

含有偏置电压源的非齐次分数阶忆阻混沌电路动力学分析与实验研究*

吴朝俊¹⁾ 方礼熠^{1)†} 杨宁宁²⁾

1) (西安工程大学电子信息学院, 西安市电气设备互联感知与智能诊断重点实验室, 西安 710048)

2) (西安理工大学电气工程学院, 西安 710048)

(2023 年 7 月 26 日收到; 2023 年 9 月 12 日收到修改稿)

物理忆阻器具有不对称的紧磁滞回线, 为了更加简便地模拟物理忆阻器的不对称紧磁滞曲线, 本文提出了一种含有偏置电压源的分数阶二极管桥忆阻器模型, 其具有可连续调控磁滞回线的能力. 首先, 结合分数阶微积分理论, 建立了含有偏置电压源的二极管桥忆阻器的分数阶模型, 并对其电气特性进行分析. 其次, 将其与 Jerk 混沌电路相融合, 建立了含有偏置电压源的非齐次分数阶忆阻混沌电路模型, 研究了偏置电压对其系统动态行为的影响. 再次, 在 PSpice 中搭建了分数阶的等效电路模型, 并对其进行电路仿真验证, 实验结果与数值仿真基本一致. 最后, 在 LabVIEW 中完成了电路实验, 验证了理论分析的正确性与可行性. 结果表明, 含有偏置电压源的分数阶忆阻器, 可以通过调控偏置电压源的电压, 连续获得不对称紧磁滞回线. 随着偏置电源电压的改变, 非齐次分数阶忆阻混沌系统由于对称性的破坏, 表现出由倍周期分岔进入混沌的行为.

关键词: 忆阻器, 混沌电路, 分数阶微积分, 电路实验

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.73.20231211

1 引言

忆阻器是蔡绍棠^[1,2]提出的第 4 种基本电路元件, 由于其独特的非易失性和非线性, 在神经网络、人工智能、数据存储和混沌电路等领域中得到了广泛关注和深入研究^[3-8]. 众所周知, 非线性元件, 例如蔡氏二极管和忆阻器等^[9,10], 对混沌系统复杂动力学行为的产生起着重要的作用. 因此, 在过去的十多年中, 研究者提出了众多包含不同非线性函数的忆阻器^[11-14]. 由于蔡氏电路、文氏桥振荡器和 Shinriki 振荡器等都只涉及结构对称的非线性系统, 因此它们能产生对称的双涡卷吸引子^[15-17]. 目前, 学者们试图将具有不对称电压-电流 ($V-I$) 特性的非线性元件引入到一些现有的振荡电路中,

以探索结构上的不对称效应^[18,19]. Cao 等^[20]提出了一种具有非对称结构的混沌 Jerk 电路, 在此基础上得到了非对称双涡卷吸引子和非对称的共存分岔模式. Kengne 等^[21]提出了将不对称二极管桥忆阻器引入混沌电路的模型, 该模型产生了多种动力学行为, 包括周期、混沌、周期泡、混沌泡、倍周期分岔等现象. 此外, Wu 等^[22]提出了在二极管桥中插入偏置电压源的模型, 并将其引入 Shinriki 振荡器中. 由于偏置电压源的引入, 使系统的不对称性具有连续可调的特点, 使原来对称的吸引子逐渐转变为不对称的吸引子.

由于纳米级器件的制作成本和实现难度, 目前对忆阻器的研究大都停留在实验室层面. 通过开发具有忆阻器特性的等效电路, 可以使忆阻器得到更加普遍的研究, 拓宽忆阻器的研究领域, 对其发展

* 国家自然科学基金 (批准号: 51507134) 和陕西省自然科学基金 (批准号: 2018JM5068, 2021JM-449) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: 3148130199@qq.com

和应用具有促进作用. 同时, 研究表明电容、电感等器件是分数阶的, 分数阶模型比整数阶模型更精确. 建立非理想忆阻器的分数阶模型, 可以获得更加接近实际的特性^[23]. 目前对于含有偏置电压源的忆阻器的研究还停留在整数阶, 而由于其具有不对称紧磁滞回线的调控能力, 使获得物理忆阻器的不对称紧磁滞回线更容易. 且分数阶微积分对模型描述更加接近其本质特征, 在将含有偏置电压源的忆阻器推至分数阶后, 可以获得更加精确的忆阻器模型, 同时系统的阶次也会对动力学行为产生影响.

为了研究含有偏置电压源的分数阶忆阻器的电路特性, 本文首先建立了一种含有偏置电压源的分数阶二极管桥忆阻器模型, 并对其电气特性进行了分析. 其次, 将此模型引入到 Jerk 振荡器中, 并将电路模型中的电容元件推广到分数阶次, 建立了含有偏置电压源的分数阶非齐次忆阻混沌电路模型. 研究偏置电压源电压改变对系统动力学行为的影响, 结果表明在分数阶系统中引入电压偏移量, 当初值为正时, 系统随偏移电压的增大逐渐由周期态进入混沌态, 当初值为负时系统并不受偏移电压的影响. 再次, 在 PSpice 中搭建了分数阶非齐次忆阻混沌电路的等效电路模型, 完成了整数阶与分数阶的电路仿真. 最后, 在 NI 设备上进行了系统的电路实验, 进一步证明了理论分析的正确性与可行性.

2 分数阶微积分理论概述

分数阶微积分算子 ${}_m D_t^q$ 的定义为

$${}_m D_t^q = \begin{cases} \frac{d^q}{dt^q}, & q > 0, \\ 1, & q = 0, \\ \int_m^t (d\tau)^{-q}, & q < 0, \end{cases} \quad (1)$$

式中, q 为分数阶微积分的阶次, t 为自变量, m 表示该变量的下边界, τ 表示时间变量.

分数阶微分算子普遍接受的定义主要包括 G-L, R-L 和 Caputo 定义. 与其他定义下的分数阶微分算子相比, Caputo 分数阶导数定义具有与整数阶微积分相同的形式, 对该类型分数阶导数采用 Laplace 变换更清晰, 并在诸多实际应用问题处理中得到广泛使用. 因此, 本文采用 Caputo 定义的分算子. Caputo 分数阶导数定义如下:

$${}_m D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_m^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}} d\tau, \quad (2)$$

式中, $f(t)$ 是关于时间 t 的连续性函数; $n \in N$, 是不小于 q 的最小整数; $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数, 其表达式为

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (3)$$

在理想条件下, 当 q 无限接近于 n 时, Caputo 导数也就成了函数 $f(t)$ 的常规 n 阶导数. Caputo 分数阶导数的 Laplace 变化为

$$L[{}_m D_t^q f(t)] = s^q L[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{q-k+1} f^{(k)}(0), \quad (4)$$

式中, s 表示复频率, k 表示正整数变量.

因为本文只涉及系统初值为零时的情况, 所以 Caputo 分数阶导数的 Laplace 变换能够化简为以下形式:

$$L\{{}_m^C D_t^q f(t)\} = s^q F(s). \quad (5)$$

3 含有偏置电压源的分数阶忆阻器与混沌电路建模

3.1 含有偏置电压源的分数阶二极管桥忆阻器建模

Wu 等^[22]提出了一种在二极管桥忆阻器中串联一个电压源的模型, 可以通过调整串联电压源 E_m 的幅值来控制忆阻器紧磁滞回线的对称性, 电路结构简单如图 1 所示. 该忆阻器电路由 4 个二极管、1 个电阻、1 个电容以及 1 个直流电压源构成.

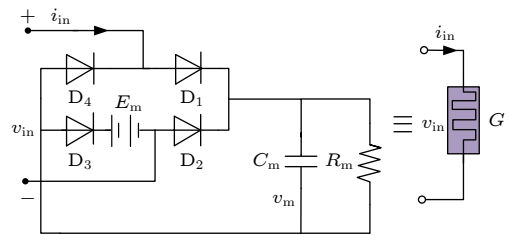


图 1 含偏置电压源忆阻器等效电路及忆阻器符号^[22]

Fig. 1. Equivalent circuit of memristor with bias voltage source and symbol of memristor^[22].

研究表明实际的电容与电感等非线性元件都表现出分数阶特性, 所以本文在图 1 含有偏置电压源的忆阻器的基础上, 将电容拓展到分数阶次, 构成了一种新型的含有偏置电压源的分数阶忆阻器. 其电路等效模型如图 2 所示.

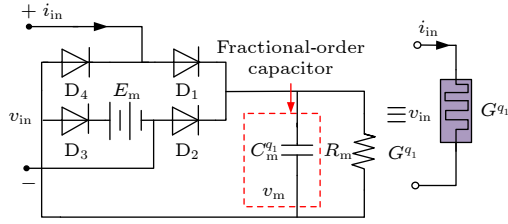


图 2 含偏置电压源的分数阶忆阻器等效电路及忆阻器符号
Fig. 2. Equivalent circuit of fractional memristor with bias voltage source and symbol of memristor.

对于图 2 中的分数阶忆阻器电路模型, 结合基尔霍夫定律, 电路方程可以表示为

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} v_m}{dt^{q_1}} = \frac{I_S \left[e^{\xi(v_{in} - v_m - E_m)} + e^{-\xi(v_{in} + v_m)} - 2 \right]}{C_m^{q_1}} \\ - \frac{v_m}{C_m^{q_1} R_m}, \\ i_{in} = I_S \left[e^{\xi(v_{in} - v_m - E_m)} - e^{-\xi(v_{in} + v_m)} \right], \end{cases} \quad (6)$$

式中, $\xi = 1/(2nV_T)$, I_S , n 和 V_T 分别表示二极管的反向饱和电流、发射系数和热电压. v_m 为电容 $C_m^{q_1}$ 两端电压, i_{in} 为分数阶忆阻器的端口电流. 所采用的二极管参数为 $I_S = 2.682 \text{ nA}$, $n = 1.9$, $V_T = 26 \text{ mV}$.

根据上面建立的电路模型, 通过 Matlab 软件进行数值仿真, 研究分数阶忆阻器的电气特性. 给定一个正弦激励信号 $v_{in} = A \sin(2\pi f t)$, 并将分数阶电容值设置为 $5.8 \text{ } \mu\text{F}$, 电阻值为 $R_m = 1 \text{ k}\Omega$. 当输入信号的幅值 $A = 2 \text{ V}$, 偏置电压源 $E_m = 0 \text{ V}$, 分数阶电容 $C_m^{q_1}$ 阶次 $q_1 = 0.98$ 时, 改变频率, 得到的含偏置电压源的分数阶忆阻器的磁滞回线如图 3(a) 所示. 分数阶忆阻器的 v_{in} - i_{in} 曲线是通过原点收缩的紧磁滞回线, 并且随着频率的增大, 紧磁滞回线包围的面积逐渐收缩. 当改变其阶次 (其他参数不变), 得到的磁滞回线如图 3(b) 所示. 在相同参数下, 随着分数阶阶次的增大, 紧磁滞回线包围的旁瓣面积会逐渐变小. 最后, 图 3(c) 为其他参数不变, 在不同偏置电压下的磁滞回线, 随着偏置电压 E_m 的增大, 磁滞回线的不对称性明显变强.

由图 3 可以看出分数阶忆阻器的左右旁瓣面积的对称性被打破, V - I 曲线的不对称程度可以由电压源 E_m 的值来控制, 将 V - I 曲线的不对称度 δ 定义为电流 i_{in} 的谷底值与峰值的比率, 表示为

$$\delta = |\min(i)/\max(i)|, \quad (7)$$

δ 值域在 $[0, 1]$ 中. 当 $f = 500 \text{ Hz}$, $q_1 = 0.98$, $E_m = [0 \text{ V}, 1 \text{ V}]$, δ 相对于电压源 E_m 的演变曲线在图 4 中给出. 对于 $E_m = 0 \text{ V}$ 的对称分数阶二极管桥忆

阻器, $\delta = 1$. 随着 E_m 的增大, 分数阶二极管桥忆阻器的不对称程度增大, 相应的不对称度 δ 逐渐减小. 当 E_m 变为约 0.5 V 时, δ 接近 0, 导致旁瓣的右叶消失. 如上所述, 当 $E_m > 0 \text{ V}$ 时, 分数阶二极管桥忆阻器是不对称忆阻器. 分数阶二极管桥忆阻器的不对称程度可以通过电压源 E_m 连续调整, 适合于电路应用.

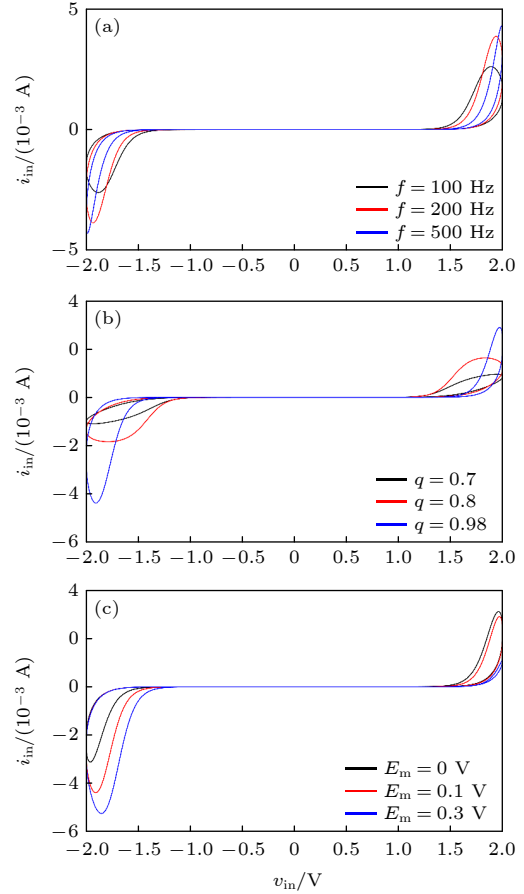


图 3 含偏置电压源的分数阶忆阻器磁滞回线 (a) $q_1 = 0.98$, $E_m = 0 \text{ V}$, 频率改变; (b) $f = 200 \text{ Hz}$, $E_m = 0.1 \text{ V}$, 分数阶次改变; (c) $q_1 = 0.98$, $f = 200 \text{ Hz}$, 偏置电压改变

Fig. 3. Hysteresis loop of fractional memristor with bias voltage source: (a) $q_1 = 0.98$, $E_m = 0 \text{ V}$, frequency change; (b) $f = 200 \text{ Hz}$, $E_m = 0.1 \text{ V}$, fractional order change; (c) $q_1 = 0.98$, $f = 200 \text{ Hz}$, bias voltage change.

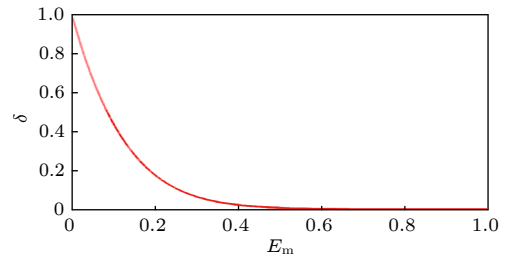


图 4 V - I 曲线的不对称程度

Fig. 4. Degree of asymmetry of the V - I curve.

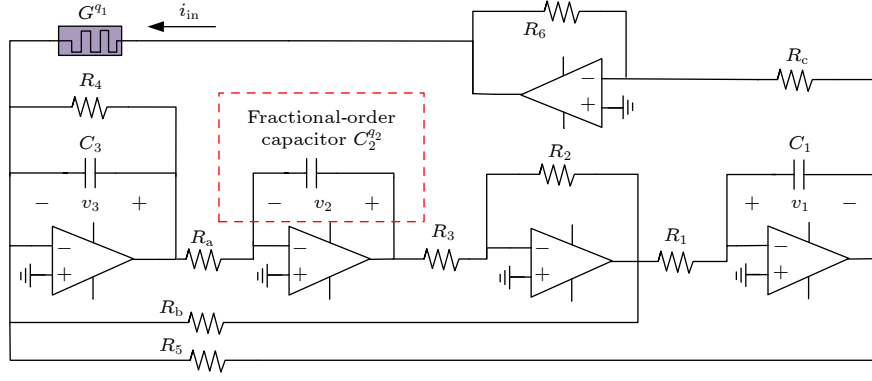


图 5 非齐次分数阶忆阻混沌系统

Fig. 5. Non homogeneous fractional order memristor chaotic system.

3.2 非齐次分数阶忆阻混沌电路建模

通过将 Jerk 混沌振荡电路与含偏置电压源的分数阶忆阻器相结合, 并将 Jerk 混沌电路中的一

个电容元件改为与分数阶忆阻器不同的阶次, 组合成一种新型的含偏置电压源的非齐次分数阶忆阻混沌电路. 图 5 给出了其电路原理图, 据此系统的电路模型为

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{v_2}{C_1 R_1}, & \frac{d^{q_2} v_2}{dt^{q_2}} = \frac{v_3}{C_2^{q_2} R_a}, \\ \frac{dv_3}{dt} = \frac{v_1}{C_3 R_5} - \frac{v_2}{C_3 R_b} - \frac{v_3}{C_3 R_4} - \frac{1}{C_3} \cdot I_S \left\{ \exp \left[\xi \left(\frac{R_6}{R_c} v_1 - v_m - E_m \right) \right] - \exp \left[-\xi \left(\frac{R_6}{R_c} v_1 + v_m \right) \right] \right\}, \\ \frac{d^{q_1} v_m}{dt^{q_1}} = \frac{1}{C_m^{q_1}} \cdot I_S \left\{ \exp \left[\xi \left(\frac{R_6}{R_c} v_1 - v_m - E_m \right) \right] + \exp \left[-\xi \left(\frac{R_6}{R_c} v_1 + v_m \right) \right] - 2 \right\} - \frac{v_m}{C_m^{q_1} R_m}, \end{cases} \quad (8)$$

式中, 电压 v_1 和 v_3 分别表示电容 C_1 和 C_3 两端的电压, v_2 为分数阶电容 $C_2^{q_2}$ 两端的电压, v_m 为分数阶忆阻器中分数阶电容 $C_m^{q_1}$ 两端的电压. 元件参数取值如下: $R_a = 0.9524 \text{ k}\Omega$, $R_b = 3.846 \text{ k}\Omega$, $R_c = 15 \text{ k}\Omega$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_m = 1 \text{ k}\Omega$, $C_1 = C_3 = 10 \text{ nF}$, $C_2^{q_2} = 10 \text{ nF}$, $C_m^{q_1} = 5.8 \text{ }\mu\text{F}$.

将时间、参数以及变量进行重新标度, 取值如下: $V_{\text{ref}} = 2nV_T$, $t = R_1 C_1 \tau$, $x_1 = v_1/V_{\text{ref}}$, $x_2 = v_2/V_{\text{ref}}$, $x_3 = v_3/V_{\text{ref}}$, $x_4 = v_m/V_{\text{ref}}$, $a = R/R_a$, $b = R/R_b$, $c = R/R_c$, $d = E_m/V_{\text{ref}}$, $\xi = 1/(2nV_T)$, $\varepsilon = (R_1 I_S)/V_{\text{ref}}$, $\beta = C_1/C_m$, $\gamma = R_1/R_m$. 可以得到系统的无量纲方程如下:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = x_2, & \frac{d^{q_2} x_2}{d\tau^{q_2}} = a x_3, \\ \frac{dx_3}{d\tau} = x_1 - b x_2 - x_3 - \varepsilon \left[e^{c x_1 - x_4 - d} - e^{-(c x_1 + x_4)} \right], \\ \frac{d^{q_1} x_4}{d\tau^{q_1}} = \gamma \left\{ \varepsilon \left[e^{c x_1 - x_4 - d} + e^{-(c x_1 + x_4)} - 2 \right] - \eta x_4 \right\}. \end{cases} \quad (9)$$

稳定性分析中的参数: $a = 10.5$, $b = 2.6$, $c = 2/3$, $\varepsilon = 2.715 \times 10^{-4}$, $\gamma = 1.724 \times 10^{-3}$, $\eta = 10$.

4 混沌系统动力学行为分析及电路仿真

4.1 系统稳定性分析

4.1.1 整数阶系统

先对整数阶系统的稳定性进行分析. 将 (9) 式左侧各项设置为 0, 通过化简整理后, 方程组变为如下的形式:

$$\begin{cases} x_2 = 0, & x_3 = 0, \\ x_1 - \varepsilon \left[e^{c x_1 - x_4 - d} - e^{-(c x_1 + x_4)} \right] = 0, \\ \varepsilon \left[e^{c x_1 - x_4 - d} + e^{-(c x_1 + x_4)} - 2 \right] - \gamma x_4 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

将 (10) 式中的其他电路参数固定, 使之随着参数 d 变化, 通过 Matlab 为两个超越方程绘制两

条隐函数曲线, 并通过检查这两条曲线的交点获得解集, (10) 式的每个解对应一个平衡点. 图 6 给出了 $d = 0, 0.1, 0.3$ 的曲线, 当 d 变化时, 对于每个参数 d 的值, 系统始终存在 3 个平衡点 P_- , P_0 和

P_+ . 且随着参数 d 增大, 平衡点 P_- 与 P_0 的位置始终不变, 而 P_+ 的位置沿右上方方向逐渐偏离原点. 平衡点 P 处的系统模型 (10) 的雅可比矩阵 M_J 推导如下:

$$M_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 - \varepsilon d (e^{cx_1 - x_4 - d} + e^{-(cx_1 + x_4)}) & -b & -1 \\ \varepsilon \gamma d (e^{cx_1 - x_4 - d} - e^{-(cx_1 + x_4)}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon (e^{cx_1 - x_4 - d} - e^{-(cx_1 + x_4)}) \\ -\gamma (e^{cx_1 - x_4 - d} + e^{-(cx_1 + x_4)} + \eta) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

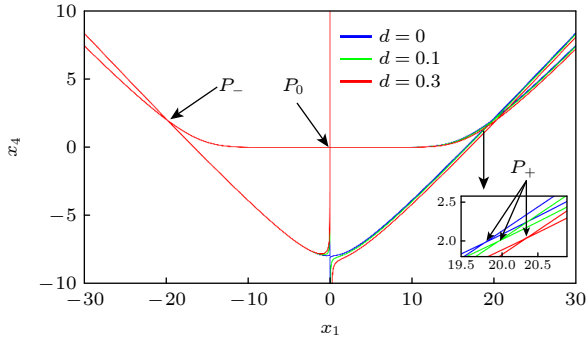


图 6 参数 d 变化的平衡点在 x_1 - x_4 平面上的分布
Fig. 6. Distribution of equilibrium points for parameter d changes on the x_1 - x_4 plane.

平衡点 P 的稳定性可以基于计算的特征值来确定, 使用 Matlab 计算 (11) 式给出的雅可比矩阵特征值, 所得结果如表 1 所列. P_0 是一个不稳定的指数 1 鞍焦点 (USF), 由一个正实根、一对具有负实部的复根和一个负实根组成, 而 P_- 和 P_+ 是两个不稳定的指数 2 鞍焦点, 具有一对具有正实部的复根和两个负实根. 对于所有参数 d , P_- 和 P_0 处的特征值保持不变, 而 P_+ 处的特征值明显变化.

4.1.2 分数阶系统

引理 如果一个自治的分数阶系统在平衡点是渐近稳定的, 那么平衡点处的雅可比矩阵的所有特征值满足:

$$|\arg[\text{eig}(M_J)]| > \frac{q\pi}{2}, \quad q = \max(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (12)$$

式中, $\text{eig}(M_J)$ 表示矩阵 M_J 的所有特征值. 由表 1 可知, 对于所有平衡点 P_- , P_0 和 P_+ 处的特征值, 总是存在 $|\arg[\text{eig}(M_J)]| < q\pi/2$, 所以分数阶系统在 P_- , P_0 和 P_+ 平衡点处是不稳定的.

4.1.3 整数阶系统的动力学行为

为了研究偏置电压 E_m 变化对整数阶忆阻混沌系统的影响, 这里选择将参数 E_m 作为变量, 取系统初值为 $(\pm 0.45 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V})$, 当保持系统的其他参数都不变时, 绘制的系统分岔图如图 7 所示. 可以看出系统初值为正, $E_m = 0$ 时系统处于单周

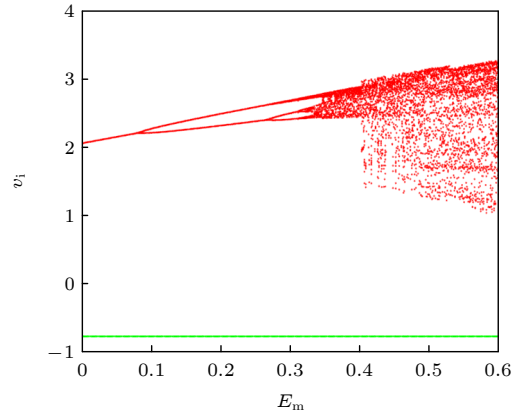


图 7 整数阶系统分岔图, 其中红色 (+) 和绿色 (-) 分别为系统初值取 $(\pm 0.45 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V})$

Fig. 7. Bifurcation diagram of integer order system, where red (+) and green (-) represent system initial values of $(\pm 0.45 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V})$.

表 1 系统平衡点及其稳定性

Table 1. System equilibrium point and its stability.

d 值	平衡点	特征值 $\lambda_1 - \lambda_4$	稳定性
0, 0.1, 0.3	$P_0(0, 0, 0, 0)$	0.3773, $-0.6886 \pm 5.2293i$, -0.0172	指数-1 USF
0, 0.1, 0.3	$P_-(19.7558, 0, 0, 1.9755)$	$1.2573 \pm 5.8895i$, -3.5516 , -0.0143	指数-2 USF
0	$P_+(19.7558, 0, 0, 1.9755)$	$1.2573 \pm 5.8895i$, -3.5516 , -0.0143	指数-2 USF
0.1	$P_+(19.9495, 0, 0, 1.9949)$	$1.2689 \pm 5.8991i$, -3.5751 , -0.0143	指数-2 USF
0.3	$P_+(20.3363, 0, 0, 2.0336)$	$1.2918 \pm 5.9182i$, -3.6215 , -0.0143	指数-2 USF

期状态, 并随着偏置电压源电压的增大, 由倍周期分岔进入混沌态. 在初值为负时, 系统始终处于周期态, 未发生改变. 随后图 8 和图 9 给出了系统由周期态进入混沌态的相图与各平面相图, 可以看出与分岔图相吻合. 此处所讨论的偏置电压源的变化

正是对应于前文的 V - I 不对称程度概念, 都是通过改变偏置电压源的电压, 从而研究系统的动力学行为. 通过与前文中 V - I 曲线的不对称程度进行对比分析, 发现随着不对称度 δ 的下降, 初值为正时, 系统逐渐由周期态进入混沌态.

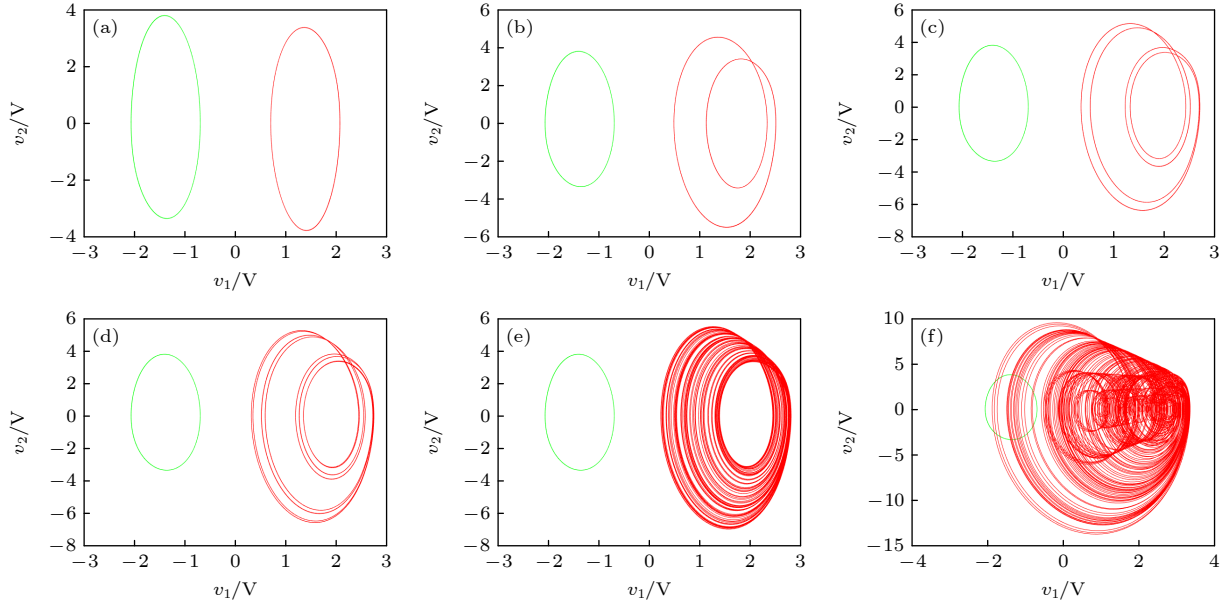


图 8 不同偏置电压 E_m 下, 整数阶系统由周期到混沌相图, 其中红色 (+) 和绿色 (-) 分别为系统初值取 $(\pm 0.45 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V})$ (a) 0 V; (b) 0.2 V; (c) 0.3 V; (d) 0.32 V; (e) 0.35 V; (f) 0.6 V

Fig. 8. Phase diagram of integer order systems from period to chaos at different bias voltage E_m , where red (+) and green (-) represent initial values of $(\pm 0.45 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V})$ for the system: (a) 0 V; (b) 0.2 V; (c) 0.3 V; (d) 0.32 V; (e) 0.35 V; (f) 0.6 V.

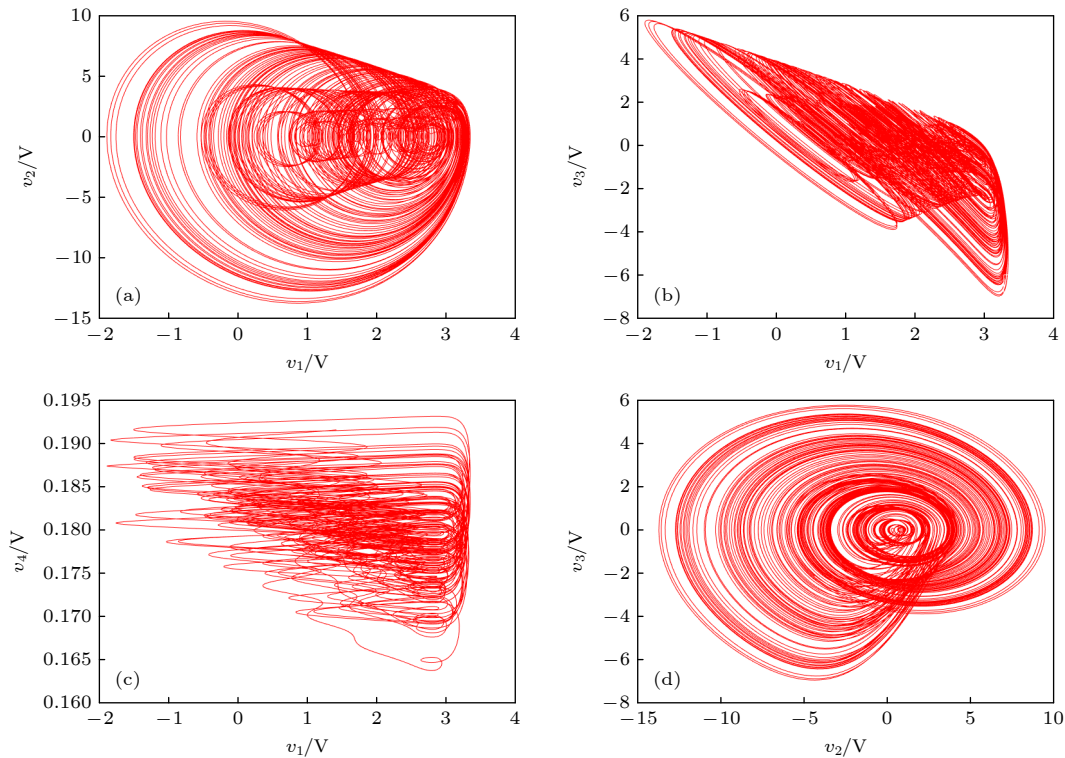


图 9 整数阶系统各平面相图 (a) v_1 - v_2 ; (b) v_1 - v_3 ; (c) v_1 - v_4 ; (d) v_2 - v_3

Fig. 9. Phase diagrams of various planes in integer order systems: (a) v_1 - v_2 ; (b) v_1 - v_3 ; (c) v_1 - v_4 ; (d) v_2 - v_3 .

4.1.4 分数阶系统的动力学行为

取与整数阶系统相同的初值, 直接使用 (8) 式进行数值仿真, 绘制的分数阶系统分岔图如图 10 所示. 随着参数 E_m 的改变, 系统由于对称性被破坏, 初值为正时系统呈现出周期, 随后倍周期分岔进入混沌态, 而系统初值为负时, 不受偏置电压的影响, 并始终呈现出周期态. 为进一步验证电压 E_m 的影响, 图 11 和图 12 给出了相对应的系统由周期态步入混沌态的相图与各平面相图. 可以看到, 系统初值为正, $E_m = 0$ V 时系统为单周期态,

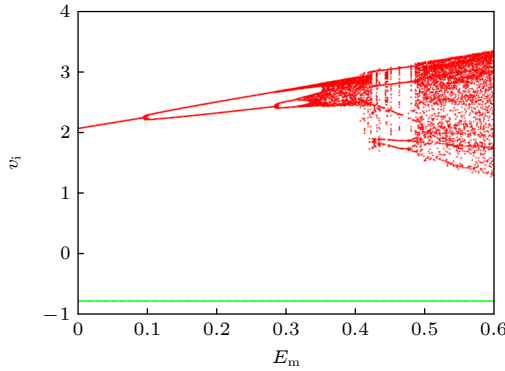


图 10 分数阶系统分岔图, 其中红色 (+) 和绿色 (-) 分别为系统初值取 $(\pm 0.45$ V, 0 V, 0 V, 0 V)

Fig. 10. Bifurcation diagram of fractional order system, where red (+) and green (-) represent system initial values of $(\pm 0.45$ V, 0 V, 0 V, 0 V).

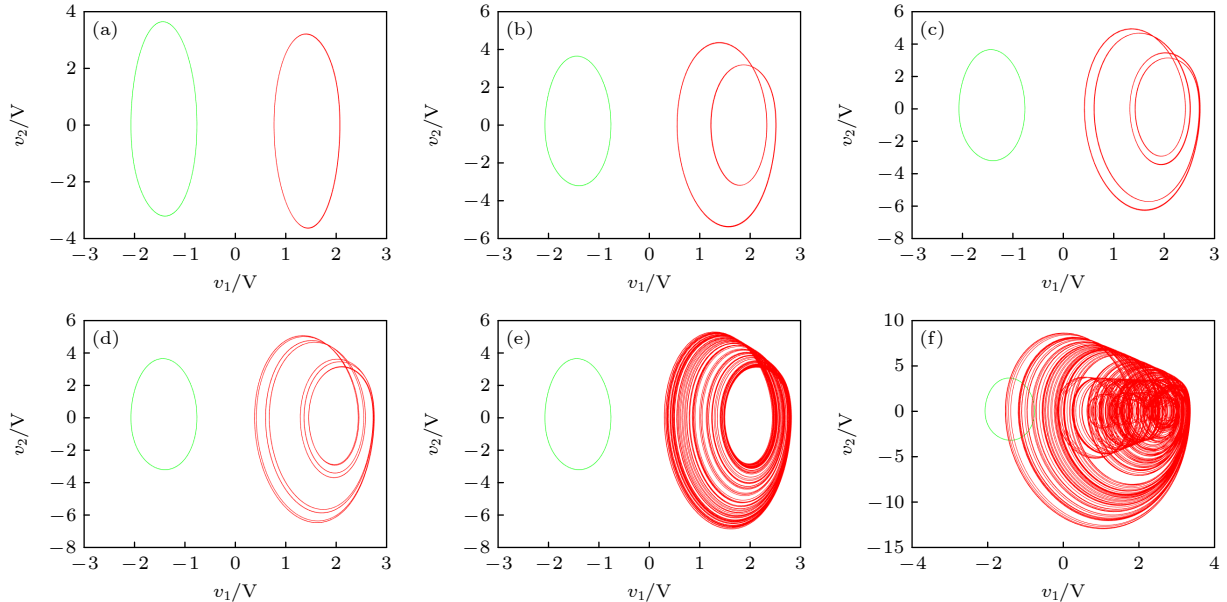


图 11 不同偏置电压 E_m 下, 分数阶系统由周期到混沌相图, 其中红色 (+) 和绿色 (-) 分别为系统初值取 $(\pm 0.45$ V, 0 V, 0 V, 0 V)

Fig. 11. Phase diagram of fractional order systems from Period to chaos at different bias voltage E_m , where red (+) and green (-) represent initial values of $(\pm 0.45$ V, 0 V, 0 V, 0 V) for the system: (a) 0 V; (b) 0.2 V; (c) 0.3 V; (d) 0.32 V; (e) 0.4 V; (f) 0.6 V.

$E_m = 0.2$ V 时为双周期态, $E_m = 0.3$ V 时为四周期态, $E_m = 0.32$ V 时为八周期态, 并随后逐渐进入混沌态. 可以看出, 虽然对称性的破坏会对初值为正时的系统有影响, 但并不会对初值为负时的系统产生影响, 验证了上述理论分析的结果.

分数阶模型通过分数阶阶次的引入增加了系统的灵活性和自由度. 为了讨论阶次对分数阶非齐次忆阻混沌电路性能的影响, 取与 4.1.3 节中相同的电路参数, 当 $E_m = 0.4$ V, 初值为 $(\pm 0.45$ V, 0 V, 0 V, 0 V) 时, 系统随阶次 q_1 变化的分岔图如图 13 所示, 可知阶次也会对系统产生影响. 当初值为正时, 系统同样随着阶次的改变, 从周期态由倍周期分岔进入混沌态; 当初值为负时, 系统始终处于周期态, 但随着阶次的上升, 电压 v_1 缓慢下降. 同时, 为了探索初值变化时, 系统周期与混沌共存的稳态分布, 以初值 $v_1(0)$ 与 $v_3(0)$ 为变量, 系统的吸引盆如图 14 所示, 其中左边黄色代表周期态, 右边蓝色代表混沌态.

4.2 忆阻混沌电路的仿真研究

4.2.1 整数阶忆阻混沌电路

图 15 为整数阶忆阻混沌电路实现原理图, 电路中的二极管型号选择为 1N4148, 运算放大器的型号为 TL084, 系统的参数设置与数值仿真时相

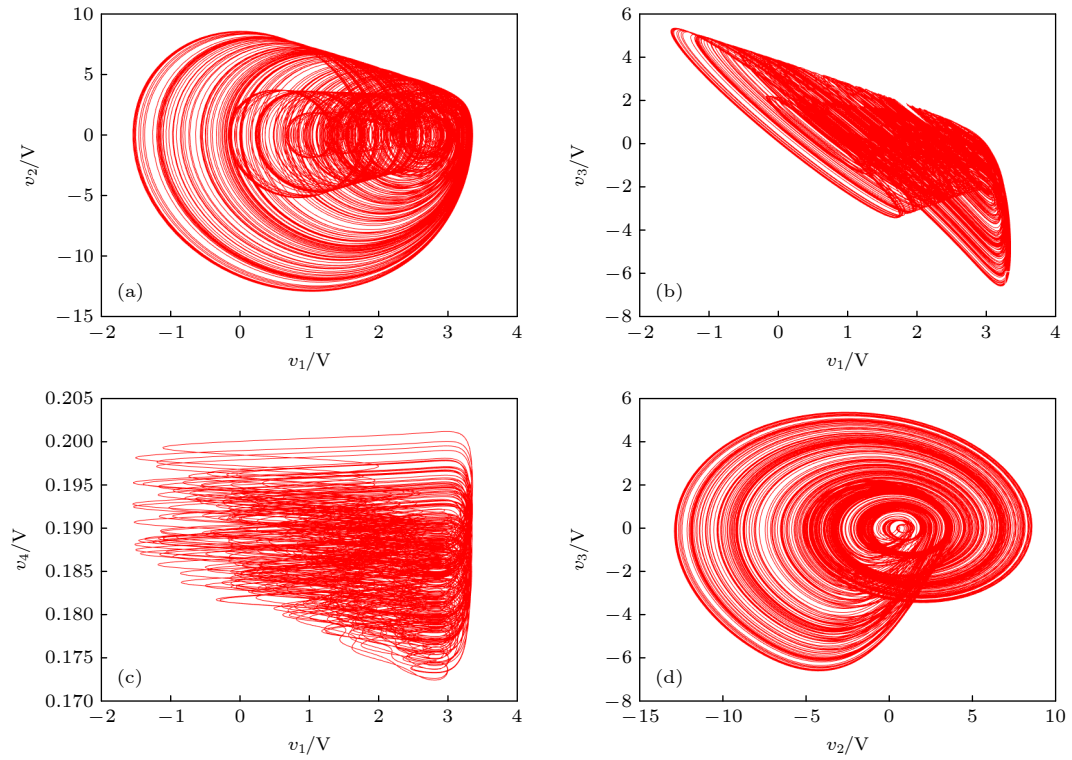

 图 12 分数阶系统各平面相图 (a) v_1-v_2 ; (b) v_1-v_3 ; (c) v_1-v_4 ; (d) v_2-v_3

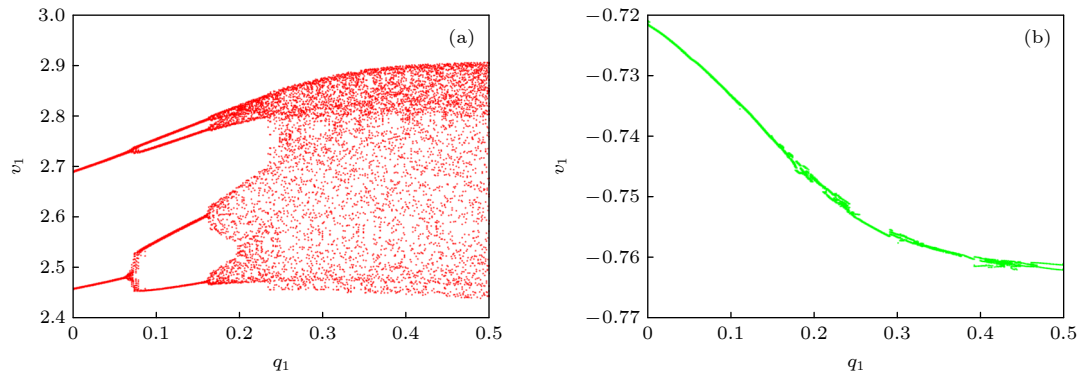
 Fig. 12. Phase diagrams of fractional order systems in various planes: (a) v_1-v_2 ; (b) v_1-v_3 ; (c) v_1-v_4 ; (d) v_2-v_3 .


图 13 系统随阶次变化分岔图 (a) 系统初值为 (0.45 V, 0 V, 0 V, 0 V); (b) 系统初值为 (-0.45 V, 0 V, 0 V, 0 V)

Fig. 13. Bifurcation diagram of system with order variation: (a) Initial value of the system is (0.45 V, 0 V, 0 V, 0 V); (b) initial value of the system is (-0.45 V, 0 V, 0 V, 0 V).

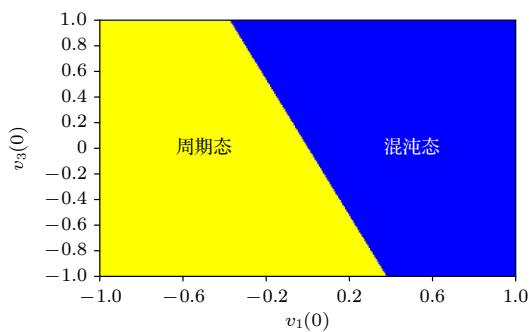


图 14 含有偏置电压源的分数阶系统吸引盆

Fig. 14. Fractional order system suction basin with bias voltage source.

同. 仿真所得电路由周期态进入混沌态相图与各平面相图如图 16 和图 17 所示, 结果与数值仿真基本一致.

4.2.2 分数阶忆阻混沌电路等效实现

实现分数阶非齐次忆阻混沌电路, 需要建立分数阶电容的等效电路模型. 采用 Oustaloup 滤波算法计算分数阶模块的传递函数, 然后将传递函数化为零极点形式, 从而等效实现. 图 18 为分数阶电容的实际等效电路图, 通过该模型可以得到分数阶电容等效电路表达式:

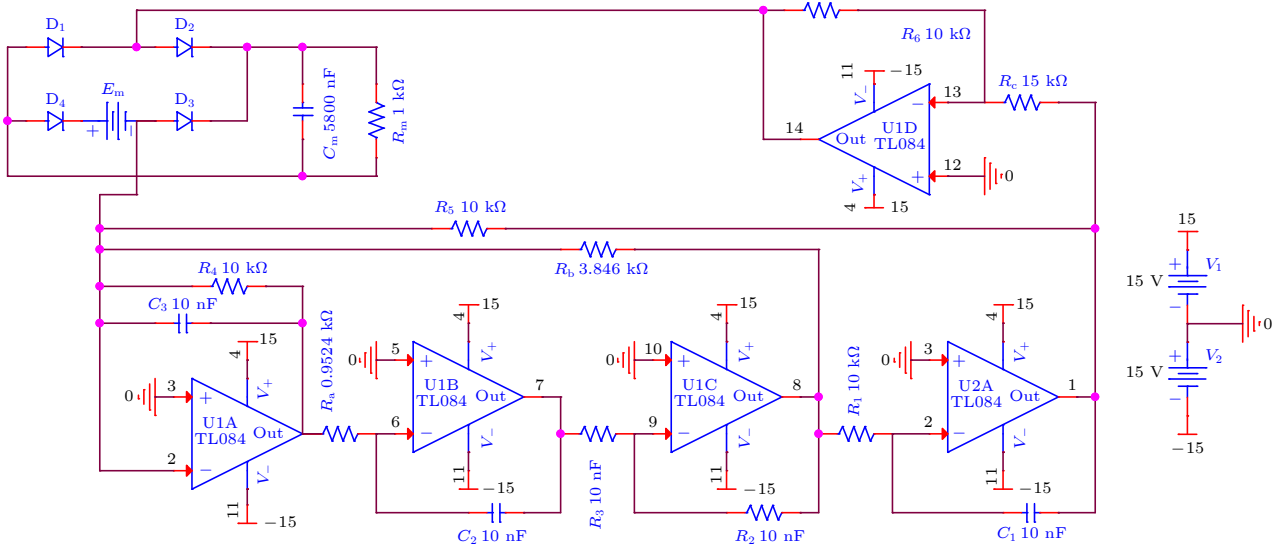


图 15 整数阶系统电路仿真原理图

Fig. 15. Schematic diagram of integer order system circuit simulation.

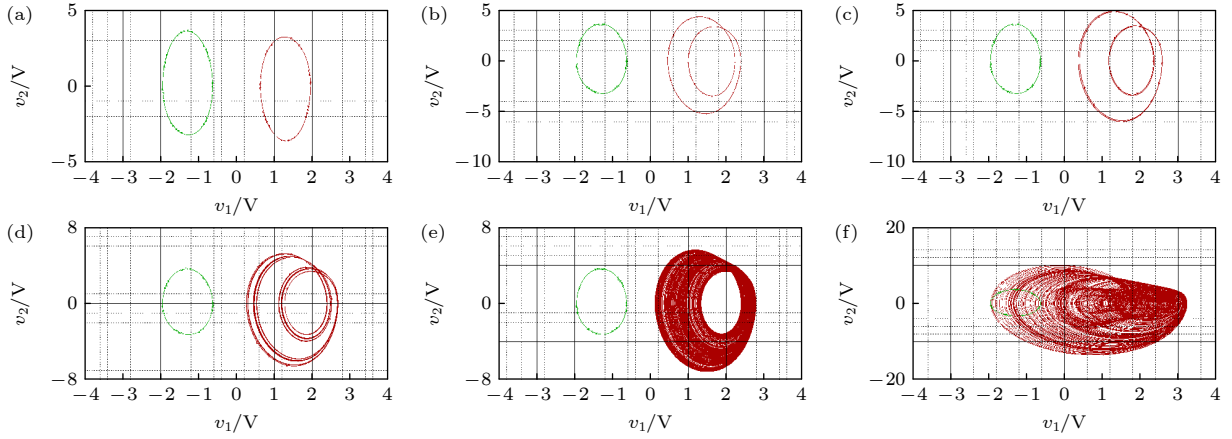

 图 16 不同偏置电压 E_m 下, 整数阶系统电路仿真由周期到混沌相图, 其中红色 (+) 和绿色 (-) 分别为系统初值取 $(\pm 0.45 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V})$ (a) 0 V; (b) 0.2 V; (c) 0.3 V; (d) 0.32 V; (e) 0.35 V; (f) 0.6 V

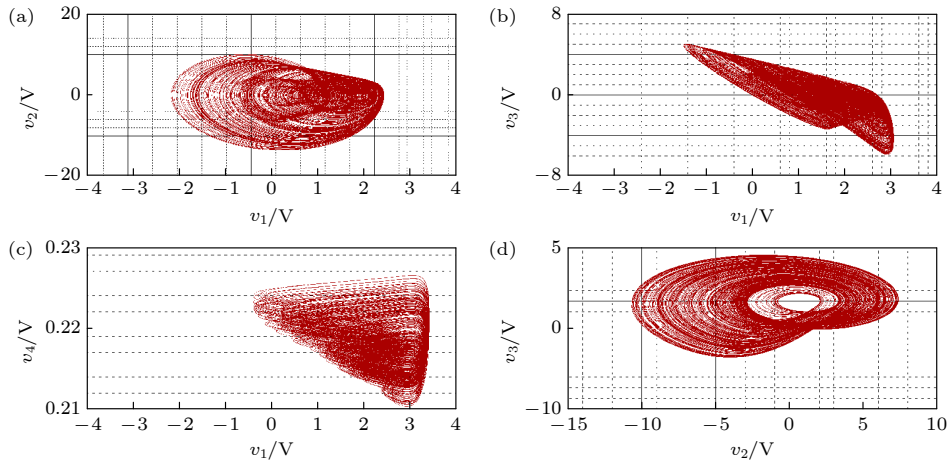
 Fig. 16. Circuit simulation of integer order system from period to chaos phase diagram at different bias voltage E_m , where red (+) and green (-) represent initial values of $(\pm 0.45 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V})$ for the system: (a) 0 V; (b) 0.2 V; (c) 0.3 V; (d) 0.32 V; (e) 0.35 V; (f) 0.6 V.

 图 17 整数阶系统电路仿真各平面相图 (a) v_1-v_2 ; (b) v_1-v_3 ; (c) v_1-v_4 ; (d) v_2-v_3

 Fig. 17. Fractional order system circuit simulation phase diagrams of each plane: (a) v_1-v_2 ; (b) v_1-v_3 ; (c) v_1-v_4 ; (d) v_2-v_3 .

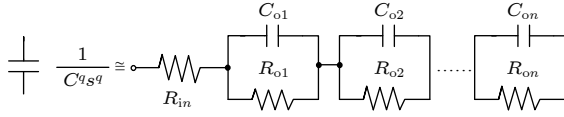


图 18 分数阶电容等效电路

Fig. 18. Fractional order capacitor equivalent circuit.

$$\frac{1}{C^q s^q} = R_{in} + \sum_{k=1}^n \frac{1/C_{ok}}{(s + 1/R_{ok}C_{ok})}. \quad (13)$$

当阶次 $q_1 = 0.98$, $q_2 = 0.99$, 且近似阶数 $n = 5$ 时, 近似的线性传递函数为

$$F_{0.98}(s) = \frac{s^5 + 9.5 \times 10^5 s^4 + 3.579 \times 10^9 s^3 + 5.367 \times 10^{10} s^2 + 3.204 \times 10^9 s + 7.586 \times 10^5}{4.4 s^5 + 1.858 \times 10^4 s^4 + 3.113 \times 10^5 s^3 + 2.076 \times 10^4 s^2 + 5.51 s + 5.8 \times 10^{-6}}, \quad (14)$$

$$F_{0.99}(s) = \frac{s^5 + 9.766 \times 10^5 s^4 + 3.782 \times 10^9 s^3 + 5.831 \times 10^{10} s^2 + 3.579 \times 10^9 s + 8.71 \times 10^5}{0.00871 s^5 + 35.79 s^4 + 583.1 s^3 + 37.82 s^2 + 0.009766 s + 1 \times 10^{-8}}. \quad (15)$$

根据 (13) 式可以计算出分数阶电容的具体参数值. 当分数阶电容 $C_m^{q_1}$ 与 $C_2^{q_2}$ 的分数阶阶次分别为 $q_1 = 0.98$, $q_2 = 0.99$ 时, 可以得到相应的分数阶电容的等效电路参数值, 见表 2 和表 3. 通过对分

数阶电容的电路建模 (图 18) 以及对分数阶电容等效电路中电容值和电阻值的求解 (表 2 和表 3), 依据图 18 中的等效电路模型在 PSpice 软件中搭建分数阶电容, 其电路原理图见图 19.

 表 2 分数阶电容 $C_m^{q_1}$ 和 $C_2^{q_2}$ 的等效电阻参数

 Table 2. Equivalent resistance parameters of fractional capacitor $C_m^{q_1}$ and $C_2^{q_2}$.

	R_{in}/Ω	R_{o1}/Ω	$R_{o2}/(10^3 \Omega)$	$R_{o3}/(10^5 \Omega)$	$R_{o4}/(10^9 \Omega)$	$R_{o5}/(10^5 \Omega)$
$C_m^{q_1} = 5.8 \times 10^3 \text{ nF}$	0.2273	5.327	1.203	2.705	1.158	1.209
$C_2^{q_2} = 10 \text{ nF}$	114.8	1461	348.7	828.9	730.0	837.3

 表 3 分数阶电容 $C_m^{q_1}$ 和 $C_2^{q_2}$ 的等效电容参数

 Table 3. Equivalent capacitance parameters of fractional capacitance $C_m^{q_1}$ and $C_2^{q_2}$.

	$C_{o1}/(10^{-7} \text{ F})$	$C_{o2}/(10^{-7} \text{ F})$	$C_{o3}/(10^{-7} \text{ F})$	$C_{o4}/(10^{-8} \text{ F})$	$C_{o5}/(10^{-5} \text{ F})$
$C_m^{q_1} = 5.8 \times 10^3 \text{ nF}$	446.2	496.3	554.3	647.8	6200
$C_2^{q_2} = 10 \text{ nF}$	1.672	1.760	1.860	1.057	9.214

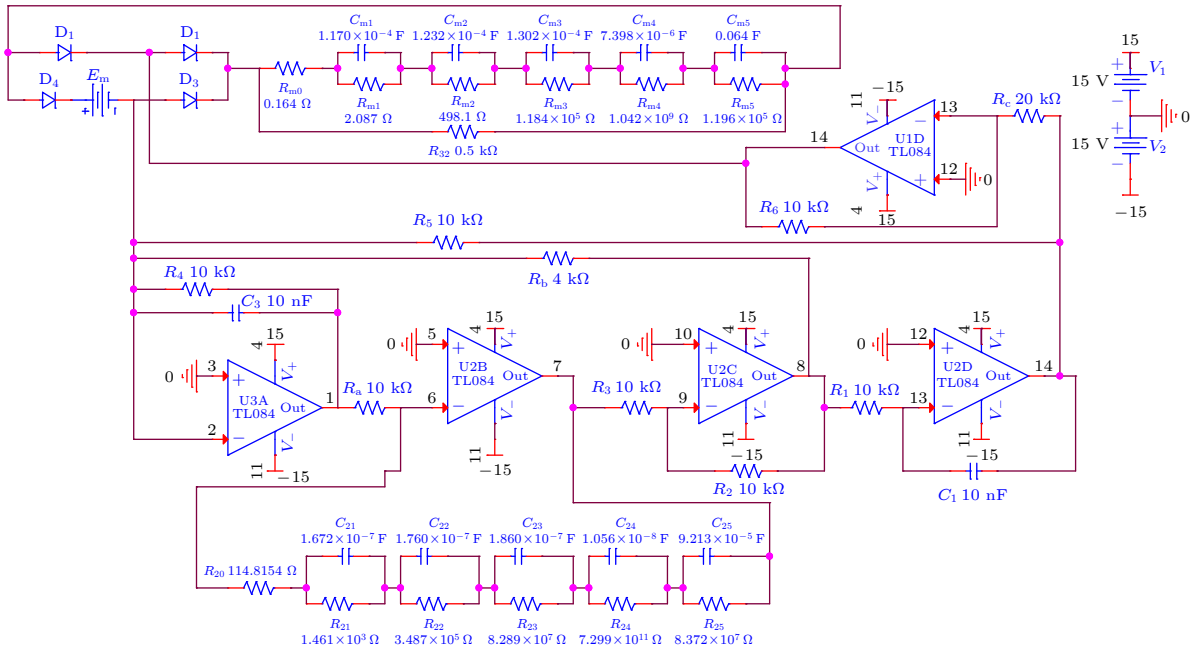


图 19 分数阶系统电路仿真原理图

Fig. 19. Schematic diagram of fractional order system circuit simulation.

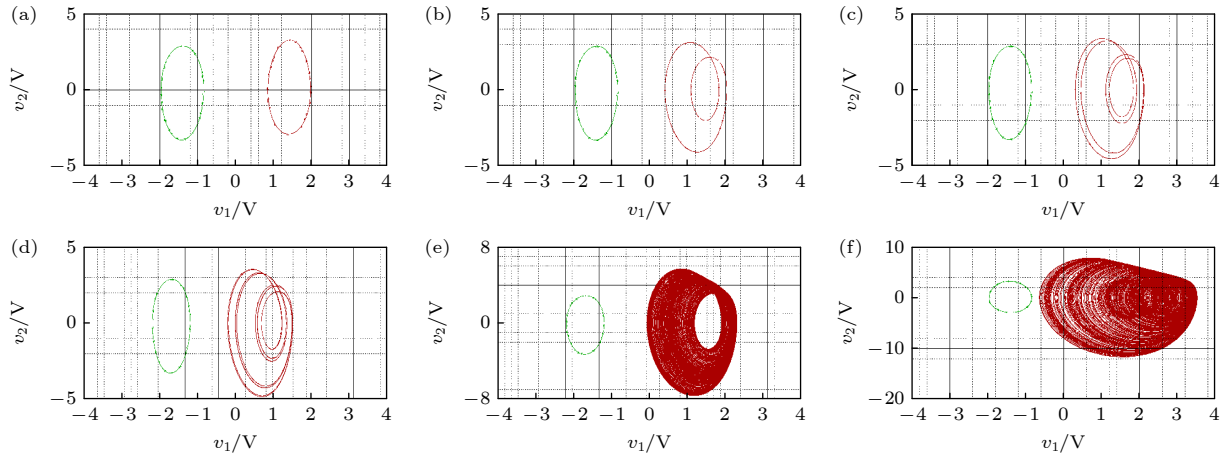


图 20 不同偏置电压 E_m 下, 分数阶系统由周期到混沌电路仿真相图, 其中红色 (+) 和绿色 (-) 分别为系统初值取 $(\pm 0.45 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V})$ (a) 0 V; (b) 0.2 V; (c) 0.3 V; (d) 0.32 V; (e) 0.4 V; (f) 0.6 V

Fig. 20. Simulation phase diagram of fractional order system from period to chaos circuit at different bias voltage E_m , where red (+) and green (-) represent initial values of $(\pm 0.45 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V})$ for the system: (a) 0 V; (b) 0.2 V; (c) 0.3 V; (d) 0.32 V; (e) 0.4 V; (f) 0.6 V.

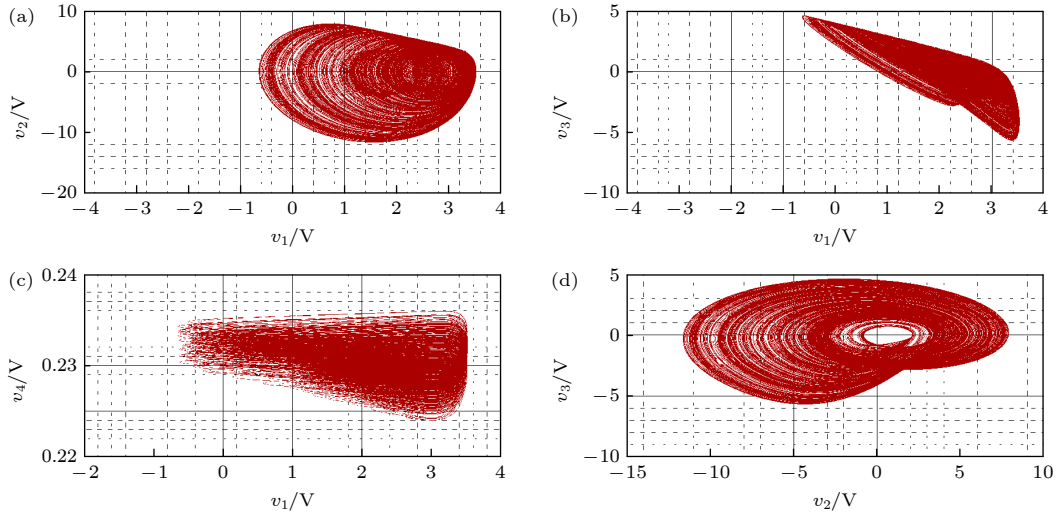


图 21 分数阶系统电路仿真各平面相图 (a) v_1-v_2 ; (b) v_1-v_3 ; (c) v_1-v_4 ; (d) v_2-v_3

Fig. 21. Fractional order system circuit simulation phase diagrams of each plane: (a) v_1-v_2 ; (b) v_1-v_3 ; (c) v_1-v_4 ; (d) v_2-v_3 .

通过电路仿真, 可以得到分数阶非齐次忆阻混沌电路的相图, 如图 20 和图 21 所示. 图中显示了分数阶混沌系统从周期态到混沌态的演变, 以及混沌态时各平面的相图. 通过对比图 16(f) 与图 20(f) 相图可以看出, 由于受到电容阶次的影响, 系统混沌态相图的混沌区域明显减小. 从仿真结果发现, 分数阶电路仿真的结果与数值仿真的结果基本一致, 从而验证了理论分析的正确性.

5 电路实验

本文选择 NI 设备进行混沌系统的硬件实现, 其实验原理与实验平台如图 22 所示. 设备与电脑

通过以太网进行通讯, LabVIEW 软件采用的是模块化编程. 其中, 分数阶实验对分数阶微积分方程进行了近似, 实现了分数阶微积分的基本算子, 即分数阶积分和导数运算. 在 NI LabVIEW 软件中搭建好离散混沌系统模型后, 进行编译. 通过探头将接口连接到示波器上观察系统的相图, 得到的整数阶混沌系统, 如图 23 和图 24 所示. 分数阶混沌系统相图, 如图 25 和图 26 所示. 当 $E_m = 0 \text{ V}$ 时, 整数阶系统与分数阶系统都为单周期共存, 并随着 E_m 的增大, 正初值时系统逐渐进入混沌, 而负初值时系统不受偏置电压 E_m 的影响. 实验所得相图与数值仿真, 电路仿真相吻合, 进一步证明了理论的正确性.

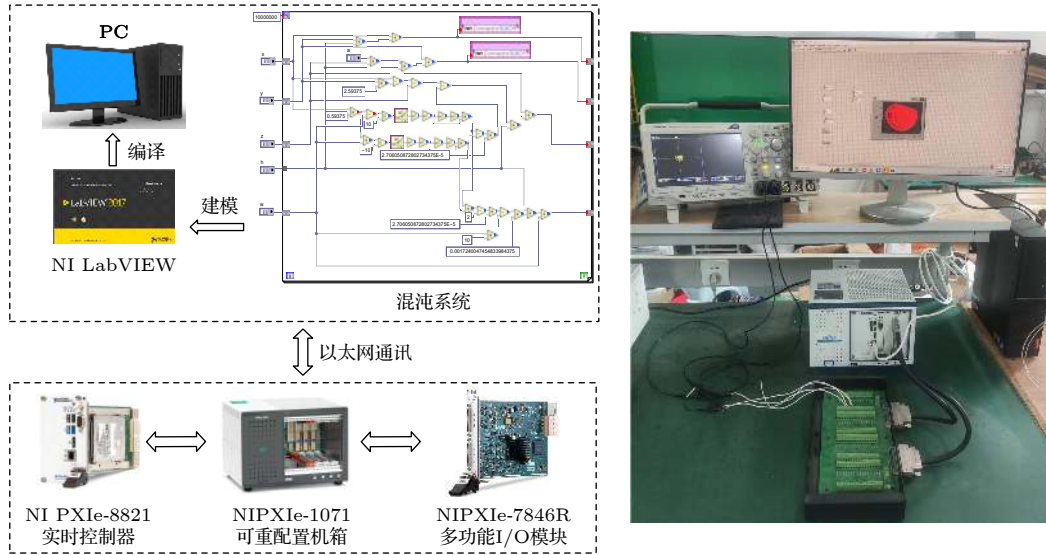
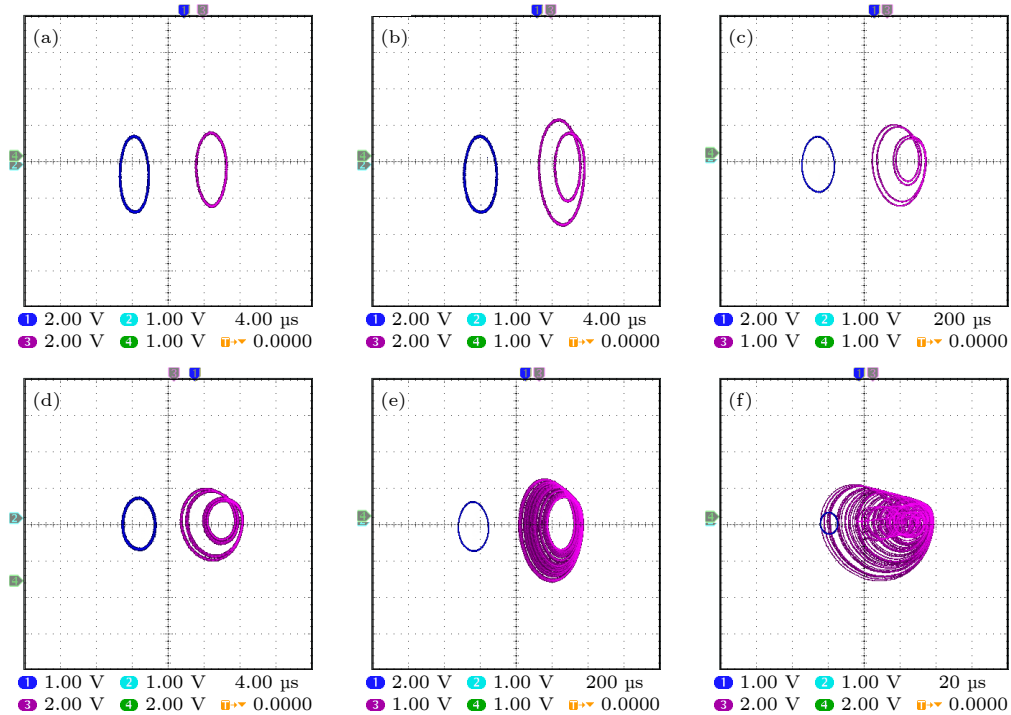


图 22 混沌系统实验原理图及实验平台

Fig. 22. Schematic diagram and experimental platform of integer order system experiment.

图 23 不同偏置电压 E_m 下, 整数阶实验由周期进入混沌相图, 其中粉色 (+) 与蓝色 (-) 分别代表系统初值为 $(\pm 0.45 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V})$ (a) 0 V ; (b) 0.2 V ; (c) 0.3 V ; (d) 0.32 V ; (e) 0.35 V ; (f) 0.6 V Fig. 23. Integer order experiment from period to chaotic phase diagram at different bias voltage E_m , where pink (+) and blue (-) represent system initial values of $(\pm 0.45 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V})$, respectively: (a) 0 V ; (b) 0.2 V ; (c) 0.3 V ; (d) 0.32 V ; (e) 0.35 V ; (f) 0.6 V .

6 结 论

忆阻器作为一种重要的非线性元件, 因其独特性能具有巨大的应用潜力. 由于分数阶微积分对实际电路的描述更加准确, 本文提出了一种新型含有

偏置电压源的分数阶忆阻器模型, 通过对其数学模型的仿真研究, 可知分数阶忆阻器的磁滞回线的对称性可以随着偏置电压源 E_m 的值调整. 然后结合 Jerk 振荡器, 构建了一种含有偏置电压源的分数阶非齐次忆阻混沌电路. 结合分岔图与相图等

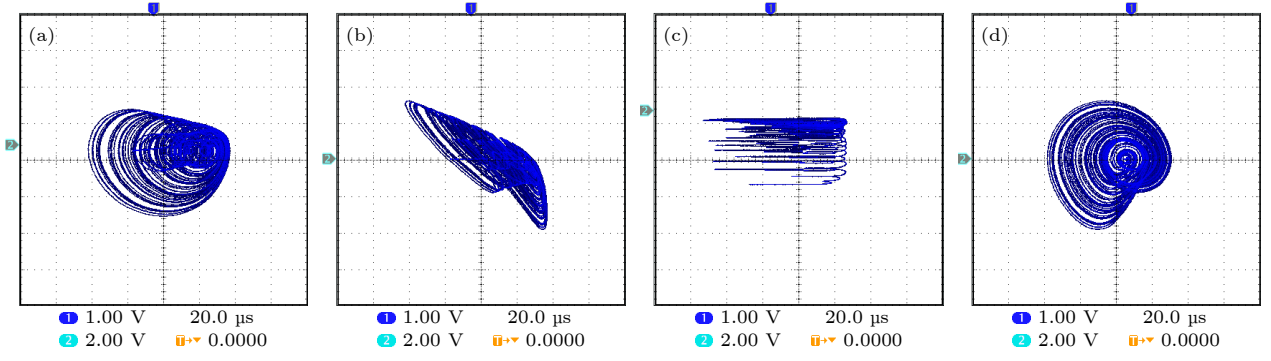

 图 24 整数阶实验各平面相图 (a) v_1-v_2 ; (b) v_1-v_3 ; (c) v_1-v_4 ; (d) v_2-v_3

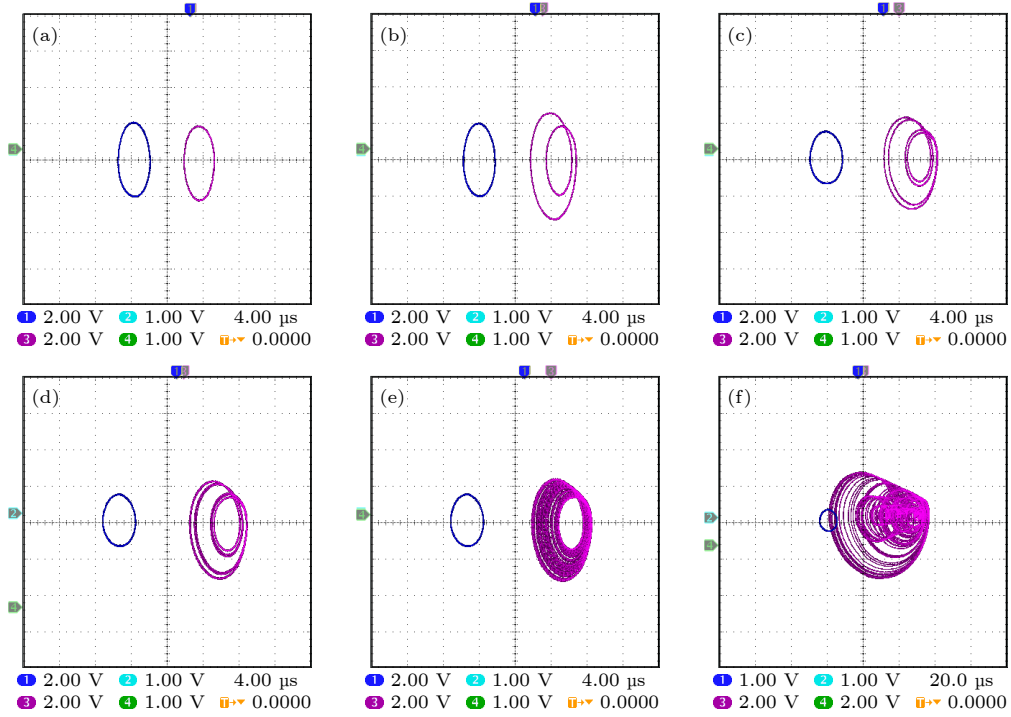
 Fig. 24. Phase diagrams of various planes in integer order experiments: (a) v_1-v_2 ; (b) v_1-v_3 ; (c) v_1-v_4 ; (d) v_2-v_3 .

 图 25 不同偏置电压 E_m 下, 分数阶实验由周期进入混沌相图, 其中粉色 (+) 与蓝色 (-) 分别代表系统初值为 $(\pm 0.45 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V})$ (a) 0 V; (b) 0.2 V; (c) 0.3 V; (d) 0.32 V; (e) 0.35 V; (f) 0.6 V

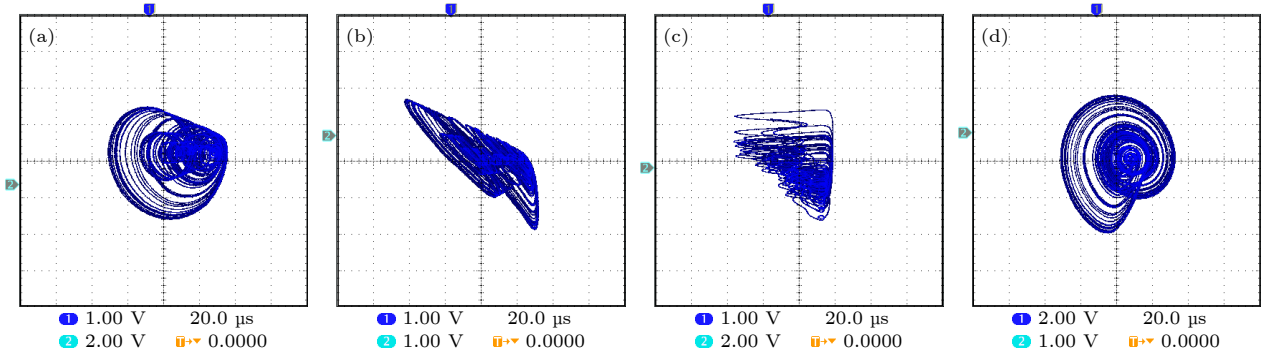
 Fig. 25. Integer order experiment from period to chaotic phase diagram at different bias voltage E_m , where pink (+) and blue (-) represent system initial values of $(\pm 0.45 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V}, 0 \text{ V})$, respectively: (a) 0 V; (b) 0.2 V; (c) 0.3 V; (d) 0.32 V; (e) 0.35 V; (f) 0.6 V.

 图 26 分数阶实验各平面相图 (a) v_1-v_2 ; (b) v_1-v_3 ; (c) v_1-v_4 ; (d) v_2-v_3

 Fig. 26. Fractional order experiment phase diagrams of each plane: (a) v_1-v_2 ; (b) v_1-v_3 ; (c) v_1-v_4 ; (d) v_2-v_3 .

手段, 分析了 E_m 对系统的影响. 结果表明, 随着 E_m 的改变, 初值为正时, 整数阶与分数阶系统都会呈现倍周期分岔进入混沌的动力学行为; 但在初值为负时, 系统不受偏置电压的影响. 随后, 建立了分数阶电容等效电路模型, 在 PSpice 中进行了分数阶非齐次忆阻混沌电路的电路仿真, 其结果与数值仿真分析基本一致. 最后, 在 NI 设备上完成了整数阶与分数阶混沌系统的硬件实验. 验证了理论分析的正确性, 拓展了模拟物理忆阻器不对称磁滞回线的相关理论.

参考文献

- [1] Chua L O 1971 *IEEE Trans. Circuit. Theory* **18** 507
- [2] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, Williams R S 2008 *Nature* **453** 80
- [3] Wen S P, Wei H Q, Yan Z, Guo Z Y, Yang, Y, Huang T W, Chen Y R 2019 *IEEE Trans. Netw. Sci. Eng.* **7** 1431
- [4] Liu S J, Wang Y Z, Fardad M, Varshney P K 2018 *IEEE Circ. Syst. Mag.* **18** 29
- [5] Yao P, Wu H Q, Gao B, Tang J S, Zhang Q T, Zhang W Q, Yang J J, Qian H 2020 *Nature* **577** 641
- [6] Bao H, Bao B C, Lin Y, Wang J, Wu H G 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 180501 (in Chinese) [包涵, 包伯成, 林毅, 王将, 武花干 2016 物理学报 **65** 180501]
- [7] Zheng G C, Liu C X, Wang Y 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 050502 (in Chinese) [郑广超, 刘崇新, 王琰 2018 物理学报 **67** 050502]
- [8] Li C B, Wang R, Ma X, Jiang Y C, Liu Z H 2021 *Chin. Phys. B* **30** 201
- [9] Qing M H, Lai Q, Wu Y H 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 160502 (in Chinese) [秦铭宏, 赖强, 吴永红 2022 物理学报 **71** 160502]
- [10] Chen M, Ren X, Wu H G, Xu Q, Bao B C 2019 *Front. Inform. Tech. El.* **20** 1706
- [11] Wu H G, Ye Y, Chen M, Xu Q, Bao B C 2019 *IEEE Access* **7** 145022
- [12] Wang N, Zhang G S, Kuznetsov N V, Bao H 2021 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **92** 105494
- [13] Wu H G, Bao B C, Liu Z, Xu Q, Jiang P 2016 *Nonlinear Dyn.* **83** 893
- [14] Yu Y J, Wang Z H 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 238401 (in Chinese) [俞亚娟, 王在华 2015 物理学报 **64** 238401]
- [15] Ramakrishnan B, Durdu A, Rajagopal K, Akgul A 2020 *AEU-Int. J. Electron. Commun.* **123** 153319
- [16] Kengne J, Tabekoueng Z N, Tamba V K, Negou A N 2015 *Chaos* **25** 103126
- [17] Hu W P, Wang Z, Zhao Y P, Deng Z C 2020 *Appl. Math. Lett.* **103** 106207
- [18] Kengne L K, Kengne J, Telem N A K, Pone J R M 2021 *J. Circuit. Syst. Comp.* **30** 2150077
- [19] Kengne J, Mogue R L T, Fozin T F, Telem A N K 2019 *Chaos Solitons Fractals* **121** 63
- [20] Cao H, Seoane J M, Sanjuán M A F 2007 *Chaos Solitons Fractals* **34** 197
- [21] Kengne L K, Pone J R M, Tagne H T K, Kengne J 2020 *AEU-Int. J. Electron. Commun.* **118** 153146
- [22] Wu H, Zhou J, Chen M, Xu Q, Bao B C 2022 *Chaos, Solitons Fractals* **154** 111624
- [23] Yang N N, Xu C, Wu C J, Jia R, Liu C X 2018 *Nonlinear Dyn.* **97** 33

Dynamic analysis and experiment of chaotic circuit of non-homogeneous fractional memristor with bias voltage source^{*}

Wu Chao-Jun¹⁾ Fang Li-Yi^{1)†} Yang Ning-Ning²⁾

1) (*Xi'an Key Laboratory of Interconnected Sensing and Intelligent Diagnosis for Electrical Equipment,
School of Electronic Information, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China*)

2) (*School of Electrical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China*)

(Received 26 July 2023; revised manuscript received 12 September 2023)

Abstract

A physical memristor has an asymmetric tight hysteresis loop. In order to simulate the asymmetric tight hysteresis curve of the physical memristor more conveniently, a fractional-order diode bridge memristor model with a bias voltage source is proposed in this paper, which can continuously regulate the hysteresis loop. Firstly, based on fractional calculus theory, a fractional order model of a diode bridge memristor with a bias voltage source is established, and its electrical characteristics are analyzed. Secondly, by integrating it with the Jerk chaotic circuit, a non-homogeneous fractional order memristor chaotic circuit model with a bias voltage source is established, and the influence of bias voltage on its system dynamic behavior is studied. Once again, a fractional-order equivalent circuit model is built in PSpice and validated through circuit simulation. The experimental results are basically consistent with the numerical simulation results. Finally, the experiments on the circuit are completed in LabVIEW to validate the correctness and feasibility of the theoretical analysis. The results indicate that the fractional order memristor with bias voltage source can continuously obtain asymmetric tight hysteresis loop by adjusting the voltage of the bias voltage source. As the bias power supply voltage changes, the non-homogeneous fractional order memristor chaotic system exhibits that the period doubling bifurcation turns into chaos due to the symmetry breaking.

Keywords: memristor, chaotic circuit, fractional calculus, circuit experiment

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.73.20231211

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51507134) and the Natural Science Foundation of Shaanxi Province, China (Grant Nos. 2018JM5068, 2021JM-449).

[†] Corresponding author. E-mail: 3148130199@qq.com

含有偏置电压源的非齐次分数阶忆阻混沌电路动力学分析与实验研究

吴朝俊 方礼熠 杨宁宁

Dynamic analysis and experiment of chaotic circuit of non-homogeneous fractional memristor with bias voltage source

Wu Chao-Jun Fang Li-Yi Yang Ning-Ning

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 010501 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20231211

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231211>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

新型忆阻器神经形态电路的设计及其在条件反射行为中的应用

Design of novel memristor-based neuromorphic circuit and its application in classical conditioning

物理学报. 2019, 68(23): 238501 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191023>

基于忆阻器的多涡卷混沌系统及其脉冲同步控制

Memristor-based multi-scroll chaotic system and its pulse synchronization control

物理学报. 2018, 67(11): 110502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180025>

五阶压控忆阻蔡氏混沌电路的双稳定性

Bi-stability in a fifth-order voltage-controlled memristor-based Chua's chaotic circuit

物理学报. 2018, 67(23): 230502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181283>

具有经验学习特性的忆阻器模型分析

Analysis of memristor model with learning-experience behavior

物理学报. 2019, 68(19): 198502 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190808>

N型局部有源忆阻器的神经形态行为

Neuromorphic behaviors of N-type locally-active memristor

物理学报. 2022, 71(5): 050502 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212017>

蛋白质基忆阻器研究进展

Research progress of protein-based memristor

物理学报. 2020, 69(17): 178702 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200617>