基于 Rényi-α 熵的参数化纠缠度量*

戴伟鹏 贺衎† 侯晋川

(太原理工大学数学学院, 太原 030024)

(2023 年 9 月 15 日收到; 2023 年 11 月 1 日收到修改稿)

与各种非参数化纠缠度量相比, 参数化纠缠度量显示了其优越性. 并发纠缠被广泛用于描述量子实验中的纠缠. 作为一种纠缠度量, 它与特定 Rényi-α 熵有关. 本文提出了一种基于 Rényi-α 熵的参数化两体纠缠度量, 命名为 α-对数并发纠缠. 与现有的参数化度量不同, 首先定义了纯态的度量, 然后推广到混合态. 进一步验证了 α-对数并发纠缠满足纠缠度量 3 个条件. 展示了对纯态的度量是容易计算的, 然而对于混合态, 解析计算只适用于特殊的双量子位态或特殊的高维混合态. 因此, 本文致力于建立一般两体态 α-对数并发纠缠的一个下界. 令人惊讶的是, 这个下界是这个混合态的正部分转置判据和重排判据的函数. 这表明了 3 种纠缠度量之间的联系. 有趣的是, 下界依赖于与具体态相关的熵参数. 这样我们可以选择适当的参数 α, 使得 $G_\alpha(\boldsymbol{\rho}) \gg 0$ 用于特定态 $\boldsymbol{\rho}$ 的实验纠缠检测. 此外, 计算了 isotropic 态的 α-对数并发纠缠的表达式, 并给出了 $d=2$ 时 isotropic 态的解析表达式. 最后, 讨论了 α-对数并发纠缠的的单配性. 建立了两个量子比特系统中并发纠缠和 α-对数并发纠缠之间的函数关系, 然后得到了该函数的一些有用性质, 并结合 Coffman-Kundu-Wootters (CKW) 不等式, 建立了关于 α-对数并发纠缠的单配性不等式. 最终证明了单配性不等式对于 α-对数并发纠缠是成立的.

关键词： 参数化度量, Rényi-α 熵, 纠缠度量, 并发纠缠

PACS： 03.67.–a, 03.67.Mn **DOI:** 10.7498/aps.73.20231503

1 引 言

近年来, 围绕量子纠缠这一课题展开了大量的研究, 对量子信息理论产生了深远的影响. 量子纠缠在量子密集编码[1]、量子隐形传态[2]、量子密钥共享[3]、量子密码[4]等量子计算和量子信息中起着不可或缺的作用. 如何验证一个量子复合系统态是纠缠态还是可分态是量子信息理论的一个基本问题. 对于一般的混合态, 这仍然是未解决的问题. 到目前为止, 两体纠缠有两个重要的纠缠判据. 一种是正偏转置 (PPT) 判据[5], 这个判据描述了对于任意可分的两体态 $\boldsymbol{\rho}_{\rm AB}$, 它的偏转置矩阵满足 $\boldsymbol{\rho}^{T_{\rm A}} \geqslant 0$. 正偏转置判据只是纯态和 $2\otimes 2$ 或者 $2\otimes 3$ 混合态的纠缠判据的充要条件, 但一般而言, 对于更高的维度是不充分的[5,6]. 另一种是重排判据[7–9], 即对任意可分的两体态 $\boldsymbol{\rho}_{\rm AB}$, 它的重排矩阵 $\mathcal{R}(\boldsymbol{\rho})$ 满足 $\|\mathcal{R}(\boldsymbol{\rho})\|_1 \leqslant 1$, 其中 $\|\boldsymbol{X}\|_1$ 表示矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的迹范数, $\|\boldsymbol{X}\|_1 = {\rm tr}(\sqrt{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\dagger})$. 这两个纠缠判据在量子信息理论中得到了广泛的应用.

纠缠度量的关键是度量一个纠缠量子系统可以利用多少资源, 这对量子信息的定量研究具有重要意义. 对于两体系统, 常见的纠缠度量有: 并发纠缠[10–12]、负性纠缠[13,14]、生成纠缠[15,16]、Rényi-α 熵纠缠[17,18]、Tsallis-q 熵纠缠[19]、robustness 纠缠[20]等. 对于任意的纯态 $|\psi\rangle_{\rm AB}$, 并发纠缠可表示为 $C(|\psi\rangle_{\rm AB}) = \sqrt{2(1-{\rm tr}\boldsymbol{\rho}_{\rm A}^2)}$, 其中 $\boldsymbol{\rho}_{\rm A} = {\rm tr}_{\rm B}\,|\psi\rangle\langle\psi|$. 近年来, 通过并发纠缠, 参数化纠缠测度问题被广泛

* 国家自然科学基金 (批准号: 12271394, 12071336) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hekanquantum@163.com

研究[21–23]. 杨雪等[21]提出当$q \geqslant 2$时的参数化单调纠缠量 q-并发纠缠, 它与一般的 Tsallis-q 熵有关, 并且通过联系 PPT 判据和重排判据来刻画它的解析下界. 魏志伟等[22]将 q-并发纠缠的解析下界刻画得更紧致. 此外, 魏志伟和费少明[23]受 Tsallis-q 熵纠缠和参数化单调纠缠量 q-并发纠缠的启发, 对于任意的$0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$, 提出了一种新的参数化纠缠度量, 命名为 α-并发纠缠, 并且研究了它的性质, 刻画了其解析下界. 本文将提出一种参数化纠缠度量, 命名为 α-对数并发纠缠.

此外, 用解析方法计算任意给定混合态的纠缠度是非常困难的. 目前, 只适用于特殊度量和双量子位态或特殊的高维混合态[12,24–28]. 因此, 寻找纠缠度量的解析下界具有重要意义. 如在文献 [29–33] 中, 通过联系 PPT 判据和重排判据, 给出了并发纠缠的解析下界. 本文的一个目标是构造 α-对数并发纠缠的解析下界. 第 2 节给出 α-对数并发纠缠的定义, 然后证明它是一个良好的纠缠度量; 第 3 节根据 PPT 判据和重排判据, 得到一般两体系统 α-对数并发纠缠的解析下界; 第 4 节计算了 isotropic 态的 α-对数并发纠缠; 第 5 节研究 α-对数并发纠缠的单配性问题.

2 α-对数并发纠缠

在量子系统中, 对于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_{\rm A} \otimes \mathcal{H}_{\rm B}$ 中的任意纯态 $|\psi\rangle$, 并发纠缠 (concurrence) 定义为

$$C(|\psi\rangle) = \sqrt{2(1-{\rm tr}\boldsymbol{\rho}_{\rm A}^2)},$$

其中, $\boldsymbol{\rho}_{\rm A}$ 为子系统 A 的约化密度算子, $\boldsymbol{\rho}_{\rm A} = {\rm tr}_{\rm B}|\psi\rangle\langle\psi|$. 纯态的并发纠缠与特定的 Rényi-$\alpha$ 熵有关, 即当 $\alpha=2$ 时, $C(|\psi\rangle) = \sqrt{2\left(1-2^{-R_2(\boldsymbol{\rho}_{\rm A})}\right)}$, 其中 $R_2(\boldsymbol{\rho}_{\rm A})$ 表示 $\alpha=2$ 时的 Rényi-α 熵, $R_2(\boldsymbol{\rho}_{\rm A}) = -\log_2{\rm tr}(\boldsymbol{\rho}_{\rm A}^2)$. 接下来, 定义另一个参数化纠缠度量并命名为 α-对数并发纠缠, 对于 $\alpha \geqslant 2$, 它与一般的 Rényi-α 熵有关.

$\mathcal{H}_{\rm A} \otimes \mathcal{H}_{\rm B}$ 是任意 $d \times d$ 维的 Hilbert 空间, 任意定义在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_{\rm A} \otimes \mathcal{H}_{\rm B}$ 上的纯态 $|\psi\rangle$ 可以表示为 Schmidt 分解:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sqrt{\lambda_i}\,|a_ib_i\rangle, \tag{1}$$

其中 λ_i 表示 Schmit 系数的平方, 且 $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$, m 是 Schmit 数, $1 \leqslant m \leqslant d$. $\{|a_i\rangle\}$ 和 $\{|b_i\rangle\}$ 是与子系统 A 和 B 相关联的规范正交列[34].

定义 2.1 对于任意的纯态 $|\psi\rangle$, α-对数并发纠缠可以被定义为

$$G_\alpha(|\psi\rangle) = -\log_2{\rm tr}(\boldsymbol{\rho}_{\rm A}^\alpha), \tag{2}$$

对任意的 $\alpha \geqslant 2$, 其中 $\boldsymbol{\rho}_{\rm A} = {\rm tr}_{\rm B}|\psi\rangle\langle\psi|$ 是约化密度算子.

根据上面的定义, 对于任意的纯态 $|\psi\rangle$ 通过 Schmidt 分解, 可以得到

$$G_\alpha(|\psi\rangle) = -\log_2\sum_{i=1}^m \lambda_i^\alpha, \tag{3}$$

其中, $G_\alpha(|\psi\rangle)$ 满足 $0 \leqslant G_\alpha(|\psi\rangle) \leqslant -\log_2 m^{1-\alpha}$. 当且仅当 $|\psi\rangle$ 是可分态时下界可以得到, 当最大纠缠纯态 $\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^m|a_ib_i\rangle$ 时, 上界可以得到.

定义 2.2 对于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_{\rm A} \otimes \mathcal{H}_{\rm B}$ 中的一般的混合态 $\boldsymbol{\rho}_{\rm AB}$, 可以通过凸顶的形式对 α-对数并发纠缠进行定义:

$$G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB}) = \inf_{\{p_i,|\psi_i\rangle\}}\sum_i p_iG_\alpha(|\psi_i\rangle), \tag{4}$$

其中下界取遍 $\boldsymbol{\rho}_{\rm AB} = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ 所有可能的纯态分解, 且 $\sum_i p_i = 1$, $p_i > 0$.

令 $\mathcal{D}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_{\rm A} \otimes \mathcal{H}_{\rm B}$ 上的一个两体态的集合. 一个良好定义的纠缠度量 E 应该满足以下基本条件[35–37]:

1) $E(\boldsymbol{\rho}) \geqslant 0$ 对于任意态 $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{D}$, 当且仅当 $\boldsymbol{\rho}$ 为可分态时等号成立;

2) $E(\boldsymbol{\rho})$ 在局部酉变换下是不变的, 即 $E(\boldsymbol{\rho}) = E\left(U_{\rm A}\otimes U_{\rm B}\boldsymbol{\rho}U_{\rm A}^\dagger\otimes U_{\rm B}^\dagger\right)$;

3) 在局部操作与经典通信 (LOCC) 下 $E(\boldsymbol{\rho})$ 是不增的, 即对任意的 LOCC $\varLambda$ $E(\boldsymbol{\rho}) \geqslant E(\varLambda(\boldsymbol{\rho}))$.

定理 2.1 α-对数并发纠缠 $G_\alpha(\boldsymbol{\rho})$ 由**定义 2.2** 给出的形式, 是一个纠缠度量.

证明 需要验证 $G_\alpha(\boldsymbol{\rho})$ 满足纠缠度量定义的 3 个条件.

1) 由**定义 2.1** 可以得到 $G_\alpha(|\psi\rangle) \geqslant 0$, 再通过 $G_\alpha(\boldsymbol{\rho})$ 的凸顶形式, 根据定义可以得到 $G_\alpha(\boldsymbol{\rho}) \geqslant 0$. 如果 $\boldsymbol{\rho}$ 是一个纠缠态, 那么在 $\boldsymbol{\rho}$ 的任意纯态分解中, 至少存在一个纠缠纯态 $|\psi\rangle$, 那么至少有一个 $G_\alpha(|\psi_i\rangle) > 0$, 再根据 $G_\alpha(\boldsymbol{\rho})$ 的凸顶形式, 可以得到 $G_\alpha(\boldsymbol{\rho}) > 0$. 因此, $G_\alpha(\boldsymbol{\rho}) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\rho}$ 是可分态.

2) 由 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\rho}^{\alpha})$ 的酉不变性, 可知 $G_{\alpha}(|\psi\rangle)$ 是局部酉不变的, 再根据 $G_{\alpha}(\boldsymbol{\rho})$ 的凸顶形式, 可以得到 $G_{\alpha}\left(\boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}\otimes\boldsymbol{U}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}^{\dagger}\otimes\boldsymbol{U}_{\mathrm{B}}^{\dagger}\right)=G_{\alpha}(\boldsymbol{\rho})$.

3) Mintert 等[38] 证明了在 LOCC 条件下, 可以从态 $|\psi\rangle$ 开始制备态 $|\phi\rangle$ 当且仅当 $\boldsymbol{\lambda}_{\psi}\prec\boldsymbol{\lambda}_{\phi}$. $\boldsymbol{\lambda}_{\psi}$ 表示由态 $|\psi\rangle$ 的 Schmit 系数的平方按降序给出的 Schmit 向量. $\boldsymbol{\lambda}_{\psi}\prec\boldsymbol{\lambda}_{\phi}$ 表示 $\boldsymbol{\lambda}_{\psi}$ 被 $\boldsymbol{\lambda}_{\phi}$ 优化. 由于在 LOCC 下纠缠度量是不增的, 当 $\boldsymbol{\lambda}_{\psi}\prec\boldsymbol{\lambda}_{\phi}$ 时, 任意纠缠度量 E 必须满足 $E(\psi)\geqslant E(\phi)$. 在文献 [39] 中, 这种条件被称为 Schur 凹. E 作为 Schmidt 系数的平方 λ_i 的函数是 Schur 凹的, 当且仅当满足下面两个条件:

1) E 在任意两个元的置换下是不变的;

2) 对于 $\boldsymbol{\lambda}$ 的任意两个分量 λ_i 和 λ_j, 满足

$$(\lambda_i-\lambda_j)\left(\frac{\partial E}{\partial\lambda_i}-\frac{\partial E}{\partial\lambda_j}\right)\leqslant 0. \tag{5}$$

接下来, 只需验证 $G_{\alpha}(\boldsymbol{\rho})$ 是 Schur 凹的即可得到 $G_{\alpha}(\boldsymbol{\rho})$ 在 LOCC 下是不增的. 所以, 需要验证上述两个条件. 首先, 对任意纯态 $|\psi\rangle$, 当 $\boldsymbol{\lambda}$ 中的任意两个 Schmidt 系数的平方 λ_i 和 λ_j 置换时, α-对数并发纠缠 $G_{\alpha}(\boldsymbol{\rho})$ 是不变的. 所以验证了条件 1). 一个简单的计算表明:

$$\begin{aligned}&(\lambda_i-\lambda_j)\left(\frac{\partial G_{\alpha}}{\partial\lambda_i}-\frac{\partial G_{\alpha}}{\partial\lambda_j}\right)\\&=-\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{\sum\lambda_i^{\alpha}}\alpha(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i^{\alpha-1}-\lambda_j^{\alpha-1})\leqslant 0.\end{aligned} \tag{6}$$

对 $\boldsymbol{\lambda}$ 中的任意两个 Schmidt 系数的平方 λ_i 和 λ_j 都成立. 当 $\alpha\geqslant 2$ 时, $(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_i^{\alpha-1}-\lambda_j^{\alpha-1})\geqslant 0$, 所以可以直接验证 (6) 式的不等式成立. 根据上述条件, 可以得到:

$$G_{\alpha}(|\psi\rangle)\geqslant G_{\alpha}(\Lambda|\psi\rangle). \tag{7}$$

对任意的 LOCC 和 $\alpha\geqslant 2$. 有一个纯态分解 $\rho=\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ 关于 $G_{\alpha}(\boldsymbol{\rho})$, 其中, $\sum_i p_i=1$, $p_i>0$, 可以得到:

$$\begin{aligned}G_{\alpha}(\boldsymbol{\rho})&=\sum_i p_i G_{\alpha}(|\psi_i\rangle)\\&\geqslant\sum_i p_i G_{\alpha}(\Lambda|\psi_i\rangle)\\&\geqslant G_{\alpha}(\Lambda(\boldsymbol{\rho})).\end{aligned} \tag{8}$$

式中最后一个不等式由 $G_{\alpha}(\boldsymbol{\rho})$ 的凸顶形式的定义得到. 证明完成.

3 α-对数并发纠缠的下界

本节通过使用 PPT 判据和重排判据来推导 α-对数并发纠缠的下界. 一个两体态可以写成 $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}}=\sum_{ijkl}\rho_{ij,kl}|ij\rangle\langle kl|$ 的形式, i 和 k 是子系统 A 的行和列下标, j 和 l 是子系统 B 的行和列下标. PPT 判据[5,6]: 如果态 $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}}$ 是可分的, 则对 A 系统的偏转置 $\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T_A}}$ 是非负的, 即 $\boldsymbol{\rho}^{T_{\mathrm{A}}}\geqslant 0$, 偏转置矩阵为

$$\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T_A}}=\left(\sum_{ijkl}\rho_{ij,kl}|ij\rangle\langle kl|\right)^{\mathrm{T_A}}=\sum_{ijkl}\rho_{ij,kl}|kj\rangle\langle il|.$$

重排判据[7–9]: 重排矩阵为

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\rho})=\sum_{ijkl}\boldsymbol{\rho}_{ij,kl}|ik\rangle\langle jl|.$$

如果态 ρ_{AB} 是可分的, 则 $\|\mathcal{R}(\boldsymbol{\rho})\|_1\leqslant 1$, 其中 $\|\boldsymbol{X}\|_1$ 表示矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的迹范数, $\|\boldsymbol{X}\|_1=\mathrm{tr}(\sqrt{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\dagger}})$.

对于一个纯态 $|\psi\rangle$ 可以写成 Schmit 分解的形式, 然后可得纯态 $\boldsymbol{\rho}=|\psi\rangle\langle\psi|=\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}|a_ib_i\rangle\langle a_jb_j|$, $\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T_A}}=\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}|a_j^*b_i\rangle\langle a_i^*b_j|$ 和 $\mathcal{R}(\boldsymbol{\rho})=\sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}|a_ia_j^*\rangle\langle b_i^*b_j|$, 在文献 [30] 中, 可以得到下面结论:

$$1\leqslant\|\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T_A}}\|_1=\|\mathcal{R}(\boldsymbol{\rho})\|_1=\left(\sum_{i=1}^{m}\sqrt{\lambda_i}\right)^2\leqslant m. \tag{9}$$

定理 3.1 对于 $\mathcal{H}_{\mathrm{A}}\otimes\mathcal{H}_{\mathrm{B}}$ 上维数分别为 m 和 n $(m\leqslant n)$ 的任意混合纠缠态 $\boldsymbol{\rho}$, α-对数并发纠缠 $G_{\alpha}(\boldsymbol{\rho})$ 满足下面不等式:

$$G_{\alpha}(\boldsymbol{\rho})\geqslant\frac{\left[\max\left\{\sqrt{\|\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}},\sqrt{\|\mathcal{R}(\boldsymbol{\rho})\|_1^{\alpha-1}}\right\}-1\right]^2}{m^{\alpha-1}-\sqrt{m^{\alpha-1}}}. \tag{10}$$

证明 设 $\boldsymbol{\rho}=\sum_i p_i\rho_i$ 是 $G_{\alpha}(\boldsymbol{\rho})$ 一个最优分解, 其中 ρ_i 是纯态, $\rho_i=|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. 首先证明

$$G_{\alpha}(\rho_i)\geqslant\frac{\left(\sqrt{\|\rho_i^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}}-1\right)^2}{m^{\alpha-1}-\sqrt{m^{\alpha-1}}}, \tag{11}$$

$$G_{\alpha}(\rho_i)\geqslant\frac{\left(\sqrt{\|\mathcal{R}(\rho_i)\|_1^{\alpha-1}}-1\right)^2}{m^{\alpha-1}-\sqrt{m^{\alpha-1}}}. \tag{12}$$

从文献 [21] 和文献 [40] 可以得到下面的不等式:

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^{\alpha}\geqslant m^{1-\alpha},\tag{13}$$

其中 $\lambda\in(0,1)$，$\alpha\geqslant 2$. 由 $G_\alpha(|\psi\rangle)=-\log_2\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{\alpha}$ 可以得到:

$$\begin{aligned}G_\alpha(\rho_i)&=-\log_2\sum_{k=1}^{m}\lambda_{ik}^{\alpha}\\&=1-\log_2\sum_{k=1}^{m}\lambda_{ik}^{\alpha}-\log_2 2\\&=1-\log_2 2\sum_{k=1}^{m}\lambda_{ik}^{\alpha}.\end{aligned}\tag{14}$$

令 $x=2\sum_{k=1}^{m}\lambda_{ik}^{\alpha}$，则 $x\in(0,2)$. 由 $\sqrt{x/2}>\log_2 x$ 可以得到:

$$G_\alpha(\rho_i)\geqslant 1-\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\lambda_{ik}^{\alpha}}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\lambda_{ij}}\right)^{2\alpha-2}}-\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\lambda_{ik}^{\alpha}\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\lambda_{ij}}\right)^{2\alpha-2}}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\lambda_{ij}}\right)^{2\alpha-2}}}\\&\geqslant\frac{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\lambda_{ij}}\right)^{2\alpha-2}}-1}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\lambda_{ij}}\right)^{2\alpha-2}}}\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{\left[\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\lambda_{ij}}\right)^{2\alpha-2}}-1\right]^2}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\lambda_{ij}}\right)^{2\alpha-2}}\left[\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\lambda_{ij}}\right)^{2\alpha-2}}-1\right]}\\&\geqslant\frac{\left(\sqrt{\|\rho_i^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}}-1\right)^2}{m^{\alpha-1}-\sqrt{m^{\alpha-1}}}.\end{aligned}\tag{17}$$

这里, 不等式 (16) 来自不等式:

$$-\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\lambda_{ik}^{\alpha}\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\lambda_{ij}}\right)^{2\alpha-2}}\geqslant -1.$$

利用不等式 (13) 和 $\left(\sum_{k=1}^{m}\sqrt{\lambda_i}\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{m}\lambda_i=m$ 可以证明该式. 此外, 对于纯态 $\rho_i=|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$，有 $\|\rho_i^{\mathrm{T_A}}\|_1=\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\lambda_{ij}}\right)^2\leqslant m$. 结合不等式 (17) 可以得到:

$$\sum_i p_iG_\alpha(\rho_i)\geqslant\frac{\sum_i p_i\left(\sqrt{\|\rho_i^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}}-1\right)^2}{m^{\alpha-1}-\sqrt{m^{\alpha-1}}}.\tag{18}$$

接下来需要证明

$$\left(\sqrt{\|\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}}-1\right)^2\leqslant\sum_i p_i\left(\sqrt{\|\rho_i^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}}-1\right)^2.\tag{19}$$

事实上, 对于 $\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T_A}}=\sum_i p_i\rho_i^{\mathrm{T_A}}$，可以得到:

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{\|\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}}-1\right)^2\\&=\left(\sqrt{\left\|\sum_i p_i\rho_i^{\mathrm{T_A}}\right\|_1^{\alpha-1}}-1\right)^2\\&\leqslant\left(\sqrt{\sum_i p_i\|\rho_i^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}}-1\right)^2\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}&=\sum_i p_i\|\rho_i^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}-2\sqrt{\sum_i p_i\|\rho_i^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}}+1\\&\leqslant\sum_i p_i\|\rho_i^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}-2\sum_i p_i\sqrt{\|\rho_i^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}}+1\end{aligned}\tag{21}$$

$$=\sum_i p_i\left(\sqrt{\|\rho_i^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}}-1\right)^2,\tag{22}$$

不等式 (20) 是由于函数 $f(x)=\|x\|_1^{\alpha-1}$ 的凸性, $\alpha\geqslant 2$. 不等式 (21) 则是基于函数 $f(x)=-\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$ 的凸性, 即

$$-2\sqrt{\sum_i p_i\|\rho_i^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}}\leqslant -2\sum_i p_i\sqrt{\|\rho_i^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}}.$$

因此, 将不等式 (22) 代入不等式 (18), 可得:

$$\sum_i p_iG_\alpha(\rho_i)\geqslant\frac{\left(\sqrt{\|\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}}-1\right)^2}{m^{\alpha-1}-\sqrt{m^{\alpha-1}}}.\tag{23}$$

根据 (9) 式, 即

$$\|\rho_i^{\mathrm{T_A}}\|_1=\|\mathcal{R}(\rho_i)\|_1=\left(\sum_{i=1}^{m}\sqrt{\lambda_i}\right)^2.$$

用类似的方法可以证明

$$\sum_i p_iG_\alpha(\rho_i)\geqslant\frac{\left(\sqrt{\|\mathcal{R}(\boldsymbol{\rho})\|_1^{\alpha-1}}-1\right)^2}{m^{\alpha-1}-\sqrt{m^{\alpha-1}}}.\tag{24}$$

结合不等式 (23) 和不等式 (24), 可得

$$G_\alpha(\boldsymbol{\rho}) \geqslant \frac{\left[\max\left\{\sqrt{\|\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T_A}}\|_1^{\alpha-1}}, \sqrt{\|\mathcal{R}(\boldsymbol{\rho})\|_1^{\alpha-1}}\right\} - 1\right]^2}{m^{\alpha-1} - \sqrt{m^{\alpha-1}}}. \tag{25}$$

至此完成了该定理的证明.

4 α-对数并发纠缠关于 isotropic 态

Isotropic 态 $\boldsymbol{\rho}_F$ 可以表示为

$$\boldsymbol{\rho}_F = \frac{1-F}{d^2-1}\left(I - |\varPsi^+\rangle\langle\varPsi^+|\right) + F|\varPsi^+\rangle\langle\varPsi^+|, \tag{26}$$

其中, $|\varPsi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{i=1}^d |ii\rangle$ 是最大纠缠纯态, I 是恒等算子, F 表示 $\boldsymbol{\rho}_F$ 关于 $|\varPsi^+\rangle$ 的保真度, $F = f_{\varPsi^+}(\boldsymbol{\rho}_F) = \langle\varPsi^+|\boldsymbol{\rho}_F|\varPsi^+\rangle$, $F\in[0,1]$. 当 $F \leqslant 1/d$ 时, $\boldsymbol{\rho}_F$ 是可分的, 且对任意酉变换 $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{\rho}_F$ 在运算 $\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{U}^*$ 下是不变的.

定理 4.1 给出 isotropic 态 $\boldsymbol{\rho}_F$ 在 $\mathbb{C}^d\otimes\mathbb{C}^d$ $(d\geqslant 2)$ 上的 α-对数并发纠缠 $G_\alpha(\boldsymbol{\rho})$:

$$G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_F) = co\left(\eta(F,\alpha,d)\right), \tag{27}$$

其中, $F\in(1/d,1]$, $co\left(\eta(F,\alpha,d)\right)$ 表示给定函数 $\eta(F,\alpha,d)$ 上界的最大凸函数.

$$\eta(F,\alpha,d) = -\log_2\left(\gamma^{2\alpha} + (d-1)\delta^{2\alpha}\right), \tag{28}$$

其中,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{d}}\left[\sqrt{F} + \sqrt{(d-1)(1-F)}\right],$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{d}}\left(\sqrt{F} - \frac{\sqrt{1-F}}{\sqrt{d-1}}\right).$$

证明 下面利用文献 [26, 41, 42] 中的相关方法给出这个定理的证明. 对称态 $\boldsymbol{\rho}_F$ 下的 G_α 由下式给出:

$$G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_F) = co(\eta(F,\alpha,d)),$$

其中函数 $\eta(F,\alpha,d)$ 可定义为

$$\eta(F,\alpha,d) = \inf\{G_\alpha(|\psi\rangle) | f_{\varPsi^+}(|\psi\rangle) = F, \mathrm{rank}(\rho_\psi) \leqslant d\}. \tag{29}$$

通过 Schmit 分解可以得到

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i}\,|a_i b_i\rangle = (\boldsymbol{U}_\mathrm{A}\otimes\boldsymbol{U}_\mathrm{B})\sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i}\,|ii\rangle.$$

通过直接计算可以得到

$$f_{\varPsi^+}(|\psi\rangle) = \frac{1}{d}\left|\sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i}v_{ii}\right|^2,$$

其中, $V = \boldsymbol{U}_\mathrm{A}^\mathrm{T}\boldsymbol{U}_\mathrm{B}$, $v_{ij} = \langle i|V|j\rangle$. 容易得到 $F\in(0,1/d]$ 时 $\eta(F,\alpha,d)$ 的值. 通过选择合适的 $\boldsymbol{U}_\mathrm{A}$ 和 $\boldsymbol{U}_\mathrm{B}$, 总可以令 $\lambda_1 = 1$, 从而得到 $\eta(F,\alpha,d) = 0$. 对于 $F\in(1/d,1]$, 通过使用拉格朗日乘子法[25], 可以最小化 $G_\alpha(|\psi\rangle)$, 约束条件为

$$\sum_i \lambda_i = 1, \tag{30}$$

$$\sum_i \sqrt{\lambda_i} = \sqrt{Fd}, \tag{31}$$

其中 $Fd\geqslant 1$. 极值的条件由下式给出:

$$(\sqrt{\lambda_i})^{2\alpha-1} + \varLambda_1(\sqrt{\lambda_i}) + \varLambda_2 = 0, \tag{32}$$

其中 $\varLambda_1$, $\varLambda_2$ 表示拉格朗日乘子. 对任意的 $\alpha\geqslant 2$, $f(\sqrt{\lambda_i}) = (\sqrt{\lambda_i})^{2\alpha-1}$ 是关于 $\sqrt{\lambda_i}$ 的凸函数. 我们知道一个凸函数和一个线性函数至多在两点上相交, 因此方程 (32) 至多有两个非零解. 令 γ, δ 表示这两个正解, 则

$$\lambda_j = \begin{cases} \gamma^2, & j = i\cdots n, \\ \delta^2, & j = n+1\cdots n+m, \\ 0, & j = n+m\cdots d, \end{cases} \tag{33}$$

其中 $n+m\leqslant d$, $n\geqslant 1$. 最小化问题已转化为如下问题: $\min G_\alpha(|\psi\rangle)$ 约束条件为

$$n\gamma^2 + m\delta^2 = 1, \tag{34}$$

$$n\gamma + m\delta = \sqrt{Fd}, \tag{35}$$

其中 $G_\alpha(|\psi\rangle) = -\log_2(n\gamma^{2\alpha} + m\delta^{2\alpha})$. 通过求解上述方程, 可以得到:

$$\gamma_{nm}^{\pm}(F) = \frac{n\sqrt{Fd} \pm \sqrt{nm(n+m-Fd)}}{n(n+m)}, \tag{36}$$

$$\delta_{nm}^{\pm}(F) = \frac{m\sqrt{Fd} \mp \sqrt{nm(n+m-Fd)}}{m(n+m)}. \tag{37}$$

观察 (36) 式和 (37) 式可以发现 $\gamma_{mn}^- = \delta_{nm}^+$, $\gamma_{nm}^+ = \gamma_{mn}^-$. 因此, 下面只考虑 $\gamma_{nm} = \gamma_{nm}^+$ 的解. 因为平方根不能为负, 所以可以得到 $Fd\leqslant n+m$. 此外 δ_{nm} 应该是非负的, 这意味着 $Fd\geqslant n$. 容易得到 $\delta_{nm}(F)\leqslant\sqrt{Fd}/(n+m)\leqslant\gamma_{nm}(F)$ $n=0$. 由于 $n=0$ 没有定义, 可以得到 $n\geqslant 1$.

因此, 只需要在 $1\leqslant n\leqslant Fd$ 和 $Fd\leqslant n+m\leqslant d$ 定义的平行四边形区域上最小化 $G_\alpha(|\psi\rangle)$ 即可. 首先, 通过对约束条件做如下微分来计算 γ_{nm} 和关

于 n 和 m 的导数:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma}{\partial n}&=\frac{1}{2n}\frac{2\gamma\delta-\gamma^2}{\gamma-\delta},\\ \frac{\partial\delta}{\partial n}&=-\frac{1}{2m}\frac{\gamma^2}{\gamma-\delta},\\ \frac{\partial\gamma}{\partial m}&=\frac{1}{2n}\frac{\delta^2}{\gamma-\delta},\\ \frac{\partial\delta}{\partial m}&=-\frac{1}{2m}\frac{2\gamma\delta-\gamma^2}{\gamma-\delta}.\end{aligned}\tag{38}$$

接下来, 计算 $G_\alpha(|\psi\rangle)$ 关于 n 和 m 的偏导数:

$$\frac{\partial G_\alpha}{\partial n}=\left[(\alpha-1)\gamma^{2\alpha}-\frac{\alpha\gamma^2\delta(\gamma^{2\alpha-2}-\delta^{2\alpha-2})}{\gamma-\delta}\right]\times\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{n\gamma^{2\alpha}+m\delta^{2\alpha}}\right),\tag{39}$$

$$\frac{\partial G_\alpha}{\partial m}=\left[(\alpha-1)\delta^{2\alpha}-\frac{\alpha\delta^2\gamma(\gamma^{2\alpha-2}-\delta^{2\alpha-2})}{\gamma-\delta}\right]\times\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{n\gamma^{2\alpha}+m\delta^{2\alpha}}\right).\tag{40}$$

容易发现:

$$\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{n\gamma^{2\alpha}+m\delta^{2\alpha}}\right)\geqslant 0.\tag{41}$$

因此, 主要通过分析下面的方程来判断偏导数是正还是负:

$$\left[(\alpha-1)\delta^{2\alpha}-\frac{\alpha\delta^2\gamma\left(\gamma^{2\alpha-2}-\delta^{2\alpha-2}\right)}{\gamma-\delta}\right].\tag{42}$$

通过分析得到:

$$\begin{aligned}&\left[(\alpha-1)\delta^{2\alpha}-\frac{\alpha\delta^2\gamma(\gamma^{2\alpha-2}-\delta^{2\alpha-2})}{\gamma-\delta}\right]\\ &\leqslant(\alpha-1)\delta^{2\alpha}-\alpha\delta^2\gamma(\gamma+\delta) &(43)\\ &\leqslant(\alpha-1)\delta^{2\alpha}-2\alpha\delta^4 &(44)\\ &\leqslant(\alpha-1-2\alpha)\delta^4 &(45)\\ &\leqslant 0, &(46)\end{aligned}$$

不等式 (43) 可由函数 $f(\alpha)=\dfrac{\gamma^{2\alpha-2}-\delta^{2\alpha-2}}{\gamma-\delta}$ (关于 α 的增函数) 得到. 对于任意的 $\alpha\geqslant 2$ 和 $\gamma\geqslant\delta$, 有

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}=\frac{(2\alpha-2)(\gamma^{2\alpha-3}-\delta^{2\alpha-3})}{\gamma-\delta}\geqslant 0,$$

然后就有 $-\dfrac{\gamma^{2\alpha-2}-\delta^{2\alpha-2}}{\gamma-\delta}\leqslant-(\gamma+\delta)$. 不等式 (44) 可以由 $\gamma\geqslant\delta$ 得到验证. 不等式 (45) 是由当 $\alpha\geqslant 2$ 时, $f(\alpha)=\delta^{2\alpha}(\delta<1)$ 是减函数得到的. 最后得到 $\dfrac{\partial G_\alpha}{\partial m}\leqslant 0$. 现在引入两个参数 $u=m-n$ 和 $v=m+n$. 则 $G_\alpha(|\psi\rangle)$ 对 u 的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_\alpha}{\partial u}&=\frac{\partial G_\alpha}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial u}+\frac{\partial G_\alpha}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial u}\\ &=\left[\frac{1}{2}(\alpha-1)(\delta^{2\alpha}-\gamma^{2\alpha})\right.\\ &\quad\left.-\frac{\alpha(\gamma^{2\alpha-2}-\delta^{2\alpha-2})(\delta^2\gamma-\gamma^2\delta)}{2(\gamma-\delta)}\right]\\ &\quad\times\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{n\gamma^{2\alpha}+m\delta^{2\alpha}}\right).\end{aligned}\tag{47}$$

和之前一样主要分析前面的方程:

$$\frac{1}{2}(\alpha-1)(\delta^{2\alpha}-\gamma^{2\alpha})-\frac{\alpha(\gamma^{2\alpha-2}-\delta^{2\alpha-2})(\delta^2\gamma-\gamma^2\delta)}{2(\gamma-\delta)}.\tag{48}$$

通过化简得到:

$$\frac{\gamma^{2\alpha}}{2}\left[1-\alpha+\alpha\frac{\delta}{\gamma}-\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{2\alpha}\left(1-\alpha+\alpha\frac{\delta}{\gamma}\right)\right].\tag{49}$$

设 $t=\delta/\gamma$, $t\in[0,1]$. 记 (49) 式中括号里面的式子为

$$f(t)=1-\alpha+\alpha t-t^{2\alpha}(1-\alpha+\alpha t^{-1}).\tag{50}$$

则 $f(1)=0$. 对 $f(t)$ 求导得到下式:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\alpha\left\{1-[2t^{2\alpha-1}(1-\alpha+\alpha t^{-1})-t^{2\alpha-2}]\right\}.\tag{51}$$

然后, 令

$$g(t)=2t^{2\alpha-1}\left(1-\alpha+\alpha t^{-1}\right)-t^{2\alpha-2}.\tag{52}$$

则 $g(1)=1$. 对 $g(t)$ 求导得到下式:

$$\frac{\partial g}{\partial t}=t^{2\alpha-3}2(2\alpha-1)(t-\alpha t)-(1-\alpha)(4\alpha-2).\tag{53}$$

再令

$$h(t)=2(2\alpha-1)(t-\alpha t)-(1-\alpha)(4\alpha-2),\tag{54}$$

有 $h(1)=0$, 当 $\alpha\geqslant 2$ 时,

$$\frac{\partial h}{\partial t}=2(2\alpha-1)(1-\alpha)\leqslant 0.\tag{55}$$

综上所述, 对于 $t\in[0,1]$, $h(t)$ 是单调递减函数, 因此 $h(t)\geqslant 0$. 可以知道 $\dfrac{\partial g}{\partial t}=t^{2\alpha-3}h(t)$. 因此, 对于 $t\in[0,1]$, $g(t)$ 是单调递增函数, 可以得到 $g(t)$ 的最大值, 即 $\max g(t)=g(1)=1$. 所以, 就有 $\min\dfrac{\partial f}{\partial t}=0$, 得到 $\dfrac{\partial f}{\partial t}\geqslant 0$. 对于任意的 $t\in[0,1]$, 有 $f(t)\leqslant f(1)=0$. 因此,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\alpha-1)(\delta^{2\alpha}-\gamma^{2\alpha})\\ &-\frac{\alpha(\gamma^{2\alpha-2}-\delta^{2\alpha-2})(\delta^2\gamma-\gamma^2\delta)}{2(\gamma-\delta)}\leqslant 0.\end{aligned}\tag{56}$$

因为 $\dfrac{1}{\ln 2}\Big(\dfrac{1}{n\gamma^{2\alpha}+m\delta^{2\alpha}}\Big)\geqslant 0$, 所以 $\dfrac{\partial G_\alpha}{\partial u}\leqslant 0$. 根据上述, $\dfrac{\partial G_\alpha}{\partial m}\leqslant 0$ 和 $\dfrac{\partial G_\alpha}{\partial u}\leqslant 0$. 因为 n, m 是整数, 根据 $\dfrac{\partial G_\alpha}{\partial m}\leqslant 0$, 可以知道 $G_\alpha(|\psi\rangle)$ 是沿着 m 方向递减的. 然后根据 $1\leqslant n\leqslant Fd$ 和 $Fd\leqslant n+m\leqslant d$ 定义的平行四边形, 有最小值在直线 $m+n=d$ 上. 用同样的方法, 根据 $\dfrac{\partial G_\alpha}{\partial u}\leqslant 0$, 得到最小值在直线 $m-n=d-2$ 上. 所以可以得到点 $n=1$, $m=d-1$. 这些结果意味着 $G_\alpha(|\psi\rangle)$ 的最小值出现在 $n=1$ 和 $m=d-1$ 的顶点上. 从而得到 $G_\alpha(|\psi\rangle)$ 的最小值为

$$G_\alpha(|\psi\rangle)=-\log_2[\gamma_{1,d-1}^{2\alpha}+(d-1)\delta_{1,d-1}^{2\alpha}]. \tag{57}$$

通过这种方法, 得到函数 $\eta(F,\alpha,d)$ 的解析表达式为

$$\eta(F,\alpha,d)=-\log_2[\gamma^{2\alpha}+(d-1)\delta^{2\alpha}], \tag{58}$$

其中, γ 和 δ 可以写成

$$\begin{aligned}\gamma&=\frac{1}{\sqrt{d}}\left[\sqrt{F}+\sqrt{(d-1)(1-F)}\right],\\ \delta&=\frac{1}{\sqrt{d}}\left(\sqrt{F}-\frac{\sqrt{1-F}}{\sqrt{d-1}}\right).\end{aligned} \tag{59}$$

至此完成了对定理的证明.

例 4.1 为了方便起见, 以 $d=2$ 为例, 即

$$\eta(F,\alpha,2)=-\log_2(\gamma^{2\alpha}+\delta^{2\alpha}), \tag{60}$$

$$\begin{aligned}\gamma&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{F}+\sqrt{1-F}\right),\\ \delta&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{F}-\sqrt{1-F}\right),\end{aligned} \tag{61}$$

其中 $F\in[1/2,1]$, 可以得到:

$$\begin{aligned}\eta(F,\alpha,2)=&-\log_2\left[\left(1+2\sqrt{F(1-F)}\right)^\alpha\right.\\ &\left.+\left(1-2\sqrt{F(1-F)}\right)^\alpha\right]+\alpha,\end{aligned} \tag{62}$$

根据 $co(\cdot)$ 的定义, 需要计算 $\eta(F,\alpha,2)$ 的二阶导数来判断其性质, 从而给出 $co(\eta(F,\alpha,2))$ 的解析式. 对于二阶导数, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\eta}{\partial F^2}=&B\frac{(A_1^{\alpha-1}-A_2^{\alpha-1})(A_1^\alpha+A_2^\alpha)}{2\sqrt{F(1-F)}}\\ &+B[(2F-1)^2(A_1^{\alpha-1}-A_2^{\alpha-1})\\ &-4(\alpha-1)(2F-1)^{2\alpha-2}],\end{aligned} \tag{63}$$

其中 $A_1=1+2\sqrt{F(1-F)}$, $A_2=1-2\sqrt{F(1-F)}$, $B=\dfrac{\alpha}{4[F(1-F)](A_1^\alpha+A_2^\alpha)^2}$. 由 $A_1^{\alpha-1}$ 和 $A_2^{\alpha-1}$ 的泰勒公式可以得到:

$$\begin{aligned}A_1^{\alpha-1}=&\left(1+2\sqrt{F(1-F)}\right)^{\alpha-1}\\ =&1+(\alpha-1)2\sqrt{F(1-F)}\\ &+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}\left[2\sqrt{F(1-F)}\right]^2+P_1,\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}A_2^{\alpha-1}=&\left(1-2\sqrt{F(1-F)}\right)^{\alpha-1}\\ =&1-(\alpha-1)2\sqrt{F(1-F)}\\ &+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}\left[2\sqrt{F(1-F)}\right]^2+P_2.\end{aligned} \tag{65}$$

余项可记作:

$$P_1=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}{k!}\left[2\sqrt{F(1-F)}\right]^k, \tag{66}$$

$$P_2=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}{k!}\left[-2\sqrt{F(1-F)}\right]^k. \tag{67}$$

通过 (66) 式和 (67) 式可以知道 P_1-P_2 和 P_1+P_2 是非负的. 然后可以得到下面的结果:

$$\begin{aligned}A_1^{\alpha-1}-A_2^{\alpha-1}&=2(\alpha-1)\left[2\sqrt{F(1-F)}\right]+P_1-P_2\\ &\geqslant 2(\alpha-1)\left[2\sqrt{F(1-F)}\right],\\ A_1^{\alpha-1}+A_2^{\alpha-1}&=2+P_1+P_2\geqslant 2.\end{aligned} \tag{68}$$

现在记

$$\begin{aligned}\varDelta_1&=\frac{(A_1^{\alpha-1}-A_2^{\alpha-1})(A_1^\alpha+A_2^\alpha)}{2\sqrt{F(1-F)}},\\ \varDelta_2&=(2F-1)^2(A_1^{\alpha-1}-A_2^{\alpha-1})^2.\end{aligned}$$

根据不等式 (68), 有

$$\varDelta_1\geqslant 4(\alpha-1),\quad \varDelta_2\geqslant 4(\alpha-1)^2(2F-1)^2 4[F(1-F)].$$

接下来可以得到:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\eta}{\partial F^2}=&B[\varDelta_1+\varDelta_2-4(\alpha-1)(2F-1)^{2\alpha-2}]\\ \geqslant&B[4(\alpha-1)-4(\alpha-1)(2F-1)^{2\alpha-2}\\ &+4(\alpha-1)^2(2F-1)^2 4F(1-F)]\\ \geqslant&0,\end{aligned} \tag{69}$$

对任意的 $\alpha\geqslant 2$ 都成立, 其中当且仅当 $F=1$ 时等号成立. 因此, 对 $F\in[1/2,1]$, $\eta(F,\alpha,2)$ 的二阶导数是非负的. 也就是说, 当 $\alpha\geqslant 2$ 时, $\eta(F,\alpha,2)$ 是 $F\in[1/2,1]$ 上的凸函数. 根据 $co(\eta(F,\alpha,d))$ 的定义, 可以得到 $co(\eta(F,\alpha,2))$ 的解析式. 双量子比特 isotropic 态 $\boldsymbol{\rho}_F$ 的 G_α 由下式给出:

$$G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_F)=\begin{cases}0, & 0\leqslant F\leqslant\dfrac{1}{2}.\\ -\log_2\left[\left(\sqrt{F}+\sqrt{1-F}\right)^{2\alpha}+\left(\sqrt{F}-\sqrt{1-F}\right)^{2\alpha}\right]+\alpha, & \dfrac{1}{2}\leqslant F\leqslant 1.\end{cases}\tag{70}$$

5 α-对数并发纠缠的单配性

本节建立了一个关于α-对数并发纠缠的单配性的数学表达式. 首先, 在双量子比特中建立并发纠缠与α-对数并发纠缠G_α之间的函数关系. 对双量子比特纯态$|\psi\rangle_{\rm AB}=\sqrt{\lambda_0}\,|00\rangle_{\rm AB}+\sqrt{\lambda_1}\,|11\rangle_{\rm AB}$, 得:

$$G_\alpha(|\psi\rangle_{\rm AB})=-\log_2(\lambda_0^\alpha+\lambda_1^\alpha).$$

对任意两体纯态$|\psi\rangle_{\rm AB}$, 并发纠缠$C(|\psi\rangle_{\rm AB})$可以写成:

$$C(|\psi\rangle_{\rm AB})=\sqrt{2\left(1-{\rm tr}\boldsymbol{\rho}_{\rm A}^2\right)}.$$

不难发现, $|\psi\rangle_{\rm AB}$的Schmit系数λ_0,λ_1, 即约化密度矩阵$\boldsymbol{\rho}_{\rm A}$的特征值与$C(|\psi\rangle_{\rm AB})$存在一一对应的关系. 这个关系为$\lambda_{0,1}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-C^2(|\psi\rangle_{\rm AB})}}{2}$. 通过上述方法, 可以定义双量子比特系统中并发纠缠与G_α之间关系的函数.

定义 5.1 对任意的$\alpha\geqslant 2$, $g_\alpha(x)$是$x\in[0,1]$上的可微函数, 使得

$$g_\alpha(x)=-\log_2\left[\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right)^\alpha+\left(\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{2}\right)^\alpha\right].\tag{71}$$

根据$g_\alpha(x)$, 可以写出下式:

$$G_\alpha(|\psi\rangle_{\rm AB})=g_\alpha(C(|\psi\rangle_{\rm AB})).\tag{72}$$

根据g_α的性质, 可以给出混合态$\boldsymbol{\rho}_{\rm AB}$的形式.

引理 5.1 对任意的$\alpha\geqslant 2$, g_α在$x\in[0,1]$上是一个单调递增的凸函数.

这个引理证明由文献[18]给出. 基于这个引理, 给出了关于混合态$\boldsymbol{\rho}_{\rm AB}$的如下定理.

定理 5.1 对任意的$\alpha\geqslant 2$, 当g_α是单调递增的凸函数时, 有

$$G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB})=g_\alpha(C(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB})),\tag{73}$$

对任意的双量子态$\boldsymbol{\rho}_{\rm AB}$.

证明 首先, 假设$\boldsymbol{\rho}_{\rm AB}=\sum_i p_i\,|\psi_i\rangle\,\langle\psi_i|$对于$G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB})$使得$G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB})=\sum_i p_iG_\alpha(|\psi_i\rangle_{\rm AB})$, 因此可以得到

$$\begin{aligned}G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB})&=\sum_i p_iG_\alpha(|\psi_i\rangle_{\rm AB})=\sum_i p_ig_\alpha(C\,|\psi_i\rangle_{\rm AB})\\&\geqslant g_\alpha\left(\sum_i p_iC(|\psi_i\rangle_{\rm AB})\right)\geqslant g_\alpha(C(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB})),\end{aligned}\tag{74}$$

式中第二个等式来自$G_\alpha(|\psi\rangle_{\rm AB})=g_\alpha(C(|\psi\rangle_{\rm AB}))$. 第一个不等式来自$g_\alpha$的凸性. 根据$g_\alpha$是单调递增函数以及$C(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB})$的定义, 可以得到第二个不等式. 设存在一个最优分解$\boldsymbol{\rho}_{\rm AB}=\sum_i p_i\,|\psi_i\rangle\,\langle\psi_i|$使得

$$C(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB})=\sum_i p_iC(|\psi_i\rangle_{\rm AB}),\tag{75}$$

$$C(|\psi_i\rangle_{\rm AB})=C(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB}).\tag{76}$$

对所有的i, 有

$$\begin{aligned}g_\alpha(C(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB}))&=g_\alpha\left(\sum_i p_iC(|\psi_i\rangle_{\rm AB})\right)\\&=\sum_i p_ig_\alpha\left(C(|\psi_i\rangle_{\rm AB})\right)\\&=\sum_i p_iG_\alpha(|\psi_i\rangle_{\rm AB})\\&\geqslant G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB}),\end{aligned}\tag{77}$$

式中第二个等式来自$C(|\psi_i\rangle_{\rm AB})=C(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB})$, 不等式来自$G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB})$的定义. 根据上述两个不等式, 可以得到:

$$G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB})=g_\alpha(C(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB})).\tag{78}$$

至此, 完成了证明.

CKW不等式是单配性不等式, 具体如下:

$$C^2(|\psi\rangle_{\rm A(BC)})\geqslant C^2(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB})+C^2(\boldsymbol{\rho}_{\rm AC}),\tag{79}$$

其中C是并发纠缠, $|\psi\rangle_{\rm A(BC)}$表示将ABC切分成两部分A和BC, $C(\boldsymbol{\rho}_{\rm AB})$和$C(\boldsymbol{\rho}_{\rm AC})$是约化密度矩阵$\boldsymbol{\rho}_{\rm AB}$和$\boldsymbol{\rho}_{\rm AC}$在子系统AB和AC上的并发纠缠.

引理 5.2 对于任意的$\alpha\geqslant 2$,

$$g_\alpha\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\geqslant g_\alpha(x)+g_\alpha(y),\tag{80}$$

其中$0\leqslant x,\ y\leqslant 1$, $0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$.

这个引理证明由文献[18]给出.

定理 5.2 对于$\alpha\geqslant 2$和任意的三体量子态$\boldsymbol{\rho}_{\rm A(BC)}$, 有关于$G_\alpha$单配性不等式:

$$G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{A(BC)}}) \geqslant G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}}) + G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AC}}). \quad (81)$$

证明 对于 $\alpha \geqslant 2$, 注意到, 对于 A 和 BC 的二分, $|\psi\rangle_{\mathrm{A(BC)}}$ 是 $2 \otimes 4$ 纯态. 由于 $g_\alpha(x)$ 单调递增的性质以及 CKW 不等式, 可以得到:

$$g_\alpha(C(|\psi\rangle_{\mathrm{A(BC)}})) \geqslant g_\alpha\left(\sqrt{C^2(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}}) + C^2(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AC}})}\right), \quad (82)$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}} = \mathrm{tr}_{\mathrm{C}}(|\psi\rangle_{\mathrm{ABC}}\langle\psi|)$, $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AC}} = \mathrm{tr}_{\mathrm{B}}(|\psi\rangle_{\mathrm{ABC}}\langle\psi|)$, 然后利用**引理 2** 中的不等式, 得到

$$g_\alpha\left(\sqrt{C^2(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}}) + C^2(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AC}})}\right) \geqslant g_\alpha(C(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}})) + g_\alpha(C(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AC}})). \quad (83)$$

将两个不等式结合起来得到:

$$g_\alpha(C(|\psi\rangle_{\mathrm{A(BC)}})) \geqslant g_\alpha(C(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}})) + g_\alpha(C(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AC}})). \quad (84)$$

根据 G_α 和并发纠缠的函数关系, (84) 式可以改写为

$$G_\alpha(|\psi\rangle_{\mathrm{A(BC)}}) \geqslant G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}}) + G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AC}}). \quad (85)$$

对于三量子比特混合态 $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{A(BC)}}$, 存在一个分解 $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{A(BC)}} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle_{\mathrm{A(BC)}}\langle\psi_i|$ 关于 $G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{A(BC)}})$ 使得 $G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{A(BC)}}) = \sum_i p_i G_\alpha(|\psi_i\rangle_{\mathrm{A(BC)}})$. 因此, 有:

$$\begin{aligned} G_\alpha(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{A(BC)}}) &= \sum_i p_i G_\alpha(|\psi_i\rangle_{\mathrm{A(BC)}}) \\ &\geqslant \sum_i p_i \left[G_\alpha\left(\boldsymbol{\rho}^i_{\mathrm{AB}}\right) + G_\alpha\left(\boldsymbol{\rho}^i_{\mathrm{AC}}\right)\right] \quad (86) \\ &= \sum_i p_i G_\alpha\left(\boldsymbol{\rho}^i_{\mathrm{AB}}\right) + \sum_i p_i G_\alpha\left(\boldsymbol{\rho}^i_{\mathrm{AC}}\right) \\ &\geqslant G_\alpha\left(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}}\right) + G_\alpha\left(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AC}}\right), \quad (87) \end{aligned}$$

式中最后一个不等式来自于 $G_\alpha(\boldsymbol{\rho})$ 的定义. 至此, 完成了证明.

6 结 论

本文研究了基于 Rényi-α 熵的参数化纠缠度量问题. 首先, 引入了 α-对数并发纠缠的概念, 其中 $\alpha \geqslant 2$; 然后, 证明了 α-对数并发纠缠是一个定义良好的纠缠度量, 得到了 α-对数并发纠缠的下界, 计算了 isotropic 态的 α-对数并发纠缠的表达式; 最后, 对该纠缠度量单配性问题进行了讨论. 参数化纠缠度量 α-对数并发纠缠给出了一族纠缠度量, 丰富了量子纠缠理论, 后续工作可以对参数 α 的范围进行讨论, 研究 $\alpha \in (0, 1)$ 时的情况.

参考文献

[1] Bennett C H, Wiesner S J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2881
[2] Bennett C H, Brassard G, Crepeau G, Jozsa R, Peres A, Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
[3] Hillery M, Buzek V, Berthiaume A 1999 *Phys. Rev. A* **59** 1829
[4] Gisin N, Ribordy G, Tittel W, Zbinden H 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 145
[5] Peres A 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1413
[6] Horodecki M, Horodecki P, Horodecki R 1996 *Phys. Lett. A* **223** 1
[7] Horodecki M, Horodecki P 1996 *Phys. Rev. A* **59** 4206
[8] Rudolph O 2005 *Quantum Inf. Process.* **4** 219
[9] Chen K, Wu L A 2003 *Quantum Inf. Comput.* **3** 193
[10] Hill S, Wootters W K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 5022
[11] Rungta P, Buzek V, Caves C M 2001 *Phys. Rev. A* **64** 042315
[12] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
[13] Zyczkowski K, Horodecki P, Sanpera A, Lewenstein M 1998 *Phys. Rev. A* **58** 883
[14] Vidal G, Werner R F 2002 *Phys. Rev. A* **65** 032314
[15] Bennett C H, DiVincenzo D P, Smolin J A, Wootters W K 1996 *Phys. Rev. A* **54** 3824
[16] Horodecki M 2001 *Quantum Inf. Comput.* **1** 3
[17] Gour G, Bandyopadhyay S, Sanders B C 2007 *J. Math. Phys.* **48** 012108
[18] Kim J S, Sanders B C 2010 *J. Phys. A* **43** 445305
[19] Kim J S 2010 *Phys. Rev. A* **81** 062328
[20] Simon C, Kempe J 2002 *Phys. Rev. A* **65** 052327
[21] Yang X, Luo M X, Yang Y H, Fei S M 2021 *Phys. Rev. A* **103** 052423
[22] Wei Z W, Luo M X, Yang Y H, Fei S M 2022 *Quantum Inf. Process.* **21** 210
[23] Wei Z W, Fei S M 2022 *J. Phys. A: Math. Theor.* **55** 275303
[24] Lee S, Chi D P, Oh S D, Kim J 2003 *Phys. Rev. A* **68** 062304
[25] Rungta P, Caves C M 2003 *Phys. Rev. A* **67** 012307
[26] Vollbrecht K G H, Werner R F 2001 *Phys. Rev. A* **64** 062307
[27] Terhal B M, Vollbrecht K G H 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2625
[28] Buchholz L E, Moroder T, Guhne O 2016 *Ann. Phys.* **528** 278
[29] Chen K, Albeverio S, Fei S M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 210501
[30] Chen K, Sergio A, Fei S M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 040504
[31] Liu L G, Tian C L, Chen P X, Yuan N C 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 060306
[32] Li M, Wang J, Shen S Q, Chen Z H, Fei S M 2018 *Sci. Rep.* **7** 17274
[33] Gour G, Sanders B C 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 260501
[34] Nielsen M A, Chuang I L 2010 *Quantum Computation and Quantum Information* (10th Ed.) (Cambridge: Cambridge University Press) pp109–111
[35] Vedral V, Plenio M B, Rippin M A, Knight P L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2275
[36] Vedral V, Plenio M B 1998 *Phys. Rev. A* **57** 1619
[37] Vidal G, Tarrach R 1999 *Phys. Rev. A* **59** 141
[38] Mintert F, Carvalho A, Kus M, Buchleitner A 2005 *Phys. Rep.* **415** 207
[39] Ando T 1989 *Linear Algebr. Appl.* **118** 163
[40] Bhatia R 1997 *Matrix Analysis* (New York: Springer-Verlag) pp40–47
[41] Manne K K, Caves C M 2008 *Quantum Inf. Comput.* **8** 295
[42] Wang Y X, Mu L Z, Vedral V, Fan H 2016 *Phys. Rev. A* **93**

Parameterized entanglement measures based on Rényi-α entropy*

Dai Wei-Peng He Kan † Hou Jin-Chuan

(*College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan* 030024, *China*)

(Received 15 September 2023; revised manuscript received 1 November 2023)

Abstract

Parameterized entanglement measures have demonstrated their superiority compared with kinds of unparameterized entanglement measures. Entanglement concurrence has been widely used to describe entanglement in quantum experiments. As an entanglement measure it is related to specific quantum Rényi-α entropy. In the work, we propose a parameterized bipartite entanglement measure based on the general Rényi-α entropy, which is named α-logarithmic concurrence. This measure, different from existing parameterized measures, is defined first for pure states, then extended to the mixed states. Furthermore, we verify three necessary conditions for α-logarithmic concurrence to satisfy the entanglement measures. We show that this measure is easy to calculate for pure states. However, for mixed states, analytical calculations are only suitable for special two-qubit states or special higher-dimensional mixed states. Therefore, we devote our efforts to developing the analytical lower bound of the-logarithmic concurrence for general bipartite states. Surprisingly, this lower bound is a function on positive partial transposition criterion and realignment criterion of this mixed state. This shows the connection among the three entanglement measures. The interesting feature is that the lower bound depends on the entropy parameter associated with the detailed state. This allows us to choose appropriate parameter α such that $G_\alpha(\boldsymbol{\rho}) \gg 0$ for experimental entanglement detection of specific state ρ. Moreover, we calculate expressions of the α-logarithmic concurrence for isotropic states, and give a the analytic expressions for isotropic states with $d=2$. Finally, the monogamy of the α-logarithmic concurrence is also discussed. We set up a mathematical formulation for the monogamous property in terms of α-logarithmic concurrence. Here we set up the functional relation between concurrence and α-logarithmic concurrence in two qubit systems. Then we obtain some useful properties of this function, and by combining the Coffman–Kundu–Wootters (CKW) inequality, we establish the monogamy inequality about α-logarithmic concurrence. We finally prove that the monogamy inequality holds true for α-logarithmic concurrence.

Keywords: parameterized measure, Rényi-α entropy, entanglement measure, concurrence

PACS: 03.67.–a, 03.67.Mn **DOI:** 10.7498/aps.73.20231503

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12271394, 12071336).

† Corresponding author. E-mail: hekanquantum@163.com

物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

基于Rényi-α熵的参数化纠缠度量

戴伟鹏 贺衎 侯晋川

Parameterized entanglement measures based on Rényi- α entropy

Dai Wei-Peng He Kan Hou Jin-Chuan

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 73, 040303 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20231503
在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.73.20231503
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn
