受其次近邻、次次近邻……的影响, 更真实地刻画了如今信息化网络的情况.

本工作使用节点周围深度为 l 的球面上的节点的度定义中心节点的集体影响力, 并将其引入到多数投票模型中, 构建了具有集体影响力的多数投票模型. 通过蒙特卡罗模拟对系统演化到稳态后的磁化强度 $M(q, N)$ 、四阶宾德累计矩 $U(q, N)$ 进行统计, 在 ER (Erdos and Rényi) 随机网络和无标度网络上对比了原始的多数投票模型和具有集体影响力的多数投票模型的相变行为, 观察了相变临界点之间的差距, 并对造成该差距的原因进行了分析. 最后通过分析临界指数, 证明具有集体影响力的多数投票模型的相变类型为 Ising 模型普适类.

2 模型与方法

多数投票模型的动力学规则如下. 对于具有 N 个个体的系统, 每个个体由网络中的一个节点代表, 且每个个体赋予观点值 x_i 满足 $x_i \in \{+1, -1\}$. 在每一个时间步中, 等概率随机选择一个节点 i ; 计算节点 i 相邻所有节点观点值之和:

$$S_i = \sum_j^N a_{ij} x_j, \quad (1)$$

其中,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{节点 } i \text{ 与 } j \text{ 之间有连接,} \\ 0, & \text{节点 } i \text{ 与 } j \text{ 之间无连接,} \end{cases} \quad (2)$$

之后计算出观点翻转概率:

$$\varepsilon(x_i) = \frac{1}{2} [1 - (1 - 2q) x_i \text{sgn}(S_i)], \quad (3)$$

其中,

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (4)$$

最后取 $[0, 1]$ 区间随机数 a , 若 $a < \varepsilon(x_i)$, 个体 i 的观点 x_i 翻转为 $-x_i$, 否则个体 i 观点不变.

本文在多数投票模型中引入了集体影响力的概念, 节点 i 的集体影响力定义如下:

$$\text{Cl}_l(i) = (k_i - 1) \sum_{d(i,j)=l} (k_j - 1), \quad (5)$$

其中 j 为节点外延半径 l 的球面上的个体, k_i 为节点 i 的度, k_j 为节点 j 的度. 此处所取简化度 $(k_i - 1)$ 代表节点 i 选取位于半径 l 的球面上节点 j 时, 不考虑此路径上连边, 故对度 k_i 取 -1 , $(k_j - 1)$ 同理. $l = 0$ 时, 只考虑节点对近邻节点的影响; $l \neq 0$ 时, 则要考虑节点通过周边层级结构上节点圈的影响力, 即此时节点的影响力与节点自身以及层级结构上所有节点的度 (简化度) 相关, 此处 l 不应超过 3, 否则容易超出系统尺寸.

为了使用集体影响力描述观点在传播过程中的作用, 假设集体影响力参数为

$$\omega_i = \text{Cl}_l(i) / \text{Cl}_l, \quad (6)$$

其中 $\text{Cl}_l(i)$ 为节点 i 在深度 l 上的集体影响, Cl_l 为网络中所有节点在深度 l 上集体影响的最大值. 当 $l = 0$ 时, 有 $\omega_i = k_i / k_{\max}$, k_{\max} 为网络所有节点中最大的度.

具有分层集体影响力的多数投票模型的动力学规则如下. 在每一个时间步中, 等概率随机选择一个节点 i ; 计算节点 i 相邻所有节点观点值与集体影响力参数乘积之和:

$$S_i = \sum_j^N a_{ij} x_j \omega_j, \quad (7)$$

其中 a_{ij} 与 ω_j 如 (2) 式与 (6) 式所示, 之后计算出观点翻转概率 $\varepsilon(x_i)$ 如 (3) 式与 (4) 式所示, 取 $[0, 1]$ 区间随机数 a , 若 $a < \varepsilon(x_i)$, 个体 i 的观点 x_i 翻转为 $-x_i$, 否则个体 i 观点不变.

蒙特卡罗模拟过程中, 每完成 N 个时间步记作一个单位时间, 即在单位时间内每个节点都有机会进行一次意见变更判断. 在蒙特卡罗模拟时间序列稳定后, 统计序参量 m 、磁化强度 M 、磁化率 χ 、四阶宾德累计矩 U ^[19] 等物理量以研究系统的观点演化与相变行为, 表达式如下:

$$m = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N x_i \right|, \quad (8)$$

$$M(q, N) = \langle \langle m \rangle_t \rangle_c, \quad (9)$$

$$\chi(q, N) = N \left[\langle \langle m^2 \rangle_t \rangle_c - \langle \langle m \rangle_t \rangle_c^2 \right], \quad (10)$$

$$U(q, N) = 1 - \left\langle \frac{\langle m^4 \rangle_t}{3 \langle m^2 \rangle_t^2} \right\rangle_c, \quad (11)$$

以上所用 $\langle \dots \rangle_c$ 为系综平均, $\langle \dots \rangle_t$ 为系统时间序列到达稳态后取时间平均. 序参量 m 描述系统的有序程度, 当 $m = 1$ 时, 系统观点值全部为 +1 或者 -1, 代表系统处于完全有序状态; 当 $m = 0$ 时, 系统观点值为 +1 和 -1 的个体各占一半, 代表系统处于完全无序的状态. 磁化强度 $M(q, N)$ 是对序参量求时间平均和系综平均的物理量, 磁化率 $\chi(q, N)$ 是反映系统序参量涨落的物理量, 通过有限尺寸标度法^[20] 利用这两个物理量可以精确计算系统相变的临界指数, 即精确研究系统相变的临界现象. 不同系统尺寸的四阶宾德累积矩 $U(q, N)$ 曲线会在临界点处相交, 可以确定系统相变的临界点.

本工作所使用的网络结构构建方法为配置模型 (configuration model), 使用已知的度序列进而构建网络^[21,22]. 在使用配置模型构建网络过程中, 需要保证“抓手”总数为偶数, 若按照度分布总“抓手”数为奇数时, 给第一个节点度加 1.

本文的工作中, 通过不同尺寸系统的四阶宾德累积矩 $U(q, N)$ 曲线交点得到临界点精确值, 所有临界指数的计算通过有限尺寸标度法完成. 表达式如下:

$$M(q, N) = N^{-\beta/\bar{\nu}} \widetilde{M}(\varepsilon N^{1/\bar{\nu}}), \quad (12)$$

$$\chi(q, N) = N^{\gamma/\bar{\nu}} \widetilde{\chi}(\varepsilon N^{1/\bar{\nu}}), \quad (13)$$

$$U(q, N) = \widetilde{U}(\varepsilon N^{1/\bar{\nu}}), \quad (14)$$

其中 $\varepsilon = (q - q_c)$, q_c 为观点有序-无序转变临界点, \widetilde{M} , $\widetilde{\chi}$, \widetilde{U} 为通用标度函数, β , γ , $\bar{\nu}$ 分别为磁化强度、磁化率、相关体积的临界指数.

3 结果与讨论

本文通过大量的蒙特卡罗模拟, 研究了原始的与具有集体影响力的多数投票模型的观点演化. 模拟的初始状态为整个系统中观点值均匀分布, 即

+1 与 -1 的个体各占一半, 此时系统处于完全无序状态. 如前文所述, 本文时间单位为蒙特卡罗时间, 即进行 N 次翻转实验, 每个节点平均有一次尝试更新观点的机会. 对于每个数据点, 首先让系统演化 10^5 蒙特卡罗时间, 确保在所有参数下系统演化到了稳定状态, 之后再继续模拟 10^5 蒙特卡罗时间, 对统计量做时间平均, 同时对每一个数据点做 50 次系综平均. ER 随机网络度分布满足泊松分布 $P(k) = \langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle} / k!$. 无标度网络度分布满足幂律分布 $p(k) \sim k^{-\lambda}$, λ 为度分布指数. 在下面的蒙特卡罗模拟中, 设置所有网络的平均度 $\langle k \rangle = 10$.

3.1 ER 随机网络

图 1(a), (b) 分别为 ER 随机网络中磁化强度 $M(q, N)$ 、四阶宾德累积矩 $U(q, N)$ 随噪声参数 q 的变化曲线. 所有情况中磁化强度 $M(q, N)$ 均会呈现从有序到无序的相变行为, $l = 0$ 与原始多数投票模型情况下曲线重合且均在较大 q 值下发生相变, $l \neq 0$ 时 3 条曲线几乎重合, 均在 q 值较小时发生相变, $U(q, N)$ 随 q 变化的行为与 $M(q, N)$ 一致. 证明了在观点传播过程中, 考虑了层级结构的集体影响力后, 如果集体影响力不仅仅只作用于最近邻的节点 ($l = 0$), 系统会在更小的扰动因子 q 下发生相变, 即系统更容易趋于无序状态.

图 2(a), (b) 分别为 $l = 0$, $l = 1$ 时不同系统尺寸的四阶宾德累积矩 $U(q, N)$ 随噪声参数 q 的变化曲线, 通过重合点可以看出 $l = 0$ 时临界点 $q_{c0} \approx 0.301$, $l = 1$ 时临界点 $q_{c1} \approx 0.283$, $l = 0$ 时临界点相较 $l = 1$ 大 0.018. 为了分析 $l = 0$ 与 $l \neq 0$ 时相变临界点的差异, 对 $N = 10000$, $l = 0$, $l = 1$, $l = 2$, $l = 3$ 时的 ω_i 值的分布情况进行统计, 如图 3(a) 所示. 原始多数投票模型中有 $S_i = \sum a_{ij} x_j$, 度大的节点连接了更多节点就会产生更大的影响力, 反之度小的节点影响力较小. 对于 $l = 0$ 的情况, $\omega_i = k_i / k_{\max}$, 同一网络中 k_{\max} 为定值, ω_i 分布与 k_i 一致, 为泊松分布, 同样由度的大小直接决定节点的影响力, 所以两种情况的相变临界点几乎重合. $l \neq 0$ 时, 可以发现 ω_i 整体呈“长尾”分布趋势, 在 0.17 附近达到峰值, 随着 ω_i 的增大, 频率递减. 这样的分布相较于 $l = 0$ 时, 更多节点 ω_i 值变小, 加和到 S_i 上的权重也变小, 在整个网络中的影响力减弱. 此时网络中仍存在部分节点具有较大的 ω_i

值, 在 S_i 上有更大的权重, 对 $\text{sgn}(S_i)$ 有更大的影响, 在较小 q 值时只要少数 ω_i 值较大节点观点状态不一, 其余小 ω_i 值的节点便会追随相连大 ω_i 值节点的观点值, 系统更易趋于无序状态. 表 1 为不同 l 时 ω_i 的均值和方差. 可以看出 $l = 0$ 时, ω_i 均值与方差均较大, 大部分节点较为集中但不同节点 ω_i 值仍有较大差异. $l \neq 0$ 时, ω_i 均值大幅减小且方

差也减小, 证明了 ω_i 更为密集地分布在较小值, 此时也使具有大 ω_i 值的个体权重增大. 图 3(b) 为不同 l 值下 ω_i 平均值与 k_i 的变化关系, $l = 0$ 时二者为线性关系, 而 $l \neq 0$ 时, 大部分节点度都较小且此时 ω_i 值较小, 影响力更小, 少数 ω_i 值较大的节点的影响力效应则会变大, 在较小的噪声参数 q 时, $\text{sgn}(S_i)$ 与 ω_i 值较大的节点观点状态保持一致, 只

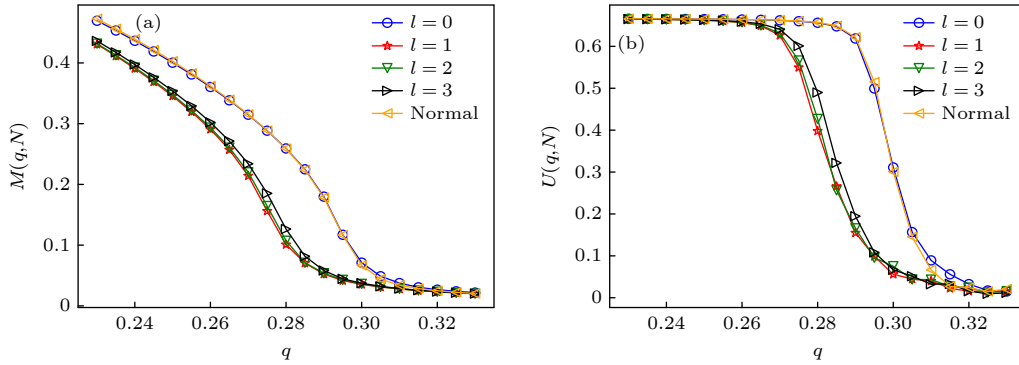


图 1 (a), (b) 分别表示在 ER 随机网络中磁化强度 $M(q, N)$ 、四阶宾德累积矩 $U(q, N)$ 随噪声参数 q 的变化曲线, 网络平均度 $\langle k \rangle = 10$, 节点数 $N = 10000$

Fig. 1. (a), (b) The variation curves of magnetization $M(q, N)$ and Binder's fourth-order cumulant $U(q, N)$ with noise parameter q in ER random network, respectively. The average degree of networks is $\langle k \rangle = 10$, and the number of nodes is $N = 10000$.

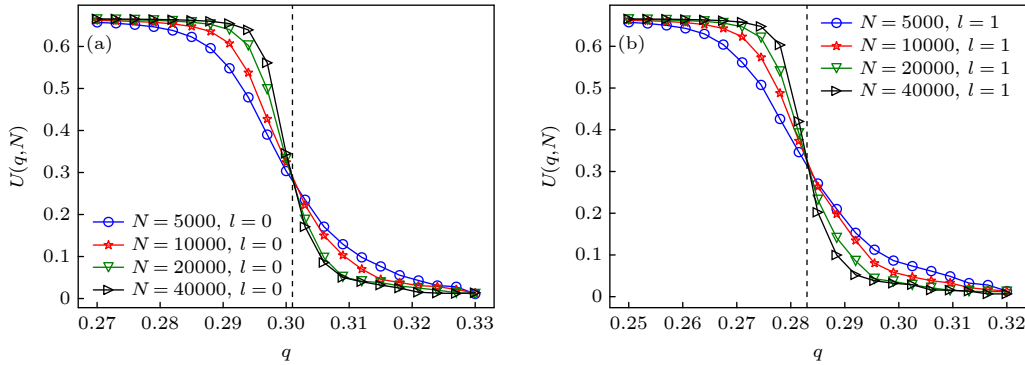


图 2 (a), (b) 在 ER 网络中, 当 $l = 0$ 和 $l = 1$ 时四阶宾德累积矩 $U(q, N)$ 随噪声参数 q 的变化曲线. 网络平均度 $\langle k \rangle = 10$

Fig. 2. (a), (b) $l = 0$ and $l = 1$ of the Binder's fourth-order cumulant $U(q, N)$ with noise parameter q in the ER network, respectively. The average degree of networks is $\langle k \rangle = 10$.

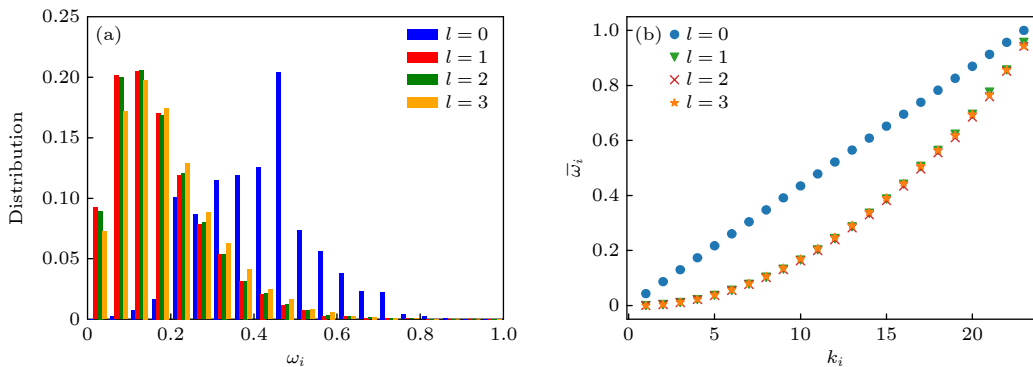


图 3 (a), (b) 分别为 ER 随机网络中 ω_i 分布情况与不同度 k_i 的 ω_i 平均值大小统计情况

Fig. 3. (a) The distribution of ω_i and (b) the statistics of the average value of ω_i of different degrees k_i in ER random network.

要大 ω_i 值节点趋于无序, 整个系统也会趋于无序. 此时, 利用以上求得的临界值对磁化强度 $M(q, N)$ 、四阶宾德累积矩 $U(q, N)$ 随噪声参数 q 的变化曲线做有限尺寸标度处理, 可得 $l = 0$ 与 $l = 1$ 时模型的临界指数, 如图 4 所示. $l = 0$ 时 $1/\bar{\nu} = 0.49(6)$, $\beta/\bar{\nu} = 0.23(5)$, $\gamma/\bar{\nu} = 0.49(5)$; $l = 1$ 时 $1/\bar{\nu} = 0.47(5)$, $\beta/\bar{\nu} = 0.23(6)$, $\gamma/\bar{\nu} = 0.50(5)$. 这些临界指数值与平均场 Ising 模型的临界指数值 (平均场 Ising 模型临界指数: $\gamma = 1$, $\beta = 1/2$) 十分接近, $l = 0$ 时更加贴合, 即具有集体影响力的多数投票模型在 ER 网络上的相变类型属于 Ising 模型普适类.

表 1 ω_i 均值和方差
Table 1. Mean and variance of ω_i .

	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$
$\langle \omega_i \rangle$	0.41 (6)	0.18 (5)	0.18 (3)	0.19 (3)
$\sigma(\omega_i)$	0.017 (4)	0.014 (9)	0.014 (5)	0.014 (9)

3.2 无标度网络

3.2.1 模拟结果与现象

在不同度分布指数 λ 的无标度网络中, 同样对不同 l 的集体影响力多数投票模型进行蒙特卡罗模

拟, 并加入原始多数投票模型形成对照. 所有网络平均度均为 $\langle k \rangle = 10$, 度分布指数 λ 分别取了 2.5, 3, 4. 图 5 为系统演化到稳态后, 磁化强度 $M(q, N)$ 、四阶宾德累积矩 $U(q, N)$ 随噪声参数 q 的变化曲线. 由图 5 可得, 系统演化的结果在无标度网络中与 ER 网络所呈现的趋势一致, 磁化强度 $M(q, N)$ 均从有序状态变为无序状态, 在 $l = 0$ 时与原始的多数投票模型几乎重合, 四阶宾德累积矩 $U(q, N)$ 的变化趋势与磁化强度一致, 即当集体影响力参数 ω_i 与自身度直接相关时, 具有集体影响力的多数投票模型与原始的多数投票模型的相变临界点差距不大. 引入 $l \neq 0$ ($l = 1, l = 2, l = 3$) 的集体影响力后相变行为发生改变, 三者曲线几乎重合且相变临界点整体变小. $l \neq 0$ 时与原始多数投票模型及 $l = 0$ 时相比, 相变临界点的减小分别为: $\lambda = 2.5$ 时 0.011, $\lambda = 3$ 时 0.012, $\lambda = 4$ 时 0.014. 对 $l = 0$ 以及 $l = 1$ 的具有集体影响的多数投票模型在 $N = 5000, 10000, 20000, 40000$ 的网络尺寸进行蒙特卡罗模拟, 如图 6 所示. 所得临界点准确值分别为: $\lambda = 2.5$ 时 $q_{c0} = 0.3035$, $q_{c1} = 0.292$, 差值为 0.0115; $\lambda = 3$ 时 $q_{c0} = 0.30$, $q_{c1} = 0.2875$, 差值为

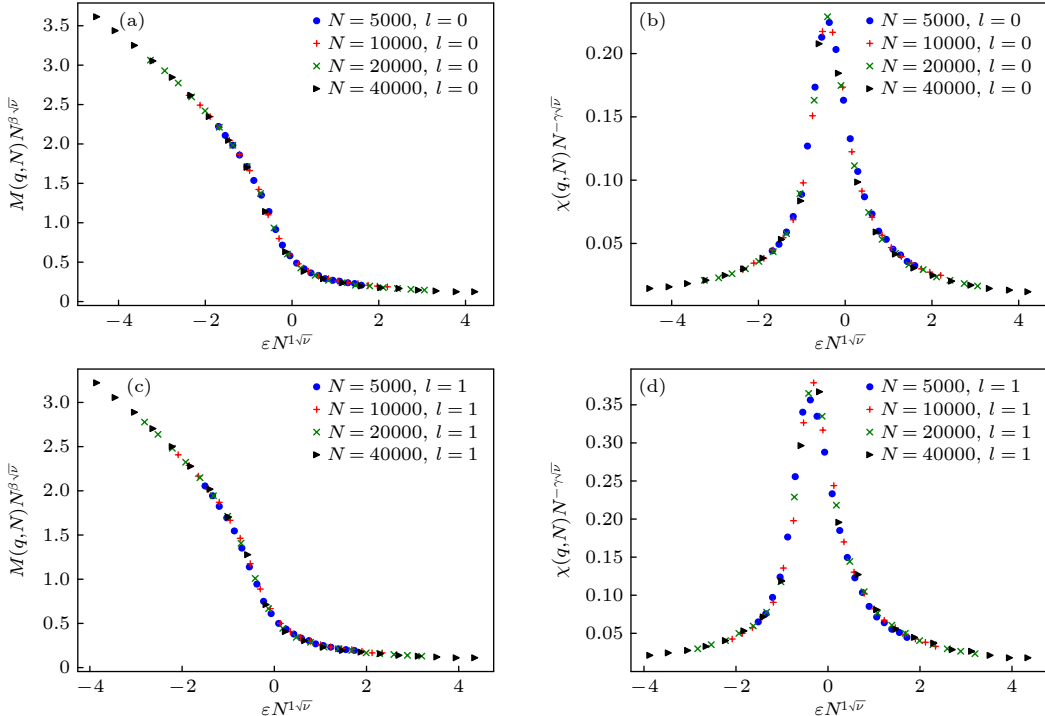


图 4 (a), (b) 分别为 ER 网络在 $l = 0$ 时磁化强度 $M(q, N)$ 与磁化率 $\chi(q, N)$ 的有限尺寸标度图; (c), (d) 分别为 ER 网络在 $l = 1$ 时磁化强度 $M(q, N)$ 与磁化率 $\chi(q, N)$ 的有限尺寸标度图

Fig. 4. (a), (b) The finite size scaling graphs of the magnetization $M(q, N)$ and the susceptibility $\chi(q, N)$ of the ER network at $l = 0$, respectively; (c), (d) the finite size scaling graphs of the magnetization $M(q, N)$ and the susceptibility $\chi(q, N)$ of the ER network at $l = 1$, respectively.

0.0125; $\lambda = 4$ 时 $q_{c0} = 0.295$, $q_{c1} = 0.2805$, 差值为 0.0145. 由此可得, 随着无标度网络度指数 λ 的增大, $l \neq 0$ 的集体影响力对整个动力学系统相变行为的影响也会增大. 使用上述临界点值, 对磁化强度 $M(q, N)$ 、四阶宾德累积矩 $U(q, N)$ 随噪声参数

q 的变化曲线进行有限尺寸标度处理, 计算相变临界指数, 所得 $\lambda = 2.5$ 时图像为图 7, $\lambda = 3$ 与 $\lambda = 4$ 的情况使用相同方式计算. 可以看出磁化强度 $M(q, N)$ 、四阶宾德累积矩 $U(q, N)$ 随噪声参数 q 的变化曲线都发生了有序到无序的相变过程, 所得

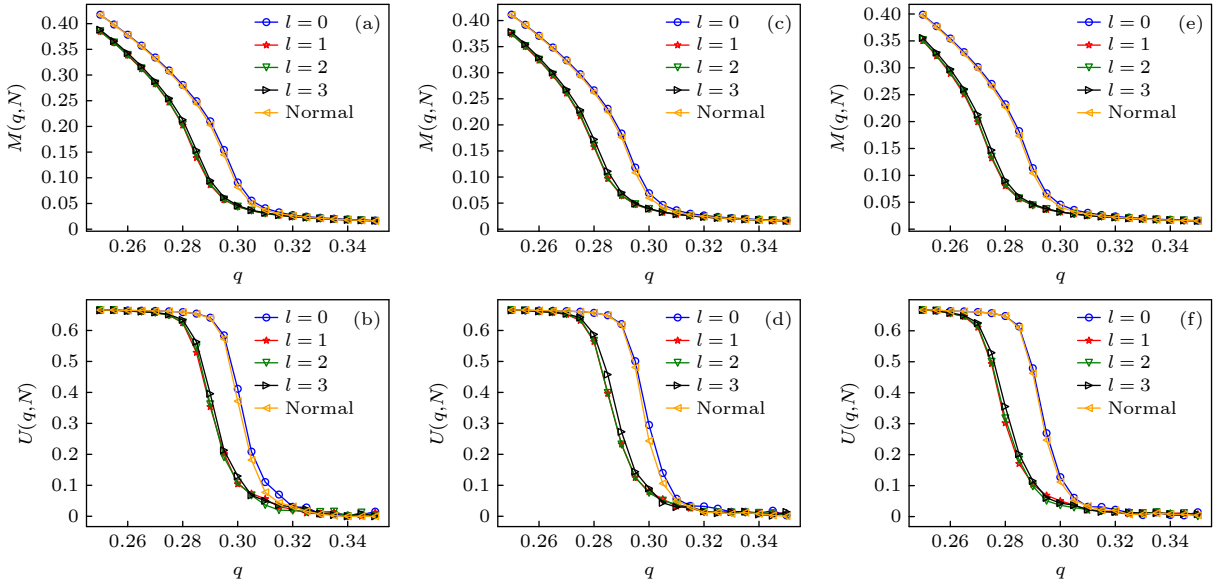


图 5 (a), (b) $\lambda = 2.5$; (c), (d) $\lambda = 3$; (e), (f) $\lambda = 4$ 无标度网络中磁化强度 $M(q, N)$ 、四阶宾德累积矩 $U(q, N)$ 随噪声参数 q 的变化曲线. 网络平均度 $\langle k \rangle = 10$, 节点数 $N = 10000$

Fig. 5. The variation curves of magnetization $M(q, N)$ and Binder's fourth-order cumulant $U(q, N)$ with noise parameter q in scale-free networks with (a), (b) $\lambda = 2.5$; (c), (d) $\lambda = 3$; (e), (f) $\lambda = 4$, respectively. The average degree of networks is $\langle k \rangle = 10$, and the number of nodes is $N = 10000$.

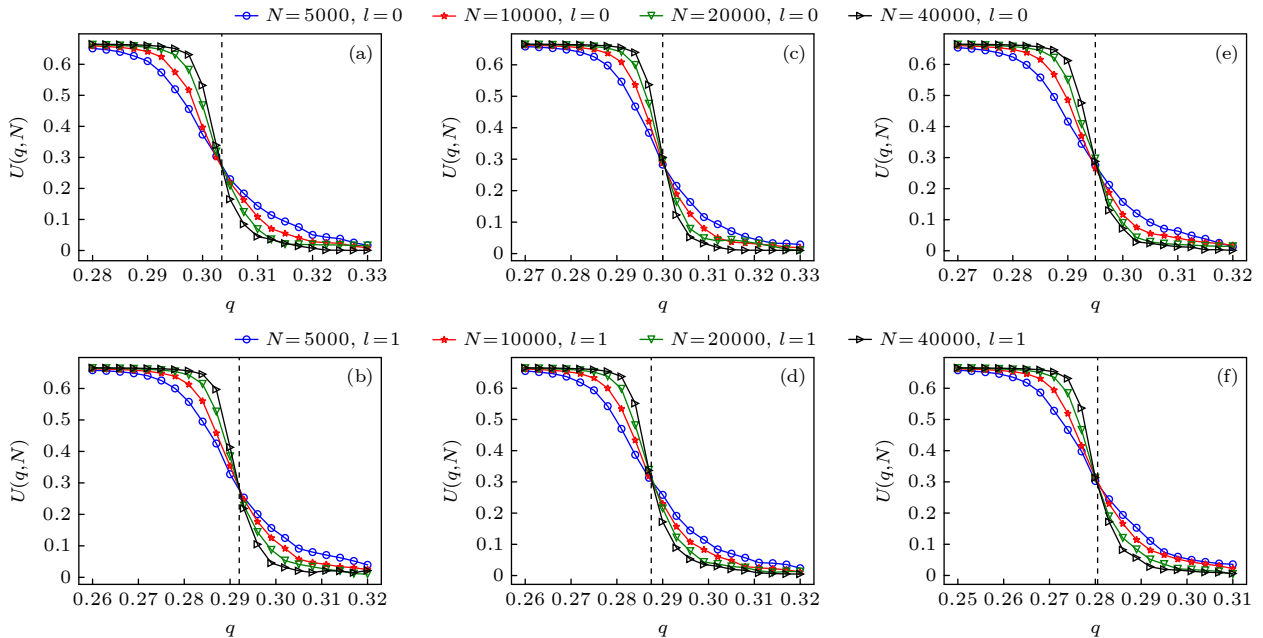


图 6 (a), (b) $\lambda = 2.5$; (c), (d) $\lambda = 3$; (e), (f) $\lambda = 4$ 无标度网络中 $l = 0$ 和 $l = 1$ 时四阶宾德累积矩 $U(q, N)$ 随噪声参数 q 的变化曲线. 网络平均度 $\langle k \rangle = 10$

Fig. 6. The variation curves of the Binder's fourth-order cumulant $U(q, N)$ with the noise parameter q when $l = 0$ and $l = 1$ in a scale-free network with (a), (b) $\lambda = 2.5$; (c), (d) $\lambda = 3$; (e), (f) $\lambda = 4$, respectively. The average degree of networks is $\langle k \rangle = 10$.

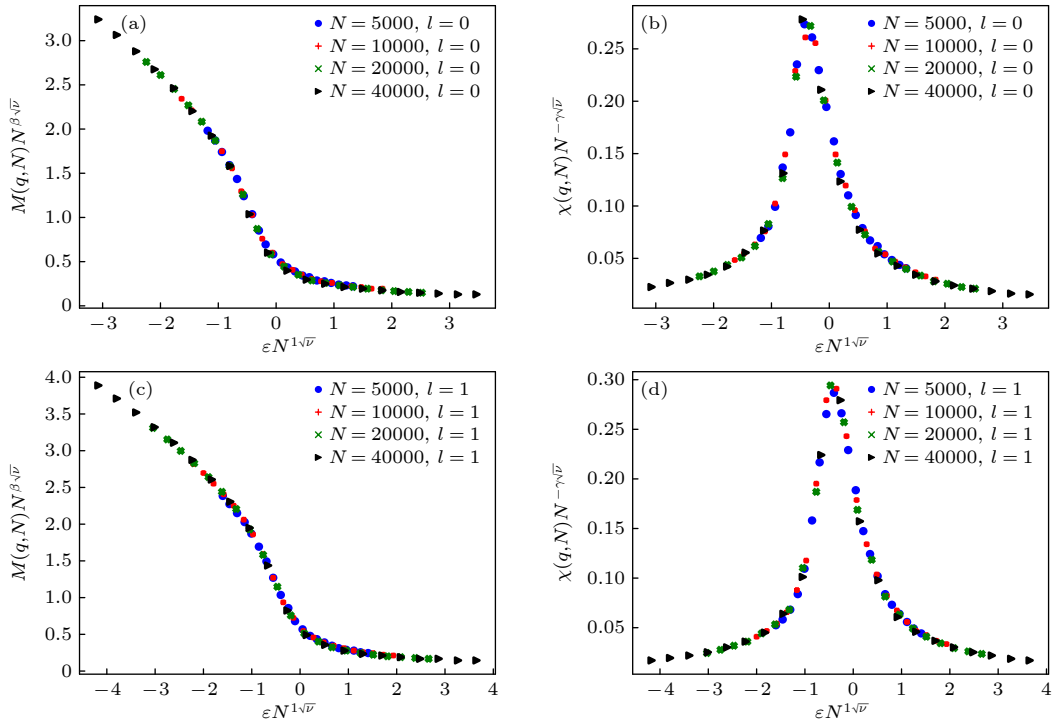


图 7 $\lambda = 2.5$ 时无标度网络磁化强度 $M(q, N)$ 和磁化率 $\chi(q, N)$ 的有限尺寸标度图 (a), (b) $l = 0$; (c), (d) $l = 1$

Fig. 7. The finite-size scaling graphs of magnetization $M(q, N)$ and susceptibility $\chi(q, N)$ of scale-free networks with $\lambda = 2.5$: (a), (b) $l = 0$; (c), (d) $l = 1$.

表 2 不同网络对应的 q_{c0} , q_{c1} 以及 $|q_{c0} - q_{c1}|$
Table 2. q_{c0} , q_{c1} and $|q_{c0} - q_{c1}|$ of different networks.

	ER网络	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 2.7$	$\lambda = 3$	$\lambda = 3.5$	$\lambda = 4$
q_{c0}	0.301	0.3035	0.3015	0.3	0.297	0.295
q_{c1}	0.283	0.292	0.2895	0.2875	0.2835	0.2805
$ q_{c0} - q_{c1} $	0.018	0.0115	0.012	0.0125	0.0135	0.0145

临界指数如下. $\lambda = 2.5$: $l = 0$ 时 $1/\bar{\nu} = 0.45(5)$, $\beta/\bar{\nu} = 0.23(1)$, $\gamma/\bar{\nu} = 0.49(2)$; $l = 1$ 时 $1/\bar{\nu} = 0.44(6)$, $\beta/\bar{\nu} = 0.22(3)$, $\gamma/\bar{\nu} = 0.51(5)$. $\lambda = 3$: $l = 0$ 时 $1/\bar{\nu} = 0.46(1)$, $\beta/\bar{\nu} = 0.23(5)$, $\gamma/\bar{\nu} = 0.49(2)$; $l = 1$ 时 $1/\bar{\nu} = 0.46(5)$, $\beta/\bar{\nu} = 0.23(1)$, $\gamma/\bar{\nu} = 0.51(5)$. $\lambda = 4$: $l = 0$ 时 $1/\bar{\nu} = 0.48(5)$, $\beta/\bar{\nu} = 0.23(5)$, $\gamma/\bar{\nu} = 0.49(5)$; $l = 1$ 时 $1/\bar{\nu} = 0.47(5)$, $\beta/\bar{\nu} = 0.23(5)$, $\gamma/\bar{\nu} = 0.51(2)$. 以上所有情况临界指数值都与平均场 Ising 模型类似, 即在 $\lambda = 2.5$, $\lambda = 3$ 与 $\lambda = 4$ 的无标度网络中, 具有集体影响力的多数投票模型的相变类型属于平均场 Ising 模型普适类.

上文以 $\lambda = 2.5$, $\lambda = 3$, $\lambda = 4$ 的无标度网络为例, 对 $l = 0$ 以及 $l = 1$ 时的相变临界点值进行了准确的计算. 为方便观察, 将这些相变临界点值列入表格中, 如表 2 所示. 表 2 中第 2 列为 ER 网络, 第 3—7 列为无标度网络不同度分布指数 λ 所对应的值. 可以看出在无标度网络中, 随着度分布指数

λ 的增大, 临界点值 q_c 会逐渐减小, 而 $|q_{c0} - q_{c1}|$ 的值却逐渐增大, 接近 ER 随机网络对应的值, 为了更直观观察, 将其绘制成图像为图 8, 可以看出 $l = 0$ 与 $l = 1$ 的曲线均趋于下降, 但 $l = 1$ 的曲线下降

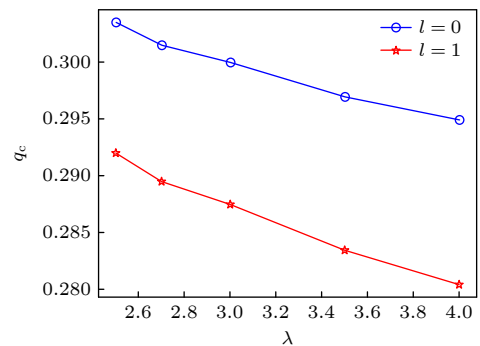


图 8 $l = 0$ 和 $l = 1$ 的具有集体影响力的多数投票模型中, 无标度网络不同度分布指数 λ 对应的相变临界点 q_c
Fig. 8. In the majority-vote model with collective influence of $l = 0$ and $l = 1$, the phase transition critical point q_c with different degree distribution index λ of the scale-free network.

更快. 满足无标度网络分布指数 λ 越大, 小度的节点越多, 大度的节点越少, 越趋近于随机网络的特点.

3.2.2 影响因素分析

以 $\lambda = 2.5$ 的无标度网络为例, 对无标度网络中 ω_i 的分布情况进行统计, 结果为图 9(a). 当 $l = 0$ 时, ω_i 与 k_i 的分布情况一致, 均为幂律分布. ω_i 从 0.45 处开始, 频率处于峰值, 在 0.25 左右. 随着 ω_i 的增大, 频率值也逐渐减小. 也就是说, 节点本身的度值决定了在网络中的影响力, 与原始多数投票模型一致, 所以 $l = 0$ 时的相变临界点与原始多数投票模型的相变临界点几乎一致. 当 $l \neq 0$ ($l = 1, l = 2, l = 3$) 时, ω_i 呈现“长尾”分布的趋势. 起始点降到了 0.17 附近, 更多的节点 ω_i 值变小, 节点观点的权重加和到 S_i 中也会变小. 网络中仍然存在部分节点拥有较大的 ω_i 值, 相较于 $l = 0$ 时, 这些大 ω_i 值节点数目变少, 观点权重会大幅增大, 直接影响了周围节点 $\text{sgn}(S_i)$ 的取值. 当系统处于一个较小 q 时, 这些具有大 ω_i 值的个体一旦趋于无序就会导致整个系统的无序, 所以系统在一个较小 q 时就发生相变. 在 $\lambda = 2.5$ 的无标度网络中, 不同 l 时 ω_i 的平均值和方差统计如表 3 所示. 同 ER 网络一样, 在 $l = 0$ 时节点的 ω_i 值均较大, 且方差较小; $l \neq 0$ 时 ω_i 的均值明显减小且方差增大, 说明大部分节点 ω_i 值减小, 但是 ω_i 之间差异变大, 小 ω_i 值节点的观点权重降低, 大 ω_i 值节点的观点权重增

大. $\lambda = 2.5$ 的无标度网络中, 不同 l 值下 ω_i 平均值与 k_i 的变化关系如图 9(b) 所示, $l = 0$ 时二者为线性关系, 而 $l \neq 0$ 时, 所有度 k_i 对应 ω_i 都减小, 总体呈现非线性变化, $\bar{\omega}_i$ 的最小值从 $l = 0$ 时的 0.2 降低到 0.03 附近, 减少到约 1/6. $k_i = 20$ 时 $\bar{\omega}_i$ 仍为最大, 从 $l = 0$ 时的 1 降低到 0.856 附近, 减小了约 0.17 倍. 大部分节点的 ω_i 不同程度减小, 观点权重也减小, 少数 ω_i 值较大的节点的观点权重则会变大, 在较小的噪声参数 q 时系统就会出现有序到无序的相变.

为了探究无标度网络中随着度分布指数 λ 的增大, $|q_{c0} - q_{c1}|$ 值也随着增大的原因. 对 $l = 0$ 以及 $l = 1$ 时, $\lambda = 2.5$ 以及 $\lambda = 4$ 的无标度网络 ω_i 的分布情况进行对比, 如图 10 所示. 由于无标度网络随着度指数 λ 的增大, 会有更多的节点度减小, 更少节点拥有较大的度, 分布曲线也会更加陡峭. $l = 0$ 时, ω_i 的分布情况与 k_i 一致. $\lambda = 2.5$ 时 ω_i 在 0.45 处频率达到峰值, 约为 0.25; $\lambda = 4$ 时 ω_i 也在 0.45 处频率达到峰值, 约为 0.35. 可见随着 λ 的增大, 更多的节点处于一个较小 ω_i 值, 所以具有较大 ω_i 值的节点观点权重增大, 对 S_i 的影响也增大. ω_i 大节点的减少, 也使得系统更容易在一个较小 q 值时趋于无序, 进而使得临界相变点 q_c 值减小. $l = 1$ 时, 无论 $\lambda = 2.5$ 还是 $\lambda = 4$, 整体 ω_i 的分布呈现“长尾”分布趋势, 但 ω_i 在 0.17 附近的节点最多, 频率处于峰值. 相较 $l = 0$ 时, 小 ω_i 值与大 ω_i 值相

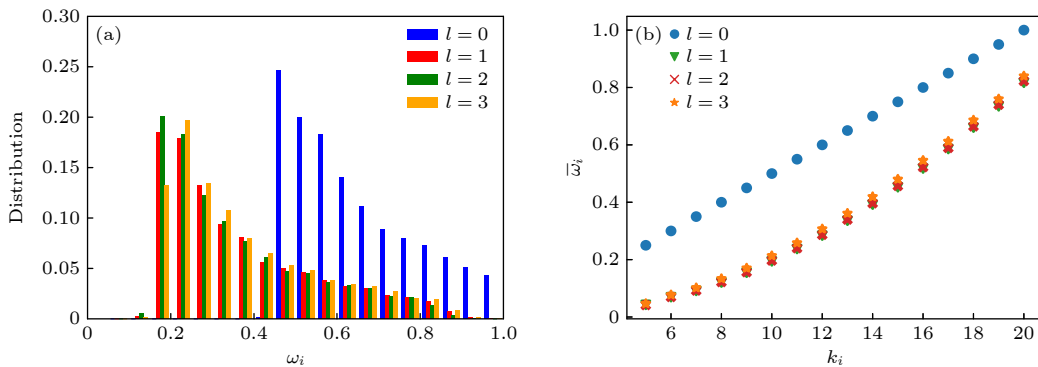


图 9 $N = 10000, \lambda = 2.5$ 的无标度网络中 (a) ω_i 的分布情况; (b) 不同度 k_i 的 ω_i 平均值统计情况

Fig. 9. In scale-free network when $N = 10000$ and $\lambda = 2.5$: (a) Distribution of ω_i in scale-free networks; (b) the statistics of the average value of ω_i of different degrees k_i .

表 3 ω_i 均值和方差
Table 3. Mean and variance of ω_i .

	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$
$\langle \omega_i \rangle$	0.66(2)	0.37(6)	0.36(9)	0.38(1)
$\sigma(\omega_i)$	0.22(4)	0.035(2)	0.033(8)	0.033(8)

差幅度增大, 由于度分布指数 λ 的增大, ω_i 小的节点增多, 会加剧大 ω_i 值节点的影响力, 进而使得 $|q_{c0} - q_{c1}|$ 值增大. 不同 l 时 ω_i 均值和方差的统计如表 4 所示, 可以看出 $\lambda = 2.5$ 和 $\lambda = 4$ 时都在 $l = 0$ 时 ω_i 有较大均值和较小方差, 当 $l \neq 0$ 时, ω_i 均值变小, 方差增大, 证明此时 ω_i 整体变小且差异性增大. $\lambda = 4$ 相较 $\lambda = 2.5$ 时, ω_i 方差更小, 即差异性较小, 更多节点处于较小 ω_i 值, 更少节点拥有较大 ω_i 值即这些节点的观点权重会增大.

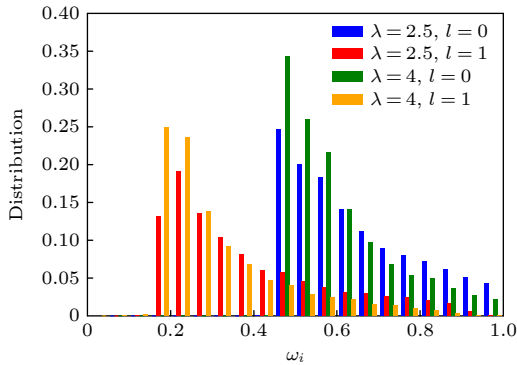


图 10 ω_i 的分布情况图, $\lambda = 2.5$ 的无标度网络在 $l = 0$ 和 $l = 1$ 时的分布情况与 $\lambda = 4$ 的无标度网络在 $l = 0$ 和 $l = 1$ 时的分布情况

Fig. 10. Distribution of ω_i , $l = 0$, $l = 1$ of scale-free networks with $\lambda = 2.5$ and $\lambda = 4$.

表 4 ω_i 均值和方差

Table 4. Mean and variance of ω_i .

		$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$
$\langle \omega_i \rangle$	$\lambda = 2.5$	0.66(2)	0.37(6)	0.36(9)	0.38(1)
	$\lambda = 4$	0.61(7)	0.33(6)	0.33(7)	0.34(6)
$\sigma(\omega_i)$	$\lambda = 2.5$	0.022(5)	0.035(2)	0.033(8)	0.033(8)
	$\lambda = 4$	0.017(4)	0.027(4)	0.027(5)	0.027(4)

为更加细致地分析无标度网络中系统的相变临界行为, 本文对不同度分布指数 λ , 不同 l 的系统在不同系统尺寸下相变临界点 q_c 处的磁化强度进行了统计, 如图 11 所示. l 与 λ 越大时, 相变临界点 q_c 处的磁化强度值 $M(q, N)$ 也越大. $l = 1$ 时, ω_i 之间的差距会被拉大, 大 ω_i 值的节点变少, 导致 ω_i 值较大的节点会拥有更大的观点权重, 大 ω_i 值节点周围大量小 ω_i 值的节点会跟随这些大 ω_i 值节点的观点. 如果此时拥有某一种观点值的大 ω_i 值节点较多, 则这种观点会占上风, 也会导致此时磁化强度值 $M(q, N)$ 增大. 在相变临界点 q_c 附近, 由于大 ω_i 值节点本身数量较少, 只需要很小一部分大 ω_i 值节点改变观点, 整个系统磁化强度值 $M(q, N)$

就会趋于无序. 在无标度网络中, λ 较大的网络拥有大度节点的比例降低, 也就加大了大度节点的观点权重. 在 l 与 λ 均较小时, 整个网络会拥有更多的大 ω_i 值节点, 想让整个系统趋于无序, 就要让更多大 ω_i 值节点的观点翻转, 也就需要不断提高扰动参数 q 来实现, 进而磁化强度 $M(q, N)$ 随扰动参数 q 变化的曲线也会趋于平缓.

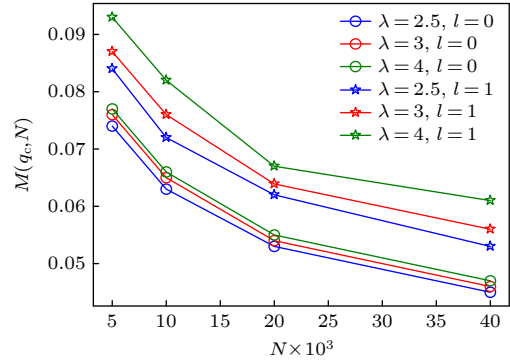


图 11 相变临界点处的磁化强度值. 横坐标为系统尺寸大小
Fig. 11. The magnetization $M(q, N)$ value at the critical point of phase transition. The abscissa is the size of the system.

3.3 临界指数

$l = 0$ 与 $l = 1$ 时, ER 网络及不同度分布指数 λ 的无标度网络下模型相变的临界指数总结如表 5 所列. 可以看出, 无标度网络中 λ 值越大, 临界指数越接近于 ER 网络的临界指数值, 对应于无标度网络 λ 值增大时网络中更多节点度变小、随机性增强的性质. 具有集体影响力的多数投票模型在 ER 网络与无标度网络中模型的相变临界指数都与平均场 Ising 模型接近, 相比较而言, $l = 0$ 时会更加贴合. 以往的研究表明, 在 ER 网络以及无标度网络中系统相变的临界指数均与平均场 Ising 模型相同^[23,24]. 文献 [24] 中所用多数投票模型在其参数 $\alpha = 0$ 时与本文的原始多数投票模型完全一致, 故本文引用文献 [24] 中所得临界指数作为原始多数投票模型对照参考, 如表 5 所列, 不同度分布指数的相变临界指数由某特定情况代表且认为在同区间内相变情况相同. 可以看出原始多数投票模型在 ER 随机网络与一定度分布指数条件下的无标度网络中的相变属于 Ising 模型普适类, 在加入具有层级结构的集体影响力因素后, 本文所用的 ER 随机网络与 $\lambda = 2.5, 3, 4$ 的无标度网络上的相变均属于 Ising 模型普适类.

表 5 临界指数实验结果与引用数据对照
Table 5. Results of critical exponents and reference data for comparison.

$l = 0$	ER网络	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$
$1/\bar{\nu}$	0.49(6)	0.45(5)	0.46(1)	0.48(5)
$\beta/\bar{\nu}$	0.23(5)	0.23(1)	0.23(5)	0.23(5)
$\gamma/\bar{\nu}$	0.49(5)	0.49(2)	0.49(2)	0.49(5)
$l = 1$	ER网络	$\lambda = 2.5$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$
$1/\bar{\nu}$	0.47(5)	0.44(6)	0.46(5)	0.47(5)
$\beta/\bar{\nu}$	0.23(6)	0.22(1)	0.23(1)	0.23(5)
$\gamma/\bar{\nu}$	0.50(5)	0.51(5)	0.51(5)	0.51(2)
原始多数投票模型	ER网络	$\lambda < 3 (\lambda = 2.7)$	$3 < \lambda < 5 (\lambda = 3.7)$	$\lambda > 5 (\lambda = 5.2)$
$1/\bar{\nu}$	0.5	0.31	0.48	0.47
$\beta/\bar{\nu}$	0.25	0.25	0.25	0.21
$\gamma/\bar{\nu}$	0.5	0.51	0.49	0.57

4 结 论

本工作将具有分层结构的集体影响力引入到多数投票模型中, 通过蒙特卡罗方法模拟 ER 随机网络和不同度分布指数下的无标度网络中的观点演化. ER 网络与无标度网络在 $l = 0$ 时的相变临界点值都与原始多数投票模型相近, 原因是 $l = 0$ 时节点的集体影响力和度分布直接相关, 详细对比为: 原始多数投票模型中度大的节点连接了更多节点, 也就是具有更大的影响力; 加入 $l = 0$ 的集体影响力后, 度大的节点同样具有与度直接相关的大集体影响力, 仍然对周围节点有更大的影响. $l \neq 0$ 时, ω_i 的分布均会出现“长尾”分布的特点, 大部分节点的 ω_i 值都会降低, 具有大 ω_i 值的节点数量减少且观点权重增大, 此时少数大 ω_i 值的节点观点发生翻转就会导致周围小 ω_i 值的节点的观点产生跟随, 使整个系统产生有序到无序的相变. 即 $l \neq 0$ 相比原始多数投票模型与 $l = 0$ 的情况, 系统随着噪声参数的增大更容易趋于无序, 相变临界点更小. 对于无标度网络, 度分布指数 λ 增大导致更多的节点度减小, 相变临界点也会变小, 且在有限尺寸内 l 的增大以及 λ 的增大会使临界点处磁化强度 $M(q, N)$ 也增大, 对应于无标度网络度分布指数越大随机性越强、越趋近于随机网络的性质. 对 ER 随机网络与度分布指数分别为 $\lambda = 2.5$, $\lambda = 3$, $\lambda = 4$ 的无标度网络在 $l = 0$ 与 $l = 1$ 时的磁化强度 $M(q, N)$ 与磁化率 $\chi(q, N)$ 进行有限尺寸标度分析, 得出上述网络中具有集体影响力的多数投票模型的临界指数均与平均场 Ising 模型的临界指数类似, 相变类型属于 Ising 模型普适类. 后续工作可以进一步通过理论推导佐证上述结论, 或修改集体

影响力参数的定义 (如通过深度 l 的球面内所有节点的度定义集体影响力), 也可以将集体影响力参数扩展到其他网络结构 (如动态网络等) 或其他动力学模型中进行研究.

参考文献

- [1] Calvelli M, Crokidakis N, Penna T J P 2019 *Physica A* **513** 518
- [2] Pires M A, Crokidakis N 2022 *Phil. Trans. R. Soc. A* **380** 20210164
- [3] Khalil N, Galla T 2021 *Phys. Rev. E* **103** 012311
- [4] Liu J Z, Huang S D, Aden N M, Johnson N F, Song C M 2023 *Phys. Rev. Lett.* **130** 037401
- [5] Costa L S A, de Souza A J F 2005 *Phys. Rev. E* **71** 056124
- [6] Lima F W S, Fulco U L, Costa Filho R N 2005 *Phys. Rev. E* **71** 036105
- [7] de Oliveira M J 1992 *J. Stat. Phys.* **66** 273
- [8] Mendes J F F, Santos M A 1998 *Phys. Rev. E* **57** 108
- [9] de Silva Hilho A G, Moreira F G B 2002 *J. Stat. Phys.* **106** 391
- [10] Campos P R A, de Oliveira V M, Brady Moreira F G 2003 *Phys. Rev. E* **67** 026104
- [11] Pereira L F C, Moreira F G B 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016123
- [12] Kwak W, Yang J S, Sohn J I, et al. 2007 *Phys. Rev. E* **75** 061110
- [13] de Oliveira M J, Mendes J F F, Santos M A 1993 *J. Phys. A* **26** 2317
- [14] Marques M C 1993 *J. Phys. A* **26** 1559
- [15] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3200
- [16] Lloyd A L, May R M 2001 *Science* **292** 1316
- [17] Wang S J, Wu Z X, Dong H R, Chen G R 2010 *Int. J. Mod. Phys. C* **21** 67
- [18] Morone F, Makse H A 2015 *Nature* **524** 65
- [19] Binder K 1981 *Physica B* **43** 119
- [20] Plischke M, Bergersen B (translated by Tang L H, Tong P Q) 2020 *Equilibrium Statistical Physics* (Beijing: Peking University Press) pp174–177 (in Chinese) [普利施克 M, 贝格森 B 著 (汤雷翰, 童培庆译) 2020 平衡态统计物理学 (北京: 北京大学出版社) 第 174–177 页]
- [21] Molloy M, Reed B 1995 *Random Struct. Algorithms* **6** 161
- [22] Molloy M, Reed B 1998 *Comb. Probab. Comput.* **7** 295
- [23] Lima F W S 2006 *Int. J. Mod. Phys. C* **17** 1257
- [24] Kim M, Yook S H 2021 *Phys. Rev. E* **103** 022302

Majority-vote model with collective influence of hierarchical structures*

Chen Yi-Duo¹⁾ Yun Yu-Ting¹⁾ Guan Jian-Yue^{1)2)†} Wu Zhi-Xi^{1)2)3)‡}

1) (*School of Physical Science and Technology, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China*)

2) (*Lanzhou Center for Theoretical Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China*)

3) (*Key Laboratory of Quantum Theory and Applications of Ministry of Education, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China*)

(Received 19 July 2023; revised manuscript received 5 October 2023)

Abstract

Majority-vote model is a commonly used model in the study of opinion dynamics. In the original majority-vote model, the influence of node is determined by their neighbors. But there are nodes with low degree surrounded by nodes with high degree so they also have a great influence on the evolution of opinions. Therefore, the influence of a node should not only be measured by neighbors but also be connected to itself directly. Thus, this paper adds collective influence with hierarchical structures into the majority-vote model and measures opinion weight of center node by degree of their neighbors on hierarchical structures surround it with the set distance. The collective influence parameters used in this paper are related to the value of collective influence mentioned above and normalized by the maximum value of all nodes in system. The opinions' evolution of majority-vote model with collective influence is studied in ER random networks and scale-free networks with different degree distribution exponents by Monte Carlo simulations. It is found that all systems have order-to-disorder phase transitions with the increase of noise parameter. When the depth of hierarchical structure is not zero, the system with collective influence is much easier to turn to disordered states so their critical noise parameters of phase transition are smaller than those of 0-depth systems and original majority-vote model. The reason is that high degree nodes in original majority-vote model have high influence because they are connected to more neighbors and nodes' influence is also directly determined by degree in 0-depth collective influence model. Furthermore, nodes' collective influence parameters in the system will all decrease when hierarchical structure of nonzero depth is considered, only a small number of individuals have high influence parameters in the system and they will make the opinions of surrounding individuals follow theirs, so if the opinions of a few highly influential individuals are out of order, then the system will reach a state of disorder. Because of the above factors, the collective influence model of nonzero depth is much easier to disorder with the increase of noise parameter. Besides, the system proves to be easier to reach a disordered state with the increase of degree distribution exponents in scale-free networks because all nodes' degree will be lower so that the system will be dominated by less nodes with high degree. This conclusion verifies that scale-free networks are more similar to ER random networks with the increase of degree distribution exponents. Finally, through the finite-size scaling method, it is found that the phase transition of the majority-vote model with collective influence of hierarchical structures belongs in the Ising model universal class, whether in ER random networks or in scale-free networks.

Keywords: majority-vote model, collective influence, complex networks, phase transition

PACS: 02.50.Le, 05.65.+b, 89.75.-k

DOI: 10.7498/aps.73.20231164

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11975111, 12047501, 12247101).

† Corresponding author. E-mail: guanjy@lzu.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: wuzhx@lzu.edu.cn



具有层级结构集体影响力的多数投票模型

陈奕多 韵雨婷 关剑月 吴枝喜

Majority-vote model with collective influence of hierarchical structures

Chen Yi-Duo Yun Yu-Ting Guan Jian-Yue Wu Zhi-Xi

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 020201 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20231164

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231164>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于区域密度曲线识别网络上的多影响力节点

Identifying multiple influential nodes based on region density curve in complex networks

物理学报. 2018, 67(19): 198901 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181000>

动态复杂网络中节点影响力的研究进展

Node influence of the dynamic networks

物理学报. 2020, 69(4): 048901 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20190830>

高阶耦合相振子系统的同步动力学

Collective dynamics of higher-order coupled phase oscillators

物理学报. 2021, 70(22): 220501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211206>

基于引力方法的复杂网络节点重要度评估方法

Node importance ranking method in complex network based on gravity method

物理学报. 2022, 71(17): 176401 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220565>

有限步传播范围期望指标判别节点传播影响力

Distinguishing node propagation influence by expected index of finite step propagation range

物理学报. 2020, 69(2): 028901 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191313>

异质弱相依网络鲁棒性研究

Robustness of interdependent networks with heterogeneous weak inter-layer links

物理学报. 2019, 68(18): 186401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190761>